Notas de

Geometría local de curvas y superficies

Nota editorial.

Estos apuntes han sido redactados con inteligencia artificial a partir de múltiples materiales, bajo la dirección y revisión del autor. Pueden contener errores; ante cualquier discrepancia, manda el material oficial de la asignatura.

El temario sigue el proyecto docente de la asignatura *Geometría Local de Curvas y Superficies* del Grado en Matemáticas de la Universidad de Sevilla, y los exámenes resueltos proceden de sus convocatorias. Aun así, el contenido es el de un curso estándar de la materia y puede ser útil a estudiantes de otras universidades. Lo específico de cómo se imparte y se examina en Sevilla está reunido en el apéndice «Qué cae en el examen», que se puede saltar entero.

Versión de septiembre de 2026.

Índice general

1. Curvas regulares **1**

1.1. Curvas parametrizadas regulares: definición y primeras propiedades 1

1.1.1. Qué compra la diferenciabilidad 2

1.1.2. Qué compra la regularidad 3

1.2. Cambios regulares de parámetros. Parametrización natural 7

1.2.1. Longitud de arco 10

1.2.2. El parámetro natural 12

1.3. Vector tangente y recta tangente de una curva alabeada 18

1.3.1. Qué sobrevive a un cambio de parámetro 19

1.3.2. El sentido de recorrido 19

1.4. Curvatura de una curva alabeada 20

1.5. Ecuaciones de Frenet de una curva alabeada 28

1.5.1. Los tres vectores y los tres planos 29

1.5.2. El plano osculador es el plano límite 31

1.5.3. La torsión 34

1.5.4. Las ecuaciones de Frenet-Serret 37

1.5.5. La forma canónica local 39

1.5.6. El teorema fundamental de las curvas alabeadas 42

1.5.7. Fórmulas en un parámetro arbitrario 43

1.5.8. Qué sobrevive al cambio de parámetro, y qué pasa donde la curvatura se anula 47

1.6. Cinco curvas clásicas 97

1.6.1. La cicloide, o el rastro de un punto de la rueda 97

1.6.2. La epicicloide, o el rastro de una rueda que gira sobre otra 99

1.6.3. La tractriz, o el rastro de algo que se arrastra 100

1.6.4. La cisoide de Diocles, o duplicar el cubo 101

1.6.5. La bruja de Agnesi 102

Repaso del capítulo 103

2. Superficies regulares **106**
2.1. La definición de superficie . . . 106
2.1.1. Superficies parametrizadas . . . 108
2.1.2. Superficies regulares . . . 113
2.1.3. El criterio práctico y el cambio de cartas . . . 118
2.2. Construcción de superficies de nivel . . . 122
2.3. Dos familias de superficies destacadas: superficies de revolución y regladas 127
2.3.1. Superficies de revolución . . . 128
2.3.2. Superficies regladas . . . 130
2.4. Plano tangente y vector normal a una superficie regular . . . 147
2.4.1. Qué es de verdad el plano tangente . . . 148
2.5. Orientación de superficies . . . 155
Repaso del capítulo . . . 164

3. Geometría intrínseca **166**
3.1. La primera forma fundamental . . . 167
3.1.1. Las ecuaciones de Gauss . . . 170
3.2. Medidas en una superficie . . . 182
3.2.1. Longitud . . . 182
3.2.2. Ángulo . . . 183
3.2.3. Área . . . 184
3.3. Curvatura geodésica . . . 187
3.4. Derivada covariante. Paralelismo . . . 198
3.5. Geodésicas . . . 213
Repaso del capítulo . . . 236

4. Geometría extrínseca **238**
4.1. Algunos preliminares sobre aplicaciones diferenciables entre superficies regulares . . . 239
4.2. La aplicación de Gauss . . . 241
4.2.1. La diferencial de la aplicación de Gauss . . . 243
4.3. El endomorfismo de Weingarten . . . 244
4.4. La segunda forma fundamental . . . 247
4.4.1. Puntos umbílicos . . . 251
4.4.2. Curvaturas media y de Gauss. Teorema egregio . . . 254
4.5. Líneas de curvatura y líneas asintóticas . . . 261
4.5.1. Líneas de curvatura . . . 261
4.5.2. Líneas asintóticas . . . 265
4.5.3. Superficies regladas y desarrollables . . . 266
4.5.4. Las superficies de revolución, de una vez por todas . . . 269
4.5.5. Las tres condiciones, juntas . . . 272
4.5.6. Superficies tangentes a lo largo de una curva . . . 277
Repaso del capítulo . . . 301

A. Ideas intuitivas de las demostraciones **303**
A.1. Curvas . . . 303
A.2. Superficies . . . 305
A.3. Geometría intrínseca . . . 307
A.4. Geometría extrínseca . . . 308

B. Añadidos y omisiones **311**

C. Qué cae en el examen **314**
C.1. Cómo se examina . . . 314
C.2. Por capítulos . . . 315

D. Exámenes resueltos **317**
D.1. Primera convocatoria de 2026 . . . 317
D.2. Segunda convocatoria de 2026 . . . 322
D.3. Primera convocatoria de 2025 . . . 326
D.4. Segunda convocatoria de 2025 . . . 330
D.5. Primera convocatoria de 2024 . . . 337
D.6. Segunda convocatoria de 2024 . . . 342
D.7. Segunda convocatoria de 2023 . . . 346
D.8. Primera convocatoria de 2022 . . . 349
D.9. Tercera convocatoria de 2021 . . . 350

E. Cómo usar este libro **353**

CAPÍTULO 1

Curvas regulares

ANTES DE LEER

Intenta estas cuatro preguntas antes de leer. No hace falta saber responderlas todavía: sirven para reconocer qué problema resuelve cada parte del capítulo. Después, vuelve a ellas y contrasta tu respuesta con el texto.

1. Una circunferencia se puede recorrer despacio o deprisa. ¿Qué propiedades del objeto «circunferencia» deberían ser las mismas en los dos casos y cuáles no?
2. Si te dan una aplicación $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ derivable, ¿qué puede salir mal para que su imagen no se parezca en nada a lo que uno llamaría una curva?
3. ¿Qué mide exactamente la curvatura? Da una definición que no use la palabra «doblarse».
4. En el espacio, además de doblarse, una curva puede escaparse del plano. ¿Cómo medirías ese escape con un número?

Las respuestas están, respectivamente, en las secciones 1.2, 1.1, 1.4 y en la parte de torsión de la sección 1.5.

1.1 Curvas parametrizadas regulares: definición y primeras propiedades

LA PREGUNTA

Durante dos mil años una curva fue un *conjunto de puntos*: la circunferencia era el lugar de los que están a distancia fija de otro, y con esa idea se hizo toda la geometría griega. Para derivar hace falta otra cosa muy distinta, un *recorrido* con un reloj que diga dónde se está en cada instante. ¿Qué se pierde al cambiar el conjunto por el recorrido, y por qué compensa perderlo?

LA IDEA: EL OBJETO Y EL RECORRIDO

Hay dos cosas distintas que en el lenguaje corriente se llaman igual. Una es el *trazo*: el conjunto de puntos del espacio que forman una circunferencia, una hélice o una recta. La otra es el *recorrido*: la instrucción concreta que dice dónde está uno en cada instante. Toda la primera mitad de esta lección consiste en montar un aparato que trabaje con recorridos, porque son los que se pueden derivar, y después separar cuidadosamente qué resultados hablan del recorrido y cuáles hablan del trazo. Los segundos son los que interesan de verdad, y se llamarán *invariantes geométricos*.

Definición. Una **curva parametrizada regular** (c.p.r.) en $\mathbb{R}^m$ es una aplicación

$$\alpha : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad t \longmapsto \alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t)),$$

que cumple dos condiciones:
1. $\alpha \in C^{k)}$ con $k \geq 1$ (condición de diferenciabilidad);
2. $\alpha'(t) = \dfrac{d\alpha}{dt} \neq 0$ para todo $t \in (a,b)$ (condición de regularidad, C.R.).

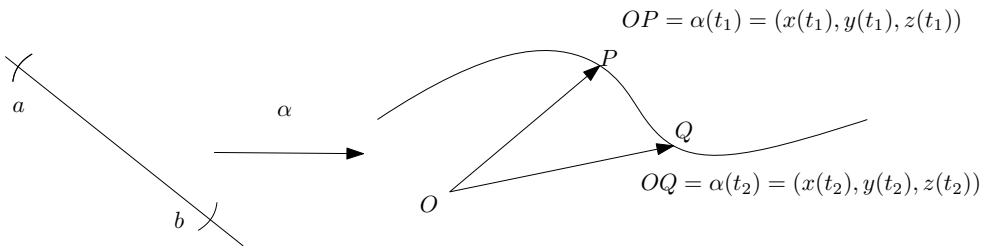


Figura 1.1: La parametrización α lleva cada valor t del intervalo a un punto de la curva. Su vector de posición se dibuja desde el origen; el trazo es la imagen de la aplicación. Figura del material oficial, lección 1, p. 2.

Conviene desarmar la definición antes de usarla, porque cada una de las dos condiciones está comprando una cosa concreta y distinta.

1.1.1 Qué compra la diferenciabilidad

La primera condición es la que permite derivar, y punto. Lo interesante es *cuántas* veces hace falta poder hacerlo. La respuesta es $k = 3$, y se puede justificar ahora mismo aunque todavía no se hayan definido los objetos:

- la primera derivada da el vector tangente;
- la segunda da la curvatura, que mide cuánto se dobla la curva;
- la tercera da la torsión, que mide cuánto se sale del plano.

Por eso $k = 3$ **basta para definir la curvatura y la torsión** donde la curvatura no se anula. Derivadas superiores permiten estudiar cómo varían esos invariantes y el contacto de orden superior; se pedirán cuando hagan falta. No son necesarias para construir el triedro de Frenet y sus ecuaciones.

Si $m = 2$ se habla de *curvas planas* y si $m = 3$ de *curvas alabeadas*. A partir de la sección 1.4 se trabajará solo con curvas alabeadas, aunque casi todo se generaliza a $\mathbb{R}^m$.

Ejemplo. Una c.p.r. puede ser de clase 1 y no de clase 2. Sea

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t,\ +\sqrt{1-t^2},\ 0) & \text{si } -1 < t < 0, \\ (t,\ 1,\ 0) & \text{si } 0 \le t < 1. \end{cases}$$

Es un cuarto de circunferencia empalmado con un segmento horizontal. En $t = 0$ las dos piezas encajan en posición y en velocidad, así que α es de clase 1; pero la aceleración salta de golpe de un valor no nulo (el arco está doblando) a cero (el segmento no dobla), y por eso no es de clase 2.

Este ejemplo es el que hay que tener en la cabeza cuando alguien afirme que la curvatura de una curva de clase 1 está definida. No lo está.

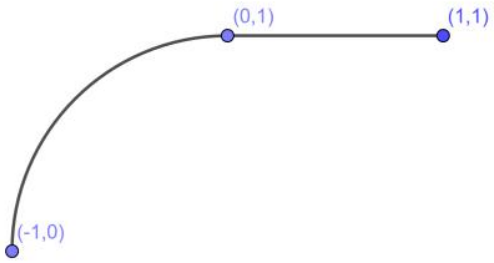


Figura 1.2: El arco y el segmento se unen en $(0,1)$ con la misma tangente horizontal, pero distinta curvatura: el empalme es de clase C^1, no C^2. Los puntos marcados en $(-1,0)$ y $(1,1)$ indican los extremos límite, excluidos del dominio $(-1,1)$. Figura del material oficial, lección 1, p. 3.

1.1.2 Qué compra la regularidad

La segunda condición es la de verdad importante, y su motivo no es técnico sino geométrico. Si α' se anula, la parametrización se detiene, y una parametrización detenida puede hacer cosas que un trazo razonable no hace.

Un punto t_0 con $\alpha'(t_0) = 0$ se llama **punto singular**. Hay dos formas muy distintas de que aparezca uno, y la diferencia es la clave del asunto:

- **Singularidad no esencial:** el fallo está en la aplicación, no en el trazo. La curva $\alpha_2(t) = (t^3, 0, 0)$ recorre el eje OX entero, que es una recta perfectamente decente, pero se para un instante en $t = 0$. El trazo no tiene nada de malo; lo que está mal es cómo se recorre.
- **Singularidad esencial:** el fallo está en el trazo. Una cúspide, un pico, un punto de retroceso: ahí no hay forma de recorrer el conjunto con velocidad no nula.

Ejemplo (la cúspide: una singularidad que ningún reloj arregla)**.** Sea $\beta(t) = (t^2, t^3, 0)$, $t \in \mathbb{R}$. Su velocidad $\beta'(t) = (2t, 3t^2, 0)$ se anula en $t = 0$, y el trazo, que es la curva $y^2 = x^3$ del plano $z = 0$, tiene ahí un pico. Sus dos ramas, $y = x^{3/2}$ e $y = -x^{3/2}$ con $x \ge 0$, llegan al origen por el mismo lado, las dos pegadas al semieje positivo OX.

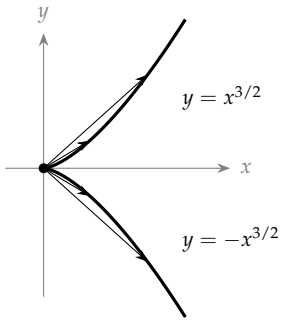
Aquí el fallo no es del reloj: *ninguna* c.p.r. recorre ese trazo. La razón se ve con cuerdas, sin más herramienta que la definición de derivada. Supóngase que γ fuera una c.p.r. con imagen en el trazo y $\gamma(u_0) = (0,0,0)$. Entonces

$$\frac{\gamma(u) - \gamma(u_0)}{u - u_0} \longrightarrow \gamma'(u_0) \neq 0 \qquad (u \to u_0),$$

y eso obliga a que $\gamma(u) \neq \gamma(u_0)$ para u cerca de u_0 y a que la cuerda normalizada, $\big(\gamma(u) - \gamma(u_0)\big)/|\gamma(u) - \gamma(u_0)|$, tienda a $\gamma'(u_0)/|\gamma'(u_0)|$ cuando $u > u_0$ y a su opuesto cuando $u < u_0$, porque entonces el denominador $u - u_0$ es negativo. *Un recorrido regular llega a cada punto desde una dirección y sale por la opuesta.* En el pico ocurre lo contrario: la cuerda que va del origen a un punto $(x, \pm x^{3/2}, 0)$ de cualquiera de las dos ramas tiene dirección

$$\frac{(x,\ \pm x^{3/2},\ 0)}{\sqrt{x^2 + x^3}} = \frac{(1,\ \pm\sqrt{x},\ 0)}{\sqrt{1+x}} \longrightarrow (1,0,0) \qquad (x \to 0^+).$$

Todas las cuerdas cortas salen del pico hacia el mismo lado. Los dos límites de γ tendrían que ser $(1,0,0)$ y a la vez opuestos entre sí, y eso es imposible. Luego ningún recorrido regular pasa por el pico.



Compárese con $\alpha_2(t) = (t^3, 0, 0)$, que también se para en $t = 0$. Allí las cuerdas hacia los puntos de parámetro negativo apuntan a $(-1,0,0)$ y las de parámetro positivo a $(1,0,0)$: son opuestas, como en cualquier recorrido regular, porque el trazo es una recta y el fallo era solo del reloj. Esa es la prueba que distingue los dos tipos de singularidad: si desde el punto las dos ramas se ven en direcciones que no son opuestas, ningún cambio de parámetro la arregla. La misma cúspide reaparecerá en la cicloide (sección 1.6), en cada instante en que el punto de la rueda toca el suelo.

LA IDEA: POR QUÉ LA REGULARIDAD ES EXACTAMENTE LA HIPÓTESIS CORRECTA

La regularidad garantiza que, restringiendo el intervalo alrededor de cada parámetro, *el recorrido no se pise y tenga una tangente no nula*. En particular, esa restricción es un homeomorfismo sobre su imagen. Es una consecuencia, no una equivalencia: $t \mapsto (t^3, 0, 0)$ también es un homeomorfismo sobre el eje, aunque su derivada se anule en cero. El teorema de la función inversa es el que nos permite deducir la propiedad a partir de $\alpha' \neq 0$.

El mecanismo de la prueba cabe en una imagen: la sombra. Que $\alpha'(t_0)$ no sea el vector nulo quiere decir que *alguna* de sus tres componentes no se anula. Se elige esa componente y se mira solo la sombra de la curva sobre el eje correspondiente. Esa sombra viaja con velocidad no nula, luego avanza siempre en el mismo sentido: es estrictamente monótona y, por tanto, no se pisa a sí misma. Y si la sombra no se pisa, el objeto que la proyecta tampoco puede pisarse. Toda la demostración consiste en decir eso con precisión.

Teorema (de la función inversa)**.** Sea $f : S \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de clase $C^{1)}$, con S abierto, y sea $x \in S$ con determinante jacobiano $J_f(x) \neq 0$. Existen abiertos $U \subseteq S$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$, con $x \in U$ y

$f(x) \in V$, tales que la restricción $f|_U : U \to V$ es biyectiva y su inversa es de clase $C^{1)}$. Si f es de clase $C^{k)}$, su inversa local también lo es.

CONEXIÓN: DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Este es el teorema de la función inversa de Diferenciación de Funciones de Varias Variables. Lo único que hace la geometría diferencial es aplicarlo en el caso más pequeño posible, $m = 1$, donde el jacobiano es una sola derivada y la hipótesis $J_f \neq 0$ se reduce a $x_i'(t_0) \neq 0$.
Merece la pena notar el patrón, porque se repetirá durante toda la asignatura: casi todos los teoremas de existencia local en geometría diferencial son el teorema de la función inversa o el de la función implícita disfrazados. Cuando en la lección de superficies aparezca «toda superficie es localmente una gráfica», será otra vez esto.

Proposición. Toda c.p.r. es, localmente, un homeomorfismo sobre su imagen. En particular, es localmente inyectiva.

Paso 1: elegir el eje sobre el que proyectar. Sea $t_0 \in (a, b)$. Por la condición de regularidad, $\alpha'(t_0) \neq 0$, luego alguna de sus componentes no se anula: existe un índice i con $x_i'(t_0) \neq 0$. Ese índice señala el eje sobre el que la sombra de la curva se mueve de verdad, y es el único dato que se le pide a la hipótesis.
Paso 2: la sombra es inyectiva (el núcleo de la prueba). Aplicamos el teorema de la función inversa a la función de una variable $x_i : (a, b) \to \mathbb{R}$, es decir, con $m = 1$ y $S = (a, b)$. La hipótesis del jacobiano no nulo es aquí exactamente $x_i'(t_0) \neq 0$, que es lo que acabamos de conseguir. El teorema da entonces un $\varepsilon > 0$ tal que x_i es biyectiva sobre $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subseteq (a, b)$, con inversa de la misma clase que x_i. Aquí está todo el peso: una *sola* coordenada, que es una función de variable real, ya separa los parámetros del intervalo.
Paso 3: subir la conclusión de la sombra a la curva. Ahora bien, x_i es la composición de α con la proyección i-ésima, que es continua. Que x_i sea inyectiva con inversa continua en ese intervalo obliga a que α lo sea también: dos parámetros distintos del intervalo no pueden dar el mismo punto, porque ya difieren en la coordenada i-ésima. Y la inversa de α sobre su imagen es continua porque se factoriza a través de la inversa continua de x_i. Luego α es un homeomorfismo local sobre su imagen. ■

Qué hizo cada hipótesis. La *regularidad* actúa una sola vez, en el paso 1, y solo para garantizar que existe un eje con sombra no degenerada; sin ella todas las sombras pueden pararse a la vez y el argumento no arranca, como le ocurre a $\alpha_2(t) = (t^3, 0, 0)$ en $t = 0$. La *diferenciabilidad de clase* $C^{1)}$ actúa en el paso 2, porque el teorema de la función inversa pide derivada continua: con derivada existente pero discontinua, «no anularse en un punto» ya no implica «no anularse en un entorno» y la monotonía local se pierde. Y obsérvese lo que *no* se ha usado en ningún sitio: que la curva viva en $\mathbb{R}^3$. El mismo argumento vale palabra por palabra en $\mathbb{R}^m$.

EXPLÍCATE. *Vuelve a la demostración y localiza el punto exacto en que la hipótesis de regularidad entra, y el punto exacto en que entra la de diferenciabilidad, antes de leer el párrafo anterior otra vez.*

CONEXIÓN: TOPOLOGÍA

«Homeomorfismo sobre su imagen» es la condición de Topología, con la topología inducida en el conjunto imagen. Es una exigencia más fuerte que la mera inyectividad: pide además que la inversa sea continua, es decir, que puntos próximos *sobre la curva* vengan de parámetros próximos. Una curva puede ser inyectiva y fallar esto globalmente; el clásico es la curva que se acerca asintóticamente a un punto por el que ya ha pasado. Por eso el enunciado es *local* y no global.

Observación. Si α cumple la condición de diferenciabilidad, es decir $\alpha \in C^{k)}$ con $k \geq 1$, pero no la de regularidad, y no es constante, siempre hay algún t_0 con $\alpha'(t_0) \neq 0$. Como α es en particular de clase $C^{1)}$, su derivada es continua y por eso no se anula en todo un entorno de t_0. Así que se puede seguir trabajando restringiendo α a esos intervalos: se estudian «pedacitos» regulares. Nada de la teoría local se pierde por exigir la condición de regularidad.

La hipótesis de clase $C^{1)}$ es imprescindible justo en el paso de la continuidad. Si de α solo se supiera que es derivable, la conclusión sería falsa: una derivada discontinua puede anularse en un conjunto denso sin anularse en todas partes, y entonces ningún entorno de t_0 quedaría libre de puntos singulares. Es el mismo fenómeno que reaparece en el primer ejercicio de esta sección.

DE DÓNDE VIENE: CÓMO NACIERON LAS CURVAS ALABEADAS

Hasta el siglo XVIII las curvas eran, esencialmente, planas. El estudio sistemático de las curvas del espacio empieza con Alexis Claude Clairaut, que en 1731 publica sus *Recherches sur les courbes à double courbure*. Había presentado la memoria a la Academia de Ciencias dos años antes, con dieciséis años.
El título es toda una declaración: «curvas de doble curvatura». Clairaut ya había visto que una curva del espacio necesita *dos* números para describirse localmente, no uno. Se tardaría casi un siglo en identificar limpiamente cuáles son esos dos números y en demostrar que bastan; lo que se verá al final de esta lección, con el nombre de teorema fundamental de las curvas alabeadas, es el remate de esa historia.

Ejercicios de esta sección

Ejercicio 1.1. *Los puntos singulares no pueden estar por todas partes*

Sea $\alpha : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una aplicación no constante de clase al menos 1. Probar que el conjunto $Z = \{t \in (a,b) \ : \ \alpha'(t) = 0\}$ no puede ser denso en (a,b).

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *¿Qué significa exactamente que Z sea denso? Escríbelo con sucesiones.*
2. *La hipótesis «de clase al menos 1» dice que α' es continua. ¿Qué hace una función continua con una sucesión convergente?*
3. *Si consigues que α' se anule en* todo *(a,b), ya has terminado. ¿Por qué?*

Resolución. Supóngase, por reducción al absurdo, que Z es denso en (a,b). Sea $t \in (a,b)$ arbitrario. Por densidad, existe una sucesión $(t_n) \subseteq Z$ con $t_n \to t$.

Como α es de clase al menos 1, su derivada α' es continua, luego

$$\alpha'(t) = \lim_{n\to\infty} \alpha'(t_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Como t era arbitrario, $\alpha' \equiv 0$ en todo (a, b). Ahora bien, (a, b) es un intervalo, y una función con derivada idénticamente nula en un intervalo es constante en él. Luego α es constante, en contra de la hipótesis. ■

Otra vía (topológica). Se puede evitar por completo el trabajo con sucesiones subiendo un nivel de abstracción.

El conjunto Z es la preimagen del cerrado $\{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ por la aplicación continua α', luego Z es cerrado en (a, b). Y un conjunto que es a la vez cerrado y denso en un espacio topológico es todo el espacio, porque $Z = \overline{Z} = (a, b)$. A partir de ahí se repite el final de la primera vía: α' se anula en todo (a, b), luego α es constante en el intervalo, en contra de la hipótesis. ■

QUÉ DEJA. Dos cosas. La primera, que la continuidad de la derivada convierte «denso» en «todo»: es el mecanismo por el que una hipótesis puntual se propaga a un conjunto entero. La segunda, que la hipótesis de clase $C^{1)}$ no es decorativa; sin ella el argumento se cae, porque una derivada discontinua puede anularse en un denso sin anularse en todas partes. Guarda la versión topológica: «cerrado y denso implica total» resuelve varios problemas de esta asignatura en una línea.

1.2 Cambios regulares de parámetros. Parametrización natural

LA PREGUNTA

Un cuentakilómetros no sabe nada de relojes: marca lo que se ha andado, no el tiempo que se ha tardado, y por eso dos coches que hagan la misma carretera a velocidades distintas marcan lo mismo al llegar. Esa es exactamente la magnitud que una curva lleva consigo sin que nadie se la imponga. ¿Se puede usar el propio camino recorrido como reloj, y qué gana quien lo hace?

El mismo conjunto de puntos admite muchas parametrizaciones, y no todas son regulares. El ejemplo mínimo, con el eje OX en $\mathbb{R}^3$:

$$\alpha_1(t) = (t, 0, 0), \qquad \alpha_2(t) = (t^3, 0, 0), \qquad \alpha_3(t) = (t^3 + t, 0, 0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Las tres tienen la misma imagen. La primera y la tercera son regulares; la segunda no, porque $\alpha_2'(0) = 0$. La pregunta natural es cuándo un cambio de parámetro conserva la regularidad.

Definición. Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una c.p.r.. Una **reparametrización regular** o **cambio de parámetros regular** de α es una función biyectiva y de clase $C^{k)}$, $k \geq 1$,

$$f : (c, d) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow (a, b), \qquad r \longmapsto f(r) = t,$$

tal que $\dfrac{df}{dr} = \dfrac{dt}{dr} \neq 0$ en todo (c, d).

Toda reparametrización regular es un difeomorfismo, y por tanto un homeomorfismo. La curva $\beta = \alpha \circ f$ tiene la misma imagen que α y sigue siendo regular, porque por la regla de la cadena

$$\beta'(r) = \frac{d\beta}{dr} = \frac{d\alpha}{dt}\,\frac{dt}{dr} = \alpha'(t)\,\frac{df}{dr} \neq 0. \tag{1.1}$$

La igualdad (1.1) es la fórmula más usada de toda la lección. Conviene leerla despacio: *un cambio de parámetro reescala el vector velocidad por un factor no nulo, y no hace nada más*. Todo lo que sobreviva a multiplicar por un escalar no nulo sobrevive a un cambio de parámetro.

Ejemplo. Volviendo al eje OX: $f(r) = r^3$ no es cambio de parámetro regular de α_1 en $\mathbb{R}$, porque $f'(0) = 0$; pero $g(r) = r^3 + r$ sí lo es, porque $g'(r) = 3r^2 + 1 > 0$ siempre.

Definición. Dos c.p.r. $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ y $\beta : (c, d) \to \mathbb{R}^3$ se dicen **equivalentes** si existe una reparametrización regular f con $\beta = \alpha \circ f$. Es una relación de equivalencia. Una **curva regular** en $\mathbb{R}^3$ es una clase de equivalencia de esta relación.

LA IDEA: POR QUÉ DEFINIR LA CURVA COMO UNA CLASE

Esta definición parece un tecnicismo y es justo lo contrario: es el núcleo conceptual de la lección. La clase conserva el trayecto y olvida el reloj con que se recorre. No conserva solo el conjunto imagen: dos recorridos que dan distinto número de vueltas pueden tener la misma imagen sin ser equivalentes. Esa distinción aparecerá en el ejercicio sobre curvas con la misma imagen.
A partir de aquí, cada vez que se define algo con una parametrización concreta hay una obligación automática: comprobar si el resultado depende de la parametrización elegida y de la referencia cartesiana ortonormal de $\mathbb{R}^3$ elegida. Si no depende de ninguna de las dos cosas, se llama **invariante geométrico** y pertenece de verdad a la curva. Si depende, es un artefacto del recorrido o del observador.
La longitud, por ejemplo, no cambia al trasladar o girar la referencia, porque las matrices ortogonales conservan el módulo. Un cambio de coordenadas general requiere transformar también la métrica; no basta con conservar la suma de cuadrados de las nuevas componentes. Para los invariantes con signo, como la torsión, habrá que atender además a la orientación de la referencia.
Guarda esta pregunta y hazla en cada definición que venga: es la que decide si lo definido pertenece a la curva o solo al recorrido, y es el hilo que organiza la lección entera. No suele aparecer formulada así, pero está debajo de casi todos los problemas: cuando se pide estudiar si el parámetro natural de una curva sigue siéndolo de otra construida a partir de ella, esta es la pregunta que se está haciendo.

Proposición (toda curva es localmente una gráfica)**.** Si $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, es una c.p.r., entonces localmente α puede reparametrizarse regularmente por una de sus coordenadas x_i.

LA IDEA: CAMBIAR EL RELOJ POR UNA REGLA

El resultado anterior decía que la sombra sobre un eje bien elegido no se pisa. Este da el paso siguiente y lo convierte en una reparametrización: si la sombra recorre el eje sin volver atrás, entonces *la propia sombra sirve de parámetro*. En vez de decir «dónde está la curva en el instante t», se dice «dónde está la curva cuando su sombra va por $x_1 = r$».
La imagen: se tira el cronómetro y se usa una regla clavada en el eje. Cada marca de la regla corresponde a un punto y solo a uno del trozo de curva, así que la curva queda descrita como «a la altura r estoy a $\beta_2(r)$ de un lado y a $\beta_3(r)$ del otro». Eso

es exactamente ser una gráfica. Y explica por qué el enunciado tiene que ser local: la regla mide bien mientras la sombra no dé la vuelta, y en una circunferencia la sombra da la vuelta enseguida.

Paso 1: elegir la coordenada que servirá de regla. Por regularidad, $\alpha'(t) \neq 0$ para todo t, luego dado t_0 alguna componente no se anula; sin pérdida de generalidad, $x_1'(t_0) \neq 0$.
Paso 2: invertir el reloj en función de la regla (el núcleo de la prueba). El teorema de la función inversa da un $\varepsilon > 0$ tal que x_1 es biyectiva en $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, con inversa x_1^{-1} de la misma clase y derivada no nula. Esa inversa

$$x_1^{-1} : x_1\big((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)\big) \longrightarrow (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon), \qquad x_1^{-1}(r) = t,$$

es un cambio de parámetro regular: dice qué instante corresponde a cada marca de la regla. Este es el paso que carga con todo; los otros dos solo lo preparan y lo leen.
Paso 3: reparametrizar y leer el resultado. Con ese cambio,

$$\beta(r) = \alpha \circ x_1^{-1}(r) = \big(x_1(x_1^{-1}(r)),\, x_2(x_1^{-1}(r)),\, x_3(x_1^{-1}(r))\big) = (r,\, \beta_2(r),\, \beta_3(r)),$$

es decir, el parámetro pasa a ser la primera coordenada. La reparametrización es solo local: la imagen del intervalo por x_1^{-1} no tiene por qué ser todo (a, b). ■

Qué hizo cada hipótesis. La regularidad se usa únicamente para poder elegir la coordenada del paso 1; quitada, puede no haber ninguna coordenada con inversa diferenciable. Por ejemplo, en la cúspide $\alpha(t) = (t^2, t^3, 0)$, t^2 no es inyectiva alrededor de cero y la inversa de t^3 no es diferenciable en cero. Y la palabra «localmente» no es una prudencia retórica: es lo único que puede probarse, porque la inversión del paso 2 solo está garantizada en el entorno que devuelve el teorema de la función inversa.

LA IDEA: QUÉ DICE DE VERDAD ESTE RESULTADO

Dice que, de cerca, cualquier curva del espacio es la gráfica de dos funciones de una variable: $y = \beta_2(x)$ y $z = \beta_3(x)$. La descripción local es sencilla, pero esas dos funciones pueden tener curvaturas y torsiones muy distintas. Ser un grafo elimina la dificultad de elegir parámetros; no elimina la geometría local.
Este mismo enunciado reaparecerá en superficies con otra cara: toda superficie regular es, localmente, la gráfica de una función de dos variables. Y la demostración será otra vez el teorema de la función inversa.

1.2.1 Longitud de arco

Definición. Un **segmento de c.p.r.** o **arco regular** es una aplicación $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ tal que existe un intervalo abierto $(\tilde{a},\tilde{b})$ que contiene a $[a,b]$ y una c.p.r. $\tilde{\alpha} : (\tilde{a},\tilde{b}) \to \mathbb{R}^3$ con $\alpha = \tilde{\alpha}|_{[a,b]}$. Su **longitud** es

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{\alpha'(t)\cdot\alpha'(t)}\,dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i'^2(t)}\,dt.$$

El rodeo de definir el arco como restricción de una c.p.r. definida en un abierto mayor no es un capricho: es lo que permite hablar de $\alpha'(a)$ y $\alpha'(b)$ en los extremos, donde la derivada de una función definida solo en $[a,b]$ sería unilateral.

Proposición. La longitud de un segmento de c.p.r. no depende de la parametrización regular elegida.

LA IDEA: EL CUENTAKILÓMETROS NO SABE A QUÉ VELOCIDAD SE HA IDO

Antes de la cuenta, la imagen que la predice. Recorrer la curva es conducir por una carretera; la parametrización es el pedal, y $|\alpha'(t)|$ es lo que marca el velocímetro. Cambiar de parametrización es conducir el mismo trayecto acelerando aquí y frenando allá. El cuentakilómetros, en cambio, marca lo mismo al final: los kilómetros son de la carretera, no del conductor.
La cuenta no hace más que traducir eso. Un cambio de parámetro multiplica la velocidad por el factor dt/dr, que es cuánto se ha acelerado; la integral, al cambiar de variable, se come exactamente ese factor y devuelve el mismo número.
Y aquí está la única sutileza del asunto, que es la que obliga a partir la demostración en dos: recorrer la carretera hacia atrás también es un cambio de parámetro regular, y entonces dt/dr es negativo. Pero el cuentakilómetros no resta al ir marcha atrás, porque en la definición de longitud hay un módulo. Ese módulo produce un signo menos, y el otro signo menos lo produce el hecho de que los límites de integración se den la vuelta. Los dos se cancelan. La longitud no distingue el sentido de recorrido, aunque sí cuenta cuántas veces se pasa por cada tramo.

Paso 1: poner en paralelo las dos parametrizaciones. Sean $\tilde{\alpha}$ una c.p.r. y $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ un arco suyo. Sea $f : (\tilde{c},\tilde{d}) \to (\tilde{a},\tilde{b})$ un cambio de parámetro regular, $\tilde{\beta} = \tilde{\alpha} \circ f$, y sean $[c,d] = f^{-1}([a,b])$ y $\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ el arco correspondiente. Hay que ver que $L_c^d(\beta) = L_a^b(\alpha)$.
Paso 2: la regla de la cadena, y la observación de signo constante. Por (1.1), $\beta'(r) = \alpha'(t)\frac{dt}{dr}$, luego $|\beta'(r)| = |\alpha'(t)|\left|\frac{dt}{dr}\right|$. Como f es un cambio regular, f' es continua y no se anula, así que $\frac{dt}{dr}$ tiene signo constante en $[c,d]$. Se separan los dos casos, que son «se recorre en el mismo sentido» y «se recorre al revés»:
Paso 3, caso directo: el factor se absorbe en el cambio de variable. *Si* $\frac{dt}{dr} > 0$, entonces f es creciente, $f(c) = a$ y $f(d) = b$. Además $|\beta'(r)|\,dr = |\alpha'(t)|\,\frac{dt}{dr}\,dr = |\alpha'(t)|\,dt$ y, cambiando de variable en la integral,

$$\int_c^d |\beta'(r)|\,dr = \int_a^b |\alpha'(t)|\,dt.$$

Paso 4, caso inverso: los dos signos negativos se cancelan (el núcleo de la prueba). *Si* $\frac{dt}{dr} < 0$, entonces f es decreciente, $f(c) = b$ y $f(d) = a$. Ahora $|\beta'(r)|\,dr = -|\alpha'(t)|\,dt$, y los límites de integración quedan invertidos, con lo que los dos signos se cancelan:

$$\int_c^d |\beta'(r)|\,dr = -\int_b^a |\alpha'(t)|\,dt = \int_a^b |\alpha'(t)|\,dt. \blacksquare$$

Qué hizo cada hipótesis. La biyectividad empareja los dos trayectos completos; la regularidad permite cambiar de variable, y el signo constante de f' distingue los dos sentidos. Si se admitiera un cambio que va y vuelve, la integral contaría las pasadas repetidas. El módulo evita que ir hacia atrás reste longitud: integrar el vector velocidad sin tomar su módulo daría el desplazamiento entre los extremos, que puede ser cero aunque se haya recorrido una circunferencia.

EXPLÍCATE. *El valor absoluto de la definición de longitud es lo que obliga a separar los dos casos. Explica, sin mirar, por qué en el caso decreciente aparecen dos signos negativos y por qué se cancelan. Si esto no sale, la invariancia no está entendida.*

LA IDEA: QUÉ ACABAMOS DE CONSEGUIR

Este es el primer invariante geométrico de la asignatura, y no es uno cualquiera: es el que permite construir el parámetro canónico de una curva. La longitud es una propiedad del trayecto con sus posibles repeticiones, independiente de la velocidad, y por tanto se puede usar como regla de medir sobre la propia curva.

1.2.2 El parámetro natural

Dada una c.p.r. $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ y un punto $t_0 \in (a, b)$, se define

$$s : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(\sigma)|\, d\sigma.$$

Esta función mide la longitud recorrida desde $\alpha(t_0)$, con signo: $s(t) < 0$ si $t < t_0$ y $s(t) > 0$ si $t > t_0$. Se le llama **longitud de arco de α con referencia a t_0**.

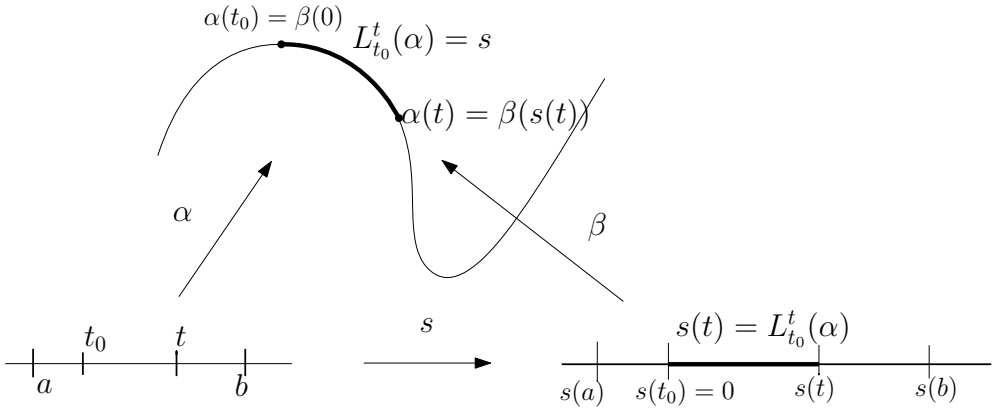


Figura 1.3: Dos parámetros para el mismo recorrido: $\alpha(t) = \beta(s(t))$. El parámetro $s(t)$ mide la longitud recorrida desde $\alpha(t_0)$, con el signo que indica el orden de t respecto de t_0. Cambia el parámetro, pero no el punto de la curva. Figura del material oficial, lección 1, p. 7.

Ejemplo. Para la recta $\alpha(t) = \overrightarrow{OP} + t\mathbf{v}$ se tiene $\alpha'(t) = \mathbf{v}$, luego $s(t) = (t - t_0)|\mathbf{v}|$.

Para la circunferencia $\alpha(t) = \overrightarrow{OP} + r(\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ se tiene $|\alpha'(t)| = r$, luego $s(t) = r(t - t_0)$. Tomando $t_0 = 0$ queda $s = rt$ y la reparametrización por el arco es

$$\alpha(s) = \overrightarrow{OP} + r\big(\cos(s/r),\ \operatorname{sen}(s/r),\ 0\big).$$

Merece la pena memorizar esta expresión: aparece en media docena de ejercicios.

Teorema. Toda c.p.r. puede reparametrizarse regularmente por su longitud de arco.

La idea, en una línea. El cuentakilómetros nunca retrocede, porque la velocidad nunca es cero; y algo que nunca retrocede sirve de parámetro. Eso es toda la demostración.

> Basta ver que $s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(\sigma)|\, d\sigma$ define un cambio de parámetro regular.
> **Paso 1: derivar el cuentakilómetros.** Por el primer teorema fundamental del cálculo integral, s es derivable con
> $$s'(t) = |\alpha'(t)|.$$
> **Paso 2: la regularidad da desigualdad estricta (el núcleo de la prueba).** Ese valor es *estrictamente positivo* precisamente por la condición de regularidad. Así s no solo crece: su derivada nunca se anula, que es lo que permite invertirla con una inversa diferenciable.
> **Paso 3: invertir.** Luego s es estrictamente creciente, y por tanto biyectiva sobre su imagen; su inversa s^{-1} es de la misma clase y tiene derivada no nula. Así que s^{-1} :

$s((a,b)) \to (a,b)$ es un cambio de parámetro regular de α. ■

Qué se rompe sin la hipótesis. Una parada aislada no obliga a que haya una meseta. Para $\alpha_2(t) = (t^3, 0, 0)$ y $t_0 = 0$ se obtiene $s(t) = t^3$: sigue siendo estrictamente creciente y tiene inversa, pero $s^{-1}(r) = \sqrt[3]{r}$ no es diferenciable en cero. El trazo admite el recorrido regular $(r, 0, 0)$, pero no se llega a él mediante un cambio *regular* desde α_2. Una meseta sí aparece cuando la curva permanece parada durante un intervalo entero.

EXPLÍCATE. *En el ejemplo $\alpha_2(t) = (t^3, 0, 0)$, ¿qué conserva s y qué propiedad pierde su inversa? Distingue «tener inversa» de «ser un cambio regular».*

Definición. La parametrización de una curva por su arco se llama **parametrización natural**, y al parámetro se le llama **parámetro natural** o **parámetro arco**. Una curva regular parametrizada naturalmente se abrevia c.r.p.n.. La derivación respecto del parámetro natural se denota con un punto: $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$, $\dddot{\alpha}$.

Teorema. Una c.p.r. $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ está parametrizada por su longitud de arco, salvo constante, si y solo si $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in (a,b)$.

La idea, en una línea. «El reloj marca lo mismo que el cuentakilómetros» y «el velocímetro marca uno» son la misma frase dicha antes y después de derivar. La demostración solo deriva en un sentido e integra en el otro.

Ida: de parámetro arco a velocidad uno, derivando. Si α está parametrizada naturalmente salvo constante, entonces $s(t) = t + \text{cte}$ y, derivando la definición de s con el primer teorema fundamental del cálculo,

$$|\alpha'(t)| = \frac{ds}{dt} = 1.$$

Vuelta: de velocidad uno a parámetro arco, integrando. Recíprocamente, si $|\alpha'(t)| = 1$ entonces $s(t) = \int_{t_0}^{t} 1 \, d\sigma = t - t_0$, es decir, t es el parámetro arco salvo la constante t_0. ■

LA IDEA: EL PARÁMETRO NATURAL ES «IR A VELOCIDAD UNO»

El teorema anterior es el que se usa en la práctica, y conviene tenerlo en esta forma: *estar parametrizada naturalmente es exactamente recorrer la curva a velocidad constante igual a uno*. Nada más.

De ahí viene toda su utilidad. Cuando la velocidad es uno, derivar respecto del parámetro es lo mismo que derivar respecto de la distancia recorrida sobre la curva, y entonces las derivadas dejan de mezclar información sobre la forma con información sobre lo deprisa que uno va. Todas las fórmulas se simplifican porque se ha quitado de en medio la única variable que no era geométrica.

El precio es que el parámetro natural casi nunca se puede calcular explícitamente: la integral $\int |\alpha'|$ rara vez tiene primitiva elemental. Por eso al final de la lección habrá que traducir todas las fórmulas a un parámetro arbitrario. La estrategia general de la asignatura es esa: *demostrar con el parámetro natural, calcular con el parámetro que a uno le den*.

Ejemplo (tres curvas, tres grados de dificultad)**.** Que el parámetro natural «casi nunca se pueda calcular» merece verse en concreto, con tres curvas de dificultad creciente.

La hélice circular: rapidez constante. Para $\alpha(t) = (a\cos t,\ a\operatorname{sen} t,\ bt)$, con $a > 0$,

$$\alpha'(t) = (-a\operatorname{sen} t,\ a\cos t,\ b), \qquad |\alpha'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

constante, como en la circunferencia. Llamando $w = \sqrt{a^2 + b^2}$ y tomando $t_0 = 0$, se tiene $s = wt$, luego $t = s/w$ y

$$\alpha(s) = \Big(a\cos\frac{s}{w},\ a\operatorname{sen}\frac{s}{w},\ \frac{b\,s}{w}\Big).$$

Es la parametrización natural que reaparece en los ejercicios de hélices del capítulo, y conviene tenerla junto a la de la circunferencia, que es su caso $b = 0$.

La catenaria: rapidez variable, pero la cuenta se cierra. Para $\alpha(t) = (t,\ \operatorname{ch} t,\ 0)$, la forma de una cadena colgada,

$$\alpha'(t) = (1,\ \operatorname{sh} t,\ 0), \qquad |\alpha'(t)| = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} = \operatorname{ch} t,$$

y con $t_0 = 0$ la longitud de arco es $s(t) = \int_0^t \operatorname{ch}\sigma\, d\sigma = \operatorname{sh} t$. Se invierte con el argumento seno hiperbólico, $t = \operatorname{argsh} s = \ln\big(s + \sqrt{1 + s^2}\big)$, y como $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} s) = \sqrt{1 + s^2}$,

$$\alpha(s) = \Big(\operatorname{argsh} s,\ \sqrt{1 + s^2},\ 0\Big).$$

Se comprueba derivando: $d\alpha/ds = \big(1/\sqrt{1 + s^2},\ s/\sqrt{1 + s^2},\ 0\big)$, de módulo uno. Aquí la rapidez cambia a lo largo de la curva —vale 1 en el vértice y crece hacia los lados—, y aun así las dos cuentas, la integral y la inversión, tienen solución cerrada. Es la excepción, no la regla.

La elipse: la integral ya no se calcula. Para $\alpha(t) = (2\cos t,\ \operatorname{sen} t,\ 0)$,

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{4\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}, \qquad s(t) = \int_0^t \sqrt{4\operatorname{sen}^2\sigma + \cos^2\sigma}\, d\sigma,$$

y esa integral es una integral elíptica: no tiene primitiva elemental, que es un resultado clásico. El parámetro natural existe, porque el teorema de existencia lo garantiza, pero solo se evalúa numéricamente. El perímetro de esta elipse, por ejemplo, es $s(2\pi) = 9{,}6884\ldots$, calculado así.

Qué se ha ganado. Las tres curvas tienen parámetro natural, porque las tres son regulares; lo que cambia es si se puede escribir. En la hélice, sin esfuerzo; en la catenaria, con suerte; en la elipse, no. Por eso los teoremas se enuncian con el parámetro natural y las cuentas se hacen con el parámetro que dé el enunciado, que es la estrategia de la caja anterior.

Observación. Cambiar el punto de referencia t_0 por otro t_1 solo desplaza el parámetro natural en una constante: $\bar{s}(t) = c + s(t)$, con $c = \int_{t_1}^{t_0} |\alpha'(t)|\, dt$. Por eso todos los enunciados dicen «salvo constante». Y por eso, en los problemas, se puede tomar $s_0 = 0$ sin pérdida de generalidad, cosa que se hará constantemente.

DE DÓNDE VIENE: LA RECTIFICACIÓN DE CURVAS

Medir la longitud de una curva es un problema mucho más antiguo que el cálculo, y durante siglos se consideró imposible en general: se creía que no se podía comparar un arco curvo con un segmento recto. El primer éxito llegó a mediados del siglo XVII, cuando se rectificaron las primeras curvas no triviales, y con él la idea de que la longitud de arco es una integral.
El giro conceptual que aquí importa vino después, con Euler: usar la propia longitud como

parámetro. Es un cambio de perspectiva pequeño y enorme a la vez. En lugar de describir la curva desde fuera, con un reloj externo, se la describe desde dentro, con la única regla de medir que la curva lleva encima. Esa idea, llevada a superficies, es el germen de la geometría intrínseca de la lección 3.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ

La alternativa: no usar nunca el parámetro natural. Todo lo que viene después podría haberse escrito con un parámetro cualquiera, sin exigir jamás que la rapidez valga uno.
Lo que tenía a favor. Y no es poco: el parámetro arco casi nunca se puede calcular. La integral $\int |\alpha'|$ rara vez tiene primitiva elemental, y ya en la elipse conduce a las integrales elípticas, que precisamente se llaman así por eso. Una teoría que exige reparametrizar por el arco está exigiendo algo que casi nunca se puede hacer explícitamente.
Por qué aquí se prefiere el parámetro arco. Con un parámetro arbitrario también se pueden definir invariantes y comparar curvas: ya lo hemos hecho con las reparametrizaciones regulares. Lo que se pierde es sencillez en las fórmulas, porque hay que compensar la rapidez. Además, para reconstruir una curva a partir de su curvatura y su torsión, conviene dar esas dos funciones respecto de una medida común de avance: la longitud recorrida.
Dónde sigue viva. En la práctica del cálculo, en todas partes. Por eso el libro da sistemáticamente las dos versiones de cada fórmula: la limpia, en parámetro natural, para demostrar, y la del parámetro general, con sus productos vectoriales y sus normas al cubo, para calcular. La teoría se hace en arco; las cuentas, no.

Ejercicios de esta sección

Ejercicio 1.2. *Recorrer la curva al revés* [H1.1]

Sea $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ una c.p.r., con $a, b \in \mathbb{R}$. Probar que $f : (a,b) \to (a,b)$ dada por $f(r) = a - r + b$ es una reparametrización regular. ¿Qué curva es $\alpha \circ f$?

Resolución. Escribiendo $f(r) = (a+b) - r$ se ve de inmediato que f es la reflexión del intervalo respecto de su punto medio $(a+b)/2$, que queda fijo.

Va de (a,b) en (a,b): si $a < r < b$, entonces $-b < -r < -a$ y sumando $a+b$ queda $a < (a+b) - r < b$.

Es biyectiva: es su propia inversa, ya que $f(f(r)) = (a+b) - \big((a+b) - r\big) = r$. Una aplicación que coincide con su inversa es biyectiva.

Es de clase C^∞ con derivada no nula: es un polinomio de grado uno y $f'(r) = -1 \neq 0$ en todo el intervalo.

Luego f es una reparametrización regular. En cuanto a qué curva es $\beta = \alpha \circ f$: como f es decreciente, cuando r crece desde cerca de a hasta cerca de b, el parámetro $t = f(r)$ decrece desde cerca de b hasta cerca de a. Es decir, β tiene la misma imagen que α pero la recorre en sentido contrario. ■

Qué hemos aprendido. Esta reflexión es la pieza que faltaba para entender todos los cambios de parámetro. Por la regla de la cadena, $\beta'(r) = -\alpha'(f(r))$: la misma rapidez y el sentido opuesto. Y cualquier cambio regular decreciente g es un cambio creciente seguido de esta reflexión, porque $f \circ f$ es la identidad y por tanto $g = f \circ (f \circ g)$, donde $f \circ g$ es creciente por ser composición de dos decrecientes. Así que un cambio de parámetro solo puede hacer

dos cosas con el recorrido: cambiar el ritmo, que es lo que hace un cambio creciente, y darle la vuelta, que es lo que hace esta f. Qué objetos notan la vuelta se ve en la sección 1.3: el vector tangente cambia de signo y la recta tangente no.

Ejercicio 1.3. *Misma imagen, ¿misma curva?* [H1.2]

Sean $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ y $\beta : (c,d) \to \mathbb{R}^3$ dos c.p.r. tales que $\alpha((a,b)) = \beta((c,d))$. Probar que existe un cambio de parámetros regular $f : (c,d) \to (a,b)$ tal que $\beta = \alpha \circ f$.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Si α fuera invertible sobre su imagen, ¿cuál sería el candidato a f?*
2. *Para que ese candidato esté bien definido hace falta poder invertir α. ¿Basta con que sea localmente inyectiva?*
3. *Prueba a construir dos parametrizaciones de la circunferencia unidad con la misma imagen y con intervalos de longitudes distintas. ¿Puede haber un difeomorfismo entre esos intervalos que las relacione?*

LA IDEA: EL ENUNCIADO, TAL COMO ESTÁ, ES FALSO

Este ejercicio hay que tratarlo con cuidado, porque su enunciado habitual omite una hipótesis que resulta ser imprescindible. Antes de demostrarlo conviene ver por qué. Considérense

$$\alpha : (0, 4\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad \alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0),$$
$$\gamma : (0, 6\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0).$$

Las dos son c.p.r. y las dos tienen por imagen la circunferencia unidad completa: la primera la recorre casi dos veces y la segunda casi tres.
Supóngase que existiera un cambio de parámetro regular $f : (0, 6\pi) \to (0, 4\pi)$ con $\gamma = \alpha \circ f$. Entonces $(\cos t, \operatorname{sen} t) = (\cos f(t), \operatorname{sen} f(t))$ para todo t, lo que obliga a $f(t) - t \in 2\pi\mathbb{Z}$; como $f(t) - t$ es continua y toma valores en un conjunto discreto, es constante, digamos $f(t) = t + 2k\pi$. Pero entonces f lleva $(0, 6\pi)$ sobre $(2k\pi,\ 6\pi + 2k\pi)$, que es un intervalo de longitud 6π y nunca puede ser $(0, 4\pi)$, de longitud 4π. Contradicción.
Luego el enunciado necesita alguna hipótesis extra. La natural, y la que suele quedar implícita, es que α y β sean **homeomorfismos sobre su imagen común**. Con ella el resultado es cierto y la demostración es la que sigue.

Resolución. Supóngase, además de lo enunciado, que α y β son homeomorfismos sobre su imagen común $C = \alpha((a,b)) = \beta((c,d))$.

Definición del candidato. Como $\alpha : (a,b) \to C$ es biyectiva, tiene inversa $\alpha^{-1} : C \to (a,b)$, y se define

$$f = \alpha^{-1} \circ \beta : (c,d) \longrightarrow (a,b).$$

Por construcción, $\alpha \circ f = \alpha \circ \alpha^{-1} \circ \beta = \beta$, que es lo que se quería. Falta comprobar que f es un cambio de parámetro regular.

Es biyectiva y continua. Es composición de dos biyecciones continuas, porque α^{-1} lo es por hipótesis y β también.

Es de clase $C^{k)}$. Aquí es donde entra la geometría. Fijado $r_0 \in (c,d)$, sea $t_0 = f(r_0)$. Por el

resultado de que toda curva es localmente una gráfica, existe un entorno de t_0 y un índice i tales que x_i, la coordenada i-ésima de α, es un difeomorfismo de ese entorno sobre su imagen. Por continuidad de f, los parámetros r suficientemente próximos a r_0 van a parar a ese entorno. Para ellos,

$$f = x_i^{-1} \circ \big(\text{coordenada } i\text{-ésima de } \beta\big),$$

composición de dos aplicaciones de clase $C^{k)}$. Luego f es de clase $C^{k)}$ cerca de r_0, y como r_0 era arbitrario, lo es en todo (c, d).

Su derivada no se anula. Derivando $\beta = \alpha \circ f$ con la regla de la cadena, $\beta'(r) = \alpha'(f(r))f'(r)$. Si fuera $f'(r_0) = 0$ para algún r_0, se tendría $\beta'(r_0) = 0$, contra la condición de regularidad de β. Luego $f' \neq 0$ en todo el intervalo. ■

Qué hemos aprendido, y dónde se falla. Misma imagen no es misma curva: una curva recuerda cuántas veces pasa por cada punto, y eso es lo que separa a α de γ en el contraejemplo. Con la hipótesis de homeomorfismo el resultado es cierto, y la demostración tiene un solo paso delicado, la diferenciabilidad de $f = \alpha^{-1} \circ \beta$. El error típico es darla por hecha «porque es composición de diferenciables». No lo es: α^{-1} está definida sobre la imagen C, que es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ y no un intervalo ni un abierto, así que derivarla tal cual no tiene sentido. El rodeo por la coordenada x_i, que sí es una función de un intervalo en $\mathbb{R}$ con inversa diferenciable, es lo que lo arregla. El mismo obstáculo, y el mismo rodeo con una proyección en lugar de una coordenada, reaparecen en el teorema del cambio de cartas de las superficies (p. 119).

Ejercicio 1.4. *Cuándo la recta tangente está parametrizada naturalmente*

Sean $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una c.p.r. y $t_0 \in (a, b)$. Dar una condición necesaria y suficiente para que la recta tangente a α en $\alpha(t_0)$, dada por $r(\lambda) = \alpha(t_0) + \lambda\alpha'(t_0)$, esté parametrizada naturalmente.

Resolución. En $r(\lambda) = \alpha(t_0) + \lambda\alpha'(t_0)$, el punto $\alpha(t_0)$ y el vector $\alpha'(t_0)$ son constantes; la variable es λ. Derivando,

$$r'(\lambda) = \alpha'(t_0) \qquad \text{para todo } \lambda, \qquad \text{luego} \qquad |r'(\lambda)| = |\alpha'(t_0)|.$$

Por la caracterización del parámetro natural, r está parametrizada naturalmente, salvo constante, si y solo si $|r'| \equiv 1$. Por tanto la condición necesaria y suficiente es

$$|\alpha'(t_0)| = 1.$$

■

QUÉ DEJA. Un aviso de notación que causa más errores de los que parece. La recta tangente escrita con el vector velocidad $\alpha'(t_0)$ y la escrita con el vector tangente unitario $\mathbf{t}(t_0)$ son la misma recta, pero no la misma parametrización: la segunda siempre está parametrizada naturalmente y la primera solo cuando la curva pasa por ahí a velocidad uno. Cuando un enunciado diga «la recta tangente parametrizada naturalmente», hay que usar $\mathbf{t}$.

1.3 Vector tangente y recta tangente de una curva alabeada

LA PREGUNTA

Desde Fermat y Descartes la recta tangente se define como la posición límite de las secantes por dos puntos que se acercan. Esa definición es puramente geométrica y no menciona ningún parámetro ni ninguna derivada. ¿Coincide con la que da la derivada del recorrido, y qué hay que exigir exactamente para que coincidan?

Definición. Sean $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una c.p.r. y $t_0 \in (a, b)$. El vector $\alpha'(t_0)$ se llama **vector velocidad** de α en $\alpha(t_0)$, y su módulo $|\alpha'(t_0)|$ se llama **velocidad** de α en ese punto. La aplicación $\alpha' : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ es el **campo vectorial velocidad**, que por la condición de regularidad no se anula en ningún punto.

El **vector tangente** a α en $\alpha(t_0)$ es el unitario

$$\mathbf{t}(t_0) = \frac{\alpha'(t_0)}{|\alpha'(t_0)|},$$

y la aplicación $\mathbf{t} : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ es el **campo vectorial tangente**.

Que el vector velocidad sea tangente a la curva no es una convención: sale de la propia definición de derivada,

$$\alpha'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0},$$

donde cada cociente incremental es un vector que va de $\alpha(t_0)$ a $\alpha(t)$, reescalado. Al acercar t a t_0, esas cuerdas se van tumbando sobre la curva y el límite es la dirección límite de las cuerdas. Por eso el vector velocidad se dibuja *en* $\alpha(t_0)$ y apuntando a lo largo de la curva.

Definición. La **recta tangente** a α en $\alpha(t_0)$ es la que pasa por $\alpha(t_0)$ con dirección $\mathbf{t}(t_0)$. Su ecuación es

$$\beta(r) = \alpha(t_0) + r\,\mathbf{t}(t_0) \qquad \text{o, equivalentemente,} \qquad \beta(r) = \alpha(t_0) + r\,\alpha'(t_0).$$

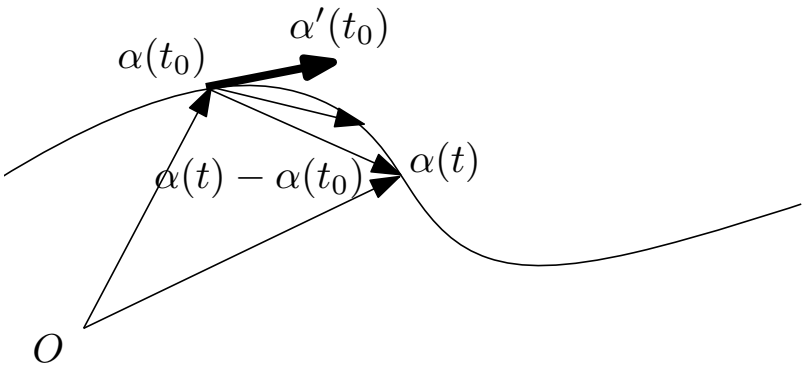


Figura 1.4: Los vectores de posición parten del origen; la cuerda $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ parte de $\alpha(t_0)$. Al dividirla por $t - t_0$ y tomar el límite se obtiene $\alpha'(t_0)$, que dirige la recta tangente. Figura del material oficial, lección 1, p. 9.

Cuando el campo tangente **t** es a su vez una c.p.r., se le llama **indicatriz de las tangentes** de α, con ecuación $\beta(t) = \mathbf{t}(t)$. Como todos los vectores tangentes son unitarios, esa curva vive en la esfera unidad S^2, y por eso se dice **indicatriz esférica de las tangentes**.

LA IDEA: QUÉ ES UNA INDICATRIZ ESFÉRICA

La indicatriz es un cambio de punto de vista que conviene tener claro desde ya, porque reaparecerá con la normal principal y con la binormal, y porque es la clave de un ejercicio recurrente.
Se trata de olvidar *dónde* está la curva y quedarse solo con *hacia dónde* apunta. Se toma el vector tangente de cada punto y se traslada al origen. La punta de ese vector recorre la esfera unidad, y el rastro que deja es la indicatriz.
Una recta tiene indicatriz reducida a un punto: siempre apunta igual. Una curva que se dobla mucho tiene una indicatriz que recorre mucha esfera deprisa. Esa observación, convertida en fórmula, es exactamente la definición de curvatura que viene en la sección siguiente: *la curvatura mide la velocidad de la indicatriz de las tangentes*.

1.3.1 Qué sobrevive a un cambio de parámetro

Toca aplicar la pregunta obligatoria. Sean α una c.p.r., f un cambio de parámetro regular con $f(r) = t$, y $\beta = \alpha \circ f$. Por (1.1),

$$\mathbf{t}_\beta(r) = \frac{\beta'(r)}{|\beta'(r)|} = \frac{\alpha'(t)\frac{dt}{dr}}{\left|\alpha'(t)\frac{dt}{dr}\right|} = \operatorname{sig}\left(\frac{dt}{dr}\right)\mathbf{t}_\alpha(t).$$

De aquí salen tres conclusiones que conviene separar bien:

- El **vector velocidad no es** un invariante geométrico: se reescala por dt/dr, que puede valer cualquier cosa no nula. Depende de lo deprisa que se recorra la curva.
- El **vector tangente unitario casi lo es**: solo puede cambiar de signo, y lo hace exactamente cuando el cambio de parámetro invierte el sentido de recorrido.
- La **recta tangente sí es** un invariante geométrico. Una recta no distingue entre un vector director y su opuesto, así que el signo se pierde por el camino y lo que queda pertenece a la curva.

EXPLÍCATE. *Antes de seguir: ¿por qué* $\operatorname{sig}(dt/dr)$ *es constante en todo el intervalo y no puede cambiar de un punto a otro? La respuesta está en dos propiedades de* f *que ya se han usado antes.*

1.3.2 El sentido de recorrido

Elegir una parametrización fija un sentido de avance, y el vector tangente lo marca. La justificación es un desarrollo de Taylor. Si $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$,

$$\alpha(t) - \alpha(t_0) = \alpha'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0),$$

de modo que se puede escribir $\gamma(t) = \alpha(t) - \alpha(t_0) = (t - t_0)\,\alpha'^*(t)$ con $\lim_{t\to t_0} \alpha'^*(t) = \alpha'(t_0)$.

Para t suficientemente cerca de t_0, el vector $\gamma(t)$ tiene casi la misma dirección que $\alpha'(t_0)$, con el mismo sentido si $t > t_0$ y el contrario si $t < t_0$. Dicho geométricamente: el plano

perpendicular a $\alpha'(t_0)$ por $\alpha(t_0)$ parte el espacio en dos semiespacios, y la curva está en el que señala $\alpha'(t_0)$ para parámetros mayores que t_0, y en el opuesto para menores.

Si se reparametriza con $t = f(r)$ y $df/dr > 0$, el sentido de recorrido no cambia; se dice que la reparametrización **conserva la orientación**. Si $df/dr < 0$, se invierte.

CONEXIÓN: MECÁNICA

El vocabulario de esta sección es literalmente el de la cinemática: posición, vector velocidad, rapidez. La única novedad es la insistencia en separar lo que depende del reloj de lo que no. En Mecánica esa separación no se suele hacer porque el reloj es físico y no se puede cambiar a voluntad. Aquí el parámetro es una convención nuestra, y por eso la pregunta «¿esto depende de la parametrización?» tiene sentido y allí no lo tendría. La trayectoria de una partícula es el trazo; su ley horaria es el recorrido.

1.4 Curvatura de una curva alabeada

LA PREGUNTA

Una vía que pasa directamente de un tramo recto a un arco circular obliga al tren, a rapidez constante, a pasar de aceleración lateral nula a otra no nula. Para suavizar esa transición hace falta medir cuánto gira la vía en cada punto y controlar cómo cambia esa cantidad. ¿Qué cantidad medible merece llamarse curvatura, y por qué la que se adoptó mira la derivada del tangente y no el radio de la circunferencia que mejor se ajusta?

LA IDEA: CÓMO LLEGAR A LA DEFINICIÓN SIN QUE TE LA DEN

Se quiere medir cuánto se separa una curva de ser una recta, punto a punto. El camino más corto es preguntarse qué distingue a una recta, y la respuesta está en la sección anterior: *en una recta el vector tangente es el mismo en todos los puntos*. En cualquier otra curva, cambia.

Luego la magnitud que buscamos es la velocidad a la que cambia el vector tangente. Y aquí entra la única sutileza: si se usa un parámetro cualquiera, esa velocidad mezcla dos cosas distintas, lo mucho que dobla la curva y lo deprisa que uno la recorre. Se arregla midiendo el cambio del tangente *por unidad de longitud recorrida*, es decir, derivando respecto del parámetro natural. Con eso ya no hay reloj que contaminar.

Como en el parámetro natural se tiene $\dot{\alpha} = \mathbf{t}$, derivar el tangente respecto del arco es derivar dos veces la curva. De ahí la definición.

Definición. Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. de clase al menos $C^{2)}$ en $\mathbb{R}^3$. Se llama **curvatura** de α a la función

$$k = k(s) = |\ddot{\alpha}(s)|.$$

Observación. La curvatura es no negativa por definición, al ser un módulo. Esto es propio de las curvas alabeadas. En curvas planas se puede definir una curvatura *con signo*, eligiendo un normal por convenio, pero eso no se hace aquí.

Proposición. Una curva alabeada parametrizada naturalmente está contenida en una recta si y solo si su curvatura es nula en todos los puntos.

La idea, en una línea. Curvatura nula es «el tangente no cambia nunca», y un móvil cuyo tangente no cambia va derecho; la ida deriva esa frase y la vuelta la integra.

Ida: la recta no dobla. Si $\alpha = \alpha(s)$ es una recta parametrizada naturalmente, su vector tangente es $\dot\alpha(s) = \mathbf{t}(s) = \pm\mathbf{v}$ con $\mathbf{v}$ el vector director unitario, que es constante. Luego $\ddot\alpha(s) = 0$ y $k \equiv 0$.
Vuelta: lo que no dobla es una recta. Recíprocamente, si $\ddot\alpha(s) = 0$ para todo s, entonces $\dot\alpha(s) = \mathbf{v}$ es un vector constante, e integrando desde cualquier s_0 del intervalo, $\alpha(s) = \alpha(s_0) + (s - s_0)\mathbf{v}$. Su imagen está contenida en una recta. ■

EXPLÍCATE. *En el recíproco se ha integrado una igualdad vectorial componente a componente. ¿Qué resultado de una variable está usándose ahí, y qué hipótesis sobre el dominio hace falta para poder usarlo? La respuesta explica por qué todas las c.p.r. se definen sobre intervalos y no sobre abiertos cualesquiera.*

Ejemplo (la curvatura de una circunferencia es el inverso del radio)**.** Sea α una circunferencia de centro P y radio r en el plano $z = 0$. Su parametrización natural es

$$\alpha(s) = \overrightarrow{OP} + r\big(\cos(s/r),\ \operatorname{sen}(s/r),\ 0\big),$$

de donde

$$\mathbf{t}(s) = \dot\alpha(s) = \big(-\operatorname{sen}(s/r),\ \cos(s/r),\ 0\big), \qquad \ddot\alpha(s) = \frac{1}{r}\big(-\cos(s/r),\ -\operatorname{sen}(s/r),\ 0\big),$$

y por tanto $k(s) = |\ddot\alpha(s)| = 1/r$.

LA IDEA: POR QUÉ EL INVERSO DEL RADIO Y NO EL RADIO

El resultado tiene la forma correcta y merece la pena convencerse de ello sin cuentas. Una circunferencia enorme, vista de cerca, es casi una recta, y una recta tiene curvatura cero: la curvatura debe tender a cero cuando el radio crece. Una circunferencia diminuta dobla mucho: la curvatura debe crecer cuando el radio se hace pequeño. La fórmula $k = 1/r$ cumple ambas exigencias, aunque esas dos observaciones por sí solas no la determinan. El valor exacto viene de medir el giro por unidad de arco: $ds = r\,d\theta$, luego $d\theta/ds = 1/r$.
Esto justifica además el nombre que se le dará a $1/k$: el **radio de curvatura**. Es el radio de la circunferencia que mejor imita a la curva en ese punto, y aparecerá formalmente en los ejercicios bajo el nombre de círculo osculador.

Ejemplo (curvatura constante no significa circunferencia)**.** Sea

$$\alpha(s) = \Big(\cos(s/\sqrt{2}),\ \operatorname{sen}(s/\sqrt{2}),\ s/\sqrt{2}\Big).$$

Es una hélice circular enrollada en el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Está parametrizada naturalmente, porque

$$\dot\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-\operatorname{sen}(s/\sqrt{2}),\ \cos(s/\sqrt{2}),\ 1\Big) \quad\Longrightarrow\quad |\dot\alpha(s)|^2 = \frac{1}{2}\big(\operatorname{sen}^2 + \cos^2 + 1\big) = 1.$$

Derivando otra vez,

$$\ddot\alpha(s) = \frac{1}{2}\Big(-\cos(s/\sqrt{2}),\ -\operatorname{sen}(s/\sqrt{2}),\ 0\Big), \qquad k(s) = |\ddot\alpha(s)| = \frac{1}{2}.$$

La curvatura es constante y, sin embargo, la curva no es una circunferencia: basta ver que no está contenida en ningún plano, cosa que la tercera coordenada delata de inmediato, porque crece sin parar mientras las dos primeras son periódicas.

La idea: qué le falta a la curvatura

Este ejemplo es la bisagra de toda la lección y conviene detenerse en él.
La curvatura sola *no determina* una curva del espacio. Dos curvas pueden doblarse exactamente igual en cada punto y ser objetos distintos, porque una se queda en un plano y la otra se escapa. Lo que la curvatura no ve es precisamente ese escape.
Aquí es donde Clairaut tenía razón al hablar de *doble* curvatura. Hace falta un segundo número, y ese número es la torsión. Con los dos, y solo con los dos, la curva queda determinada salvo su posición en el espacio; eso es lo que dirá el teorema fundamental al final de la sección siguiente.

Conexión: Mecánica

Si una partícula recorre una curva con rapidez v, la componente normal de su aceleración vale v^2k. Con $k = 1/r$ en una circunferencia se recupera la aceleración centrípeta v^2/r de Mecánica. La lectura interesante es la inversa. La aceleración de un móvil se parte siempre en dos: una parte tangencial, que solo cambia la rapidez, y una parte normal, que solo cambia la dirección. La curvatura es exactamente el factor geométrico de la segunda, limpio del efecto de la rapidez. Es la misma separación entre trazo y recorrido, vista desde la física.

De dónde viene: el círculo que besa a la curva

La idea de medir la doblez con una circunferencia auxiliar es de Leibniz, que en 1686 introdujo el *circulus osculans*, la circunferencia que se ajusta a la curva en un punto mejor que ninguna otra. El nombre viene del latín *osculum*, beso: la circunferencia comparte con la curva la tangente y la curvatura. Ese contacto no impide que ambas se crucen: «besar» describe el ajuste local, no una prohibición de cruce.
De ahí vienen las palabras que se usan aún: círculo osculador, plano osculador. La definición moderna de curvatura como $|\ddot{\alpha}|$ es posterior y más económica, pero conviene no perder la imagen original, porque es la que explica por qué el radio de curvatura es $1/k$ y no otra cosa.

El camino que no se tomó

La alternativa: definir la curvatura por el círculo osculador. Es la ruta histórica, y es anterior. Huygens introdujo el radio de curvatura y las evolutas en su *Horologium Oscillatorium* de 1673, y Newton razonaba igual: en cada punto se busca la circunferencia que mejor se ajusta a la curva y se declara que la curvatura es el inverso de su radio, $k = 1/\rho$.
Lo que tenía a favor. Es geométrica de arriba abajo. No menciona parámetros, ni derivadas, ni vectores unitarios: solo dice qué circunferencia se parece más a la curva. Y da de golpe la intuición correcta, que la circunferencia de radio grande está poco curvada.
Lo que la hundió como definición. Dos cosas. La primera, que se rompe justo donde más falta hace: en un punto de curvatura nula no hay circunferencia osculatriz, sino una recta, y habría que tratar el radio infinito como un caso aparte cada vez. La segunda, que en una superficie una sola circunferencia no resume todas las direcciones de doblado: habrá una curvatura normal para cada dirección tangente. La definición $k = |\dot{\mathbf{t}}|$ trata directamente los puntos de curvatura cero; el estudio de superficies exigirá ampliar ambas imágenes.
Dónde sigue viva. En el nombre y en la cabeza. El radio de curvatura $\rho = 1/k$ se sigue usando

> constantemente, el círculo osculador sigue siendo la manera de *ver* la curvatura, y las evolutas e involutas de Huygens siguen siendo material corriente. Lo que cambió no fue la geometría, sino cuál de las dos cosas se pone primero.

Ejercicios de esta sección

Ejercicio 1.5. *La curvatura total es la longitud de la indicatriz*

Sea $\alpha : [s_0, s_1] \to \mathbb{R}^3$ un arco de c.r.p.n. de clase al menos $C^{2)}$. Se define la **curvatura total** de α como

$$k_T[s_0, s_1] = \int_{s_0}^{s_1} k(s)\, ds.$$

Se pide:
1. Probar que $k_T[s_0, s_1] = L_{s_0}^{s_1}(\beta)$, donde $\beta(s) = \mathbf{t}(s)$.
2. Probar que
$$k(s_0) = \lim_{s \to s_0} \frac{L_{s_0}^{s}(\beta)}{L_{s_0}^{s}(\alpha)}.$$

Resolución. *Primer apartado.* Como $\beta(s) = \mathbf{t}(s) = \dot{\alpha}(s)$, basta derivar una vez:

$$\beta'(s) = \ddot{\alpha}(s), \qquad |\beta'(s)| = k(s).$$

La curva β puede detenerse donde $k = 0$. Aunque entonces no sea regular, su longitud como curva de clase $C^{1)}$ sigue dada por la misma integral de la rapidez. Por tanto,

$$L_{s_0}^{s_1}(\beta) = \int_{s_0}^{s_1} |\beta'(s)|\, ds = \int_{s_0}^{s_1} k(s)\, ds = k_T[s_0, s_1].$$

Segundo apartado. El límite se toma con $s > s_0$, dentro del arco. El denominador se calcula solo: como α está parametrizada naturalmente, $|\dot{\alpha}| \equiv 1$ y

$$L_{s_0}^{s}(\alpha) = \int_{s_0}^{s} 1\, d\sigma = s - s_0.$$

El numerador es, por el apartado anterior, $\int_{s_0}^{s} k(\sigma)\, d\sigma$. Luego el cociente es

$$\frac{L_{s_0}^{s}(\beta)}{L_{s_0}^{s}(\alpha)} = \frac{1}{s - s_0} \int_{s_0}^{s} k(\sigma)\, d\sigma,$$

que es exactamente el valor medio de k en $[s_0, s]$. Como k es continua, el primer teorema fundamental del cálculo da

$$\lim_{s \to s_0} \frac{1}{s - s_0} \int_{s_0}^{s} k(\sigma)\, d\sigma = k(s_0). \blacksquare$$

Otra vía (con el teorema del valor medio integral). El segundo apartado admite un cierre aún más corto. Por el teorema del valor medio para integrales, y siendo k continua, para cada s existe $\xi_s \in (s_0, s)$ con

$$\int_{s_0}^{s} k(\sigma)\, d\sigma = k(\xi_s)(s - s_0).$$

El cociente vale entonces $k(\xi_s)$, y como ξ_s queda atrapado entre s_0 y s, al hacer $s \to s_0$ se tiene $\xi_s \to s_0$ y, por continuidad, $k(\xi_s) \to k(s_0)$. $\blacksquare$

LA IDEA: ESTA ES LA DEFINICIÓN ANTIGUA DE CURVATURA

El resultado no es un ejercicio de cálculo, es una traducción. El cociente del segundo apartado es

$$\frac{\text{lo que gira la tangente}}{\text{lo que avanza la curva}},$$

porque la longitud recorrida por la indicatriz sobre la esfera unidad mide el *giro acumulado* del tangente, no solo el ángulo entre sus posiciones inicial y final. Así que la curvatura es la velocidad angular de la tangente por unidad de longitud recorrida. Esa fue la definición original, la de Euler, anterior a escribirla como $|\ddot{\alpha}|$. Y explica sin cuentas por qué la circunferencia de radio r tiene curvatura $1/r$: al recorrerla entera se avanza $2\pi r$ y la tangente gira 2π, luego el cociente es $1/r$.

Ejercicio 1.6. *La hélice circular, de principio a fin* [H1.20]

Dada la hélice circular $\alpha(t) = (a\cos t,\ a\operatorname{sen} t,\ bt)$, con $t \in \mathbb{R}$ y $a > 0$, calcular su curvatura y su torsión en función de a y de b. Además, dados dos números reales $k > 0$ y τ, encontrar la única hélice circular que tiene a k por curvatura y a τ por torsión.

Resolución. La curvatura ya está definida, pero la torsión todavía no. Para resolver este apartado sin presuponerla, construiremos primero los vectores que permiten medirla. La idea geométrica es distinguir cuánto gira la tangente de cuánto gira el plano que contiene la tangente y la dirección hacia la que se dobla la curva. Después recuperaremos, a partir de esas definiciones, el cálculo con productos vectoriales.

Paso 1: recorrer la hélice con velocidad unitaria. La rapidez de la parametrización dada es constante:

$$\alpha'(t) = (-a\operatorname{sen} t, a\cos t, b), \qquad c := |\alpha'(t)| = \sqrt{a^2+b^2} > 0.$$

Por tanto, el parámetro natural con origen en $t = 0$ es $s = ct$. Escribimos la misma curva con ese parámetro:

$$\gamma(s) = \alpha(s/c) = \big(a\cos(s/c), a\operatorname{sen}(s/c), bs/c\big).$$

En esta resolución las primas indican derivadas respecto de t y los puntos, respecto de s. Abreviamos $u = s/c$: cada vez que derivemos un seno o un coseno respecto de s, la regla de la cadena aportará un factor $1/c$. Así,

$$\dot\gamma(s) = \frac{1}{c}(-a\operatorname{sen} u, a\cos u, b), \qquad |\dot\gamma(s)|^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1,$$

$$\ddot\gamma(s) = \frac{a}{c^2}(-\cos u, -\operatorname{sen} u, 0), \qquad \boxed{k = |\ddot\gamma| = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2+b^2}.}$$

Aquí solo se ha usado la definición de curvatura en parámetro natural.

Paso 2: construir el normal y el binormal. El tangente unitario es $\mathbf{t} = \dot\gamma$. Su derivada indica hacia dónde se dobla la curva; al dividirla por su módulo obtenemos el *normal principal*:

$$\mathbf{n} = \frac{\dot{\mathbf{t}}}{k} = (-\cos u, -\operatorname{sen} u, 0).$$

La división es posible porque $a > 0$ implica $k > 0$. El vector $\mathbf{n}$ es unitario y perpendicular a $\mathbf{t}$: derivar $\mathbf{t}\cdot\mathbf{t} = 1$ da $2\mathbf{t}\cdot\dot{\mathbf{t}} = 0$. En esta hélice, $\mathbf{n}$ apunta horizontalmente hacia el eje del cilindro.

El plano que pasa por $\gamma(s)$ y está generado por $\mathbf{t}$ y $\mathbf{n}$ se llama *plano osculador*. Contiene la dirección del movimiento y la de su cambio. Para seguir cómo gira ese plano basta seguir su normal unitario, el *binormal*, definido con el orden de producto vectorial

$$\mathbf{b} = \mathbf{t}\times\mathbf{n} = \frac{1}{c}\big(b\,\operatorname{sen} u, -b\cos u, a\big).$$

Por ejemplo, su tercera componente sale de $(-a\operatorname{sen} u)(-\operatorname{sen} u) - (a\cos u)(-\cos u) = a$ antes de dividir por c. Los tres vectores $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ forman una base ortonormal directa.

Paso 3: definir la torsión y calcularla. La torsión mide cómo gira el plano osculador por unidad de longitud recorrida. Por eso se deriva $\mathbf{b}$ respecto de s. Esa derivada es paralela a $\mathbf{n}$: como $\mathbf{b}$ es unitario, $\dot{\mathbf{b}} \perp \mathbf{b}$; y al derivar $\mathbf{t}\cdot\mathbf{b} = 0$, usando $\dot{\mathbf{t}} = k\mathbf{n}$, resulta $\mathbf{t}\cdot\dot{\mathbf{b}} = 0$. Solo queda la dirección de $\mathbf{n}$. Se define entonces el número con signo τ mediante el convenio

$$\dot{\mathbf{b}} = -\tau\mathbf{n}, \qquad \text{equivalentemente} \qquad \tau = -\dot{\mathbf{b}}\cdot\mathbf{n}.$$

El signo menos fija el convenio del libro. Tomar únicamente $|\dot{\mathbf{b}}|$ daría $|\tau|$ y perdería el signo. En nuestra hélice, la tercera componente de $\mathbf{b}$ es constante, de modo que

$$\dot{\mathbf{b}} = \frac{b}{c^2}(\cos u, \operatorname{sen} u, 0) = -\frac{b}{c^2}\mathbf{n}, \qquad \boxed{\tau = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2+b^2}.}$$

Si $b = 0$, se obtiene una circunferencia: su binormal es fijo y su torsión vale cero. Si b cambia de signo, se invierte el sentido de enroscamiento y cambia el signo de la torsión, mientras la curvatura permanece igual.

Conviene distinguir esta derivada de la tercera derivada de la posición:

$$\dddot{\gamma} = \frac{a}{c^3}(\operatorname{sen} u, -\cos u, 0), \qquad |\dddot{\gamma}| = \frac{a}{c^3}.$$

Esta última norma no es la torsión: incluso en la circunferencia es distinta de cero. Para medir la torsión hemos derivado el binormal unitario.

Otra vía: de dónde salen las fórmulas con productos vectoriales. El cálculo siguiente expresa lo que acabamos de hacer sin escribir s en cada línea. Lo justificamos aquí para esta hélice, cuya rapidez c y curvatura k son constantes; el caso de rapidez variable se desarrolla en la sección siguiente.

De $s = ct$ se deduce $\dot{\gamma} = \alpha'/c$, $\ddot{\gamma} = \alpha''/c^2$ y $\dddot{\gamma} = \alpha'''/c^3$, evaluadas en $t = s/c$. Como $\dot{\gamma} = \mathbf{t}$ y $\ddot{\gamma} = k\mathbf{n}$,

$$\alpha'\times\alpha'' = c^3 k\mathbf{b}, \qquad k = \frac{|\alpha'\times\alpha''|}{c^3}.$$

El denominador convierte las derivadas respecto de t en derivadas respecto del arco: no es un factor que haya que adivinar.

Para la torsión, escribimos $\mathbf{b} = (\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma})/k$ y derivamos. Como aquí k es constante y $\ddot{\gamma}\times\ddot{\gamma} = 0$,

$$\dot{\mathbf{b}} = \frac{\dot{\gamma}\times\dddot{\gamma}}{k}, \qquad \tau = -\frac{(\dot{\gamma}\times\dddot{\gamma})\cdot\ddot{\gamma}}{k^2} = \frac{(\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma})\cdot\dddot{\gamma}}{k^2}.$$

La última igualdad intercambia dos vectores del producto mixto, cambiando su signo. Recordemos que $(v, w, z) := (v \times w) \cdot z$. Sustituyendo las tres derivadas y la expresión anterior de k^2, queda

$$\tau = \frac{(\alpha', \alpha'', \alpha''')/c^6}{|\alpha' \times \alpha''|^2/c^6} = \frac{(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha' \times \alpha''|^2}.$$

Los factores c^6 se cancelan. Ahora podemos aplicar ambas fórmulas sabiendo qué miden y por qué son válidas en este ejercicio.

Las derivadas.

$$\alpha'(t) = (-a \operatorname{sen} t,\ a \cos t,\ b), \qquad \alpha''(t) = (-a \cos t,\ -a \operatorname{sen} t,\ 0),$$

$$\alpha'''(t) = (a \operatorname{sen} t,\ -a \cos t,\ 0).$$

De la primera, $|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$, constante: la hélice se recorre a velocidad constante, aunque no unitaria.

El producto vectorial.

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \big(ab \operatorname{sen} t,\ -ab \cos t,\ a^2\big), \qquad |\alpha'(t) \times \alpha''(t)| = \sqrt{a^2b^2 + a^4} = a\sqrt{a^2 + b^2}.$$

La curvatura.

$$k = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3} = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{(a^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

El producto mixto y la torsión.

$$(\alpha', \alpha'', \alpha''') = \big(\alpha' \times \alpha''\big) \cdot \alpha''' = ab \operatorname{sen} t \cdot a \operatorname{sen} t + (-ab \cos t)(-a \cos t) + a^2 \cdot 0 = a^2 b,$$

$$\tau = \frac{(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha' \times \alpha''|^2} = \frac{a^2 b}{a^2(a^2 + b^2)} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Ambas son constantes, cosa esperable: la hélice se ve igual desde todos sus puntos.

El problema inverso: construir la hélice a partir de su curvatura y torsión. Hasta ahora conocíamos a y b y calculábamos k y τ. Ahora se invierten los papeles: nos dan dos números, $k > 0$ y τ, y debemos encontrar el radio a del cilindro y el número b que fija cuánto sube la hélice. En una vuelta, t aumenta 2π y la altura cambia $2\pi b$. Buscamos, por tanto, las dos incógnitas $a > 0$ y b que resuelven

$$k = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad \tau = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Primero: averiguar el denominador común. Llamemos $D = a^2 + b^2$. De momento D también es desconocido, pero es positivo y permite ver la estructura del sistema: $k = a/D$ y $\tau = b/D$. ¿Por qué conviene elevar al cuadrado y sumar? Porque los numeradores se convierten precisamente en $a^2 + b^2$, es decir, en el mismo D que buscamos:

$$k^2 + \tau^2 = \left(\frac{a}{D}\right)^2 + \left(\frac{b}{D}\right)^2 = \frac{a^2}{D^2} + \frac{b^2}{D^2} = \frac{a^2 + b^2}{D^2} = \frac{D}{D^2} = \frac{1}{D}.$$

La suma del lado izquierdo es conocida. Multiplicando por D y dividiendo por $k^2 + \tau^2$, que es positivo porque $k > 0$, obtenemos

$$D(k^2 + \tau^2) = 1, \qquad D = \frac{1}{k^2 + \tau^2}.$$

Segundo: recuperar cada incógnita. Volvemos al sistema original. De $k = a/D$ se obtiene $a = kD$; de $\tau = b/D$ se obtiene $b = \tau D$. Como ya conocemos D, basta sustituir:

$$\boxed{a = k\frac{1}{k^2+\tau^2} = \frac{k}{k^2+\tau^2}, \qquad b = \tau\frac{1}{k^2+\tau^2} = \frac{\tau}{k^2+\tau^2}.}$$

También se conserva la relación $\tau/k = b/a$: el cociente entre torsión y curvatura fija la proporción entre el ascenso por unidad de ángulo y el radio. Para hallar los valores individuales necesitábamos además la escala D.

Tercero: comprobar que la hélice existe y que es única en esta familia. Los despejes nos han dado los únicos candidatos posibles. Hay que comprobar que funcionan. Escribamos $Q = k^2 + \tau^2 > 0$. Los candidatos son $a = k/Q$ y $b = \tau/Q$, por lo que

$$a^2 + b^2 = \frac{k^2+\tau^2}{Q^2} = \frac{1}{Q}.$$

Al calcular la curvatura y la torsión de la hélice construida sale

$$\frac{a}{a^2+b^2} = \frac{k/Q}{1/Q} = k, \qquad \frac{b}{a^2+b^2} = \frac{\tau/Q}{1/Q} = \tau.$$

Además, $a = k/Q > 0$, como exige el enunciado. Esto prueba la existencia. La unicidad dentro de $\alpha(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt)$ se debe a que cualquier solución del sistema está obligada a tener esos mismos D, a y b.

Por ejemplo, para $k = \tau = 1/2$ sale $Q = 1/2$ y, por tanto, $a = b = 1$. La hélice $(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ tiene efectivamente curvatura y torsión $1/(1+1) = 1/2$. Si $\tau = 0$, las fórmulas dan $a = 1/k$ y $b = 0$: la curva es $(\cos t/k, \operatorname{sen} t/k, 0)$, una circunferencia. La afirmación más general, que la curvatura y la torsión determinan una curva salvo movimientos rígidos directos, se estudiará en el teorema fundamental; no hace falta usarla para esta unicidad algebraica. ■

LA IDEA: POR QUÉ EL RADIO DE CURVATURA ES MAYOR QUE EL DEL CILINDRO

El resultado $k = a/(a^2+b^2)$ merece una lectura geométrica, porque es contraintuitivo la primera vez.
La hélice vive en el cilindro de radio a. Uno esperaría curvatura $1/a$, la de la circunferencia de ese radio. Pero sale menos, porque el radio de curvatura es

$$\frac{1}{k} = \frac{a^2+b^2}{a} = a + \frac{b^2}{a} \;\geq\; a.$$

La razón es que parte del avance de la hélice se gasta en subir, no en girar. Vista desde arriba es una circunferencia de radio a, pero recorrida en el espacio se dobla menos por unidad de longitud, porque cada unidad de longitud avanza también en vertical. Cuanto mayor es el paso b, más se parece a una recta y menor es la curvatura. Con $b = 0$ se recupera exactamente $k = 1/a$.

CONEXIÓN: DE LA HÉLICE A SU EJE

El normal principal de esta hélice apunta horizontalmente hacia el eje del cilindro. Como el cilindro tiene radio a, avanzar una distancia a en esa dirección lleva cada punto de la hélice hasta el eje, a su misma altura. Vamos a escribir ese desplazamiento y comprobarlo.

Ya tenemos, con $u = s/c$,

$$\gamma(s) = (a\cos u, a\,\mathrm{sen}\,u, bu), \qquad \mathbf{n}(s) = (-\cos u, -\,\mathrm{sen}\,u, 0).$$

Como $\mathbf{n}$ es unitario, el vector $a\mathbf{n}$ tiene longitud a. La curva formada por los puntos desplazados es

$$\begin{aligned}\beta(s) &= \gamma(s) + a\mathbf{n}(s)\\ &= (a\cos u, a\,\mathrm{sen}\,u, bu) + (-a\cos u, -a\,\mathrm{sen}\,u, 0)\\ &= (0, 0, bu) = (0, 0, bs/c).\end{aligned}$$

Las dos coordenadas horizontales se cancelan. Si $b \neq 0$, al variar s en $\mathbb{R}$ la tercera coordenada recorre todo $\mathbb{R}$: β parametriza el eje vertical. Si $b = 0$, la hélice era una circunferencia y todos sus puntos llegan al centro: β es constante, no una recta regular.
Aquí aparece la utilidad geométrica del problema inverso. Si conocemos k y τ, pero no el radio, sabemos que la distancia necesaria es $a = k/(k^2 + \tau^2)$. Por eso el desplazamiento hacia el eje se puede escribir sin mencionar a:

$$\beta(s) = \gamma(s) + \frac{k}{k^2 + \tau^2}\mathbf{n}(s).$$

La condición $k = a(k^2 + \tau^2)$ es la misma igualdad multiplicada por $k^2 + \tau^2$: dice que la distancia elegida es exactamente el radio. Si se eligiese otra distancia d, las coordenadas horizontales serían $((a - d)\cos u, (a - d)\,\mathrm{sen}\,u)$ y no desaparecerían.

En esta hélice, $\tau/k = b/a$ mide la proporción entre ascenso y radio, mientras $k^2 + \tau^2 = 1/(a^2 + b^2)$ permite recuperar su escala. Son las dos piezas que hemos usado para reconstruir a y b.

1.5 Ecuaciones de Frenet de una curva alabeada

LA PREGUNTA

Un paleontólogo quiere describir la forma exacta de un colmillo curvado para poder compararlo con otros, y un químico quiere describir la hélice de una proteína. Ninguno de los dos puede mandar el objeto: solo pueden mandar números. ¿Cuántos números por punto hacen falta para que quien los reciba reconstruya la forma exacta, sin ambigüedad, salvo dónde estaba puesta? Y si son pocos, ¿por qué justo esos?

LA IDEA: MONTAR UNOS EJES QUE VIAJEN CON LA CURVA

La idea que organiza toda esta sección es sencilla de decir y muy productiva. En lugar de describir la curva desde los ejes fijos del espacio, se le monta encima una referencia ortonormal propia, que viaja con ella y se reorienta en cada punto.
Una vez montada, la pregunta interesante deja de ser dónde está la curva y pasa a ser *cómo gira esa referencia al avanzar*. Y resulta que ese giro se describe con dos números, la curvatura y la torsión, que son precisamente los invariantes que buscamos. Las ecuaciones de Frenet-Serret son la escritura exacta de ese giro.
Este es un patrón general de la geometría diferencial, no un truco local: se sustituye un objeto por un sistema de referencia adaptado a él, y se estudia cómo varía la referencia.

En la lección 4 se hará lo mismo con superficies, y el papel de las ecuaciones de Frenet lo hará el endomorfismo de Weingarten.

1.5.1 Los tres vectores y los tres planos

El primer vector ya lo tenemos: el tangente **t**. El segundo sale de la curvatura.

Definición. Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. en $\mathbb{R}^3$ y $\alpha(s_0)$ un punto con $k(s_0) > 0$. El **vector normal principal** de α en $\alpha(s_0)$ es

$$\mathbf{n}(s_0) = \frac{\ddot{\alpha}(s_0)}{k(s_0)},$$

que es unitario y ortogonal a $\mathbf{t}(s_0)$. El **vector binormal** es

$$\mathbf{b}(s_0) = \mathbf{t}(s_0) \times \mathbf{n}(s_0),$$

unitario y ortogonal a los dos anteriores.

Que **n** sea unitario sale de la propia definición: se ha dividido $\ddot{\alpha}$ por su propio módulo, de modo que $|\mathbf{n}| = |\ddot{\alpha}|/k = |\ddot{\alpha}|/|\ddot{\alpha}| = 1$. Que sea ortogonal a **t** merece un argumento, porque es el que hace funcionar toda la construcción:

La idea, en una línea. Si un vector no cambia de longitud, lo único que puede hacer es girar, y girar es moverse perpendicularmente a sí mismo; derivar $\mathbf{t}\cdot\mathbf{t} = 1$ es escribir esa frase.

En el parámetro natural, $\mathbf{t}(s) = \dot{\alpha}(s)$ es unitario, es decir, $\dot{\alpha}(s)\cdot\dot{\alpha}(s) = 1$ para todo s. Derivando esta identidad respecto de s,

$$2\,\ddot{\alpha}(s)\cdot\dot{\alpha}(s) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\alpha}(s)\cdot\dot{\alpha}(s) = 0.$$

Luego $\ddot{\alpha}$ es ortogonal a $\dot{\alpha}$, y **n**, que es $\ddot{\alpha}$ reescalado, también. ■

LA IDEA: LA REGLA QUE HAY QUE MEMORIZAR

El argumento anterior es un caso de una regla que se usará decenas de veces en esta asignatura, casi siempre sin avisar:

Un campo vectorial de módulo constante es siempre ortogonal a su derivada.

La demostración es la de arriba, derivando $V\cdot V = \text{cte}$. La imagen geométrica es mejor aún: si un vector no cambia de longitud, su punta se mueve sobre una esfera, y todo movimiento sobre una esfera es tangente a ella, es decir, perpendicular al radio.
Con esa regla en la mano, buena parte de las demostraciones de la lección se ven venir. La usaremos enseguida con **b** para deducir la forma de la torsión, y reaparecerá en la lección 4 con la aplicación de Gauss, que también es un campo unitario.

El triedro define tres planos por el punto $\alpha(s_0)$, uno por cada pareja de vectores. Los nombres son de Leibniz y de Clairaut, y conviene aprendérselos por lo que contienen y no de memoria.

Antes de la lista, dos observaciones que evitan tener que recordar nada. La primera es que un plano por un punto queda determinado por su vector perpendicular, y con tres vectores ortogonales entre sí hay exactamente tres maneras de elegir cuál es el perpendicular; por eso salen tres planos y no más. La segunda es que cada plano se nombra por los vectores que *contiene*, mientras que su ecuación se escribe con el que le *falta*: el plano normal contiene a $\mathbf{n}$ y a $\mathbf{b}$, y su ecuación lleva $\mathbf{t}$. Basta con tener presente esa inversión para no confundirlos nunca.

Y las tres ecuaciones son la misma. Un punto X está en el plano que pasa por $\alpha(s_0)$ y es perpendicular a un vector $\mathbf{u}$ exactamente cuando el vector que va del punto de la curva hasta X no tiene componente en la dirección de $\mathbf{u}$, es decir, cuando $(X-\alpha(s_0))\cdot\mathbf{u}=0$. Lo único que cambia de un plano a otro es quién es $\mathbf{u}$.

- El **plano normal** es el perpendicular a $\mathbf{t}(s_0)$. Contiene a $\mathbf{n}$ y a $\mathbf{b}$. Su ecuación es $(X-\alpha(s_0))\cdot\mathbf{t}(s_0)=0$, es decir,

$$(x-x(s_0))\dot{x}(s_0)+(y-y(s_0))\dot{y}(s_0)+(z-z(s_0))\dot{z}(s_0)=0.$$

- El **plano rectificante** es el perpendicular a $\mathbf{n}(s_0)$. Contiene a $\mathbf{t}$ y a $\mathbf{b}$. Su ecuación es $(X-\alpha(s_0))\cdot\mathbf{n}(s_0)=0$, o sea,

$$(x-x(s_0))\ddot{x}(s_0)+(y-y(s_0))\ddot{y}(s_0)+(z-z(s_0))\ddot{z}(s_0)=0.$$

- El **plano osculador** es el perpendicular a $\mathbf{b}(s_0)$. Contiene a $\mathbf{t}$ y a $\mathbf{n}$. Su ecuación es $(X-\alpha(s_0))\cdot\mathbf{b}(s_0)=0$, que en forma de determinante queda

$$\begin{vmatrix} x-x(s_0) & y-y(s_0) & z-z(s_0) \\ \dot{x}(s_0) & \dot{y}(s_0) & \dot{z}(s_0) \\ \ddot{x}(s_0) & \ddot{y}(s_0) & \ddot{z}(s_0) \end{vmatrix}=0.$$

Las dos primeras ecuaciones se escriben directamente porque $\mathbf{t}=\dot{\alpha}$ y porque $\mathbf{n}$ es $\ddot{\alpha}$ dividido por un número positivo, y multiplicar un plano por un número no lo cambia: por eso en el plano rectificante aparecen las derivadas segundas sin la k que llevaba $\mathbf{n}$ en el denominador. La tercera es la que necesita el determinante, y el motivo es que $\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n}$ no se conoce por sus componentes sino como un producto vectorial. Ahora bien, $(X-\alpha)\cdot(\dot{\alpha}\times\ddot{\alpha})$ es un producto mixto, y un producto mixto de tres vectores es el determinante de la matriz que los tiene por filas. Anularlo dice, en lenguaje geométrico, que los tres vectores son coplanarios, que es justo la condición que se quiere imponer.

Y conviene tener de antemano para qué sirve cada uno, porque los tres reaparecen. El **osculador** es, con diferencia, el más importante: es el plano que mejor contiene a la curva cerca del punto, y a él se dedica la subsección siguiente entera. El **rectificante** es el que se aplana al desarrollar la curva sobre un plano, de donde le viene el nombre, y será el protagonista cuando en el capítulo 2 se construyan superficies regladas sobre una curva. El **normal** es el que contiene a todas las direcciones perpendiculares al movimiento, y es donde vivirán los centros de curvatura y, más adelante, el vector normal de cualquier superficie que contenga a la curva.

Cada uno de los tres vectores tiene además su recta: la **recta normal principal** es $r(t)=\alpha(s_0)+t\,\mathbf{n}(s_0)$ y la **recta binormal** es $r(t)=\alpha(s_0)+t\,\mathbf{b}(s_0)$. Y cada uno de los tres campos, cuando es una c.p.r., tiene su indicatriz esférica.

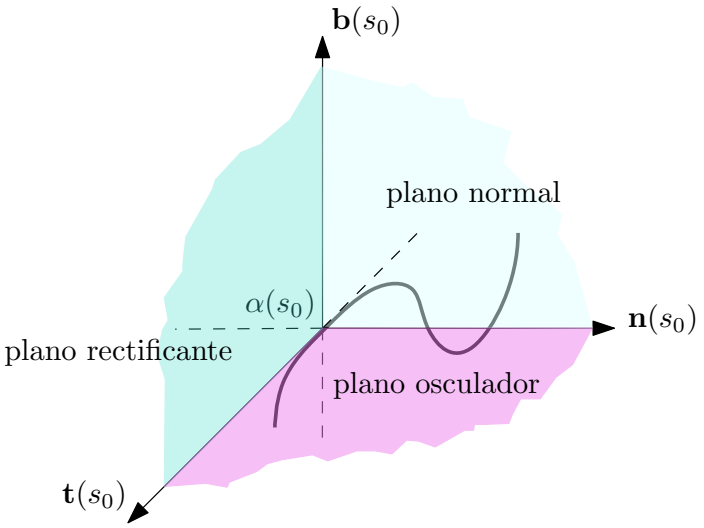


Figura 1.5: El triedro de Frenet y sus tres planos: el osculador contiene a **t** y **n**; el normal, a **n** y **b**; el rectificante, a **t** y **b**. Cada plano es perpendicular al vector restante. Figura del material oficial, lección 1, p. 12.

Definición. Al triedro $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ se le llama **triedro** o **referencia de Frenet** en el punto $\alpha(s)$. Es una referencia móvil ortonormal y directa de $\mathbb{R}^3$ en cada punto de la curva.

Observación. A partir de aquí, siempre que se hable del normal principal, del binormal o de cualquier objeto construido con ellos, se sobreentiende que la curvatura en ese punto no es nula. Si $k(s_0) = 0$, esos vectores sencillamente no existen en $\alpha(s_0)$, porque la definición de **n** divide por k. Esta salvedad no es un tecnicismo: la última parte de esta sección está dedicada a lo que ocurre en esos puntos.

EXPLÍCATE. *¿Por qué la referencia de Frenet es* directa *y no simplemente ortonormal? Localiza en las definiciones el punto exacto donde se fija esa orientación. Es una sola línea, y de ella depende el signo de la torsión.*

1.5.2 El plano osculador es el plano límite

De los tres planos, el osculador es el importante, y el resultado que sigue explica por qué: es el plano que mejor se adapta a la curva, en un sentido que se puede precisar.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: EL PLANO QUE LA CURVA TARDA MÁS EN ABANDONAR

Por la recta tangente en un punto pasan infinitos planos, un haz entero que gira alrededor de ella. La pregunta es si alguno de ellos es mejor que los demás, y en qué sentido.
La respuesta es geométrica y se ve así: tómese, además del punto $\alpha(s_0)$, otro punto $\alpha(s)$ de la curva un poco más allá. La recta tangente y ese punto determinan un plano del haz, uno solo. Ahora déjese que $\alpha(s)$ se acerque a $\alpha(s_0)$: el plano va girando, y el teorema dice que se estabiliza en una posición límite, que es el plano osculador.
Es decir, el osculador no es un plano más del haz: es *el que la curva señala ella misma* al mirarse a sí misma de cerca. Y por eso es el plano que la curva tarda más en abandonar:

contiene no solo la dirección en la que se va, sino también la dirección hacia la que se está doblando. Los otros dos planos del triedro no tienen esta propiedad: el normal ni siquiera contiene a la tangente, y el rectificante no contiene la dirección hacia la que se dobla la curva.
La cuenta que sigue es el desarrollo de Taylor de α en s_0: el término de primer orden da la tangente, el de segundo orden da la normal principal, y el plano que generan los dos es exactamente el osculador. Todo el teorema es esa observación hecha con cuidado.
Antes, hay que desmontar una intuición falsa. «El plano que mejor se adapta» suena a «el plano en el que la curva se queda», pero eso solo ocurre si la curva es plana. Cuando la torsión en el punto es no nula, la curva *atraviesa* su osculador, como mostrará la forma canónica local. El mejor ajuste significa que desaparece la separación de segundo orden, no que esté prohibido el cruce; si también se anula la torsión, habrá que mirar más allá del término cúbico.

Teorema. Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. en $\mathbb{R}^3$ de clase al menos 3, con $k(s_0) > 0$. El plano límite de todos los planos que contienen a la recta tangente a α en $\alpha(s_0)$ y a un punto $\alpha(s)$ de la curva es, cuando $s \to s_0$, el plano osculador a α en $\alpha(s_0)$.

Paso 1: nombrar el plano móvil por dos directores. Considérese el haz de planos que contienen a la recta tangente a α en $\alpha(s_0)$, y de ellos, el plano Π_s que además pasa por $\alpha(s)$. Sus vectores directores son $\mathbf{t}(s_0)$ y $\alpha(s) - \alpha(s_0)$.
Paso 2: qué hay que comprobar. Para que Π_s exista, sus dos directores deben ser independientes. El desarrollo siguiente lo demostrará para todo $s \neq s_0$ suficientemente próximo, a la vez que identifica el plano límite.
Paso 3: amplificar el residuo de Taylor (el núcleo de la prueba). El segundo director tiende a cero, así que en el límite no dice nada por sí solo; hay que quitarle la parte tangencial y reescalar lo que queda hasta que tenga tamaño finito. Escríbase el desarrollo de Taylor de orden 2 de α en un entorno de s_0:

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + (s - s_0)\dot{\alpha}(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2}\ddot{\alpha}(s_0) + \frac{(s - s_0)^3}{6}v(s), \qquad \lim_{s \to s_0} v(s) = \dddot{\alpha}(s_0).$$

Como $\dot{\alpha}(s_0) = \mathbf{t}(s_0)$, se puede despejar

$$\frac{\alpha(s) - \alpha(s_0) - (s - s_0)\mathbf{t}(s_0)}{\frac{(s-s_0)^2}{2}} = \ddot{\alpha}(s_0) + \frac{s - s_0}{3}\, v(s).$$

Paso 4: los normales no se anulan y convergen. Llamemos $w(s)$ al vector del miembro izquierdo. El paso anterior dice que $w(s) \to \ddot{\alpha}(s_0)$, y por tanto

$$\mathbf{t}(s_0) \times w(s) \longrightarrow \mathbf{t}(s_0) \times \ddot{\alpha}(s_0) = k(s_0)\mathbf{b}(s_0) \neq 0.$$

Así, para $s \neq s_0$ suficientemente cerca, $\mathbf{t}(s_0)$ y $w(s)$ son independientes. Generan el mismo plano que $\mathbf{t}(s_0)$ y $\alpha(s) - \alpha(s_0)$, luego Π_s está bien definido. Al normalizar el producto vectorial obtenemos normales unitarios que convergen a $\mathbf{b}(s_0)$. Como todos los planos pasan por $\alpha(s_0)$, esa convergencia prueba que su límite es precisamente el plano osculador. ■

LA IDEA: QUÉ ESTÁ PASANDO DE VERDAD EN ESA DEMOSTRACIÓN

El movimiento decisivo es el despeje. Uno tiene un vector, $\alpha(s) - \alpha(s_0)$, que apunta del punto fijo al punto móvil y que está en Π_s por construcción. El problema es que ese vector tiende a cero, así que en el límite no dice nada.
La solución es restarle su parte tangencial, que es la que domina, y dividir por $(s - s_0)^2/2$, que es el orden exacto de lo que queda. Es amplificar el residuo hasta que tenga tamaño finito. Y lo que aparece al amplificarlo es $\ddot{\alpha}(s_0)$.
Por eso el plano osculador es el que mejor se adapta: es el que contiene la información de segundo orden de la curva, mientras que los otros planos del haz solo recogen la de primer orden.

Qué hizo cada hipótesis. La clase $C^{3)}$ permite escribir el resto como arriba; para este resultado bastaría $C^{2)}$ y el resto $o((s - s_0)^2)$. La condición $k(s_0) > 0$ garantiza que el normal límite no se anule: es lo que asegura tanto la existencia de los planos cercanos como su límite. Cuando $k(s_0) = 0$, este argumento no decide y el triedro de Frenet no está definido; un plano límite podría existir por otras razones.

La figura 1.6 muestra cómo se acercan esos planos.

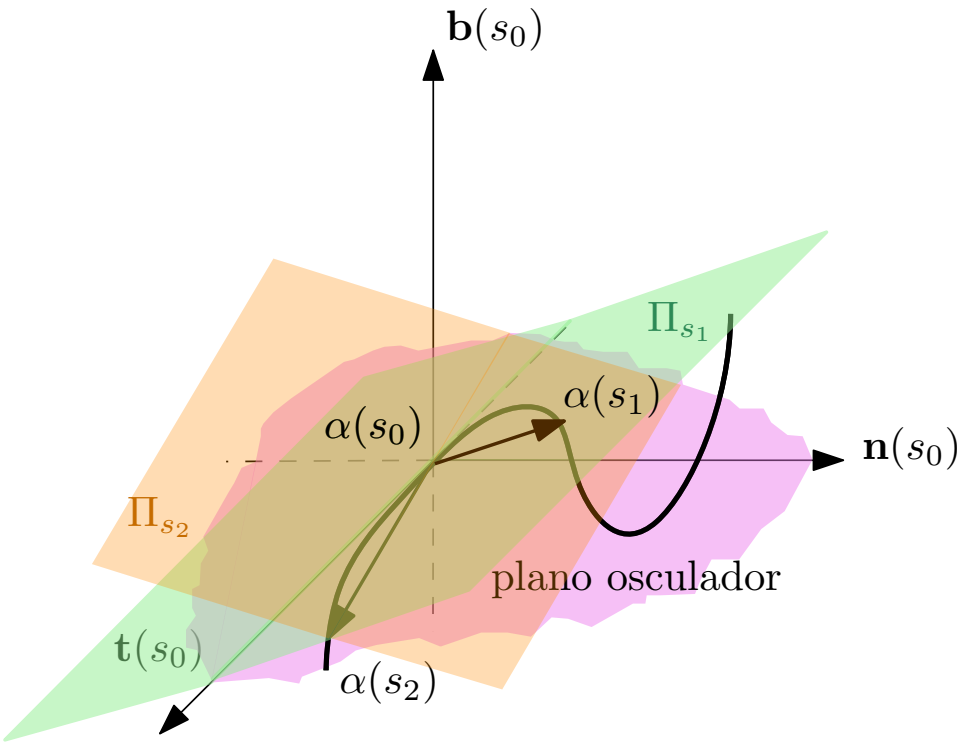


Figura 1.6: El plano osculador como plano límite. Todos los planos del haz contienen la recta tangente en $\alpha(s_0)$. Los puntos $\alpha(s_1)$ y $\alpha(s_2)$ determinan los planos Π_{s_1} y Π_{s_2}; al acercarse $\alpha(s)$ a $\alpha(s_0)$, el plano Π_s tiende al osculador, generado por $\mathbf{t}(s_0)$ y $\mathbf{n}(s_0)$. Figura del material oficial, lección 1, p. 13.

Corolario. Si una curva de $\mathbb{R}^3$ está contenida en un plano, todos sus planos osculadores coinciden con ese plano.

La idea, en una línea. Si la curva vive dentro de un plano, todos los planos del haz que el teorema anterior hacía girar son ya ese mismo plano, así que el límite no tiene a dónde ir.

> Si α está contenida en un plano Π, entonces para cualquier valor de s se tiene $\Pi_s = \Pi$, porque tanto la tangente como el punto $\alpha(s)$ están en Π. Luego el plano límite cuando $s \to s_0$ es el propio Π, y por el teorema anterior ese límite es el osculador en $\alpha(s_0)$. Como s_0 era arbitrario, vale en todos los puntos. ■

Observación. El recíproco también es cierto y es todavía más fácil: si todos los planos osculadores de una curva coinciden, la curva está contenida en ese plano común, porque cada punto pertenece a su propio plano osculador.

1.5.3 La torsión

Para estudiar la torsión y las ecuaciones de Frenet supondremos que la curva es de clase al menos $C^{3)}$, además de tener curvatura no nula en el tramo considerado.

LA IDEA: QUÉ QUEREMOS MEDIR Y POR QUÉ DEBE TENER SIGNO

Ya sabemos que el plano osculador es el que mejor se adapta a la curva en cada punto. Si la curva es plana, ese plano es siempre el mismo. Si no lo es, va basculándose al avanzar, y lo natural es medir la velocidad de ese basculamiento. Eso es la torsión.
Dos observaciones antes de la definición, y las dos son necesarias para entender por qué la definición es la que es.
La primera: el plano osculador queda determinado por su vector normal, que es $\mathbf{b}$. Así que medir cómo bascula el plano es medir cómo cambia $\mathbf{b}$, es decir, mirar $\dot{\mathbf{b}}$.
La segunda: la curva puede separarse de su plano osculador hacia un lado o hacia el otro. Son situaciones geométricamente distintas, y una magnitud que no las distinguiera perdería información. Por eso la torsión tiene signo, mientras que la curvatura no.

Como primera aproximación se pondrá $|\tau(s)| = |\dot{\mathbf{b}}(s)|$, y ahora se determina la dirección de $\dot{\mathbf{b}}$. Hay dos ingredientes:

- $\mathbf{b}$ es unitario, luego por la regla de la sección anterior $\dot{\mathbf{b}} \perp \mathbf{b}$.
- Derivando la identidad $\mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{b}(s) = 0$ se obtiene $\dot{\mathbf{t}}(s)\cdot\mathbf{b}(s) + \mathbf{t}(s)\cdot\dot{\mathbf{b}}(s) = 0$. Ahora bien, $\dot{\mathbf{t}}(s) = \ddot{\alpha}(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$, que es ortogonal a $\mathbf{b}(s)$, de modo que el primer sumando es cero. Luego $\mathbf{t}(s)\cdot\dot{\mathbf{b}}(s) = 0$, es decir, $\dot{\mathbf{b}} \perp \mathbf{t}$.

Si $\dot{\mathbf{b}}$ es ortogonal a $\mathbf{b}$ y a $\mathbf{t}$, y el triedro es una base de $\mathbb{R}^3$, entonces $\dot{\mathbf{b}}$ es paralelo a $\mathbf{n}$. Solo falta fijar el signo, y se elige así:

Definición. Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. en $\mathbb{R}^3$. Se llama **torsión** de α a la función $\tau = \tau(s)$ definida por

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = -\tau(s)\,\mathbf{n}(s).$$

El signo menos es una convención, pero no es arbitraria: está elegida para que $\tau > 0$ signifique que la curva atraviesa su plano osculador en el sentido de $\mathbf{b}$. La justificación completa aparece más abajo, al estudiar la forma canónica local.

Proposición. Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n.. Entonces

$$\tau(s) = \frac{(\dot{\alpha}(s), \ddot{\alpha}(s), \dddot{\alpha}(s))}{k^2(s)}.$$

La idea, antes de la cuenta. La definición de torsión está escrita con $\mathbf{b}$, que es un objeto de segunda mano: para tenerlo hay que haber calculado antes $\mathbf{t}$, k y $\mathbf{n}$. La fórmula que sigue lo devuelve todo a las derivadas de α, que es lo único que se tiene en la práctica. El mecanismo es de una pieza: se despeja τ como un producto escalar, se sustituye $\mathbf{b}$ por su expresión en derivadas, se deriva, y se tira todo lo que resulte ortogonal. Los sumandos con dos vectores iguales o con un producto escalar entre vectores perpendiculares se anulan; solo sobrevive uno. *Ese superviviente es el producto mixto de las tres primeras derivadas*, que es exactamente el objeto que vale cero cuando la curva no se sale de un plano.

Paso 1: despejar la torsión como un producto escalar. De la definición, $\dot{\mathbf{b}} = -\tau\mathbf{n}$, y multiplicando escalarmente por $\mathbf{n}$, que es unitario, se obtiene $\tau = -\dot{\mathbf{b}}\cdot\mathbf{n}$.
Paso 2: escribir b en derivadas de α y derivar. Partiendo de

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) = \dot{\alpha}(s) \times \frac{\ddot{\alpha}(s)}{k(s)},$$

y derivando con la regla del producto,

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = \underbrace{\frac{\ddot{\alpha}(s) \times \ddot{\alpha}(s)}{k(s)}}_{=0} + \dot{\alpha}(s) \times \frac{\dddot{\alpha}(s)k(s) - \ddot{\alpha}(s)\dot{k}(s)}{k^2(s)} = \frac{\dot{\alpha}(s) \times \dddot{\alpha}(s)}{k(s)} - \frac{\big(\dot{\alpha}(s) \times \ddot{\alpha}(s)\big)\dot{k}(s)}{k^2(s)}.$$

Paso 3: sustituir y matar por ortogonalidad lo que sobra (el núcleo de la prueba). Sustituyendo en $\tau = -\dot{\mathbf{b}}\cdot\mathbf{n}$ con $\mathbf{n} = \ddot{\alpha}/k$,

$$\tau(s) = -\frac{\big(\dot{\alpha} \times \dddot{\alpha}\big)\cdot\ddot{\alpha}}{k^2} + \frac{\big(\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}\big)\cdot\ddot{\alpha}\ \dot{k}}{k^3}.$$

El segundo término se anula, porque $\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}$ es ortogonal a $\ddot{\alpha}$ por definición de producto vectorial. Con él desaparece también la única derivada de la curvatura que había aparecido, y por eso la fórmula final no contiene $\dot{k}$: la torsión no necesita saber cómo cambia la curvatura. En el primero se usa que el producto mixto es antisimétrico, es decir, que cambia de signo al intercambiar dos de sus argumentos:

$$-\big(\dot{\alpha} \times \dddot{\alpha}\big)\cdot\ddot{\alpha} = \big(\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}\big)\cdot\dddot{\alpha} = (\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}),$$

de donde sale la fórmula. ■

Qué hizo cada hipótesis. La curvatura aparece en el denominador y aparece al cuadrado, así que la hipótesis $k > 0$ no es un adorno: donde la curvatura se anula, la fórmula no está definida, y no lo está porque tampoco lo está $\mathbf{n}$, que es de donde salió todo. La clase $C^{3)}$ hace falta para que exista $\dddot{\alpha}$, que es literalmente el ingrediente nuevo de esta sección: la curvatura solo necesitaba dos derivadas, la torsión necesita tres. Ahí se ve, medida en derivadas, la diferencia entre doblarse y salirse del plano.

EXPLÍCATE. *En la demostración hay dos términos que se anulan por la misma razón geométrica. Di cuál es esa razón en una frase, sin fórmulas.*

LA IDEA: POR QUÉ UN PRODUCTO MIXTO, Y NO OTRA COSA

La fórmula tiene la forma que debe tener, y verlo ahorra memorizarla.
Un producto mixto de tres vectores es cero exactamente cuando son coplanarios. Aquí los tres vectores son las tres primeras derivadas de la curva. Si la curva vive en un plano, sus tres derivadas viven en la dirección de ese plano, son coplanarias y el producto mixto se anula. Si la curva se escapa, la tercera derivada tiene una componente fuera del plano generado por las dos primeras, y el producto mixto la detecta.
Es decir: el producto mixto es, literalmente, el detector de «salirse del plano». Y el signo del producto mixto dice hacia qué lado. Justo lo que pedíamos.

Proposición. Una curva alabeada $\alpha = \alpha(s)$ es plana si y solo si su torsión es idénticamente nula.

La idea, antes de la cuenta. Estar en un plano es tener una dirección prohibida: existe un vector fijo $\mathbf{b}$ al que la curva nunca avanza. Y torsión nula es exactamente que la binormal no se mueva, es decir, que exista ese vector fijo. La ida es leer eso de derecha a izquierda y la vuelta de izquierda a derecha; el único trabajo real es reconocer, en la vuelta, que una derivada nula significa una cantidad constante, y que esa cantidad constante *es* la ecuación del plano.

Ida: si es plana, el osculador no bascula. Si α es plana, por el corolario (p. 33) su plano osculador es siempre el mismo plano Π. El binormal es un vector unitario perpendicular a Π, así que en cada punto solo puede valer $\mathbf{b}_0$ o $-\mathbf{b}_0$, siendo $\mathbf{b}_0$ uno de los dos unitarios normales a Π. Falta ver que no salta de uno a otro, y eso lo da la continuidad: la función $s \mapsto \mathbf{b}(s)\cdot\mathbf{b}_0$ es continua en un intervalo y solo toma los valores 1 y -1, y por el teorema de Bolzano no puede pasar de uno a otro sin tomar los valores intermedios. Luego el campo binormal es constante, su derivada es nula y la torsión también.
Vuelta: si la binormal no se mueve, la curva vive en un plano (el núcleo de la prueba). Recíprocamente, supóngase $\tau(s) = 0$ para todo s. Entonces $\dot{\mathbf{b}}(s) = 0$, es decir, $\mathbf{b}(s) = \mathbf{b}$ es un vector constante, digamos $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. De $\mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{b} = 0$ se sigue $\dot{\alpha}(s)\cdot\mathbf{b} = 0$, que es lo mismo que

$$\frac{d}{ds}\big(\alpha(s)\cdot\mathbf{b}\big) = 0.$$

Luego $\alpha(s)\cdot\mathbf{b} = c$ es constante. Escribiendo $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$, esa igualdad es $b_1x + b_2y + b_3z = c$, la ecuación de un plano. Por tanto α es plana. ■

EXPLÍCATE. *El paso decisivo del recíproco es reconocer que $\dot{\alpha}\cdot\mathbf{b}$ es la derivada de $\alpha\cdot\mathbf{b}$. ¿Por qué hace falta que $\mathbf{b}$ sea constante para poder hacer eso? Este truco, integrar una derivada que se anula para obtener una ecuación implícita, reaparece en varios de los ejercicios que siguen.*

1.5.4 Las ecuaciones de Frenet-Serret

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: EL TRIEDRO ES UN OBSERVADOR QUE VIAJA

Ese es el cambio de punto de vista que ordena toda la lección, y conviene decirlo antes de la cuenta porque la cuenta, sin él, parece una manipulación de productos vectoriales.

La imagen. Imagínese un piloto sentado sobre la curva y viajando por ella a velocidad uno. Lleva tres ejes atornillados a su asiento: $\mathbf{t}$ apunta al frente, hacia donde va; $\mathbf{n}$ apunta hacia donde se está doblando; y $\mathbf{b}$ es el eje del ala, perpendicular a los otros dos. El piloto no ve la curva desde fuera. Lo único que percibe es cómo gira su propia cabina.

Y una cabina rígida solo puede hacer una cosa: girar. No puede estirarse, ni encogerse, ni deformarse, porque los tres ejes son unitarios y perpendiculares en todo momento. Por tanto las derivadas de los tres vectores no pueden ser cualquier cosa: tienen que ser exactamente las que describen una rotación. **Aquí está el corazón de todo: las ecuaciones de Frenet-Serret no añaden información nueva, solo escriben la única cosa que un triedro rígido puede hacer al avanzar.**

Qué ve girar el piloto. Dos cosas, y solo dos. Una es el *cabeceo*: el morro sube o baja dentro del plano osculador, y la velocidad de ese cabeceo es la curvatura k. La otra es el *alabeo*: el plano osculador entero bascula alrededor de la dirección de marcha, y la velocidad de ese basculamiento es la torsión τ. No hay una tercera componente: hemos elegido $\mathbf{n}$ precisamente en la dirección de $\dot{\mathbf{t}}$, de modo que $\dot{\mathbf{t}}$ no tiene componente binormal. Esa elección de los ejes, además de su rigidez, deja dos funciones y no tres.

Y la imagen predice el enunciado. Si el piloto solo cabecea y solo bascula, entonces $\mathbf{t}$ solo puede moverse hacia $\mathbf{n}$ (primera ecuación), $\mathbf{b}$ solo puede moverse hacia $\mathbf{n}$ (tercera), y $\mathbf{n}$, que es perpendicular a los dos, recibe la reacción de ambos y por eso es el único que tiene dos términos (segunda). El sistema no podía salir de otra manera.

Teorema (ecuaciones de Frenet-Serret)**.** Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n.. Entonces

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}}(s) = k(s)\,\mathbf{n}(s), \\ \dot{\mathbf{n}}(s) = -k(s)\,\mathbf{t}(s) + \tau(s)\,\mathbf{b}(s), \\ \dot{\mathbf{b}}(s) = -\tau(s)\,\mathbf{n}(s). \end{cases}$$

Paso 1: las ecuaciones primera y tercera son definiciones despejadas. La curvatura se definió como $k = |\ddot{\alpha}|$ y el normal principal como $\mathbf{n} = \ddot{\alpha}/k$; multiplicando la segunda igualdad por k y recordando que $\ddot{\alpha} = \dot{\mathbf{t}}$, queda $\dot{\mathbf{t}} = k\,\mathbf{n}$. La torsión se definió directamente por $\dot{\mathbf{b}} = -\tau\,\mathbf{n}$. Así que dos de las tres ecuaciones no tienen contenido nuevo: dicen lo que ya se había decidido llamar curvatura y torsión. Solo la del medio hay que probarla.

Paso 2: derivar el normal principal usando que el triedro es un producto vectorial (el núcleo de la prueba). Aquí está el único movimiento real de la demostración: en vez de derivar $\mathbf{n}$ a partir de su definición, que obligaría a derivar un cociente y sacar $\dot{k}$, se lo escribe como $\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}(s)$ y se deriva ese producto. Así las únicas derivadas

que aparecen son $\dot{\mathbf{b}}$ y $\dot{\mathbf{t}}$, que ya se conocen por el paso 1:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{n}}(s) &= \dot{\mathbf{b}}(s) \times \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \times \dot{\mathbf{t}}(s) \\ &= -\tau(s)\,\mathbf{n}(s) \times \mathbf{t}(s) + k(s)\,\mathbf{b}(s) \times \mathbf{n}(s) = \tau(s)\,\mathbf{b}(s) - k(s)\,\mathbf{t}(s).\end{aligned}$$

Paso 3: cerrar con las identidades del triedro. En el último paso se han usado $\mathbf{n} \times \mathbf{t} = -\mathbf{b}$ y $\mathbf{b} \times \mathbf{n} = -\mathbf{t}$, que salen de que el triedro es ortonormal y directo. ■

Qué hizo cada hipótesis. Todo el aparato descansa en que $k > 0$ en el punto: sin eso no hay $\mathbf{n}$, y sin $\mathbf{n}$ no hay triedro, no hay plano osculador y no hay torsión. Por eso las ecuaciones de Frenet-Serret son un resultado *local* y solo valen en los tramos de curvatura no nula; los puntos de curvatura nula se estudian aparte al final del capítulo. Y la parametrización natural es lo que hace que el sistema quede tan limpio: si se deriva respecto de un parámetro arbitrario, cada ecuación se llena de factores $|\alpha'|$ que no dicen nada de la forma de la curva y solo dicen a qué velocidad se la recorre.

La idea: leer las tres ecuaciones de un vistazo

Puestas en forma matricial, las tres ecuaciones son

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{n}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{n}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix}.$$

La matriz es **antisimétrica**, y eso no es casualidad. Dice tres cosas de golpe:

1. **No hay términos en la diagonal.** Ningún vector del triedro tiene componente de derivada en su propia dirección, que es otra vez la regla de que un campo unitario es ortogonal a su derivada.
2. **No hay acoplamiento entre t y b.** Este cero no viene solo de la antisimetría: viene de haber elegido $\mathbf{n}$ en la dirección de $\dot{\mathbf{t}}$. El tangente y el binormal solo se comunican a través del normal principal.
3. **Solo hay dos parámetros libres**, k y τ. Una matriz antisimétrica de orden 3 tiene exactamente tres entradas independientes, y una de ellas está forzada a ser nula por el punto anterior. Ahí está, en forma algebraica, la razón de que dos números basten para describir una curva del espacio.

Conexión: Álgebra Lineal y Geometría

La antisimetría de la matriz de Frenet no es una curiosidad: es exactamente la condición necesaria y suficiente para que el triedro siga siendo ortonormal al avanzar.
El argumento es corto. Sea $A(s)$ la matriz cuyas filas son los tres vectores del triedro. Ser ortonormal es $AA^{\mathsf{T}} = I$. Derivando, $\dot{A}A^{\mathsf{T}} + A\dot{A}^{\mathsf{T}} = 0$, es decir, la matriz $M = \dot{A}A^{\mathsf{T}}$ cumple $M + M^{\mathsf{T}} = 0$: es antisimétrica. Y M es precisamente la matriz de Frenet.
Dicho de otro modo: el triedro de Frenet describe una curva dentro del grupo de rotaciones $SO(3)$, y las matrices antisimétricas son el espacio tangente a ese grupo en la identidad. La curvatura y la torsión son las coordenadas de la velocidad angular con la que gira el triedro. Es la misma álgebra que aparece en Mecánica al describir el giro de un sólido rígido.

DE DÓNDE VIENE: FRENET, SERRET Y UNA TESIS DE PROVINCIAS

Las fórmulas llevan dos nombres porque se descubrieron dos veces, casi a la vez y sin que ninguno de los dos supiera del otro. Jean Frédéric Frenet las obtuvo en su tesis doctoral, defendida en Toulouse en 1847, y publicó parte de ellas en 1852. Joseph Alfred Serret llegó a un sistema equivalente en 1851, de forma independiente.
Antes que ellos, Michel Ange Lancret había introducido en 1806 la idea de una *segunda curvatura* para curvas del espacio, que es en esencia la torsión aunque sin el aparato del triedro móvil. El nombre de Lancret sigue asociado a un resultado que aparecerá en los ejercicios: una curva es una hélice si y solo si el cociente τ/k es constante.
Merece la pena notar cuánto tiempo pasó entre Clairaut, que en 1731 veía que hacían falta dos curvaturas, y Frenet, que en 1847 escribe cómo se relacionan. Ciento dieciséis años para formalizar una intuición correcta.

1.5.5 La forma canónica local

Las ecuaciones de Frenet-Serret permiten describir cómo es una curva vista desde su propio triedro, cerca de un punto. El resultado se llama *forma canónica local* y es, con diferencia, la herramienta más útil del capítulo para razonar sin calcular.

Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. de clase al menos 3, y sea $\alpha(0)$ un punto con $k(0) > 0$ y $\tau(0) \neq 0$. Se toma $s_0 = 0$ por comodidad, cosa que siempre puede hacerse cambiando el punto de referencia del parámetro natural. El desarrollo de Taylor de orden 3 es

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s\,\dot\alpha(0) + \frac{s^2}{2}\ddot\alpha(0) + \frac{s^3}{6}\dddot\alpha(0) + o(s^3).$$

Las tres derivadas se escriben en el triedro con las ecuaciones de Frenet-Serret, cada una derivando la anterior:

$$\dot\alpha = \mathbf{t}, \qquad \ddot\alpha = \dot{\mathbf{t}} = k\,\mathbf{n}, \qquad \dddot\alpha = \frac{d}{ds}(k\,\mathbf{n}) = \dot k\,\mathbf{n} + k(-k\,\mathbf{t} + \tau\,\mathbf{b}) = -k^2\,\mathbf{t} + \dot k\,\mathbf{n} + k\tau\,\mathbf{b}.$$

Solo la tercera tiene trabajo. La regla del producto da dos sumandos: uno porque la curvatura cambia, $\dot k\,\mathbf{n}$, y otro porque el normal principal gira, $k\,\dot{\mathbf{n}}$. Es el segundo el que trae la segunda ecuación de Frenet-Serret y, con ella, la torsión. Ahí se ve, en una línea, por qué la torsión no aparece en el desarrollo hasta el tercer orden.

Escribiendo $k_0 = k(0)$, $\tau_0 = \tau(0)$, $\mathbf{t}_0 = \mathbf{t}(0)$, $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}(0)$, $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}(0)$ y sustituyendo cada derivada por su expresión en el triedro mediante Frenet-Serret, se obtiene

$$\alpha(s) - \alpha(0) = \left(s - \tfrac{1}{6}k_0^2 s^3\right)\mathbf{t}_0 + \left(\tfrac{1}{2}k_0 s^2 + \tfrac{1}{6}\dot k_0 s^3\right)\mathbf{n}_0 + \left(\tfrac{1}{6}k_0\tau_0 s^3\right)\mathbf{b}_0 + o(s^3).$$

Es decir, las coordenadas de $\alpha(s) - \alpha(0)$ respecto de la referencia de Frenet en $\alpha(0)$ son

$$\begin{cases} x_1(s) = s + o(s^2), \\ x_2(s) = \tfrac{1}{2}k_0 s^2 + o(s^2), \\ x_3(s) = \tfrac{1}{6}k_0\tau_0 s^3 + o(s^3). \end{cases}$$

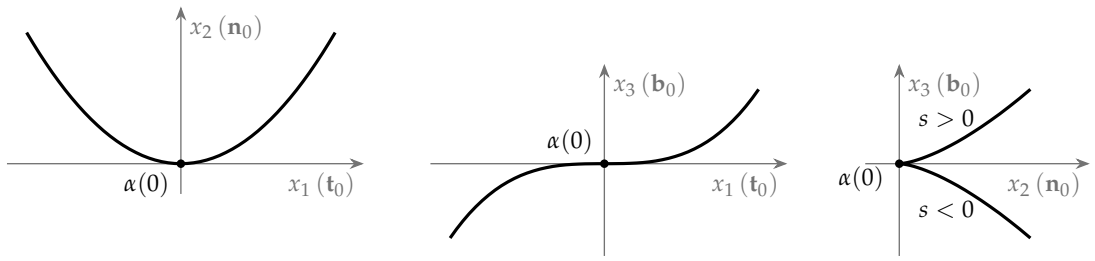
LA IDEA: LA CURVA ES RECTA, PARÁBOLA Y CÚBICA A LA VEZ

Esta es la forma más informativa de mirar una curva del espacio, y conviene guardarla como imagen y no como fórmula.
Cerca de un punto, y vista desde su propio triedro, toda curva se comporta así:

- **en la dirección del tangente**, crece como s: avanza a velocidad uno, como debe ser;
- **en la dirección del normal principal**, crece como s^2: se dobla, y el coeficiente de esa parábola es la curvatura;
- **en la dirección de la binormal**, crece como s^3: se escapa del plano osculador, y el coeficiente de esa cúbica es el producto de curvatura por torsión.

Las proyecciones sobre los tres planos son, respectivamente, una parábola sobre el osculador, una cúbica sobre el rectificante y una cúspide sobre el normal.

La figura 1.7 reúne las tres proyecciones.



sobre el plano osculador una parábola

sobre el plano rectificante una cúbica

sobre el plano normal una cúspide

Figura 1.7: Las tres proyecciones de la forma canónica local. Cerca de $\alpha(0)$, y en la referencia de Frenet de ese punto, la curva es $x_1 = s$, $x_2 = \frac{1}{2}k_0 s^2$, $x_3 = \frac{1}{6}k_0\tau_0 s^3$ salvo términos de orden superior; el dibujo usa esos términos principales, con $k_0 = \tau_0 = 1$ (para $\tau_0 < 0$ los dos últimos paneles se reflejan, y las formas no cambian). Cada panel tiene la misma escala en sus dos ejes. Las tres conclusiones del texto se leen aquí de un vistazo: la curva **atraviesa el plano normal**, porque x_1 cambia de signo; **no atraviesa el rectificante**, porque la parábola del primer panel se queda por encima del eje x_1 y la cúspide del tercero a la derecha del eje x_3; y **sí atraviesa el osculador**, porque la cúbica del segundo panel cruza el eje x_1 y las dos ramas de la cúspide quedan a uno y otro lado del eje x_2. La cúspide es la parábola semicúbica $x_3^2 = \left(2\tau_0^2/9k_0\right)x_2^3$, tangente a $\mathbf{n}_0$ en el punto.

De esas tres expresiones se leen directamente tres conclusiones sobre el comportamiento de la curva en un entorno de $\alpha(0)$:

1. **La curva atraviesa el plano normal**, en el sentido de $\mathbf{t}_0$: al crecer s, la coordenada $x_1(s)$ pasa de negativa a positiva.
2. **La curva no atraviesa el plano rectificante.** Como $k_0 > 0$, se tiene $x_2(s) \geq 0$: la curva toca el plano y vuelve al semiespacio hacia el que apunta $\mathbf{n}_0$.
3. **La curva atraviesa el plano osculador**, porque $x_3(s)$ cambia de signo con s. Si $\tau_0 > 0$ lo atraviesa en el sentido de $\mathbf{b}_0$, y si $\tau_0 < 0$ en el contrario.

La tercera conclusión es la que justifica el signo menos en la definición de la torsión. Con el otro convenio, torsión positiva significaría atravesar el osculador en sentido contrario al binormal, que es menos natural.

Teorema. Bajo las hipótesis anteriores, $k(0) > 0$ y $\tau(0) \neq 0$, el plano osculador es el único plano del haz de arista la recta tangente a α en $\alpha(0)$ que es atravesado localmente por la curva.

La idea, antes de la cuenta. Atravesar un plano es cambiar de signo la distancia a ese plano. Y el signo de una función cerca de cero lo decide su primer término no nulo de Taylor: si es de grado par, no cambia; si es de grado impar, sí. Todo el teorema consiste en escribir la distancia a un plano genérico del haz y mirar de qué grado es su primer término. Sale de grado dos para todos los planos menos uno, y de grado tres justo para el osculador.

Paso 1: parametrizar el haz de planos. En las coordenadas de la forma canónica local, el haz de planos que contienen a la recta tangente, es decir, al eje x_1, es $\lambda x_2 + \mu x_3 = 0$, con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.
Paso 2: medir la distancia a cada plano sobre la propia curva. Evaluando en la curva para $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$,

$$\lambda x_2(s) + \mu x_3(s) = \tfrac{1}{2}\lambda k_0 s^2 + \tfrac{1}{6}\big(\lambda \dot{k}_0 + \mu k_0 \tau_0\big) s^3 + o(s^3).$$

Paso 3: la paridad del primer término decide (el núcleo de la prueba). Si $\lambda \neq 0$, el sumando en s^2 domina cerca de $s = 0$ y la expresión mantiene siempre el signo de λk_0: la curva no atraviesa ese plano, se queda a un lado. La única posibilidad de cambio de signo es $\lambda = 0$, que da el plano $x_3 = 0$, es decir, el plano osculador. En ese caso $\mu \neq 0$ y el término dominante es $\mu k_0 \tau_0 s^3/6$, con coeficiente no nulo, luego sí cambia de signo. ■

Qué hizo cada hipótesis. La condición $k_0 > 0$ es la que hace que el término cuadrático sea realmente no nulo, y por tanto la que impide que los demás planos del haz sean atravesados; con $k_0 = 0$ el argumento no distingue nada. Y $\tau_0 \neq 0$ es la que asegura que el término cúbico del plano osculador no se anule: si la torsión fuese cero en el punto, la curva podría no atravesar el osculador, y de hecho una curva plana no lo atraviesa nunca porque vive dentro de él.

LA IDEA: POR QUÉ GANAN LAS POTENCIAS PARES

El argumento se reduce a una observación elemental que conviene tener a mano, porque resuelve varios ejercicios de contacto entre curvas y planos.
Una función que cerca de cero se parece a cs^2 no cambia de signo, porque s^2 es siempre positivo. Una que se parece a cs^3 sí cambia, porque s^3 hereda el signo de s. El término de orden más bajo con coeficiente no nulo es el que manda, y su paridad decide si hay cruce.
El plano osculador es especial porque es el único del haz que anula el término cuadrático y deja el cúbico al mando.

1.5.6 El teorema fundamental de las curvas alabeadas

Teorema (fundamental de curvas alabeadas)**.** Sean $k, \tau : (a,b) \to \mathbb{R}$ dos funciones con $k(s) > 0$ para todo $s \in (a,b)$, $k \in C^{1)}$ y τ continua. Entonces existe una c.p.r. $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$, única salvo movimiento rígido directo de $\mathbb{R}^3$, tal que s es su parámetro natural, k su curvatura y τ su torsión.

Un movimiento rígido *directo* de $\mathbb{R}^3$ es un giro, una traslación o su composición. Los movimientos inversos, como una reflexión en un plano, cambian el signo de la torsión y no son los que se necesitan en este teorema. En virtud de este teorema, se dice que dos c.r.p.n. $\alpha, \beta : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ son **la misma** si coinciden como aplicaciones, y que son **congruentes** si existe un movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$ que lleva una imagen en la otra.

LA IDEA: QUÉ SIGNIFICA ESTE TEOREMA

Es el cierre de la lección y merece leerse dos veces.
Dice que la curvatura y la torsión *son* la curva. Toda la información geométrica de una curva del espacio cabe en dos funciones de una variable. Lo único que esas dos funciones no recuerdan es dónde estaba la curva y cómo estaba orientada en el espacio, que es precisamente lo que no es geométrico.
Y funciona en los dos sentidos, que es lo notable:

- **Unicidad.** Si dos curvas tienen la misma curvatura y la misma torsión, son la misma salvo colocarlas una encima de la otra. Es lo que se usa para demostrar que dos curvas construidas de formas distintas coinciden, sin necesidad de calcular ninguna de las dos.
- **Existencia.** Dadas dos funciones cualesquiera con las hipótesis del enunciado, hay una curva con esa curvatura y esa torsión. Se puede *diseñar* una curva pidiendo cómo quiere uno que se doble y cómo quiere que se escape.

La segunda mitad es la que resuelve los ejercicios del tipo «encontrar la única curva tal que…». La primera es la que permite contestar «sin hacer ningún cálculo adicional», que es como se formulan varios de los enunciados.
La imagen que lo predice: los datos del giro reconstruyen el viaje. Vuélvase al piloto de la subsección anterior. Darle $k(s)$ y $\tau(s)$ es entregarle, para cada punto del trayecto, las dos únicas órdenes que su cabina admite: cuánto cabecear y cuánto bascular. Si además se le dice dónde empieza y cómo está orientado al arrancar, el viaje queda completamente determinado, porque en cada instante sabe hacia dónde apunta y avanza a velocidad uno. Eso es la existencia. Y si a dos pilotos se les dan las mismas órdenes pero se les suelta en sitios distintos o mirando hacia otro lado, sus trayectorias salen idénticas salvo colocar una encima de la otra: eso es «única salvo movimiento rígido». El movimiento rígido es, exactamente, la libertad de elegir dónde y cómo empieza el viaje.

El mecanismo de la prueba, en tres movimientos. La demostración formal no es geometría sino un teorema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, y por eso la caja siguiente la enuncia con precisión. Pero conviene ver antes su esqueleto, porque explica de dónde sale cada parte del enunciado:

Movimiento 1: convertir el enunciado en un problema de valores iniciales. Se leen las ecuaciones de Frenet-Serret al revés. En vez de partir de una curva y obtener k y τ, se toman k

y τ como datos y se busca el triedro: nueve funciones incógnita (las componentes de $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ y $\mathbf{b}$) que satisfacen un sistema lineal de nueve ecuaciones de primer orden. Se fija como condición inicial un triedro ortonormal directo cualquiera.

Movimiento 2: aplicar existencia y unicidad, y comprobar que la solución es un triedro de verdad (el núcleo de la prueba). El teorema de existencia y unicidad para sistemas lineales con coeficientes continuos da una única solución definida en todo (a, b). Pero falta lo que de verdad hay que probar: que esos nueve números forman en cada instante una base ortonormal directa, y no tres vectores cualesquiera. Y sale solo, precisamente por la antisimetría de la matriz de Frenet: los seis productos escalares $\mathbf{t}\cdot\mathbf{t}$, $\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}$, ... satisfacen a su vez un sistema lineal homogéneo cuya solución con dato inicial ortonormal es la constante ortonormal, y por unicidad no hay otra. Es decir, *la cabina se mantiene rígida porque las órdenes que recibe son órdenes de giro*.

Movimiento 3: integrar el tangente para recuperar la curva. Obtenido $\mathbf{t}$, se define $\alpha(s) = \alpha(s_0) + \int_{s_0}^{s} \mathbf{t}(\sigma)\, d\sigma$. Esa curva tiene velocidad unitaria por construcción, luego s es su parámetro natural, y derivando se comprueba que su curvatura es k y su torsión es τ. La constante de integración es el punto de partida, y la libertad de elegir el triedro inicial es el giro: entre las dos agotan el movimiento rígido, y de ahí el «salvo» del enunciado.

CONEXIÓN: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

La demostración del teorema fundamental no es geometría, es el teorema de existencia y unicidad para sistemas lineales de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, aplicado a las propias ecuaciones de Frenet-Serret.

Vistas como sistema, las ecuaciones de Frenet-Serret son nueve ecuaciones lineales de primer orden en las nueve componentes de $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ y $\mathbf{b}$, con coeficientes $k(s)$ y $\tau(s)$. Su continuidad permite resolver el sistema; la condición adicional $k \in C^{1)}$ garantiza que la curva reconstruida sea de clase $C^{3)}$, al derivar $\ddot{\alpha} = k\mathbf{n}$. El teorema de existencia y unicidad para sistemas lineales con coeficientes continuos da entonces una única solución para cada condición inicial, y la condición inicial es un triedro ortonormal directo colocado en un punto.

De ahí sale todo lo demás. La solución existe y es única una vez fijados el punto de partida y la orientación inicial del triedro: eso es exactamente «única salvo movimiento rígido». Y después se recupera α integrando $\dot{\alpha} = \mathbf{t}$.

Merece la pena notar que el sistema es *lineal*, que es lo que garantiza que la solución está definida en todo el intervalo (a, b) y no se escapa a tiempo finito. Con un sistema no lineal el teorema sería solo local.

1.5.7 Fórmulas en un parámetro arbitrario

Todo lo anterior se ha construido con el parámetro natural, que es el que hace las demostraciones limpias. En la práctica casi nunca se dispone de él, porque la integral $\int |\alpha'|$ rara vez se calcula. Hace falta traducir.

LA IDEA: LAS DOS DEMOSTRACIONES SON LA MISMA, Y CABEN EN UNA FRASE

Las cuatro fórmulas que siguen tienen dos demostraciones escritas, pero un solo mecanismo, y conviene verlo antes para no leer dos veces lo mismo.

La frase. Al pasar del parámetro natural a uno arbitrario, la regla de la cadena convierte cada derivada en la que se quiere *más* un múltiplo de las derivadas anteriores. Y esos múltiplos sobrantes se evaporan solos, porque toda la construcción está escrita con

productos vectoriales y mixtos, que valen cero en cuanto dos de sus argumentos son paralelos. Lo único que sobrevive es la parte limpia, multiplicada por una potencia de dt/ds; y esa potencia se elimina al final normalizando.
La imagen. Es la misma que la del cuentakilómetros. Cambiar de parámetro es acelerar y frenar; la basura que añade la regla de la cadena es información sobre el pedal, no sobre la carretera. El producto vectorial hace de filtro: deja pasar la forma y tira el pedal. Por eso las fórmulas finales son cocientes cuyo denominador no hace más que devolver el resultado a la escala correcta.
Con esto, las dos demostraciones se leen de un tirón: en la primera el filtro se aplica a $\alpha' \times \alpha''$ y en la segunda al producto mixto $(\alpha', \alpha'', \alpha''')$. Nada más.

Proposición. Sea $\alpha = \alpha(t)$ una c.p.r. en $\mathbb{R}^3$. Entonces

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}, \qquad \mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t).$$

Paso 1: traducir las dos primeras derivadas con la regla de la cadena. Sea $s = s(t)$ una reparametrización natural de α. Entonces

$$\dot{\alpha}(s) = \alpha'(t(s))\frac{dt}{ds}, \qquad \ddot{\alpha}(s) = \alpha''(t(s))\Big(\frac{dt}{ds}\Big)^2 + \alpha'(t(s))\frac{d^2t}{ds^2}.$$

Paso 2: filtrar con el producto vectorial (el núcleo de la prueba). Al hacer el producto vectorial, el segundo sumando de $\ddot{\alpha}$ desaparece, porque es paralelo a $\dot{\alpha}$:

$$\dot{\alpha}(s) \times \ddot{\alpha}(s) = \big(\alpha'(t(s)) \times \alpha''(t(s))\big)\Big(\frac{dt}{ds}\Big)^3.$$

Paso 3: identificar lo que queda usando Frenet-Serret. Por otro lado,

$$\dot{\alpha}(s) \times \ddot{\alpha}(s) = \mathbf{t}(s) \times k(s)\mathbf{n}(s) = k(s)\,\mathbf{b}(s).$$

Paso 4: normalizar, que es tirar el factor del pedal. Comparando las dos expresiones, $\alpha'(t) \times \alpha''(t)$ y $\mathbf{b}(t)$ son paralelos: se diferencian en el factor $k\,(ds/dt)^3$, que es positivo y no dice nada geométrico. Como $\mathbf{b}$ es unitario, se obtiene la fórmula normalizando. Con $\mathbf{t}$ y $\mathbf{b}$ conocidos, el normal principal se recupera como $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$. ■

Proposición. Sea $\alpha = \alpha(t)$ una c.p.r. en $\mathbb{R}^3$. Entonces

$$k(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}, \qquad \text{y si } k(t) \neq 0, \qquad \tau(t) = \frac{(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2}.$$

Paso 1: la curvatura, tomando módulos en lo ya hecho. Como $\dot{\alpha}$ es unitario y $\ddot{\alpha} \perp \dot{\alpha}$, $|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}| = |\ddot{\alpha}| = k$. Esta igualdad vale también cuando $k = 0$, sin necesitar el vector binormal. Ahora se toman normas en la igualdad del paso 2 de la proposición anterior y se usa que $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\alpha'(t)|}$, que es positivo porque el parámetro natural crece con t:

$$k = |\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}| = |\alpha' \times \alpha''|\Big(\frac{dt}{ds}\Big)^3 = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3}.$$

Leída en palabras: el producto vectorial tira la parte de la aceleración paralela a la velocidad, que solo cambia la rapidez, y se queda con la perpendicular, que es la que hace girar la dirección; el denominador descuenta que ese giro se ha medido yendo a rapidez $|\alpha'|$ y no a rapidez uno.

Paso 2: la tercera derivada, con sus dos sumandos de basura. Para la torsión hace falta una derivada más:

$$\dddot{\alpha}(s) = \alpha'''(t(s))\Big(\frac{dt}{ds}\Big)^3 + 3\alpha''(t(s))\frac{dt}{ds}\frac{d^2t}{ds^2} + \alpha'(t(s))\frac{d^3t}{ds^3},$$

Paso 3: filtrar con el producto mixto (el núcleo de la prueba). Se sustituye en el producto mixto. Los dos últimos sumandos no aportan nada, porque son combinaciones de α' y α'', que ya están en el producto mixto y lo anulan. Queda

$$(\dot{\alpha}(s), \ddot{\alpha}(s), \dddot{\alpha}(s)) = (\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))\Big(\frac{dt}{ds}\Big)^6,$$

Paso 4: recomponer. Se aplica la fórmula de la torsión en parámetro natural y se sustituye el denominador por el cuadrado de la igualdad $k = |\alpha' \times \alpha''|\,(dt/ds)^3$ del paso 1:

$$\tau = \frac{(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha})}{k^2} = \frac{(\alpha', \alpha'', \alpha''')\,(dt/ds)^6}{|\alpha' \times \alpha''|^2\,(dt/ds)^6} = \frac{(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha' \times \alpha''|^2}.$$

Numerador y denominador llevan la misma potencia de dt/ds, la sexta, y se cancela: por eso en la fórmula final no queda rastro de la rapidez, ni siquiera un $|\alpha'|$. ■

Qué hizo cada hipótesis. La regularidad garantiza $|\alpha'| \neq 0$, que es lo que permite dividir y lo que hace que $s(t)$ sea invertible: sin ella no hay parámetro natural al que traducir y las fórmulas no significan nada. La condición $k(t) \neq 0$ solo se pide para la torsión, y se ve por qué: es exactamente la condición de que $\alpha' \times \alpha'' \neq 0$, que es el denominador. Donde la curvatura se anula, el denominador se anula también, y no por casualidad: ahí no hay plano osculador que bascule y la torsión no está definida.

EXPLÍCATE. *En las dos demostraciones se ha usado el mismo truco dos veces: al hacer un producto vectorial o mixto, los sumandos paralelos a vectores que ya aparecen se anulan. Comprueba dónde exactamente, y qué propiedad del producto vectorial lo justifica.*

LA IDEA: CÓMO RECORDAR ESTAS CUATRO FÓRMULAS

No hace falta memorizarlas si se entiende la homogeneidad.

La curvatura tiene dimensión de uno partido por longitud. En el numerador, $\alpha' \times \alpha''$ tiene tres derivadas en total; en el denominador, $|\alpha'|^3$ tiene tres. La diferencia deja el peso correcto. Si uno duda del exponente, basta comprobar la fórmula en la circunferencia de radio r recorrida a velocidad c: debe salir $1/r$ y no depender de c.

Para la torsión, el numerador es el producto mixto de las tres primeras derivadas, que ya sabemos que es el detector de coplanariedad. El denominador es lo que hace falta para que el resultado no dependa de la velocidad. Y aparece $|\alpha' \times \alpha''|^2$ y no otra cosa porque en el parámetro natural el denominador era k^2.

Ejemplo (la cúbica alabeada: rapidez, curvatura y torsión variables)**.** Hasta aquí todas las

curvas calculadas tenían rapidez constante, y las fórmulas en parámetro arbitrario no se han visto trabajar de verdad. La curva más sencilla que no está en ningún plano sirve para eso:

$$\alpha(t) = (t,\ t^2,\ t^3), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Su rapidez es $|\alpha'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$. Reparametrizarla por el arco exigiría integrar esa raíz e invertir el resultado; no hace falta, porque las fórmulas anteriores trabajan con el parámetro que se tiene.

Las tres derivadas y los dos productos.

$$\alpha' = (1,\ 2t,\ 3t^2), \qquad \alpha'' = (0,\ 2,\ 6t), \qquad \alpha''' = (0,\ 0,\ 6),$$

$$\alpha' \times \alpha'' = (6t^2,\ -6t,\ 2), \qquad |\alpha' \times \alpha''|^2 = 4\,(9t^4 + 9t^2 + 1), \qquad (\alpha', \alpha'', \alpha''') = 12.$$

El producto mixto sale de multiplicar por α''', que solo tiene tercera componente: es $2 \cdot 6$.

Curvatura y torsión.

$$k(t) = \frac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{\left(1 + 4t^2 + 9t^4\right)^{3/2}}, \qquad \tau(t) = \frac{12}{4\,(9t^4 + 9t^2 + 1)} = \frac{3}{9t^4 + 9t^2 + 1}.$$

Con números: en $t = 0$ son $k = 2$ y $\tau = 3$; en $t = 1$, $k = 2\sqrt{19}/14^{3/2} \approx 0{,}166$ y $\tau = 3/19 \approx 0{,}158$. Se leen tres cosas. La torsión es positiva en todo punto, así que la curva no tiene ningún tramo plano y atraviesa siempre su plano osculador en el sentido de la binormal. Las dos funciones son pares, porque $t \mapsto -t$ lleva la curva en su simétrica respecto del eje OY, que es un giro de media vuelta y conserva curvatura y torsión. Y las dos tienden a cero cuando $|t|$ crece: lejos del origen manda el término t^3, la curva se vuelve casi vertical y se endereza.

El triedro en el origen. En $t = 0$, $\alpha'(0) = (1,0,0)$ y $\alpha'(0) \times \alpha''(0) = (0,0,2)$, luego

$$\mathbf{t}(0) = (1,0,0), \qquad \mathbf{b}(0) = (0,0,1), \qquad \mathbf{n}(0) = \mathbf{b}(0) \times \mathbf{t}(0) = (0,1,0)\,:$$

el triedro de Frenet en el origen es la base canónica.

Qué se ha ganado: la comprobación con la forma canónica. En esa base, las coordenadas de $\alpha(t) - \alpha(0)$ son (t, t^2, t^3), y la forma canónica local predice, en el parámetro natural s medido desde el origen, $x_1 = s - \frac{1}{6}k_0^2 s^3$, $x_2 = \frac{1}{2}k_0 s^2 + \frac{1}{6}\dot{k}_0 s^3$ y $x_3 = \frac{1}{6}k_0\tau_0 s^3$, salvo términos de orden superior. Cerca de 0, la rapidez es $1 + 2t^2 + O(t^4)$, luego $s = t + \frac{2}{3}t^3 + O(t^5)$ y, al revés, $t = s - \frac{2}{3}s^3 + O(s^5)$. Sustituyendo, con $k_0 = 2$, $\tau_0 = 3$ y $\dot{k}_0 = 0$ (la curvatura es par):

$$\begin{aligned} x_1 &= t = s - \tfrac{2}{3}\,s^3 + O(s^5) = s - \tfrac{2^2}{6}\,s^3 + O(s^5), \\ x_2 &= t^2 = s^2 + O(s^4) = \tfrac{2}{2}\,s^2 + O(s^4), \\ x_3 &= t^3 = s^3 + O(s^5) = \tfrac{2\cdot 3}{6}\,s^3 + O(s^5). \end{aligned}$$

Los tres coeficientes cuadran. La cúbica alabeada es, en el origen, su propia forma canónica: recta en la dirección de $\mathbf{t}$, parábola en la de $\mathbf{n}$ y cúbica en la de $\mathbf{b}$, y los números $k_0 = 2$ y $\tau_0 = 3$ que dan los productos vectoriales son exactamente los que exige el desarrollo de Taylor. Dos caminos que no comparten ninguna cuenta llegan al mismo sitio.

1.5.8 Qué sobrevive al cambio de parámetro, y qué pasa donde la curvatura se anula

Sea f un cambio de parámetro regular con $f(r_0) = t_0$ y $\beta = \alpha \circ f$. Las cuentas son las de las dos proposiciones anteriores, con f en el papel de $t(s)$ y una sola diferencia: ahora f' puede ser negativo. Los mismos filtros — el producto vectorial tira lo paralelo a α' y el producto mixto tira lo que es combinación de α' y α'' — dejan

$$\beta' = f'\,\alpha', \qquad \beta' \times \beta'' = (f')^3\,(\alpha' \times \alpha''), \qquad (\beta', \beta'', \beta''') = (f')^6\,(\alpha', \alpha'', \alpha'''),$$

con las derivadas de α en t_0 y las de f en r_0. Leídas: el signo de f' se cuela en el tangente y, elevado al cubo, con el mismo signo en el binormal; el normal principal no lo nota, por ser el producto vectorial de los otros dos; y en la curvatura y la torsión los factores se cancelan, $|f'|^3/|f'|^3$ en la primera y $(f')^6/(f')^6$ en la segunda. Se obtiene

$$\mathbf{t}_\beta(r_0) = \operatorname{sig}\left(\tfrac{dt}{dr}\right)\Big|_{r_0} \mathbf{t}(t_0), \qquad \mathbf{n}_\beta(r_0) = \mathbf{n}(t_0), \qquad \mathbf{b}_\beta(r_0) = \operatorname{sig}\left(\tfrac{dt}{dr}\right)\Big|_{r_0} \mathbf{b}(t_0),$$

$$k_\beta(r_0) = k(t_0), \qquad \tau_\beta(r_0) = \tau(t_0).$$

Es decir: el normal principal, la curvatura y la torsión son invariantes geométricos; el tangente y el binormal cambian de signo si el cambio de parámetro invierte el sentido. Como los dos cambian a la vez, la nueva referencia $\{-\mathbf{t}, \mathbf{n}, -\mathbf{b}\}$ sigue siendo ortonormal y directa, aunque no es la misma base que antes.

Observación. Al conjunto $\{\mathbf{t}(t_0), \mathbf{n}(t_0), \mathbf{b}(t_0), k(t_0), \tau(t_0)\}$ se le llama **aparato de Frenet** de α en $\alpha(t_0)$.

Una recta no tiene aparato de Frenet completo: solo tiene vector tangente y curvatura idénticamente nula. Ahora bien, si se conoce un plano que la contenga, de entre todos los del haz, sí se le puede asignar uno asociado a ese plano: su binormal es el vector característico del plano, su normal principal el único vector del plano que completa la referencia ortonormal directa en el orden $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, y su torsión es idénticamente nula. Del mismo modo, si una curva alabeada está contenida en un plano y su curvatura resulta ser idénticamente nula, se puede afirmar que es una recta contenida en ese plano.

Ejemplo (la sinusoide y los puntos aislados de curvatura nula)**.** El procedimiento anterior no sirve cuando la curvatura se anula solo en puntos aislados. Sea la sinusoide en el plano $z = 0$,

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad \alpha(t) = (t, \operatorname{sen} t, 0).$$

Entonces

$$\alpha'(t) = (1, \cos t, 0), \qquad \alpha''(t) = (0, -\operatorname{sen} t, 0), \qquad \alpha'(t) \times \alpha''(t) = (0, 0, -\operatorname{sen} t),$$

de modo que los puntos $\alpha(k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$, tienen curvatura nula.

Tómese $\alpha(0)$. Para $t < 0$ próximo a cero se tiene $\mathbf{b}(t) = (0, 0, 1)$, y para $t > 0$ se tiene $\mathbf{b}(t) = (0, 0, -1)$. Cualquier asignación de binormal en $\alpha(0)$ rompería la continuidad del campo.

LA IDEA: POR QUÉ ESTE EJEMPLO IMPORTA MÁS DE LO QUE PARECE

La conclusión es que *la definición de Frenet no da un aparato en los puntos de curvatura nula, y no siempre se puede prolongar por continuidad*. La sinusoide muestra una obstrucción, no una imposibilidad universal: para $\alpha(t) = (t, t^4, 0)$, la curvatura se anula en cero, pero la binormal vale $(0, 0, 1)$ a ambos lados y sí tiene límite, igual que el normal principal. Y la razón geométrica se ve muy bien en la sinusoide. En un punto de inflexión la curva deja de doblarse hacia un lado y empieza a doblarse hacia el otro. El normal principal, que siempre apunta hacia el lado hacia el que la curva se dobla, tiene que dar un salto de ciento ochenta grados. No hay forma continua de atravesar ese punto. Esta es la razón de fondo por la que todos los enunciados de la lección llevan la hipótesis $k(s) \neq 0$, y por la que conviene comprobarla siempre antes de aplicar cualquier resultado. Es un descuido caro: buena parte de los problemas que piden «estudiar la regularidad» de una curva construida acaban reduciéndose a localizar dónde se anula una curvatura.

Ejercicios de esta sección

Los que siguen son el núcleo del capítulo, y son muchos. Conviene intentarlos todos, y ayuda saber de antemano que se reparten en cuatro familias, cada una con su mecanismo:

- los de **contacto**, que preguntan qué objeto sencillo —una recta, una circunferencia, un plano— imita mejor a la curva en un punto, y hasta qué orden;
- los del **punto fijo**, en los que una recta o un plano pegados a la curva pasan todos por un mismo sitio, y la respuesta sale de escribir esa condición en la referencia de Frenet y derivarla una vez;
- los de **hélices**, que giran todos alrededor del cociente τ/k;
- y los de **curvas construidas sobre otra curva**, que dan una α, fabrican con ella una β y preguntan por la regularidad y por los invariantes de la nueva.

Antes hace falta una definición que la teoría no ha necesitado pero los ejercicios sí.

Definición. Sea $n \geq 0$ un entero. Dos c.r.p.n. $\alpha = \alpha(s)$ y $\beta = \beta(\sigma)$, de clase al menos C^{n+1}, con un punto común, $\alpha(s_0) = \beta(\sigma_0)$, tienen **contacto de orden** n en ese punto si

$$\dot\alpha(s_0) = \dot\beta(\sigma_0), \quad \ddot\alpha(s_0) = \ddot\beta(\sigma_0), \quad \ldots, \quad \alpha^{(n)}(s_0) = \beta^{(n)}(\sigma_0),$$

$$\text{pero} \qquad \alpha^{(n+1)}(s_0) \neq \beta^{(n+1)}(\sigma_0).$$

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ

La alternativa que no se decidió nunca: el signo de la torsión. Aquí no hay una vía muerta sino un empate. Este libro escribe

$$\dot{\mathbf{b}} = -\tau\,\mathbf{n},$$

pero hay textos de referencia muy usados que escriben $\dot{\mathbf{b}} = +\tau\,\mathbf{n}$, con lo que la torsión de una misma curva les sale con el signo opuesto.

Qué cambia. Con nuestro convenio, la hélice dextrógira tiene torsión positiva. Con el otro se evita el menos en $\dot{\mathbf{b}}$, pero aparece en el término binormal de $\dot{\mathbf{n}}$. La matriz de Frenet es antisimétrica en ambos casos: eso depende de la ortonormalidad del triedro, no del convenio de signo.

Por qué nunca se resolvió. Porque no hay nada que resolver: es una convención, y las dos son

consistentes. Ninguna afirmación geométrica depende de la elección, si se cambian de forma coherente las fórmulas y la interpretación del signo.
Lo que hay que hacer con esto. Comprobar el convenio antes de usar cualquier fórmula de otro libro, y sobre todo antes de comparar un resultado propio con uno ajeno. Es una de las fuentes de error más tontas y más frecuentes del tema, y no se detecta con las cuentas: los dos resultados están bien, solo que en convenios distintos.

Ejercicio 1.7. *Contacto de orden n con una recta* [H1.3]

Se pide:
1. Si $\alpha = \alpha(s)$ es una c.r.p.n. con $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y $\beta(s) = \alpha(-s)$, ¿qué orden de contacto tienen en $\alpha(0)$?
2. Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. en $\mathbb{R}^3$ que no es una recta. Probar que, en cualquier punto suyo, la recta tangente es la que tiene un contacto de orden mayor con ella de entre todas las rectas que pasan por el punto. ¿Cuál es el orden de ese contacto?

Resolución. *Primer apartado: la misma curva del revés tiene el peor contacto posible.* Las dos curvas pasan por el mismo punto, porque $\beta(0) = \alpha(0)$. Derivando la definición de β por la regla de la cadena,

$$\dot\beta(s) = -\dot\alpha(-s), \qquad \text{y en particular} \qquad \dot\beta(0) = -\dot\alpha(0) = -\mathbf{t}(0).$$

Como α está parametrizada naturalmente, $|\mathbf{t}(0)| = 1$, de modo que $\mathbf{t}(0) \neq -\mathbf{t}(0)$. La primera igualdad de la lista que define el contacto falla ya, y la condición que queda, $\dot\beta(0) \neq \dot\alpha(0)$, es exactamente la que corresponde a $n = 0$. El orden de contacto es, por tanto, 0: el más bajo que la definición admite. ■

LA IDEA: EL CONTACTO MIDE PARAMETRIZACIONES, NO DIBUJOS

El resultado del primer apartado desconcierta la primera vez, y conviene entender por qué, porque es lo que hace falta para leer bien todo lo que viene después.
Las dos curvas α y β tienen *la misma imagen*. Punto por punto son el mismo subconjunto de $\mathbb{R}^3$: la misma recta tangente, el mismo plano osculador, la misma curvatura y la misma torsión en cada punto. Y aun así su contacto es el peor que la definición contempla. Lo único que las distingue es el sentido en que se recorren.
La explicación es que el contacto de orden n no compara conjuntos de puntos, sino **viajeros**: compara la velocidad, la aceleración y las derivadas sucesivas de dos recorridos. Dos coches que se cruzan de frente en un punto de la misma carretera están recorriendo la misma curva y no se parecen en nada como movimientos. El contacto mide lo segundo.
Esto tiene una consecuencia práctica que hay que retener: siempre que se busque el objeto de una familia que mejor se ajusta a una curva —una recta, una circunferencia, un plano—, hay que recorrerlo *en el mismo sentido y desde el mismo punto*, o el orden de contacto se desploma a cero por una razón que no tiene nada que ver con la geometría.

Segundo apartado: cómo son las rectas, vistas por la definición. Una recta que pase por $p = \alpha(s_0)$ y esté parametrizada naturalmente —la definición de contacto compara c.r.p.n., así que no

hay alternativa— se escribe

$$r(\sigma) = p + (\sigma - \sigma_0)\, u, \qquad |u| = 1,$$

y sus derivadas son inmediatas:

$$\dot{r}(\sigma) = u \quad \text{para todo } \sigma, \qquad r^{(j)}(\sigma) = 0 \quad \text{para todo } j \geq 2.$$

Aquí está todo el ejercicio: una recta tiene una única derivada no nula, y a partir de la segunda es idénticamente cero. Comparar una curva con una recta es, entonces, preguntar cuántas de las derivadas de la curva *también* se anulan.

Solo la tangente pasa del orden cero. La primera comparación es $\dot{\alpha}(s_0) = \mathbf{t}(s_0)$ contra $\dot{r} = u$. Si $u \neq \mathbf{t}(s_0)$, esa igualdad ya falla y el contacto es de orden 0. Si $u = \mathbf{t}(s_0)$, la igualdad se cumple y el contacto es de orden al menos 1. Es decir: de todas las rectas que pasan por el punto, la tangente —recorrida en el sentido de la curva, como acaba de advertir el primer apartado— es la única que llega a orden 1, y todas las demás se quedan en 0. Eso ya prueba lo que se pedía.

Y el orden es exactamente uno. La comparación siguiente es $\ddot{\alpha}(s_0) = k(s_0)\mathbf{n}(s_0)$ contra $\ddot{r} = 0$. Si $k(s_0) \neq 0$, los dos vectores son distintos y el contacto es de orden exactamente 1. ■

Qué hace cada hipótesis. La respuesta «orden 1» exige $k(s_0) > 0$. Si $k(s_0) = 0$, las dos primeras derivadas coinciden con las de la tangente: el contacto es al menos de orden 2. Si existe un primer entero $j \geq 3$ con $\alpha^{(j)}(s_0) \neq 0$, el orden exacto es $j - 1$. Que la curva no sea una recta no garantiza ese primer entero: puede coincidir con una recta en un tramo, o tener todas esas derivadas nulas en un punto sin coincidir localmente con ella. En esos casos no hay un orden exacto finito que esta definición permita asignar; tampoco puede buscarse una derivada que la regularidad no garantice.

CONEXIÓN: LO QUE PERMITE AJUSTAR CADA FAMILIA

Los tres problemas siguientes repiten un mismo procedimiento: fijar una familia sencilla que pase por el punto y comparar los primeros términos de Taylor.
Cuando $k(s_0) > 0$, la recta tangente iguala la primera derivada, pero no la segunda. El círculo osculador iguala las dos primeras, y el plano osculador anula las componentes normales de los términos de grados 1 y 2. Eso explica por qué aparecen estos tres objetos.
Los números 1, 2 y 2 no son topes universales impuestos por contar parámetros: el contacto puede subir si se anulan los términos siguientes. Una circunferencia coincide con su propio círculo osculador, y una curva plana permanece en su plano. Lo que los ejercicios determinan es qué objeto consigue ese primer nivel de ajuste y cuándo el siguiente término lo separa de la curva.

Ejercicio 1.8. *El contacto de una curva con un plano* [H1.13]

Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. en $\mathbb{R}^3$ de clase C^3, con $k(s_0) > 0$, y sea Π un plano, con vector característico unitario $\mathbf{a}$, que corta a α en el punto $\alpha(s_0)$. Si $\varepsilon > 0$ y $|h| < \varepsilon$, se denota por d_h la distancia del punto $\alpha(s_0 + h)$ al plano Π. Se dice que α y Π tienen un **contacto de orden** n $(n \geq 0)$ en $\alpha(s_0)$ si $d_h = o(h^n)$. Se pide:

1. Probar que $d_h = \left|\big(\alpha(s_0 + h) - \alpha(s_0)\big) \cdot \mathbf{a}\right|$.
2. Calcular el orden de contacto de α con los planos normal y rectificante en $\alpha(s_0)$.
3. Probar que si un plano tiene contacto de orden mayor o igual que 2 con α en $\alpha(s_0)$,

entonces es el plano osculador a α en $\alpha(s_0)$.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *El plano pasa por $\alpha(s_0)$. Escribe su ecuación tomando ese punto como origen y descompón el vector $\alpha(s_0+h)-\alpha(s_0)$ en su parte paralela a $\mathbf{a}$ y su parte ortogonal.*
2. *Una vez que d_h es el valor absoluto de una función real de h, el orden de contacto es el orden con que esa función se anula. Y para eso ya hay una herramienta hecha: la forma canónica local.*
3. *Para el tercer apartado, escribe $\mathbf{a}$ en la base de Frenet del punto. Cada orden de contacto que se exige mata una de sus tres coordenadas.*

Resolución. Una precisión previa sobre el enunciado. La condición $d_h = o(h^n)$ no determina un único n: si se cumple para n, se cumple para todos los exponentes menores, porque $o(h^n) \subset o(h^m)$ cuando $m \leq n$. «Tener contacto de orden n» hay que leerlo, pues, como contacto *de orden al menos n*. Para dar un orden exacto buscamos el mayor entero n para el que vale, si existe: cuando la curva está en el plano no hay un máximo finito. Conviene notar la diferencia con la definición de contacto entre dos curvas: aquella fija el orden con una desigualdad explícita en el escalón siguiente, y esta no. Todos los cálculos que siguen buscan por eso dos cosas a la vez: que el cociente d_h/h^n tienda a cero, y que d_h/h^{n+1} *no* tienda a cero.

Primer apartado: la distancia a un plano es un producto escalar. Como Π corta a α en $\alpha(s_0)$, ese punto está en Π, y tomarlo como origen da la ecuación

$$\Pi = \big\{ x \in \mathbb{R}^3 : \ \big(x - \alpha(s_0)\big)\cdot\mathbf{a} = 0 \big\}.$$

Sea ahora q un punto cualquiera y descompóngase el vector que lo une con el origen elegido en su parte normal al plano y su parte dentro de él:

$$q - \alpha(s_0) = \lambda\,\mathbf{a} + w, \qquad \lambda = \big(q-\alpha(s_0)\big)\cdot\mathbf{a}, \qquad w\cdot\mathbf{a} = 0.$$

El punto $\alpha(s_0)+w$ pertenece a Π y la distancia de q a él es $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda|$, porque $\mathbf{a}$ es unitario. Y no hay ningún punto de Π más cercano: si $x \in \Pi$, entonces $q - x = \lambda\mathbf{a} + (w - (x - \alpha(s_0)))$ es suma de dos vectores ortogonales, y por el teorema de Pitágoras $|q-x|^2 = \lambda^2 + |w-(x-\alpha(s_0))|^2 \geq \lambda^2$. Luego $d(q,\Pi) = |\lambda|$, y con $q = \alpha(s_0+h)$ queda

$$d_h = \big|\big(\alpha(s_0+h) - \alpha(s_0)\big)\cdot\mathbf{a}\big|.$$

■

LA IDEA: EL APARTADO QUE CONVIERTE EL PROBLEMA EN OTRO

El primer apartado parece un trámite de geometría elemental y es, en realidad, el que resuelve el ejercicio. Antes de él hay un problema de geometría del espacio: medir distancias de puntos a un plano. Después de él hay una función real de variable real,

$$f(h) = \big(\alpha(s_0+h) - \alpha(s_0)\big)\cdot\mathbf{a}, \qquad d_h = |f(h)|,$$

y preguntar por el orden de contacto es preguntar con qué orden se anula f en $h=0$. Eso lo contesta el desarrollo de Taylor, sin más.
Es el mismo movimiento que ya hizo el teorema (p. 41): allí se medía el signo de la distancia para saber si la curva atraviesa el plano, y aquí se mide su tamaño para saber

> cuánto se le pega. Las dos preguntas se responden mirando el mismo desarrollo, y por eso la forma canónica local es la herramienta central del capítulo.

Segundo apartado. El desarrollo de la forma canónica local, escrito en el punto s_0 y con el incremento h, dice que

$$\alpha(s_0+h)-\alpha(s_0)=\Big(h-\tfrac{1}{6}k_0^2h^3\Big)\mathbf{t}_0+\Big(\tfrac{1}{2}k_0h^2+\tfrac{1}{6}\dot{k}_0h^3\Big)\mathbf{n}_0+\Big(\tfrac{1}{6}k_0\tau_0h^3\Big)\mathbf{b}_0+o(h^3), \qquad (1.2)$$

con $k_0 = k(s_0)$, $\tau_0 = \tau(s_0)$ y el triedro evaluado en s_0. Como el triedro es ortonormal, proyectar sobre cada uno de sus vectores es quedarse con el paréntesis correspondiente, y los tres planos del punto se leen de golpe.

El plano normal tiene por vector característico $\mathbf{t}_0$, luego $f(h) = h - \frac{1}{6}k_0^2h^3 + o(h^3)$. Entonces $d_h \to 0$, que es la condición con $n = 0$, pero $d_h/|h| \to 1 \neq 0$. El contacto es de orden **0**.

El plano rectificante tiene por vector característico $\mathbf{n}_0$, luego $f(h) = \frac{1}{2}k_0h^2 + \frac{1}{6}\dot{k}_0h^3 + o(h^3)$. Entonces $d_h/|h| \to 0$, pero $d_h/h^2 \to k_0/2 \neq 0$ si $k_0 \neq 0$. El contacto es de orden **1**.

Y el plano osculador, que el enunciado no pide pero que es el que da sentido a los otros dos, tiene por vector característico $\mathbf{b}_0$, luego $f(h) = \frac{1}{6}k_0\tau_0h^3 + o(h^3)$: el contacto es de orden **2** cuando $\tau_0 \neq 0$. Si la torsión se anula en el punto el orden sube, y si la curva es plana sube hasta el infinito, porque entonces la curva *está* dentro de su plano osculador y d_h es idénticamente nula. ■

Tercer apartado.

Paso 1: escribir el plano en la base del punto. Sea Π un plano por $\alpha(s_0)$ con vector característico unitario $\mathbf{a}$. Como $\{\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, se puede escribir

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{t}_0 + a_2\mathbf{n}_0 + a_3\mathbf{b}_0, \qquad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1.$$

Toda la información geométrica del plano está en esos tres números, y probar que Π es el osculador es probar que $a_1 = a_2 = 0$.

Paso 2: proyectar el desarrollo. Sustituyendo (1.2) en f,

$$f(h) = a_1h + \tfrac{1}{2}a_2k_0h^2 + O(h^3).$$

Paso 3: cada orden que se exige mata un coeficiente (el núcleo de la prueba). La hipótesis es $d_h = o(h^2)$, es decir, $f(h)/h^2 \to 0$. De ahí salen las dos conclusiones, y en este orden:

- Como $f(h)/h^2 \to 0$ implica $f(h)/h \to 0$, y $f(h)/h \to a_1$, resulta $a_1 = 0$.
- Sabiendo ya que $a_1 = 0$, queda $f(h)/h^2 \to \frac{1}{2}a_2k_0$, que debe ser cero. Como $k_0 \neq 0$, se sigue $a_2 = 0$.

Por tanto $\mathbf{a} = a_3\mathbf{b}_0$ con $|a_3| = 1$, es decir, $\mathbf{a} = \pm\mathbf{b}_0$, y Π es el plano que pasa por $\alpha(s_0)$ y tiene por vector característico la binormal: el plano osculador. ■

Qué hace cada hipótesis. Las dos exigencias del tercer apartado hacen trabajos distintos y merece la pena separarlos. Que el contacto sea de orden ≥ 1 obliga a $a_1 = 0$, es decir, a que el plano *contenga a la recta tangente*: con eso solo se ha reducido la familia de todos los planos por el punto al haz de eje la tangente. Que además sea de orden ≥ 2 es lo que elige uno de ese haz.

Y la hipótesis $k_0 \neq 0$ es la que permite deducir $a_2 = 0$. Si $k_0 = 0$, entonces $\ddot{\alpha}(s_0) = 0$: Taylor, sin usar un triedro que aquí no está definido, da $\alpha(s_0+h) - \alpha(s_0) = h\mathbf{t}_0 + o(h^2)$. Todos los planos que contienen a la tangente tienen por tanto contacto al menos de orden 2. Esa condición ya no selecciona un plano único.

CONEXIÓN: LA TERCERA CARA DEL PLANO OSCULADOR

El plano osculador aparece ya por tercera vez en este capítulo, y las tres definiciones son distintas. Merece la pena ponerlas juntas, porque saber cuál usar es la mitad del trabajo en cualquier problema donde aparezca.

1. **Como límite** (teorema (p. 32)): es la posición límite de los planos que contienen a la recta tangente en $\alpha(s_0)$ y a un punto $\alpha(s)$ que se acerca. Es la definición que explica el nombre y la que se usa para *construirlo*.
2. **Como el único plano atravesado** (teorema (p. 41)): de todos los planos del haz de eje la tangente, es el único que la curva cruza localmente, siempre que $\tau(s_0) \neq 0$. Es la definición que se usa para *reconocerlo* en un dibujo.
3. **Como el plano de máximo contacto** (este ejercicio): es el único plano cuyo contacto con la curva llega al menos a orden 2, si $k(s_0) > 0$. Es la definición que se usa para *caracterizarlo*, es decir, para probar que un plano dado por otra vía es el osculador.

Y las tres se demuestran con el mismo desarrollo (1.2), mirando cosas distintas de él: la primera mira quién domina cuando $h \to 0$, la segunda mira la paridad del primer término no nulo, y la tercera mira cuántos términos se anulan. Eso es lo que convierte la forma canónica local en la herramienta más rentable del capítulo: no es un resultado más, es el que contesta las preguntas de los demás.

Ejercicio 1.9. *El círculo osculador y el lugar de los centros de curvatura* [H1.7]

Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. y sea $\alpha(s_0)$ un punto suyo con $k(s_0) \neq 0$. Se pide:

1. Probar que existe una única circunferencia que pasa por $\alpha(s_0)$ y tiene contacto de orden al menos 2 con α en ese punto. Se le llama **círculo osculador**; su centro es el **centro de curvatura** y su radio el **radio de curvatura**.
2. Probar que ese centro es $C(s_0) = \alpha(s_0) + \dfrac{1}{k(s_0)}\mathbf{n}(s_0)$ y que el radio vale $1/k(s_0)$.
3. Estudiar la regularidad de la curva $C = C(s)$ formada, al variar s, por los centros de curvatura de α.

Resolución. La idea, antes de la cuenta. Una circunferencia queda fijada por tres datos: su plano, su centro y su radio. Pedir contacto de orden al menos dos es pedir que, en el punto común, la circunferencia lleve la misma velocidad y la misma aceleración que la curva. La velocidad fija la tangente. La aceleración de una circunferencia recorrida a velocidad uno apunta siempre hacia el centro y mide $1/r$; al igualarla con la de la curva, que es $k\,\mathbf{n}$, quedan fijados de golpe el radio ($1/r = k$), el lado en que está el centro (el de $\mathbf{n}$) y el plano (el de $\mathbf{t}$ y $\mathbf{n}$, es decir, el osculador). La cuenta que sigue solo escribe eso, apoyada en una identidad de la circunferencia: su aceleración es el vector que va del punto al centro dividido por r^2.

Primer y segundo apartado. Sea β una circunferencia de centro C y radio r, parametrizada naturalmente. Si $\{u, v\}$ es una base ortonormal del plano que la contiene,

$$\beta(\sigma) = C + r\Big(\cos\tfrac{\sigma}{r}\,u + \operatorname{sen}\tfrac{\sigma}{r}\,v\Big),$$

de donde

$$\dot\beta(\sigma) = -\operatorname{sen}\tfrac{\sigma}{r}\,u + \cos\tfrac{\sigma}{r}\,v, \qquad \ddot\beta(\sigma) = -\frac{1}{r}\Big(\cos\tfrac{\sigma}{r}\,u + \operatorname{sen}\tfrac{\sigma}{r}\,v\Big) = -\frac{1}{r^2}\big(\beta(\sigma) - C\big).$$

La última igualdad es la que ahorra todo el trabajo: despejando,

$$C = \beta(\sigma) + r^2\,\ddot\beta(\sigma). \tag{1.3}$$

Imponemos ahora el contacto de orden al menos 2 en el punto común, es decir, $\dot\beta(\sigma_0) = \dot\alpha(s_0)$ y $\ddot\beta(\sigma_0) = \ddot\alpha(s_0)$.

Tomando módulos en la segunda condición y usando $|\ddot\beta| = 1/r$ junto con $|\ddot\alpha(s_0)| = k(s_0)$,

$$\frac{1}{r} = k(s_0) \qquad \Longrightarrow \qquad r = \frac{1}{k(s_0)}.$$

Sustituyendo en (1.3), con $\beta(\sigma_0) = \alpha(s_0)$ y $\ddot\alpha(s_0) = k(s_0)\mathbf{n}(s_0)$,

$$C = \alpha(s_0) + \frac{1}{k^2(s_0)}\, k(s_0)\mathbf{n}(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}\,\mathbf{n}(s_0).$$

Falta la unicidad, y ya está hecha: el radio ha quedado determinado, el centro también, y el plano de la circunferencia es el generado por $\dot\beta(\sigma_0)$ y $\ddot\beta(\sigma_0)$, es decir, por $\mathbf{t}(s_0)$ y $\mathbf{n}(s_0)$: el plano osculador. Centro, radio y plano determinan una única circunferencia. También queda probada la existencia: esa circunferencia, recorrida desde $\alpha(s_0)$ con tangente $\mathbf{t}(s_0)$, tiene aceleración $k(s_0)\mathbf{n}(s_0)$, y cumple las dos igualdades.

Precisión del orden. El enunciado original dice «orden 2», pero aquí hay que entender «al menos 2». La tercera derivada de ese círculo es $-k_0^2\mathbf{t}_0$, mientras que la de α es $-k_0^2\mathbf{t}_0 + \dot k_0\mathbf{n}_0 + k_0\tau_0\mathbf{b}_0$. El orden es exactamente 2 si $\dot k_0 \neq 0$ o $\tau_0 \neq 0$; si ambos se anulan, también coinciden las terceras derivadas. Una circunferencia consigo misma muestra por qué no se puede exigir siempre la desigualdad siguiente. ■

Tercer apartado. Se deriva $C(s) = \alpha(s) + \dfrac{1}{k(s)}\mathbf{n}(s)$ respecto de s, usando la regla del producto y las ecuaciones de Frenet-Serret:

$$\dot C(s) = \underbrace{\dot\alpha}_{=\mathbf{t}} + \Big(-\frac{\dot k}{k^2}\Big)\mathbf{n} + \frac{1}{k}\underbrace{\big(-k\,\mathbf{t} + \tau\,\mathbf{b}\big)}_{=\dot{\mathbf{n}}} = \mathbf{t} - \mathbf{t} - \frac{\dot k}{k^2}\,\mathbf{n} + \frac{\tau}{k}\,\mathbf{b},$$

es decir,

$$\dot C(s) = -\frac{\dot k(s)}{k^2(s)}\,\mathbf{n}(s) + \frac{\tau(s)}{k(s)}\,\mathbf{b}(s). \tag{1.4}$$

Como $\mathbf{n}$ y $\mathbf{b}$ son ortonormales, $\dot C(s) = 0$ si y solo si se anulan los dos coeficientes a la vez. Por tanto:

$$C \text{ es regular en } s \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot k(s) \neq 0 \ \text{ o } \ \tau(s) \neq 0.$$

■

LA IDEA: LOS DOS TÉRMINOS DE (1.4), UNO A UNO

La fórmula del centro se mueve por dos motivos independientes, y separarlos aclara todo el apartado.

El término en $\mathbf{n}$ aparece porque el radio de curvatura cambia: si la curva se dobla más en unos puntos que en otros, el centro se acerca o se aleja. El término en $\mathbf{b}$ aparece porque el plano osculador bascula: si la curva se sale de un plano, el centro tiene que seguirla fuera de él.

Que el centro se quede quieto en todo un intervalo exige que no pase ninguna de las dos cosas en ese intervalo, y ese caso tiene nombre: curvatura constante y torsión nula es una circunferencia. Y en efecto, para una circunferencia el lugar de los centros de curvatura se reduce a un punto, su propio centro, que no es una curva regular. Pero

también pueden aparecer puntos singulares aislados en el lugar de los centros de otras curvas: basta con que $\dot{k}$ y τ se anulen a la vez en ese punto.

CONEXIÓN: LA VARIANTE CON CURVATURA CONSTANTE

Hay una variante de este ejercicio que le añade una hipótesis. Merece la pena resolverla aquí, porque la respuesta sale de (1.4) casi sin trabajo.
Enunciado. Sea α una c.r.p.n. con curvatura y torsión no nulas. Si α tiene **curvatura constante**, probar que el lugar de los centros de curvatura es otra curva regular β tal que los normales principales de α y β son paralelos en puntos correspondientes, y que β tiene la misma curvatura que α.
Resolución. Con k constante se tiene $\dot{k} = 0$, y (1.4) se reduce a

$$\dot{\beta}(s) = \frac{\tau(s)}{k}\,\mathbf{b}(s), \qquad |\dot{\beta}(s)| = \frac{|\tau(s)|}{k} \neq 0,$$

luego β es regular. Si σ denota su parámetro natural, $\dfrac{d\sigma}{ds} = \dfrac{|\tau|}{k}$, y el tangente de β es

$$\mathbf{t}_\beta = \frac{d\beta}{d\sigma} = \dot{\beta}\,\frac{ds}{d\sigma} = \frac{\tau}{k}\,\frac{k}{|\tau|}\,\mathbf{b} = \operatorname{sig}(\tau)\,\mathbf{b}.$$

Derivando otra vez respecto de σ y usando $\dot{\mathbf{b}} = -\tau\,\mathbf{n}$,

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta}{d\sigma} = \operatorname{sig}(\tau)\,\dot{\mathbf{b}}\,\frac{ds}{d\sigma} = \operatorname{sig}(\tau)\,(-\tau\,\mathbf{n})\,\frac{k}{|\tau|} = -k\,\mathbf{n},$$

donde se ha usado $\operatorname{sig}(\tau)\,\tau = |\tau|$. De aquí se leen las dos afirmaciones de golpe:

$$k_\beta = \left\|\frac{d\mathbf{t}_\beta}{d\sigma}\right\| = k, \qquad \mathbf{n}_\beta = \frac{1}{k_\beta}\frac{d\mathbf{t}_\beta}{d\sigma} = -\mathbf{n}.$$

La curvatura de β coincide con la de α, y su normal principal es el opuesto del de α, en particular paralelo. ■
Obsérvese que la única pieza no mecánica del cálculo es el $\operatorname{sig}(\tau)$: β avanza en la dirección de $\mathbf{b}$ o en la de $-\mathbf{b}$ según el signo de τ. El cambio de parámetro usado aquí conserva el sentido, pues $d\sigma/ds > 0$. Olvidarlo es el error típico y cambia el signo del resultado.

Qué deja el ejercicio, y la recta polar. El lugar de los centros de curvatura, $C = \alpha + \frac{1}{k}\mathbf{n}$, es la primera curva construida sobre otra que aparece en el capítulo, y la cuenta de (1.4) es la plantilla de todas las que vienen: derivar, sustituir Frenet-Serret y leer coeficientes. Por cada centro de curvatura pasa además una recta con nombre propio, la **recta polar**: la perpendicular al plano osculador por $C(s)$, es decir, $\{C(s) + v\,\mathbf{b}(s) : v \in \mathbb{R}\}$. Es el eje del círculo osculador, porque todos sus puntos están a la misma distancia de todos los puntos del círculo: si $P = C + v\,\mathbf{b}$ y Q está en el círculo, el vector $Q - C$ vive en el plano osculador y es perpendicular a $\mathbf{b}$, y por Pitágoras $|P - Q|^2 = v^2 + 1/k^2$. Al moverse el punto, las rectas polares barren una superficie reglada con directriz C y generatriz $\mathbf{b}$.

Y dos errores típicos. Uno es tomar el radio de curvatura de una hélice por el radio del cilindro: es $a + b^2/a$, mayor, como se vio en el ejercicio de la hélice circular. El otro es dar por regular el lugar de los centros sin mirar (1.4): en una circunferencia se reduce a un punto, y en cualquier curva pierde la regularidad donde $\dot{k}$ y τ se anulan a la vez.

Ejercicio 1.10. *Una circunferencia disfrazada* [H1.8]

Probar que la curva

$$\alpha(s) = \left(\tfrac{4}{5}\cos s,\ 1 - \operatorname{sen} s,\ -\tfrac{3}{5}\cos s\right)$$

es una circunferencia en $\mathbb{R}^3$. Hallar su centro y el plano que la contiene.

Resolución. *El parámetro es el natural.* Derivando, $\dot\alpha(s) = \left(-\tfrac{4}{5}\operatorname{sen} s,\ -\cos s,\ \tfrac{3}{5}\operatorname{sen} s\right)$ y

$$|\dot\alpha(s)|^2 = \tfrac{16}{25}\operatorname{sen}^2 s + \cos^2 s + \tfrac{9}{25}\operatorname{sen}^2 s = \operatorname{sen}^2 s + \cos^2 s = 1.$$

La curvatura es constante e igual a 1. $\ddot\alpha(s) = \left(-\tfrac{4}{5}\cos s,\ \operatorname{sen} s,\ \tfrac{3}{5}\cos s\right)$, y el mismo cálculo da $|\ddot\alpha(s)| = 1$. Luego $k \equiv 1$ y $\mathbf{n}(s) = \ddot\alpha(s)$.

La torsión es nula. Derivando una vez más, $\dddot\alpha(s) = \left(\tfrac{4}{5}\operatorname{sen} s,\ \cos s,\ -\tfrac{3}{5}\operatorname{sen} s\right) = -\dot\alpha(s)$. El producto mixto $(\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha)$ tiene dos vectores proporcionales, luego se anula, y con él la torsión.

Curvatura constante no nula y torsión idénticamente nula caracterizan a una circunferencia, de radio $1/k = 1$.

El centro es el centro de curvatura, que aquí no depende de s:

$$\begin{aligned} C &= \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}\mathbf{n}(s) = \alpha(s) + \ddot\alpha(s) \\ &= \left(\tfrac{4}{5}\cos s - \tfrac{4}{5}\cos s,\ 1 - \operatorname{sen} s + \operatorname{sen} s,\ -\tfrac{3}{5}\cos s + \tfrac{3}{5}\cos s\right) = (0,1,0). \end{aligned}$$

El plano es el osculador, cuyo vector característico es la binormal:

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \dot\alpha \times \ddot\alpha = \left(-\tfrac{3}{5},\ 0,\ -\tfrac{4}{5}\right),$$

que es unitario. El plano pasa por el centro $(0,1,0)$, de modo que su ecuación es $-\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}z = 0$, es decir,

$$3x + 4z = 0.$$

Se comprueba con cualquier punto de la curva: para $s = 0$, $\alpha(0) = (\frac{4}{5}, 1, -\frac{3}{5})$ y $3 \cdot \frac{4}{5} + 4 \cdot (-\frac{3}{5}) = \frac{12}{5} - \frac{12}{5} = 0$. ■

Otra vía (sin calcular la torsión). Una vez visto que $k \equiv 1$, se puede rematar sin tocar la tercera derivada. El candidato a centro es $C(s) = \alpha(s) + \ddot\alpha(s)$, y el cálculo de arriba muestra que es el punto fijo $(0,1,0)$ para todo s. Entonces $|\alpha(s) - (0,1,0)| = |\ddot\alpha(s)| = 1$ para todo s: la curva está contenida en la esfera de centro $(0,1,0)$ y radio 1.

Además, las coordenadas de α verifican directamente $3x + 4z = 0$. Ese plano pasa por el centro de la esfera, de modo que su intersección es un círculo máximo de radio 1. La fórmula de α lo recorre entero cuando s varía en todo $\mathbb{R}$. Así se obtiene también el plano sin calcular la torsión. ■

Ejercicio 1.11. *La simétrica respecto de un eje* [H1.9]

Sea $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ una c.r.p.n.. Sea β la curva simétrica de α respecto del eje OX. Hallar la curvatura y la torsión de β en función de las de α.

Resolución. *Qué transformación es esta, escrita como matriz.* La simetría respecto de una recta de $\mathbb{R}^3$ deja fija la componente del punto en la dirección de la recta y cambia de signo la componente perpendicular a ella. Con el eje OX eso es

$$(x, y, z) \longmapsto (x, -y, -z), \qquad \text{es decir} \qquad \beta(s) = A\,\alpha(s), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz A es ortogonal, porque sus columnas son ortonormales, y su determinante vale $1 \cdot (-1) \cdot (-1) = +1$.

LA IDEA: LA INTUICIÓN QUE HAY QUE DESMONTAR ANTES DE CALCULAR

Casi todo el mundo contesta a este ejercicio antes de hacerlo, y contesta mal. El razonamiento que se hace es: la torsión distingue lo dextrógiro de lo levógiro, una simetría es un espejo, y un espejo intercambia la mano derecha por la izquierda; luego la torsión cambiará de signo.
Lo que falla no es la lógica, sino la palabra «simetría», que en $\mathbb{R}^3$ significa cosas distintas según respecto de qué se haga. La simetría respecto de un **plano** sí es un espejo: su determinante es -1 y es un movimiento inverso. Pero la simetría respecto de una **recta** no lo es: cambiar de signo *dos* coordenadas es girar media vuelta alrededor del eje, y un giro no es un espejo. Los dos signos negativos se cancelan en el determinante.
La comprobación física se puede hacer con las manos: tómese un muelle dextrógiro y désele media vuelta sobre un eje horizontal. Sigue siendo dextrógiro. En cambio, mírese en un espejo: ahí sí se ve un muelle levógiro. La torsión, que es lo que mide esa diferencia, se comporta igual.

El resultado general, que cuesta lo mismo. Conviene no hacer el caso concreto sino el general, porque la cuenta es la misma y responde de una vez a todas las variantes del problema. Sea $M(x) = Ax + v$ un movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$, con A ortogonal y $v \in \mathbb{R}^3$, y sea $\beta = M \circ \alpha$.

Paso 1: el parámetro sigue siendo el natural. Derivando, $\dot\beta(s) = A\dot\alpha(s)$, porque la traslación desaparece al derivar y A es constante. Y como A es ortogonal conserva normas, luego $|\dot\beta(s)| = |\dot\alpha(s)| = 1$. Esto no es un detalle: si el parámetro dejara de ser el natural habría que usar las fórmulas en parámetro arbitrario y la comparación se enturbiaría.

Paso 2: todas las derivadas se transforman igual. Por la misma razón, $\beta^{(j)}(s) = A\,\alpha^{(j)}(s)$ para todo $j \geq 1$.

Paso 3: cada invariante hereda lo que A conserva (el núcleo). La curvatura es una norma y la torsión es un producto mixto, y esos dos objetos se comportan de forma distinta frente a A:

$$k_\beta = |\ddot\beta| = |A\ddot\alpha| = |\ddot\alpha| = k_\alpha,$$

$$\tau_\beta = \frac{(\dot\beta, \ddot\beta, \dddot\beta)}{k_\beta^2} = \frac{\det(A)\,(\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha)}{k_\alpha^2} = \det(A)\,\tau_\alpha,$$

donde se ha usado que el producto mixto de tres vectores transformados por una matriz queda multiplicado por su determinante, que es la propiedad que define al determinante como factor de volumen orientado.

Y el caso del enunciado. Como aquí $\det(A) = +1$,

$$k_\beta(s) = k_\alpha(s), \qquad \tau_\beta(s) = \tau_\alpha(s).$$

La simetría respecto del eje OX no cambia ninguno de los dos invariantes. ■

Otra vía (comprobarlo sobre la hélice). Merece la pena verlo en un caso donde se pueda mirar. Con la hélice circular $\alpha(t) = (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\, t, bt)$, la simétrica respecto del eje OX es

$$\beta(t) = (a\cos t,\ -a\,\mathrm{sen}\, t,\ -bt) = \alpha(-t),$$

es decir, la misma hélice recorrida en sentido contrario. Y recorrer una curva al revés no altera ni la curvatura ni la torsión: al cambiar t por $-t$, la primera y la tercera derivadas cambian de signo y la segunda no, de modo que el producto mixto $(\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha)$ queda multiplicado por $(-1)(+1)(-1) = +1$. Todo encaja. ■

CONEXIÓN: QUÉ CONSERVA CADA TIPO DE MOVIMIENTO

El paso 3 vale la pena guardarlo suelto, porque contesta a toda una familia de preguntas.

- **Movimientos directos** ($\det A = +1$: traslaciones, giros y sus composiciones). Conservan curvatura y torsión. Son los movimientos «físicos», los que se pueden realizar desplazando un objeto rígido sin romperlo.
- **Movimientos inversos** ($\det A = -1$: simetrías respecto de un plano, la simetría central de $\mathbb{R}^3$, y sus composiciones con giros). Conservan la curvatura y cambian el signo de la torsión.

De ahí sale la lectura correcta del teorema fundamental de las curvas alabeadas (p. 42): dos curvas con la misma curvatura y la misma torsión se diferencian en un movimiento *directo*. Si solo coincidiera la curvatura y las torsiones fuesen opuestas, serían congruentes mediante un movimiento inverso, comparando puntos con el mismo parámetro de arco.

La diferencia es la sensibilidad a la orientación del espacio: la curvatura no cambia bajo un espejo y la torsión cambia de signo. Eso no hace que la curvatura sea intrínseca a la curva: tanto ella como la torsión describen cómo está situada en el espacio; la longitud, por sí sola, no las determina.

LA IDEA: EL MECANISMO DE «TODO PASA POR UN PUNTO FIJO»

Los tres ejercicios que siguen tienen enunciados distintos y una sola demostración. Conviene verla una vez, en abstracto, y después recorrerlos deprisa.

La situación. A cada punto de la curva se le pega un objeto que se mueve con ella: su recta tangente, su recta normal principal, su plano osculador. La hipótesis dice que todos esos objetos, al variar s, pasan por un mismo punto fijo p del espacio, o que todos son paralelos entre sí.

El movimiento. Se escribe la hipótesis como una identidad vectorial en la referencia de Frenet del punto. «p está en la recta tangente en $\alpha(s)$» es $p - \alpha(s) = \mu(s)\mathbf{t}(s)$; «$p$ está en el plano osculador» es $\big(p - \alpha(s)\big)\cdot\mathbf{b}(s) = 0$. Y entonces se **deriva una vez**, usando Frenet-Serret.

Por qué eso basta. Porque $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ es una base: una identidad vectorial derivada se rompe en *tres* identidades escalares de golpe, una por cada dirección del triedro, y cada una dice algo distinto. La componente tangencial suele decir a qué velocidad se

acerca el punto fijo; la normal y la binormal suelen decir que una curvatura se anula o que una función es constante. Toda la dificultad de estos problemas está en escribir bien la identidad de partida; después, derivar y leer coeficientes.
Y una advertencia sobre la función que aparece. Al escribir $p - \alpha = \mu\mathbf{t}$ hay que saber que μ es derivable, porque enseguida se va a derivar. No hay que probar nada: basta multiplicar escalarmente por $\mathbf{t}$, que es unitario, y obtener $\mu(s) = \big(p - \alpha(s)\big)\cdot\mathbf{t}(s)$, que es producto y suma de funciones derivables. El mismo truco vale en los tres.

Ejercicio 1.12. *Dos caracterizaciones de la recta* [H1.4]

Probar que las dos condiciones siguientes caracterizan a una recta:
1. Todas las rectas tangentes pasan por un punto fijo.
2. Todas las rectas tangentes son paralelas.

Resolución. *La segunda condición, que es la corta.* Que todas las tangentes sean paralelas significa que existe un vector unitario fijo $\mathbf{a}$ tal que $\mathbf{t}(s)$ es proporcional a $\mathbf{a}$ para todo s. Como $\mathbf{t}$ es unitario, esa proporcionalidad solo deja dos valores, $\mathbf{t}(s) = \pm\mathbf{a}$. Y aquí entra un argumento de continuidad que conviene no saltarse: la función $s \mapsto \mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{a}$ es continua y solo toma los valores $+1$ y -1; como el dominio es un intervalo, que es conexo, su imagen también lo es, y un conjunto conexo dentro de $\{-1, +1\}$ es un solo punto. Luego el signo es el mismo en toda la curva y $\mathbf{t}$ es constante. Entonces

$$\ddot{\alpha}(s) = \dot{\mathbf{t}}(s) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad k(s) = |\ddot{\alpha}(s)| = 0.$$

No usamos el normal principal: precisamente deja de estar definido cuando la curvatura es nula. Una c.r.p.n. de curvatura idénticamente nula cumple $\ddot{\alpha} \equiv 0$, luego $\dot{\alpha}$ es constante y $\alpha(s) = \alpha(s_0) + (s - s_0)\mathbf{t}$: una recta.

La primera condición. Sea p el punto fijo por el que pasan todas las tangentes. Entonces, para cada s,

$$p - \alpha(s) = \mu(s)\,\mathbf{t}(s), \qquad \mu(s) = \big(p - \alpha(s)\big)\cdot\mathbf{t}(s),$$

donde la segunda igualdad sale de multiplicar la primera por $\mathbf{t}(s)$, y garantiza que μ es derivable. Derivando la identidad,

$$-\mathbf{t} = \dot{\mu}\,\mathbf{t} + \mu\,\dot{\mathbf{t}} \qquad \Longrightarrow \qquad (1 + \dot{\mu})\,\mathbf{t} + \mu\,\dot{\mathbf{t}} = 0.$$

Como $\mathbf{t}\cdot\dot{\mathbf{t}} = 0$ y $|\mathbf{t}| = 1$, el producto escalar con $\mathbf{t}$ da $\dot{\mu} = -1$. Queda $\mu\dot{\mathbf{t}} = 0$; tomando normas, $\mu k = 0$. Obtenemos así las dos ecuaciones sin suponer que exista $\mathbf{n}$:

$$\dot{\mu} = -1 \qquad \text{y} \qquad \mu(s)\,k(s) = 0.$$

La primera ecuación da $\mu(s) = c - s$ para alguna constante c, y esa función se anula a lo sumo en un punto. Por tanto $k(s) = 0$ para todo $s \neq c$, y por continuidad también en $s = c$: la curvatura es idénticamente nula y la curva es una recta.

Los recíprocos. Si α es una recta, todas sus rectas tangentes coinciden con ella misma; luego son paralelas y pasan todas por cualquier punto suyo. Las dos condiciones se cumplen, y quedan probadas las dos equivalencias. ■

LA IDEA: POR QUÉ APUNTAR A UN PUNTO FIJO PROHIBE DOBLARSE

La segunda condición se agota en una línea: si todas las tangentes son paralelas, el campo $\mathbf{t}$ es constante, luego $\dot{\mathbf{t}}$ es nulo y su norma, la curvatura, también. La primera no se agota, y merece una lectura.

El sistema que sale de derivar dice dos cosas a la vez, una por cada dirección del triedro. La componente tangencial, $\dot{\mu} = -1$, es un balance de velocidades: si la curva avanza a velocidad uno a lo largo de su propia tangente y el punto p está sobre esa tangente, la distancia orientada a p tiene que disminuir a velocidad exactamente uno. Eso no exige nada de la curva; es contabilidad.

La que exige es la componente normal, $\mu k = 0$. Doblar significa que la tangente gira. Si la tangente gira y además tiene que seguir pasando por p, entonces p tendría que estar en el eje de ese giro, que es el punto de tangencia mismo, es decir $\mu = 0$. Pero μ solo puede anularse en un instante, porque decrece a velocidad constante: el punto fijo se alcanza y se deja atrás. Así que en todos los demás instantes no queda más remedio que no doblarse.

Ejercicio 1.13. *Normales principales por un punto fijo* [H1.5]

Probar que si todas las rectas normales principales a una c.p.r. alabeada pasan por un punto fijo, dicha curva es una circunferencia o parte de una circunferencia.

Resolución. El planteamiento es el mismo del ejercicio anterior con $\mathbf{n}$ en el lugar de $\mathbf{t}$. Si p es el punto fijo,

$$p - \alpha(s) = \mu(s)\,\mathbf{n}(s), \qquad \mu(s) = \big(p - \alpha(s)\big)\cdot\mathbf{n}(s),$$

y de nuevo μ es derivable. Ahora la derivada tiene un término más, porque el normal principal se mueve en dos direcciones y no en una: $\dot{\mathbf{n}} = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$. Derivando,

$$-\mathbf{t} = \dot{\mu}\,\mathbf{n} + \mu\big(-k\,\mathbf{t} + \tau\,\mathbf{b}\big) = -\mu k\,\mathbf{t} + \dot{\mu}\,\mathbf{n} + \mu\tau\,\mathbf{b}.$$

Igualando coeficiente a coeficiente en la base $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ salen **tres** ecuaciones, y cada una aporta una pieza distinta del resultado:

$$\mu\,k = 1, \qquad \dot{\mu} = 0, \qquad \mu\,\tau = 0.$$

Lectura de las tres. La segunda dice que μ es una constante. La primera dice que esa constante no es cero y que

$$k = \frac{1}{\mu}$$

es constante y no nula; obsérvese que la primera ecuación también identifica de paso quién es p: la distancia de la curva al punto fijo es $|\mu| = 1/k$, es decir, p es el centro de curvatura, y la hipótesis dice que ese centro no se mueve. La tercera, con $\mu \neq 0$, obliga a $\tau \equiv 0$.

El remate, sin invocar nada. Con μ constante,

$$|\alpha(s) - p| = |\mu\,\mathbf{n}(s)| = |\mu| \qquad \text{para todo } s,$$

así que la curva está contenida en la esfera de centro p y radio $|\mu|$. Y como $\tau \equiv 0$, por la proposición (p. 36) está contenida en un plano. Ese plano contiene a $p = \alpha + \mu\mathbf{n}$, porque $\mathbf{n}$ es

una dirección suya. La intersección de una esfera con un plano es una circunferencia (o un punto, o el vacío, y aquí no puede ser ninguna de las dos cosas porque contiene una curva regular). Luego α recorre una circunferencia de centro p y radio $1/k$, entera o en parte según cuánto abarque su intervalo de definición. ■

Qué hace cada hipótesis. La palabra «alabeada» es la que garantiza $k > 0$, sin lo cual el normal principal no está definido y el enunciado no se puede ni escribir. Y la coletilla «o parte de una circunferencia» no es una cautela vacía: la demostración identifica el centro y el radio, pero el dominio de α puede ser un intervalo pequeño, y entonces la curva es un arco. Nada en la hipótesis obliga a dar la vuelta entera.

Ejercicio 1.14. *Dos caracterizaciones de las curvas planas* [H1.6]

Para curvas de clase C^3 con curvatura no nula, probar que las condiciones siguientes caracterizan a las curvas planas:
1. Todos sus planos osculadores pasan por un punto fijo.
2. Todos sus planos osculadores son paralelos.

Resolución. *La segunda condición.* Dos planos son paralelos exactamente cuando sus vectores característicos lo son. Que todos los osculadores sean paralelos significa entonces que $\mathbf{b}(s) = \pm\mathbf{a}$ para un vector unitario fijo $\mathbf{a}$, y el mismo argumento de conexión del ejercicio de la recta fuerza a que el signo sea constante y $\mathbf{b}$ también. Entonces

$$-\tau(s)\,\mathbf{n}(s) = \dot{\mathbf{b}}(s) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \tau \equiv 0,$$

y por la proposición (p. 36) la curva es plana.

La primera condición. Sea p el punto fijo. El plano osculador en $\alpha(s)$ es el que pasa por $\alpha(s)$ y tiene por vector característico $\mathbf{b}(s)$, luego la hipótesis se escribe

$$\big(p - \alpha(s)\big)\cdot\mathbf{b}(s) = 0 \qquad \text{para todo } s.$$

Derivando el producto escalar y usando $\dot{\mathbf{b}} = -\tau\mathbf{n}$,

$$0 = \big(-\dot{\alpha}\big)\cdot\mathbf{b} + \big(p-\alpha\big)\cdot\dot{\mathbf{b}} = -\underbrace{\mathbf{t}\cdot\mathbf{b}}_{=0} - \tau\,\big(p-\alpha\big)\cdot\mathbf{n},$$

es decir,

$$\tau(s)\,\big(p - \alpha(s)\big)\cdot\mathbf{n}(s) = 0 \qquad \text{para todo } s. \tag{1.5}$$

El núcleo de la prueba: descartar que la torsión sea no nula en algún sitio. La igualdad (1.5) deja dos posibilidades en cada punto, y hay que probar que la segunda no ocurre nunca. Supóngase que $\tau(s_1) \neq 0$ para algún s_1. Por continuidad hay un intervalo abierto J alrededor de s_1 donde τ no se anula, y en él (1.5) obliga a $(p-\alpha)\cdot\mathbf{n} = 0$. Pero por hipótesis también es $(p-\alpha)\cdot\mathbf{b} = 0$, y un vector ortogonal a $\mathbf{n}$ y a $\mathbf{b}$ a la vez es un múltiplo de $\mathbf{t}$:

$$p - \alpha(s) = \mu(s)\,\mathbf{t}(s) \qquad \text{para todo } s \in J.$$

Esto dice que, sobre J, todas las rectas tangentes de α pasan por p; y el ejercicio de las dos caracterizaciones de la recta prueba, con exactamente esa hipótesis, que $k \equiv 0$ en J. Eso contradice que la curva sea alabeada. Luego no hay ningún s_1 con $\tau(s_1) \neq 0$, la torsión es idénticamente nula y la curva es plana.

Los recíprocos. Si α es plana, el corolario (p. 33) dice que todos sus planos osculadores coinciden con el plano que la contiene. Un solo plano es paralelo a sí mismo y pasa por cualquiera de sus puntos, así que las dos condiciones se cumplen. ■

LA IDEA: LOS TRES EJERCICIOS, EN UNA TABLA MENTAL

Los tres problemas anteriores son el mismo, con el objeto pegado a la curva cambiado, y sus respuestas forman una escala que conviene recordar entera porque se reconocen de vista.

Qué pasa por un punto fijo	**Qué se anula**	**Qué curva sale**
las rectas tangentes	$k \equiv 0$	una recta
las rectas normales principales	$\tau \equiv 0$, k constante	una circunferencia
los planos osculadores	$\tau \equiv 0$	una curva plana

El orden no es casual. Cuanto más rígida es la exigencia, más pobre es la curva que sobrevive. Pedir que todas las tangentes se corten en un punto es pedir muchísimo, porque la tangente es lo que más se mueve, y solo lo aguanta la curva que no se mueve nada. Pedirlo de los planos osculadores es lo más suave, porque el osculador de una curva plana es siempre el mismo plano y ya contiene infinitos puntos fijos. El caso del normal principal queda en medio, y por eso da el objeto de en medio: la circunferencia, que es la curva que se dobla siempre igual y no se escapa.
Las dos versiones con «paralelos», para tangentes y para planos osculadores, son las más cortas: por continuidad, el vector unitario correspondiente es constante. Basta entonces derivarlo. No hay una tercera versión análoga para las normales principales: $\dot{\mathbf{n}} = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$ no puede anularse si $k > 0$.

Ejercicio 1.15. *Hélices: el criterio de Lancret* [H1.15]

Se llama **hélice** a una curva cuyas tangentes forman ángulo constante con una dirección fija, llamada **eje** de la hélice. Demostrar que, para una curva con curvatura y torsión no nulas en todo punto, ser hélice equivale a que el cociente $\tau(s)/k(s)$ sea constante. Probar además que la dirección fija es la del vector

$$a = \frac{\tau(s)}{k(s)}\,\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s).$$

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *«Ángulo constante con una dirección fija» se escribe* $\mathbf{t}(s)\cdot a = \cos\theta$ *con* a *unitario y* θ *constante. Deriva esa igualdad.*
2. *De la derivada saldrá que* a *es ortogonal al normal principal. ¿En qué plano vive entonces* a*, y cómo se escribe en la base de ese plano?*
3. *Para la vuelta, no busques el ángulo: propone el vector* a *del enunciado y comprueba que su derivada se anula.*

Resolución. *Si es hélice, el cociente es constante.* Sea a unitario y fijo, con $\mathbf{t}(s)\cdot a = \cos\theta$ constante.

Derivando respecto de s y usando la primera ecuación de Frenet-Serret,

$$0 = \dot{\mathbf{t}}(s)\cdot a = k(s)\,\mathbf{n}(s)\cdot a \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{n}(s)\cdot a = 0,$$

porque $k(s) \neq 0$ por hipótesis. Así que a es ortogonal al normal principal en todos los puntos, es decir, vive en el plano rectificante, generado por $\mathbf{t}$ y $\mathbf{b}$. Como a es unitario y $\mathbf{t}\cdot a = \cos\theta$, su componente binormal vale $\pm \operatorname{sen}\theta$. No puede ser cero: entonces $a = \pm\mathbf{t}$ sería constante y k sería nula. Por continuidad, esa componente conserva el signo en todo el intervalo. Elegimos el sentido del eje a para que sea positiva; con el ángulo correspondiente $0 < \theta < \pi$, queda

$$a = \cos\theta\,\mathbf{t}(s) + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{b}(s).$$

Derivando esta expresión, y recordando que a es constante,

$$0 = \dot{a} = \cos\theta\,\dot{\mathbf{t}} + \operatorname{sen}\theta\,\dot{\mathbf{b}} = \cos\theta\,k\,\mathbf{n} - \operatorname{sen}\theta\,\tau\,\mathbf{n} = \big(k\cos\theta - \tau\operatorname{sen}\theta\big)\mathbf{n}.$$

Como $\mathbf{n} \neq 0$, se obtiene $k\cos\theta = \tau\operatorname{sen}\theta$, o sea

$$\frac{\tau(s)}{k(s)} = \cot\theta,$$

que es constante porque θ lo es.

Si el cociente es constante, es hélice. Sea $c = \tau/k$ constante y defínase $a = c\,\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s)$, que es el vector del enunciado. Derivando,

$$\dot{a} = c\,\dot{\mathbf{t}} + \dot{\mathbf{b}} = c\,k\,\mathbf{n} - \tau\,\mathbf{n} = (c\,k - \tau)\,\mathbf{n} = 0,$$

por la propia definición de c. Luego a es un vector constante. Y entonces

$$\mathbf{t}(s)\cdot a = c\,\mathbf{t}\cdot\mathbf{t} + \mathbf{t}\cdot\mathbf{b} = c,$$

que es constante. Como además $|a| = \sqrt{c^2+1}$ es constante, el ángulo entre $\mathbf{t}$ y a es constante y la curva es una hélice de eje a. ■

Observación. El vector a del enunciado **no es unitario**: su módulo es $\sqrt{1+\tau^2/k^2}$. Da la dirección del eje, no un representante unitario. Si se quiere el unitario, basta dividir, y se recupera $a = \cos\theta\,\mathbf{t} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{b}$ con $\cot\theta = \tau/k$.

Una tercera caracterización, escondida en la ida. La primera línea de la demostración probó, de paso, que en una hélice el normal principal es siempre perpendicular al eje: $\mathbf{n}(s)\cdot a = 0$. Y eso solo ya basta para ser hélice. Si existe un vector fijo $a \neq 0$ con $\mathbf{n}(s)\cdot a = 0$ para todo s, entonces

$$\frac{d}{ds}\big(\mathbf{t}(s)\cdot a\big) = \dot{\mathbf{t}}(s)\cdot a = k(s)\,\mathbf{n}(s)\cdot a = 0,$$

así que $\mathbf{t}\cdot a$ es constante y el ángulo entre la tangente y a también. Para una curva con curvatura no nula quedan, pues, tres maneras de decir lo mismo: las tangentes forman ángulo constante con una dirección fija; el cociente τ/k es constante; todos los normales principales son perpendiculares a una misma dirección. La tercera, dicha con indicatrices, es que la indicatriz esférica de las normales principales está en un plano que pasa por el origen, es decir, sobre un círculo máximo de la esfera unidad.

Esta tercera forma es la cómoda cuando se construye una curva β cuya velocidad es el normal principal de α, $\beta' = \mathbf{n}$ (aparece en la tabla que precede al ejercicio de las involutas). Una curva está en un plano de vector característico a exactamente cuando $\beta\cdot a$ es constante, es decir, cuando $\beta'\cdot a = \mathbf{n}\cdot a$ se anula en todo punto. Luego α es una hélice si y solo si β es plana, y se sabe sin calcular ni la curvatura ni la torsión de β.

La idea: qué es una hélice, sin fórmulas

Una hélice es una curva que sube siempre con la misma inclinación. Piensa en una carretera de montaña con pendiente constante: puede girar como quiera, pero el ángulo con la vertical no cambia nunca.
El criterio dice que eso equivale a que la curva reparta siempre en la misma proporción su doblarse y su escaparse del plano. Curvatura y torsión pueden variar tanto como quieran, con tal de que lo hagan a la vez y en la misma proporción.
Por eso la hélice circular, con k y τ constantes por separado, es solo el caso más simple. Hay hélices con curvatura y torsión variables, y siguen siendo hélices mientras el cociente aguante.
Y aquí está la razón de que a viva en el plano rectificante: el plano rectificante es el que contiene al tangente y al binormal, es decir, el que *no* contiene la dirección hacia la que la curva se dobla. El eje de una hélice es una dirección que la curva nunca «ataca», y por eso tiene que estar ahí.

De dónde viene: Lancret y una espera de cuarenta años

El resultado se conoce como teorema de Lancret. Michel Ange Lancret lo enunció a principios del siglo XIX, en la misma memoria en la que introdujo la idea de una segunda curvatura para las curvas del espacio, pero no llegó a darle una demostración completa. La prueba rigurosa se atribuye a Barré de Saint-Venant, unos cuarenta años después.
Merece la pena notar que Lancret trabajaba sin las ecuaciones de Frenet-Serret, que aún no existían. Con ellas, como acaba de verse, el teorema cabe en diez líneas. Es un buen recordatorio de para qué sirve montar un buen aparato de notación: no descubre nada por sí solo, pero convierte en rutina lo que antes era una hazaña.

Qué deja. El criterio de Lancret entra en la categoría de resultados que hay que reconocer de vista. Cada vez que en un enunciado aparezca τ/k, hay una hélice escondida. Y la técnica de la vuelta es de las más rentables del capítulo: para probar que existe una dirección fija, no se busca, se propone un candidato y se comprueba que su derivada se anula.

Ejercicio 1.16. *Ser hélice, leído en un producto mixto* [H1.18]

Sea $\alpha = \alpha(s)$ una curva de clase C^4, regular y parametrizada naturalmente, con curvatura y torsión no nulas en todo punto. Probar que para que α sea una hélice es necesario y suficiente que

$$(\ddot{\alpha}(s), \alpha^{(3)}(s), \alpha^{(4)}(s)) = 0.$$

La idea, antes de la cuenta. El criterio de Lancret dice que ser hélice es que τ/k sea constante, y «constante» es «derivada nula». Así que lo único que puede estar pasando es que ese producto mixto sea, disfrazado, la derivada del cociente. Y lo es: al final saldrá $k^5(\tau/k)^{\cdot}$, de modo que anularlo y anular la derivada del cociente son la misma cosa. Toda la demostración consiste en escribir las tres derivadas en la base de Frenet y calcular un determinante 3×3 que se desploma solo, porque su primera fila tiene dos ceros.

Resolución. Paso 1: las tres derivadas en la base de Frenet. La primera es la primera ecuación de Frenet-Serret sin más, $\ddot{\alpha} = \dot{\mathbf{t}} = k\mathbf{n}$. Derivando y usando $\dot{\mathbf{n}} = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$,

$$\alpha^{(3)} = \dot{k}\,\mathbf{n} + k\,\dot{\mathbf{n}} = -k^2\,\mathbf{t} + \dot{k}\,\mathbf{n} + k\tau\,\mathbf{b}.$$

Y derivando esta última término a término, con las tres ecuaciones de Frenet-Serret:

$$\frac{d}{ds}\big(-k^2\mathbf{t}\big) = -2k\dot{k}\,\mathbf{t} - k^3\,\mathbf{n},$$

$$\frac{d}{ds}\big(\dot{k}\,\mathbf{n}\big) = -k\dot{k}\,\mathbf{t} + \ddot{k}\,\mathbf{n} + \dot{k}\tau\,\mathbf{b},$$

$$\frac{d}{ds}\big(k\tau\,\mathbf{b}\big) = -k\tau^2\,\mathbf{n} + \big(\dot{k}\tau + k\dot{\tau}\big)\mathbf{b}.$$

Sumando,

$$\alpha^{(4)} = -3k\dot{k}\,\mathbf{t} + \big(\ddot{k} - k^3 - k\tau^2\big)\mathbf{n} + \big(2\dot{k}\tau + k\dot{\tau}\big)\mathbf{b}.$$

Paso 2: el determinante (el núcleo de la prueba). Como $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ es una base ortonormal directa, el producto mixto de tres vectores es el determinante de la matriz de sus coordenadas en ella:

$$(\ddot{\alpha}, \alpha^{(3)}, \alpha^{(4)}) = \begin{vmatrix} 0 & k & 0 \\ -k^2 & \dot{k} & k\tau \\ -3k\dot{k} & \ddot{k} - k^3 - k\tau^2 & 2\dot{k}\tau + k\dot{\tau} \end{vmatrix}.$$

Aquí está la suerte del problema: la primera fila tiene dos ceros, así que el desarrollo por ella deja un solo menor y la columna central —que es la única complicada, con la $\ddot{k}$ dentro— desaparece sin dejar rastro. Desarrollando,

$$(\ddot{\alpha}, \alpha^{(3)}, \alpha^{(4)}) = -k \begin{vmatrix} -k^2 & k\tau \\ -3k\dot{k} & 2\dot{k}\tau + k\dot{\tau} \end{vmatrix} = -k\Big(-2k^2\dot{k}\tau - k^3\dot{\tau} + 3k^2\dot{k}\tau\Big),$$

es decir,

$$(\ddot{\alpha}, \alpha^{(3)}, \alpha^{(4)}) = k^3\big(k\dot{\tau} - \dot{k}\tau\big). \tag{1.6}$$

Paso 3: reconocer ahí la derivada del cociente. La derivada de un cociente es $\big(\tau/k\big)^{\cdot} = (\dot{\tau}k - \tau\dot{k})/k^2$, que es exactamente el paréntesis de (1.6) dividido por k^2. Por tanto

$$(\ddot{\alpha}, \alpha^{(3)}, \alpha^{(4)}) = k^5 \left(\frac{\tau}{k}\right)^{\cdot}.$$

Como k no se anula, el producto mixto es idénticamente nulo si y solo si τ/k tiene derivada nula, es decir, si y solo si τ/k es constante, que por el criterio de Lancret equivale a que α sea una hélice. ■

Otra vía (una implicación sin calcular nada). La dirección «si es hélice, el producto mixto se anula» sale sin desarrollar las derivadas vectoriales: basta derivar una identidad escalar.

Si α es una hélice de eje $\mathbf{a}$, en la demostración de Lancret se vio que $\mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{a} = 0$ para todo s. Como $\ddot{\alpha} = k\mathbf{n}$, eso es $\ddot{\alpha}(s)\cdot\mathbf{a} = 0$. Y ahora basta derivar esa identidad escalar dos veces, recordando que $\mathbf{a}$ es constante:

$$\ddot{\alpha}\cdot\mathbf{a} = 0 \implies \alpha^{(3)}\cdot\mathbf{a} = 0 \implies \alpha^{(4)}\cdot\mathbf{a} = 0.$$

Los tres vectores son ortogonales a un mismo vector no nulo, luego viven en un mismo plano, y tres vectores coplanarios tienen producto mixto cero. La cuenta larga solo hace falta para la vuelta, donde no se dispone de $\mathbf{a}$ y hay que fabricarlo. ■

CONEXIÓN: LA MISMA VENTANA DE DERIVADAS, CORRIDA UN LUGAR

Merece la pena poner (1.6) al lado de la fórmula de la torsión (p. 35), porque juntas dicen algo que por separado no se ve.

$$(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \alpha^{(3)}) = k^2\tau, \qquad (\ddot{\alpha}, \alpha^{(3)}, \alpha^{(4)}) = k^5\Big(\frac{\tau}{k}\Big)^{\cdot}.$$

A la izquierda, la ventana de derivadas $\{1,2,3\}$; a la derecha, la misma ventana corrida un lugar, $\{2,3,4\}$. Cada ventana reconoce una condición geométrica distinta (siempre con $k > 0$ y la regularidad necesaria):

- la primera se anula cuando $\tau \equiv 0$, y eso caracteriza a las **curvas planas**;
- la segunda se anula cuando τ/k es constante, y eso caracteriza a las **hélices**.

Un producto mixto nulo expresa coplanariedad en cada punto. Las pruebas permiten además encontrar una dirección fija: en el primer caso la curva está en un plano fijo; en el segundo, todos sus vectores aceleración son ortogonales a un mismo eje fijo. Así, la velocidad mantiene constante su componente a lo largo del eje, aunque la curva pueda salir de cualquier plano, como ocurre en un muelle.

Ejercicio 1.17. *Una hélice escrita en polinomios* [H1.16]

Probar que la curva

$$\alpha(u) = \Big(u,\ \tfrac{1}{3}u^2,\ \tfrac{2}{27}u^3\Big)$$

es una hélice y que sus tangentes forman un ángulo de $\pi/4$ con su eje.

Resolución. *Por qué esos coeficientes y no otros.* Lo primero que hay que hacer es derivar y calcular la norma, y ahí aparece la gracia del ejercicio:

$$\alpha'(u) = \Big(1,\ \tfrac{2}{3}u,\ \tfrac{2}{9}u^2\Big), \qquad |\alpha'(u)|^2 = 1 + \frac{4}{9}u^2 + \frac{4}{81}u^4 = \Big(1 + \frac{2}{9}u^2\Big)^2.$$

La norma al cuadrado es un cuadrado perfecto, de modo que $|\alpha'(u)| = 1 + \frac{2}{9}u^2$ *sin raíz*, y el vector tangente unitario resulta ser una función racional:

$$\mathbf{t}(u) = \frac{\alpha'(u)}{|\alpha'(u)|} = \frac{1}{9 + 2u^2}\big(9,\ 6u,\ 2u^2\big),$$

donde se han multiplicado numerador y denominador por 9. Los coeficientes $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{27}$ del enunciado están elegidos justo para que eso ocurra; con otros, la raíz no se va y el problema deja de ser de lápiz.

No se adivina el eje: se despeja. Ser hélice es, por definición, que exista un vector unitario fijo $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ tal que $\mathbf{t}(u)\cdot\mathbf{a}$ sea constante. En lugar de buscar $\mathbf{a}$ por intuición, se impone la condición y se deja que las cuentas lo entreguen. Si $\mathbf{t}(u)\cdot\mathbf{a} = c$ para todo u, quitando el denominador queda la identidad polinómica

$$9a_1 + 6u\,a_2 + 2u^2 a_3 = c\,(9 + 2u^2) \qquad \text{para todo } u \in \mathbb{R},$$

y dos polinomios son iguales si y solo si lo son coeficiente a coeficiente:

$$\text{grado } 1:\ 6a_2 = 0; \qquad \text{grado } 0:\ 9a_1 = 9c; \qquad \text{grado } 2:\ 2a_3 = 2c.$$

De ahí $a_2 = 0$ y $a_1 = a_3 = c$, es decir $\mathbf{a} = c\,(1,0,1)$. Imponiendo que $\mathbf{a}$ sea unitario, $|c|\sqrt{2} = 1$. Elegimos el sentido del eje que da $c > 0$, luego

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \qquad \mathbf{t}(u)\cdot\mathbf{a} = c = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}.$$

El sistema tiene solución, luego la curva es una hélice; el eje es la bisectriz de los ejes OX y OZ; y el ángulo constante que forman las tangentes con él es $\pi/4$. Las dos cosas que pedía el enunciado salen del mismo cálculo. ■

Otra vía (por el criterio de Lancret). Se puede también no usar la definición y comprobar que τ/k es constante, con las fórmulas en parámetro arbitrario (p. 44). Con $\alpha'' = (0, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}u)$ y $\alpha''' = (0, 0, \frac{4}{9})$,

$$\alpha' \times \alpha'' = \left(\tfrac{4}{27}u^2,\ -\tfrac{4}{9}u,\ \tfrac{2}{3}\right), \qquad |\alpha' \times \alpha''| = \frac{2}{27}\left(2u^2 + 9\right), \qquad (\alpha', \alpha'', \alpha''') = \frac{8}{27},$$

donde el producto mixto es el determinante de una matriz triangular superior, es decir, el producto de su diagonal: $1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{27}$. Y entonces

$$k = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3} = \frac{54}{(2u^2+9)^2}, \qquad \tau = \frac{(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha' \times \alpha''|^2} = \frac{54}{(2u^2+9)^2},$$

de donde $\tau/k \equiv 1$: es una hélice. Y como Lancret da $\tau/k = \cot\theta$, se obtiene $\cot\theta = 1$ y $\theta = \pi/4$, el mismo ángulo.

Esta vía cuesta bastante más y merece la pena por lo que enseña de propina: en esta curva la curvatura y la torsión no solo son proporcionales, sino *iguales* en todo punto, y ninguna de las dos es constante. Es un ejemplo concreto de lo que la caja de Lancret anunciaba: hay hélices que no son la hélice circular, con curvatura y torsión variables, y siguen siendo hélices porque las dos varían a la vez. ■

Ejercicio 1.18. *Planos rectificantes, binormales y un imposible* [H1.11]

Se pide:

1. Probar que si los planos rectificantes de una c.r.p.n. $\alpha = \alpha(s)$ pasan por un punto fijo, entonces el cociente $\dfrac{\tau(s)}{k(s)}$ es función lineal del parámetro natural s de la misma.

2. Estudiar si puede existir una curva tal que todas sus rectas binormales pasen por un punto fijo.
3. Probar que las rectas tangentes de una curva no pueden ser rectas binormales de otra curva.

Resolución. *Primer apartado.* El plano rectificante en $\alpha(s)$ es el generado por $\mathbf{t}$ y $\mathbf{b}$, es decir, el que tiene por vector característico a $\mathbf{n}(s)$. Si p está en todos ellos,

$$\big(p-\alpha(s)\big)\cdot\mathbf{n}(s)=0 \qquad \text{para todo } s. \tag{1.7}$$

Esa igualdad dice que el vector $p-\alpha$ no tiene componente en $\mathbf{n}$, luego se escribe en las otras dos direcciones del triedro:

$$p-\alpha(s)=f(s)\,\mathbf{t}(s)+g(s)\,\mathbf{b}(s), \qquad f=(p-\alpha)\cdot\mathbf{t}, \qquad g=(p-\alpha)\cdot\mathbf{b},$$

y las dos funciones son derivables por la misma razón de siempre. Ahora se derivan las tres igualdades, y cada una da algo distinto.

La función f: derivando su definición y usando $\dot{\mathbf{t}}=k\mathbf{n}$ junto con (1.7),

$$\dot f=(-\mathbf{t})\cdot\mathbf{t}+(p-\alpha)\cdot k\mathbf{n}=-1+0=-1 \qquad\Longrightarrow\qquad f(s)=c_1-s.$$

La función g: derivando y usando $\dot{\mathbf{b}}=-\tau\mathbf{n}$ y otra vez (1.7),

$$\dot g=(-\mathbf{t})\cdot\mathbf{b}+(p-\alpha)\cdot(-\tau\mathbf{n})=0-0=0 \qquad\Longrightarrow\qquad g\equiv c_2 \text{ constante.}$$

Y la hipótesis misma: derivando (1.7) y usando $\dot{\mathbf{n}}=-k\mathbf{t}+\tau\mathbf{b}$,

$$0=(-\mathbf{t})\cdot\mathbf{n}+(p-\alpha)\cdot\big(-k\mathbf{t}+\tau\mathbf{b}\big)=-kf+\tau g.$$

De las tres juntas sale el resultado. Primero hay que descartar $c_2=0$: si lo fuera, quedaría $kf\equiv 0$, y como $k>0$ eso obligaría a $f\equiv 0$, imposible porque $f=c_1-s$ no es la función nula. Luego $c_2\neq 0$ y

$$\frac{\tau(s)}{k(s)}=\frac{f(s)}{c_2}=\frac{c_1-s}{c_2},$$

que es una función afín de s, con pendiente $-1/c_2\neq 0$. ■

Segundo apartado: no existe ninguna. Supóngase que todas las rectas binormales pasan por p. Entonces $p-\alpha(s)=\mu(s)\mathbf{b}(s)$ con $\mu=(p-\alpha)\cdot\mathbf{b}$ derivable, y derivando, con $\dot{\mathbf{b}}=-\tau\mathbf{n}$,

$$-\mathbf{t}=\dot\mu\,\mathbf{b}-\mu\tau\,\mathbf{n}.$$

El miembro de la izquierda tiene componente -1 en la dirección $\mathbf{t}$; el de la derecha tiene componente 0. Como $\{\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{b}\}$ es una base, eso es $-1=0$. La hipótesis es contradictoria: **no existe ninguna curva cuyas rectas binormales pasen todas por un punto fijo**. ■

LA IDEA: POR QUÉ LA BINORMAL ES LA QUE FALLA, Y LAS OTRAS DOS NO

Los tres problemas de «rectas por un punto fijo» —tangentes, normales principales y binormales— se resuelven con la misma cuenta y dan tres respuestas distintas: una recta, una circunferencia y nada. Puestos uno al lado del otro se ve exactamente dónde

está la diferencia, y no es un accidente del álgebra.
La cuenta es siempre $p - \alpha = \mu\,\mathbf{v}$, con $\mathbf{v}$ uno de los tres vectores del triedro, y al derivar queda

$$-\mathbf{t} = \dot{\mu}\,\mathbf{v} + \mu\,\dot{\mathbf{v}}.$$

A la izquierda hay un -1 en la dirección $\mathbf{t}$, que viene de que la curva avanza a velocidad uno. Alguien de la derecha tiene que pagarlo, y solo hay dos candidatos: $\dot{\mu}\,\mathbf{v}$ si $\mathbf{v} = \mathbf{t}$, o $\mu\dot{\mathbf{v}}$ si $\dot{\mathbf{v}}$ tiene componente tangencial. Y aquí está todo:

$$\dot{\mathbf{t}} = k\mathbf{n}, \qquad \dot{\mathbf{n}} = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}, \qquad \dot{\mathbf{b}} = -\tau\mathbf{n}.$$

El único de los tres que tiene componente en $\mathbf{t}$ es $\dot{\mathbf{n}}$. Por eso el caso del normal principal funciona y hasta determina la curvatura ($\mu k = 1$); el caso de la tangente funciona porque el propio $\mathbf{v}$ es $\mathbf{t}$ y $\dot{\mu}$ paga la cuenta; y el caso de la binormal no tiene con qué pagarla, porque $\mathbf{b}$ es ortogonal a $\mathbf{t}$ y $\dot{\mathbf{b}}$ también lo es.
Dicho sin álgebra: la recta binormal es, de las tres, la única que en ningún momento «mira» hacia donde la curva se está moviendo. Un punto fijo sobre ella tendría que quedarse quieto mientras el pie de la recta se desplaza a velocidad uno en una dirección que la recta no contiene, y eso no hay manera de arreglarlo.

Tercer apartado. Supóngase que existen dos curvas relacionadas así: para cada s, la recta tangente a α en $\alpha(s)$ es la recta binormal de otra curva β en un punto suyo. Se entiende que la correspondencia entre puntos es regular y diferenciable, de modo que permite parametrizar β regularmente por s. Entonces se tienen dos condiciones:

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda(s)\,\mathbf{t}(s) \qquad \text{(el punto de } \beta \text{ está en la tangente de } \alpha\text{)},$$

$$\mathbf{b}_\beta = \varepsilon\,\mathbf{t}(s), \quad \varepsilon = \pm 1 \qquad \text{(la binormal de } \beta \text{ tiene la dirección de esa recta)}.$$

Paso 1: la condición de ortogonalidad fija λ. Derivando la primera,

$$\beta'(s) = \big(1 + \dot{\lambda}\big)\mathbf{t} + \lambda\dot{\mathbf{t}}.$$

El vector tangente de una curva es siempre ortogonal a su binormal, luego $\beta' \cdot \mathbf{b}_\beta = 0$, y como $\mathbf{b}_\beta = \varepsilon\mathbf{t}$ eso es $1 + \dot{\lambda} = 0$. Por tanto

$$\lambda(s) = c - s \qquad \text{y} \qquad \beta'(s) = \lambda(s)\dot{\mathbf{t}}(s).$$

Paso 2: reconstruir el triedro de β. Para que β sea regular hace falta $\lambda \neq 0$ y $\dot{\mathbf{t}} \neq 0$; en particular $k > 0$. Ahora sí está definido $\mathbf{n}$ y podemos escribir $\beta' = \lambda k\mathbf{n}$. Escribiendo $\delta = \operatorname{sig}(\lambda k)$,

$$\mathbf{t}_\beta = \delta\,\mathbf{n}, \qquad \mathbf{n}_\beta = \mathbf{b}_\beta \times \mathbf{t}_\beta = \varepsilon\delta\,(\mathbf{t} \times \mathbf{n}) = \varepsilon\delta\,\mathbf{b}.$$

Paso 3: la tercera ecuación de Frenet de β es la que revienta (el núcleo). Sea σ el parámetro natural de β. Derivando $\mathbf{b}_\beta = \varepsilon\mathbf{t}$ respecto de σ por la regla de la cadena,

$$\frac{d\mathbf{b}_\beta}{d\sigma} = \varepsilon\,\dot{\mathbf{t}}\,\frac{ds}{d\sigma} = \varepsilon\,k\,\frac{ds}{d\sigma}\,\mathbf{n}.$$

Pero la tercera ecuación de Frenet-Serret aplicada a β dice que esa derivada vale $-\tau_\beta\,\mathbf{n}_\beta = -\tau_\beta\,\varepsilon\delta\,\mathbf{b}$. Igualando,

$$\varepsilon\,k\,\frac{ds}{d\sigma}\,\mathbf{n} = -\tau_\beta\,\varepsilon\delta\,\mathbf{b}.$$

Los vectores $\mathbf{n}$ y $\mathbf{b}$ son linealmente independientes, así que los dos coeficientes tienen que ser nulos. Del primero, y como $\varepsilon = \pm 1$ y $ds/d\sigma \neq 0$ por ser un cambio regular de parámetro, se sigue $k \equiv 0$. Eso contradice lo obtenido en el paso 2. Luego tal par de curvas no existe. ■

Dónde estaba la incompatibilidad. Vale la pena decir en una frase qué ha fallado, porque el cálculo lo esconde. La tercera ecuación de Frenet dice que la binormal de una curva, al moverse, gira *alrededor de su propia tangente*, porque su derivada es un múltiplo del normal principal. Aquí la binormal de β es la tangente de α, que al moverse gira alrededor de la binormal de α; y esa dirección resulta ser el normal principal de β, no su tangente. Los dos ejes de giro son perpendiculares, y la única manera de que dos giros perpendiculares coincidan es que no haya giro: $k = 0$.

Ejercicio 1.19. *Curvas cuyas tangentes rozan la esfera unidad* [H1.12]

Probar que las curvas α en $\mathbb{R}^3$ cuyas rectas tangentes son tangentes a la superficie esférica de centro el origen y radio unidad son rectas, o curvas sobre dicha superficie esférica, o curvas que verifican

$$\frac{\tau(s)}{k(s)} = as + b, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$

siendo s el parámetro natural de α. Para usar el cociente en todo el intervalo, se considera el caso $k \equiv 0$ o el caso $k > 0$ en todo punto. Si hay ceros de curvatura mezclados con puntos de curvatura positiva, la parte del argumento que usa el triedro se aplica en los intervalos donde este está definido.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Traduce «la recta tangente es tangente a la esfera» a una igualdad numérica: una recta es tangente a una esfera exactamente cuando su distancia al centro vale el radio.*
2. *El vector de posición $\alpha(s)$ también se puede escribir en la base de Frenet del propio punto. Llámale f, g, h a sus tres coordenadas y calcula sus derivadas.*
3. *Deriva la condición de tangencia. Sale un producto de tres factores igualado a cero, y hay que justificar por qué las alternativas valen en todo un intervalo, no solo en cada punto por separado.*

Resolución. Paso 1: escribir la hipótesis como una ecuación. Una recta es tangente a una esfera justo cuando la toca en un punto, y eso ocurre exactamente cuando su distancia al centro es igual al radio. La distancia del origen a la recta que pasa por $\alpha(s)$ con dirección unitaria $\mathbf{t}(s)$ es la norma de la componente de $\alpha(s)$ ortogonal a $\mathbf{t}(s)$, cuyo cuadrado vale $|\alpha|^2 - \alpha \cdot \mathbf{t}^2$ por el teorema de Pitágoras. La hipótesis es, pues,

$$|\alpha(s)|^2 - \alpha(s) \cdot \mathbf{t}(s)^2 = 1 \qquad \text{para todo } s. \tag{1.8}$$

Si $k \equiv 0$, la curva es una recta a distancia 1 del origen y ya estamos en la primera alternativa. En lo que sigue suponemos $k > 0$ en todo el intervalo.

Paso 2: mirar el vector de posición desde el triedro de la propia curva. Este es el movimiento que resuelve el problema, y conviene entender por qué. La igualdad (1.8) mezcla una cantidad ajena a la curva —la distancia al origen— con una propia de ella, $\mathbf{t}$. La manera de que todo hable el mismo idioma es escribir también el vector de posición en la referencia de Frenet:

$$\alpha(s) = f(s)\,\mathbf{t}(s) + g(s)\,\mathbf{n}(s) + h(s)\,\mathbf{b}(s), \qquad f = \alpha \cdot \mathbf{t}, \quad g = \alpha \cdot \mathbf{n}, \quad h = \alpha \cdot \mathbf{b}.$$

Entonces $|\alpha|^2 = f^2 + g^2 + h^2$, y (1.8) se simplifica hasta quedar en

$$g(s)^2 + h(s)^2 = 1. \tag{1.9}$$

La condición, que parecía depender de dos cosas, solo depende de dos de las tres coordenadas.

Las derivadas de las tres funciones salen de Frenet-Serret y de $\dot\alpha = \mathbf{t}$:

$$\dot f = \mathbf{t}\cdot\mathbf{t} + \alpha\cdot k\mathbf{n} = 1 + kg,$$

$$\dot g = \mathbf{t}\cdot\mathbf{n} + \alpha\cdot(-k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) = -kf + \tau h,$$

$$\dot h = \mathbf{t}\cdot\mathbf{b} + \alpha\cdot(-\tau\mathbf{n}) = -\tau g.$$

Paso 3: derivar la condición (el núcleo). Derivando (1.9) y sustituyendo,

$$0 = 2g\dot g + 2h\dot h = 2g\big(-kf + \tau h\big) + 2h\big(-\tau g\big) = -2kfg + 2\tau gh - 2\tau gh,$$

donde los dos términos con τ se cancelan. Queda, limpiamente,

$$k(s)\, f(s)\, g(s) = 0 \qquad \text{para todo } s.$$

Como $k > 0$, esto da $fg = 0$. Hace falta un paso más para separar casos en todo el intervalo: un producto nulo punto a punto no basta por sí solo.

Si $g(s_1) \neq 0$, en la componente abierta donde $g \neq 0$ se tiene $f = 0$ y $0 = \dot f = 1 + kg$, luego $g = -1/k$. Esa componente no puede terminar en un punto interior del dominio: por continuidad, allí seguiría siendo $g = -1/k \neq 0$. Por conexión, ocupa todo el intervalo y $f \equiv 0$. Si no existe tal s_1, entonces $g \equiv 0$. Así quedan justificadas las dos alternativas restantes, incluso si f se anula en un punto aislado.

Paso 4: los tres casos.

Si $k \equiv 0$, la curva es una recta, que es la primera alternativa. Se trata de una recta a distancia 1 del origen, tangente por tanto a la esfera, y su única recta tangente es ella misma.

Si $k > 0$ y f se anula idénticamente en un intervalo, entonces (1.8) da $|\alpha|^2 = 1$: la curva está sobre la esfera unidad, que es la segunda alternativa. Y es coherente, porque una curva sobre la esfera toca a la esfera en cada uno de sus puntos, y su tangente allí es tangente a la esfera.

Si $k > 0$ y $g \equiv 0$, de ahí sale todo lo demás en cadena:

- de $g \equiv 0$ y (1.9) se sigue $h^2 = 1$, luego h vale 1 o -1, y por continuidad el mismo en todo el intervalo;
- de $\dot f = 1 + kg$ se sigue $\dot f = 1$, luego $f(s) = s + c$;
- de $\dot g = 0$ se sigue $-kf + \tau h = 0$, es decir $\tau h = kf$.

Como $h \neq 0$, se puede despejar:

$$\frac{\tau(s)}{k(s)} = \frac{f(s)}{h} = \frac{s + c}{h},$$

que es una función afín de s con pendiente $a = 1/h \neq 0$. Esa es la tercera alternativa. ■

Un poco más de lo que pedía. El enunciado se conforma con $a \neq 0$, pero la cuenta ha dado $h = \pm 1$ y por tanto $a = \pm 1$ exactamente. El 1 que aparece ahí es el radio de la esfera: con una esfera de radio R el mismo argumento daría $h = \pm R$ y $|a| = 1/R$. La pendiente de la recta τ/k no es un parámetro libre, sino el inverso del radio de la esfera a la que las tangentes rozan.

CONEXIÓN: QUIÉN ES EL PUNTO DE TANGENCIA, Y POR QUÉ ESTO ES UNA INVOLUTA

La demostración esconde un dibujo que merece la pena sacar a la luz, porque conecta este ejercicio con otros dos del capítulo.
En el tercer caso, el punto en que la tangente toca a la esfera es el punto de la recta más cercano al origen, es decir, el pie de la perpendicular,

$$\gamma(s) = \alpha(s) - \alpha(s)\cdot\mathbf{t}(s)\,\mathbf{t}(s) = \alpha(s) - f(s)\mathbf{t}(s) = h\,\mathbf{b}(s),$$

donde la última igualdad usa $g \equiv 0$. Es decir: **la tangente toca a la esfera justamente en** $\pm\mathbf{b}(s)$, un punto de la indicatriz esférica de las binormales de α. Que ese punto esté en la esfera unidad no es ninguna sorpresa, porque $\mathbf{b}$ es unitario; la información está en que sea el punto de tangencia.
Y como $f(s) = s + c$, esa curva de puntos de tangencia es

$$\gamma(s) = \alpha(s) + (-c - s)\,\mathbf{t}(s),$$

que tiene exactamente la forma de una **involuta** de α. Reuniendo las dos lecturas: las curvas del tercer caso son las que tienen una involuta contenida en la esfera unidad, y esa involuta es su propia indicatriz de las binormales. Los tres objetos —tangentes que rozan una esfera, involutas, indicatriz esférica— resultan ser el mismo dibujo mirado desde tres sitios.

Ejercicio 1.20. *La sombra de una hélice sobre el suelo* [H1.17]

Sea $\alpha = \alpha(s)$ una hélice parametrizada naturalmente cuyo eje viene definido por el vector fijo unitario $\mathbf{a}$, de modo que $\mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{a} = \cos\theta$ es constante, con $0 < \theta < \pi$. Sea β la curva proyección de α sobre el plano perpendicular al eje de la hélice α y que pasa por el origen de $\mathbb{R}^3$. Se pide:

1. Expresar β en función de α y probar que su parámetro natural σ es una función lineal del parámetro natural s de α.
2. Probar que las curvaturas de α y β son proporcionales.

Resolución. *Primer apartado.* Proyectar ortogonalmente un punto sobre el plano que pasa por el origen y es perpendicular a $\mathbf{a}$ consiste en quitarle su componente en la dirección de $\mathbf{a}$:

$$\beta(s) = \alpha(s) - \alpha(s)\cdot\mathbf{a}\,\mathbf{a}.$$

Derivando, y usando que $\mathbf{a}$ es constante y que $\mathbf{t}\cdot\mathbf{a} = \cos\theta$,

$$\beta'(s) = \mathbf{t}(s) - \cos\theta\,\mathbf{a}.$$

Aquí es donde entra la hipótesis de que α sea una hélice, y entra de la única manera que importa: hace que el vector que se resta sea *el mismo* en todos los puntos. Por eso la velocidad de la sombra resulta constante:

$$|\beta'|^2 = |\mathbf{t}|^2 - 2\cos\theta\,\mathbf{t}\cdot\mathbf{a} + \cos^2\theta\,|\mathbf{a}|^2 = 1 - 2\cos^2\theta + \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta.$$

Suponiendo $\operatorname{sen}\theta > 0$ —lo contrario significaría $\mathbf{t} = \pm\mathbf{a}$, es decir, una recta paralela al eje, cuya sombra es un punto—, se tiene $|\beta'(s)| = \operatorname{sen}\theta$ y β es regular. Su parámetro natural es entonces

$$\sigma(s) = \int_{s_0}^{s} |\beta'(\varsigma)|\,d\varsigma = (s - s_0)\operatorname{sen}\theta,$$

una función afín de s; si se elige $s_0 = 0$, queda lineal. El factor $\operatorname{sen}\theta \leq 1$ dice que la sombra no recorre más camino que la curva. La desigualdad es estricta cuando hay avance en la dirección del eje; para $\theta = \pi/2$ las longitudes coinciden. ■

Segundo apartado. El tangente unitario de β es

$$\mathbf{t}_\beta = \frac{\beta'}{|\beta'|} = \frac{\mathbf{t} - \cos\theta\,\mathbf{a}}{\operatorname{sen}\theta},$$

y para derivarlo respecto de σ hay que usar la regla de la cadena con $ds/d\sigma = 1/\operatorname{sen}\theta$:

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta}{d\sigma} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,\dot{\mathbf{t}}\,\frac{ds}{d\sigma} = \frac{\ddot{\alpha}(s)}{\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Tomando normas se obtiene la curvatura; donde $k > 0$, normalizando se obtiene también el normal principal de la sombra:

$$k_\beta = \frac{k}{\operatorname{sen}^2\theta}, \qquad \mathbf{n}_\beta = \mathbf{n} \quad (k > 0).$$

Las dos curvaturas son proporcionales, con constante de proporcionalidad $1/\operatorname{sen}^2\theta$, que no depende del punto. ■

LA IDEA: DE DÓNDE SALE EL CUADRADO DEL SENO

Que la curvatura se multiplique por $1/\operatorname{sen}^2\theta$, y no simplemente por $1/\operatorname{sen}\theta$, es la única sorpresa del ejercicio, y tiene una explicación limpia: el seno entra dos veces, por dos motivos independientes.

La curvatura es «cuánto gira el tangente por unidad de camino recorrido». Al proyectar, las dos cosas se estropean a la vez. **El camino recorrido** se acorta en un factor $\operatorname{sen}\theta$, porque la parte vertical del avance desaparece; eso solo ya multiplicaría la curvatura por $1/\operatorname{sen}\theta$. Y además **el propio vector tangente** se acorta al proyectarse y hay que volver a normalizarlo, lo que introduce otro factor $1/\operatorname{sen}\theta$ al medir su giro. El producto de los dos es el cuadrado.

La segunda igualdad, $\mathbf{n}_\beta = \mathbf{n}$, dice algo que conviene retener aparte: el normal principal de una hélice ya era perpendicular al eje, así que la proyección no lo toca. Una hélice se dobla siempre «en horizontal»; lo único que hace al subir es subir.

Otra vía (el caso que todo el mundo conoce). Conviene comprobar el resultado en el ejemplo del que sale la intuición. Si α es una hélice circular, su curvatura es constante; por el segundo apartado, la de β también lo es. Y β vive dentro de un plano, luego tiene torsión nula. Curvatura constante no nula y torsión nula caracterizan a la circunferencia: la sombra de una hélice circular sobre el plano perpendicular a su eje es una circunferencia, que es exactamente lo que se ve al mirar un muelle desde arriba. Con la hélice $(a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt)$ la sombra es $(a\cos t, a\operatorname{sen} t, 0)$, de radio a, y en efecto

$$\frac{k}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{a/(a^2+b^2)}{a^2/(a^2+b^2)} = \frac{1}{a},$$

usando que $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - b^2/(a^2+b^2) = a^2/(a^2+b^2)$. ■

Ejercicio 1.21. *Los planos osculadores de la hélice circular* [H1.10]

Demostrar que los puntos de la hélice circular $\alpha(t) = (a\cos t,\ a\,\mathrm{sen}\,t,\ bt)$, con $a > 0$ y $b \neq 0$, cuyos planos osculadores pasan por un punto fijo están en un plano. Probar, también, que los planos osculadores a una hélice circular forman un ángulo constante con el eje de la hélice.

Resolución. *Primera parte.* El vector característico del plano osculador en $\alpha(t)$ es proporcional a $\alpha' \times \alpha''$. Con $\alpha' = (-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t, b)$ y $\alpha'' = (-a\cos t, -a\,\mathrm{sen}\,t, 0)$,

$$\alpha' \times \alpha'' = \big(ab\,\mathrm{sen}\,t,\ -ab\cos t,\ a^2\big) = a\,\big(b\,\mathrm{sen}\,t,\ -b\cos t,\ a\big).$$

Sea $p = (p_1, p_2, p_3)$ el punto fijo. Que el plano osculador en $\alpha(t)$ pase por p es

$$\big(p - \alpha(t)\big)\cdot\big(b\,\mathrm{sen}\,t,\ -b\cos t,\ a\big) = 0,$$

donde se ha simplificado el factor $a > 0$. Desarrollando el producto escalar,

$$\big(p_1 - a\cos t\big)b\,\mathrm{sen}\,t - \big(p_2 - a\,\mathrm{sen}\,t\big)b\cos t + \big(p_3 - bt\big)a,$$

y los dos términos $-ab\,\mathrm{sen}\,t\cos t$ y $+ab\,\mathrm{sen}\,t\cos t$ se cancelan. La condición queda

$$b\,p_1\,\mathrm{sen}\,t - b\,p_2\cos t - ab\,t + a\,p_3 = 0. \tag{1.10}$$

El movimiento que resuelve el problema. La ecuación (1.10) no tiene aspecto de nada; lo que hay que ver es que sus tres funciones de t —$\mathrm{sen}\,t$, $\cos t$ y t misma— son precisamente, salvo constantes, las tres coordenadas del punto $\alpha(t) = (x, y, z)$:

$$\cos t = \frac{x}{a}, \qquad \mathrm{sen}\,t = \frac{y}{a}, \qquad t = \frac{z}{b}.$$

Esto es una peculiaridad de la hélice circular y es lo que hace que el enunciado sea verdad: cualquier condición que se escriba como combinación lineal de $\mathrm{sen}\,t$, $\cos t$, t y 1 se traduce en una condición *lineal* en x, y, z, es decir, en un plano. Sustituyendo en (1.10) y multiplicando por a,

$$-b\,p_2\,x + b\,p_1\,y - a^2 z + a^2 p_3 = 0.$$

El coeficiente de z es $-a^2 \neq 0$, así que la ecuación define de verdad un plano y no se reduce a una identidad vacía. Todos los puntos de la hélice cuyo plano osculador pasa por p están en ese plano. ■

Observación. Ese plano pasa por el propio p: sustituyendo $(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3)$ se obtiene $-bp_2p_1 + bp_1p_2 - a^2p_3 + a^2p_3 = 0$. Como el coeficiente de z no se anula, ninguno de estos planos contiene al eje entero. Al variar p en $\mathbb{R}^3$ se obtienen todos los planos cuya ecuación tiene coeficiente no nulo en z, es decir, todos los que no son paralelos al eje.

Segunda parte. El binormal unitario de la hélice es

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\big(b\,\mathrm{sen}\,t,\ -b\cos t,\ a\big),$$

y el eje de la hélice es la dirección $e_3 = (0, 0, 1)$. Entonces

$$\mathbf{b}(t)\cdot e_3 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

que no depende de t. El ángulo entre el binormal y el eje es constante, y como el ángulo entre un plano y una recta es el complementario del que forman la recta y el vector característico del plano, también es constante el ángulo entre el plano osculador y el eje. ■

La segunda parte vale para cualquier hélice. El enunciado se limita a la hélice circular, pero la propiedad no depende de que la curvatura y la torsión sean constantes, y la demostración general cabe en una línea: por el criterio de Lancret, el eje unitario de cualquier hélice es $\mathbf{a} = \cos\theta\,\mathbf{t} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{b}$, luego

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = \cos\theta\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{t} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = \operatorname{sen}\theta,$$

constante. La definición de hélice pide ángulo constante entre *la tangente* y el eje; resulta que entonces también es constante el que forma *la binormal*, y por tanto el plano osculador. Es razonable: si el triedro entero avanza sin bascular respecto del eje, ninguna de sus piezas puede hacerlo por su cuenta.

Ejercicio 1.22. *Recuperar la hélice después de moverla* [H1.14]

Sea $\alpha(t) = (a\cos t,\ a\operatorname{sen} t,\ bt)$, $t \in \mathbb{R}$, una hélice circular. Se aplica un movimiento rígido sobre α que la transforma en la curva

$$\beta(t) = \Big(\cos t,\ -\frac{t}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} t,\ -t\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\Big).$$

Hallar a, b en la expresión de α, tomando $a > 0$ como radio. Distinguir si el movimiento es directo o inverso.

Resolución. La idea. No hay que buscar el movimiento: hay que buscar lo que el movimiento no cambia. Un movimiento rígido conserva la rapidez con que se recorre la curva, conserva la curvatura y, si es directo, conserva la torsión. Así que basta calcular esas cantidades para β, que viene dada, e igualarlas a las de la hélice, que se conocen en función de a y b. Salen tres ecuaciones para dos incógnitas, y esa redundancia es justo lo que permite comprobar el resultado.

Las tres cantidades para la hélice circular son

$$|\alpha'| = \sqrt{a^2+b^2}, \qquad |\alpha''| = |a|, \qquad \tau = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

La segunda sale de $\alpha'' = (-a\cos t, -a\operatorname{sen} t, 0)$ y es la que va a dar el radio.

La rapidez. Derivando la expresión de β,

$$\beta'(t) = \Big(-\operatorname{sen} t,\ -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos t,\ -\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}\cos t\Big),$$

y al elevar al cuadrado y sumar, los dos términos cruzados $-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t$ y $+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t$ se cancelan:

$$|\beta'|^2 = \operatorname{sen}^2 t + \Big(\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}\cos^2 t\Big) + \Big(\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4}\cos^2 t\Big) = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1 = 2.$$

Luego $a^2 + b^2 = 2$.

El radio. Derivando otra vez, $\beta''(t) = \big(-\cos t,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} t,\ \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\big)$ y

$$|\beta''|^2 = \cos^2 t + \tfrac{3}{4}\operatorname{sen}^2 t + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}^2 t = 1.$$

Luego $|a| = 1$, y como a es el radio del cilindro sobre el que se enrolla la hélice se toma $a = 1$. Cambiar el signo de a se absorbe en un giro de media vuelta alrededor del eje, así que no aporta un radio distinto. De $a^2 + b^2 = 2$ se sigue $b^2 = 1$.

El signo de b. Es lo único que falta, y es lo único que la curvatura no puede decir, porque no distingue el sentido de giro. La torsión lo decide una vez fijado si el movimiento es directo o inverso. Con $\beta'''(t) = \big(\operatorname{sen} t,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t,\ \frac{1}{2}\cos t\big)$ se calcula

$$(\beta', \beta'', \beta''') = -1, \qquad |\beta' \times \beta''|^2 = 2, \qquad \tau_\beta = \frac{-1}{2}.$$

Si el movimiento es directo, igualar con $\tau = b/(a^2 + b^2) = b/2$ da $b = -1$. Si es inverso, $\tau_\beta = -b/2$ da $b = +1$. El enunciado original no precisa el tipo de movimiento: sin esa información solo se determina $|b| = 1$. Para el caso directo, la respuesta es

$$a = 1, \qquad b = -1, \qquad \alpha(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t,\ -t).$$

■

La comprobación, y el movimiento que faltaba. Conviene rematar el ejercicio exhibiendo el movimiento, aunque no se pidiera, porque es la única manera de estar seguro. Con $a = 1$ y $b = -1$ es $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, -t)$, y escribiendo las tres componentes de β como combinaciones de $\cos t$, $\operatorname{sen} t$ y $-t$ se reconoce

$$\beta(t) = M\,\alpha(t), \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

que es ortogonal, de determinante $+1$, y es un giro de ángulo $-\pi/6$ alrededor del eje OX con la orientación usual. No hay traslación. Que salga un movimiento directo es imprescindible para que la torsión se haya conservado, que es lo que se ha usado para decidir el signo de b; con un movimiento inverso la torsión habría cambiado de signo y la respuesta sería $b = +1$.

LA IDEA: EL MECANISMO DE LAS CURVAS CONSTRUIDAS SOBRE OTRA CURVA

Los seis ejercicios que siguen —involutas, el punto sobre la binormal, la curva paralela, las parejas de Bertrand y dos curvas definidas por una integral— tienen la misma estructura que el lugar de los centros de curvatura del ejercicio del círculo osculador. Se da una curva α parametrizada naturalmente, se fabrica con ella otra, β, sumándole en cada punto un vector escrito en su triedro, y se pregunta si β es regular, cuál es su parámetro natural y cuál es su aparato de Frenet. El mecanismo es uno solo, y conviene verlo entero antes de repetirlo seis veces.

La fórmula que lo hace todo. Si $\beta = \alpha + \lambda\,\mathbf{t} + \mu\,\mathbf{n} + \nu\,\mathbf{b}$, con λ, μ, ν funciones de s, derivar con la regla del producto y sustituir las tres ecuaciones de Frenet-Serret da

$$\dot\beta = \big(1 + \dot\lambda - k\mu\big)\mathbf{t} + \big(k\lambda + \dot\mu - \tau\nu\big)\mathbf{n} + \big(\tau\mu + \dot\nu\big)\mathbf{b}.$$

No hay que memorizarla: se lee término a término. El 1 es $\dot\alpha = \mathbf{t}$, la curva base avanzando a velocidad uno. Cada coeficiente aporta su propia derivada en su propia dirección: $\dot\lambda$ en $\mathbf{t}$, $\dot\mu$ en $\mathbf{n}$, $\dot\nu$ en $\mathbf{b}$. Y cada vector del triedro, al girar, pasa su coeficiente a sus vecinos, con los pesos de la matriz de Frenet: λ pasa a $\mathbf{n}$ multiplicado por k; μ pasa a $\mathbf{t}$ con $-k$ y a $\mathbf{b}$ con τ; ν pasa a $\mathbf{n}$ con $-\tau$.

Los cuatro pasos.

1. *Derivar*: escribir $\dot\beta$ en el triedro de α con la fórmula anterior. Si β viene dada por una integral, este paso lo hace el teorema fundamental del cálculo.
2. *Regularidad*: como el triedro es una base ortonormal, $\dot\beta = 0$ exactamente cuando se anulan a la vez los tres coeficientes, y $|\dot\beta|^2$ es la suma de sus cuadrados.
3. *Parámetro natural de β*: s lo es solo si $|\dot\beta| \equiv 1$. Si no, se llama σ al de β, con $d\sigma/ds = |\dot\beta|$, y cada derivada de un objeto de β respecto de σ es su derivada respecto de s multiplicada por $ds/d\sigma = 1/|\dot\beta|$.
4. *El triedro de β, en cadena*: $\mathbf{t}_\beta = \dot\beta/|\dot\beta|$; su derivada respecto de σ es $k_\beta \mathbf{n}_\beta$, y de ella se leen la curvatura (la norma) y el normal principal (la dirección); $\mathbf{b}_\beta = \mathbf{t}_\beta \times \mathbf{n}_\beta$; y la torsión se lee al comparar $d\mathbf{b}_\beta/d\sigma$ con $-\tau_\beta\, \mathbf{n}_\beta$.

Los casos del capítulo, en una tabla. Todas las construcciones de este capítulo son elecciones de (λ, μ, ν), o curvas cuya derivada se da directamente:

Construcción	(λ, μ, ν)	$\dot\beta$
Centros de curvatura	$(0,\ 1/k,\ 0)$	$-\dfrac{\dot k}{k^2}\,\mathbf{n} + \dfrac{\tau}{k}\,\mathbf{b}$
Involuta	$(c-s,\ 0,\ 0)$	$(c-s)\,k\,\mathbf{n}$
Punto de la binormal	$(0,\ 0,\ a)$	$\mathbf{t} - a\tau\,\mathbf{n}$
Paralela; Bertrand	$(0,\ a,\ 0)$	$(1-ak)\,\mathbf{t} + a\tau\,\mathbf{b}$
$\beta = \int \tau\,\mathbf{t}$	—	$\tau\,\mathbf{t}$
$\beta = \int \mathbf{n}$	—	$\mathbf{n}$

Mirar qué le pasa al 1 de $\dot\alpha$ explica casi todo. Cuando $\mu \neq 0$, el sumando $-k\mu$ puede cancelarlo: en los centros de curvatura lo cancela siempre, y en la curva paralela, justo donde $a = 1/k$. En el punto de la binormal nada lo cancela, y por eso esa curva es regular sin condiciones. La última fila, la curva cuya velocidad es el normal principal de α, se resuelve igual: s es su parámetro natural porque $\mathbf{n}$ es unitario, su tangente es $\mathbf{n}$ y, derivando con la segunda ecuación de Frenet-Serret, su curvatura es $|-k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}| = \sqrt{k^2+\tau^2}$.

Dónde se falla. Tres errores, los tres frecuentes:

- Tomar $|\ddot\beta|$, con puntos respecto de s, como curvatura de β. Solo vale si s es también el parámetro natural de β; si no, hay que pasar por σ (paso 3) o usar la fórmula en parámetro arbitrario, $k_\beta = |\dot\beta \times \ddot\beta|/|\dot\beta|^3$.
- Olvidar el signo al normalizar. $\mathbf{t}_\beta = \dot\beta/|\dot\beta|$ arrastra el signo del coeficiente: en la involuta, el de $c-s$; en $\int \tau\,\mathbf{t}$, el de τ. No cambia la curvatura, pero sí $\mathbf{n}_\beta$, $\mathbf{b}_\beta$ y, a veces, la torsión.
- Dividir por k o por τ sin comprobar que no se anulan. Son justo las hipótesis que ponen los enunciados, y se gastan en esos pasos.

CONEXIÓN: LA MISMA DERIVADA FABRICA LAS SUPERFICIES REGLADAS

En el capítulo de superficies (sección 2.3) se hace la misma construcción con un grado más de libertad: en lugar de fijar la distancia a la que se toma el punto, se deja variar,

$$x(s, v) = \alpha(s) + v\, w(s),$$

y lo que sale es una superficie reglada, con directriz α y generatrices en la dirección de w. Sus derivadas parciales son $\mathbf{X}_1 = \mathbf{t} + v\,\dot{w}$, que es la fórmula del mecanismo con la distancia v fija mientras se deriva, y $\mathbf{X}_2 = w$. Con los tres vectores del triedro como generatriz, y usando que el triedro es una base ortonormal directa para hacer los productos vectoriales:

Generatriz w	$\mathbf{X}_1$	$\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$
$\mathbf{t}$ (superficie de las tangentes)	$\mathbf{t} + vk\,\mathbf{n}$	$-vk\,\mathbf{b}$
$\mathbf{n}$ (de las normales principales)	$(1 - vk)\,\mathbf{t} + v\tau\,\mathbf{b}$	$-v\tau\,\mathbf{t} + (1 - vk)\,\mathbf{b}$
$\mathbf{b}$ (de las binormales)	$\mathbf{t} - v\tau\,\mathbf{n}$	$-v\tau\,\mathbf{t} - \mathbf{n}$

La última columna dice ya dónde deja de ser regular cada una. La de las tangentes, sobre la propia curva, $v = 0$, y donde $k = 0$. La de las normales principales, solo donde se anulan a la vez $v\tau$ y $1 - vk$: en el centro de curvatura de los puntos de torsión nula. La de las binormales, en ningún punto, porque la componente $-\mathbf{n}$ no la cancela nada. Clasificar los puntos de estas superficies, en el capítulo 4 (sección 4.5.3), empieza siempre por esta tabla.

Ejercicio 1.23. *Involutas* [H1.21]

Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. en $\mathbb{R}^3$. Se llama **involuta** o **evolvente** de α a otra c.p.r. $\beta = \beta(s)$ tal que, para cada s, el punto $\beta(s)$ está en la recta tangente a α en $\alpha(s)$ y esa recta corta ortogonalmente a la tangente de β en $\beta(s)$. Se pide:

1. Probar que $\beta(s) = \alpha(s) + (c - s)\mathbf{t}(s)$ con $c \in \mathbb{R}$, estudiar su regularidad, decir cuántas involutas tiene α y probar que la distancia entre dos involutas cualesquiera es constante.
2. Calcular la curvatura de β y justificar si puede ser una recta.
3. Si α es una hélice circular, probar que β es plana. ¿Puede ser una circunferencia?

Resolución. *Primer apartado.* Por estar $\beta(s)$ en la recta tangente a α en $\alpha(s)$, existe una función λ con

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda(s)\,\mathbf{t}(s).$$

La función $\lambda = (\beta - \alpha)\cdot\mathbf{t}$ es derivable. Derivando,

$$\dot\beta(s) = \big(1 + \dot\lambda\big)\mathbf{t} + \lambda\dot{\mathbf{t}}.$$

La condición de ortogonalidad entre las tangentes es $\dot\beta(s)\cdot\mathbf{t}(s) = 0$. Como $\dot{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{t} = 0$ y $|\mathbf{t}| = 1$, da

$$1 + \dot\lambda(s) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(s) = c - s, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Luego $\beta(s) = \alpha(s) + (c - s)\mathbf{t}(s)$, y sustituyendo arriba,

$$\dot\beta(s) = (c - s)\dot{\mathbf{t}}(s), \qquad |\dot\beta(s)| = |c - s|k(s). \tag{1.11}$$

Donde $k > 0$, también se escribe $\dot\beta = (c - s)k\mathbf{n}$.

Regularidad. De (1.11), $\dot\beta(s) = 0$ exactamente cuando $s = c$ o cuando $k(s) = 0$. Así que la involuta es regular en todo punto salvo en $s = c$, donde toca a la propia curva α, y en los puntos de curvatura nula.

Cuántas hay. La fórmula da una familia uniparamétrica, una por cada c. Para obtener una involuta regular, se restringe a intervalos con $s \neq c$ y $k(s) > 0$; no todos los valores de c dan una curva regular en el dominio entero.

Distancia entre dos involutas. Si β_1 y β_2 corresponden a c_1 y c_2, entonces en cada s

$$|\beta_1(s) - \beta_2(s)| = |(c_1 - c_2)\mathbf{t}(s)| = |c_1 - c_2|,$$

constante, porque $\mathbf{t}$ es unitario. ■

La idea de los apartados segundo y tercero. La involuta se mueve siempre en la dirección de $\mathbf{n}$: la punta del hilo avanza perpendicular al hilo, que es la tangente. Así que su tangente es $\pm\mathbf{n}$, y su curvatura mide cuánto gira $\mathbf{n}$ por cada unidad de longitud recorrida por la propia involuta. Por cada unidad de s, el normal principal gira $|\dot{\mathbf{n}}| = |-k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}| = \sqrt{k^2 + \tau^2}$, y la involuta recorre $|c - s|\, k$. La curvatura es el cociente de las dos cosas, y eso es lo que va a salir.

Segundo apartado. De (1.11), $|\dot{\beta}| = |c - s|k$. Supóngase, para fijar signos, $c - s > 0$ y llámese σ al parámetro natural de β, de modo que $\dfrac{d\sigma}{ds} = (c - s)k$. El tangente de β es

$$\mathbf{t}_\beta = \frac{d\beta}{d\sigma} = \dot{\beta}\,\frac{ds}{d\sigma} = \mathbf{n}.$$

Derivando otra vez y usando $\dot{\mathbf{n}} = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$,

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta}{d\sigma} = \dot{\mathbf{n}}\,\frac{ds}{d\sigma} = \frac{-k\,\mathbf{t} + \tau\,\mathbf{b}}{(c - s)\,k}, \qquad \text{luego} \qquad k_\beta = \frac{\sqrt{k^2 + \tau^2}}{(c - s)\,k}.$$

Si $c - s < 0$, el tangente de β es $-\mathbf{n}$; al tomar la norma se obtiene la misma fórmula con valor absoluto en el denominador:

$$k_\beta = \frac{\sqrt{k^2 + \tau^2}}{|c - s|k}.$$

Como $k > 0$, el numerador nunca se anula y $k_\beta > 0$ en todo punto donde β es regular. Una curva con curvatura no nula no es una recta, luego **la involuta nunca puede ser una recta**. ■

Tercer apartado. Sea α una hélice circular, es decir, con k y τ constantes. De la expresión anterior,

$$\mathbf{n}_\beta = \frac{1}{k_\beta}\frac{d\mathbf{t}_\beta}{d\sigma} = \frac{-k\,\mathbf{t} + \tau\,\mathbf{b}}{\sqrt{k^2 + \tau^2}},$$

y la binormal de β es

$$\mathbf{b}_\beta = \mathbf{t}_\beta \times \mathbf{n}_\beta = \mathbf{n} \times \frac{-k\,\mathbf{t} + \tau\,\mathbf{b}}{\sqrt{k^2 + \tau^2}} = \frac{-k\,(\mathbf{n} \times \mathbf{t}) + \tau\,(\mathbf{n} \times \mathbf{b})}{\sqrt{k^2 + \tau^2}} = \frac{k\,\mathbf{b} + \tau\,\mathbf{t}}{\sqrt{k^2 + \tau^2}},$$

usando $\mathbf{n} \times \mathbf{t} = -\mathbf{b}$ y $\mathbf{n} \times \mathbf{b} = \mathbf{t}$. Ahora se deriva respecto de s; como k y τ son constantes, solo hay que derivar $\mathbf{b}$ y $\mathbf{t}$:

$$\frac{d}{ds}\big(k\,\mathbf{b} + \tau\,\mathbf{t}\big) = k\,(-\tau\,\mathbf{n}) + \tau\,(k\,\mathbf{n}) = 0.$$

Luego $\mathbf{b}_\beta$ es constante, su derivada respecto de σ es nula y por tanto $\tau_\beta \equiv 0$: **la involuta de una hélice circular es plana**. En el tramo $c - s < 0$ cambian de signo tanto $\mathbf{t}_\beta$ como $\mathbf{n}_\beta$, y su producto vectorial es el mismo: la conclusión vale en ambos tramos.

¿Puede ser una circunferencia? No. Su curvatura es

$$k_\beta = \frac{\sqrt{k^2 + \tau^2}}{|c - s|\,k},$$

que depende de s y por tanto no es constante. Una curva plana con curvatura no constante no es una circunferencia. ■

Qué hemos aprendido: la binormal de la involuta es el eje de Lancret. La fórmula

$$\mathbf{b}_\beta = \frac{\tau\,\mathbf{t} + k\,\mathbf{b}}{\sqrt{k^2+\tau^2}}$$

no ha usado que α sea una hélice: vale para cualquier curva con $k > 0$. Y el vector $\tau\,\mathbf{t} + k\,\mathbf{b}$ es k veces el vector $a = \frac{\tau}{k}\mathbf{t} + \mathbf{b}$ del criterio de Lancret. Cuando α es una hélice, sea circular o no, ese vector tiene dirección fija, la del eje, y entonces $\mathbf{b}_\beta$ es constante: *la involuta de cualquier hélice es plana, y su plano es perpendicular al eje*. Con la hélice circular se ve entero. Si $\alpha(s) = (a\cos u, a\,\mathrm{sen}\,u, bu)$ con $u = s/\sqrt{a^2+b^2}$, la tercera coordenada de $\beta = \alpha + (c-s)\mathbf{t}$ es constante, y las dos primeras son exactamente la involuta de la circunferencia de radio a que la hélice proyecta sobre el suelo: desenrollar el hilo de la hélice es desenrollarlo de su sombra, a altura fija.

LA IDEA: LA INVOLUTA ES EL HILO QUE SE DESENROLLA

Hay una imagen mecánica de la involuta que la explica entera y conviene tenerla. Imagina un hilo tenso enrollado sobre la curva α, y que lo vas desenrollando manteniéndolo siempre tirante. La punta del hilo describe la involuta. La constante c es la longitud de hilo que había al principio, y por eso hay una involuta por cada c: una por cada longitud inicial de hilo.
Esta imagen corresponde al tramo $s < c$. El hilo desde $\alpha(s)$ hasta $\beta(s)$ mide $c - s$, que es lo que queda por desenrollar; de ahí el factor $(c-s)$ en la fórmula. La punta del hilo se mueve perpendicular al hilo, porque el hilo está tenso; de ahí la ortogonalidad. Y cuando $s = c$ el hilo se ha acabado, la punta está sobre la curva y ahí falla la regularidad. Dos hilos de longitudes distintas van siempre separados por la diferencia de longitudes, que es la distancia constante entre involutas.

DE DÓNDE VIENE: EL RELOJ QUE NO SE ATRASABA

Las involutas no son una curiosidad académica: nacieron de un problema de ingeniería concreto y famoso.
Un péndulo ordinario no es exactamente isócrono: su periodo depende un poco de la amplitud, y por eso los relojes de péndulo se atrasan o adelantan según cuánta cuerda les quede. Christiaan Huygens atacó el problema en su *Horologium Oscillatorium*, de 1673, y encontró que la curva sobre la que el periodo no depende de la amplitud es la cicloide.
El problema práctico era cómo obligar a la lenteja a recorrer una cicloide. La solución de Huygens fue colgar el péndulo de un hilo que se enrolla entre dos topes con forma adecuada; la lenteja describe entonces la involuta de esa forma. Y como Huygens demostró, la involuta de una cicloide es otra cicloide. Ese es el origen del vocabulario de evolutas e involutas que se sigue usando aquí.

Ejercicio 1.24. *Un punto sobre la binormal, a distancia fija* [H1.22]

Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. en $\mathbb{R}^3$ con curvatura $k(s) > 0$. Para cada valor del parámetro s, sobre la recta binormal de α en $\alpha(s)$ se toma un punto $\beta(s)$ a distancia a de $\alpha(s)$, con a constante y positiva. Se pide:

1. Calcular la ecuación de la curva β formada por los puntos $\beta(s)$ y estudiar su regularidad. ¿Bajo qué condiciones es s también el parámetro natural de β?

2. Si α es plana, probar que α y β se diferencian en un movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$. ¿Qué movimiento es ése?
3. Si α es una hélice circular, ¿bajo qué condiciones es β una curva plana? ¿Qué se puede decir de β en tal caso?

Resolución. La idea, antes de la cuenta. Es la fila $(0, 0, a)$ de la tabla del mecanismo: cada punto de α se empuja una distancia fija a lo largo de su binormal. La derivada tiene entonces solo dos términos: el avance $\mathbf{t}$ de la propia α, y el arrastre $-a\tau\,\mathbf{n}$ que produce el giro del plano osculador. El primero no lo puede cancelar nada, porque $\dot{\mathbf{b}}$ no tiene componente en $\mathbf{t}$, y de ahí salen los dos primeros apartados sin esfuerzo: β es regular siempre, s es su parámetro natural justo cuando el arrastre desaparece, y en una curva plana la binormal ni siquiera gira, así que β es α trasladada en bloque. El tercero conviene pensarlo por simetría antes de calcular: la construcción solo usa la curva, luego respeta los movimientos helicoidales que dejan fija a la hélice, y el resultado tiene que ser otra hélice del mismo eje y del mismo paso; la caja que sigue al tercer apartado lo explica.

Primer apartado. Sobre la recta binormal hay exactamente dos puntos a distancia a de $\alpha(s)$, uno a cada lado, y como $\mathbf{b}$ es unitario son $\alpha(s) \pm a\mathbf{b}(s)$. Para que β sea continua hay que mantener el mismo signo en todo el intervalo: no se puede saltar entre dos puntos separados por $2a$. Elegir el signo contrario equivale a cambiar a por $-a$, así que se trabaja con

$$\beta(s) = \alpha(s) + a\,\mathbf{b}(s),$$

y todo lo que siga valdrá igual para el otro con el cambio de signo. Derivando y usando la tercera ecuación de Frenet-Serret, $\dot{\mathbf{b}} = -\tau\mathbf{n}$,

$$\beta'(s) = \mathbf{t}(s) - a\,\tau(s)\,\mathbf{n}(s), \qquad |\beta'(s)|^2 = 1 + a^2\tau(s)^2. \tag{1.12}$$

Esa norma es siempre mayor o igual que 1, luego β **es regular sin ninguna condición**: para cualquier curva α y cualquier a. Y s es también el parámetro natural de β exactamente cuando $|\beta'| = 1$, es decir, cuando $a^2\tau^2 \equiv 0$, o sea cuando $\tau \equiv 0$: cuando α es plana. ■

LA IDEA: POR QUÉ LA BINORMAL NUNCA DEGENERA Y LA NORMAL SÍ

Conviene comparar (1.12) con lo que ocurre al hacer la misma construcción sobre la recta normal principal, que es la del ejercicio de la curva paralela: allí $\beta = \alpha + a\mathbf{n}$ tiene

$$\beta' = (1 - ak)\mathbf{t} + a\tau\,\mathbf{b},$$

y el primer coeficiente *sí* puede anularse, precisamente cuando $a = 1/k$. De hecho, la curva construida sobre la normal principal puede incluso reducirse a un punto, como ocurre al tomar $a = 1/k$ en una circunferencia.

La diferencia está en las ecuaciones de Frenet-Serret y se ve de un vistazo. La derivada de $\mathbf{n}$ tiene una componente en $\mathbf{t}$, que es $-k\mathbf{t}$, y esa componente puede cancelar el $\mathbf{t}$ que aporta $\dot{\alpha}$. La derivada de $\mathbf{b}$ no tiene componente en $\mathbf{t}$: es $-\tau\mathbf{n}$, y por tanto nada puede cancelar el $\mathbf{t}$ inicial. El 1 del $1 + a^2\tau^2$ es exactamente ese $\mathbf{t}$ que nadie contrarresta.

Es el mismo hecho que hacía imposible que todas las binormales pasaran por un punto fijo, visto desde el otro lado: la recta binormal nunca apunta hacia donde la curva se mueve, y por eso al arrastrarla se obtiene siempre una curva de verdad.

Segundo apartado. Si α es plana, $\tau \equiv 0$ y entonces $\dot{\mathbf{b}} = 0$: el vector binormal es un vector constante $\mathbf{b}_0$, el vector característico del plano que contiene a α. Por tanto

$$\beta(s) = \alpha(s) + a\,\mathbf{b}_0 \qquad \text{para todo } s,$$

es decir, β es la imagen de α por la **traslación** de vector $a\mathbf{b}_0$: un movimiento rígido, y de los más simples. Geométricamente, β es la misma curva levantada a un plano paralelo, a distancia a del suyo. Es lo que uno esperaba: si la curva no se sale de su plano, la binormal apunta siempre en la misma dirección y arrastrar un punto por ella es empujar la curva entera en bloque. ■

Tercer apartado. Aquí la respuesta es que **no hay ninguna condición**: si α es una hélice circular de paso no nulo, β no es plana para ningún valor de a. Si se admite la circunferencia como caso de paso cero, entonces β es otra circunferencia en un plano paralelo, como en el apartado anterior. Para paso no nulo, lo que sí se puede decir, y es bastante más, es exactamente qué curva es.

Tomando $\alpha(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\, t, ct)$ con $R > 0$ y $c \neq 0$, y escribiendo $w = \sqrt{R^2 + c^2}$, el binormal unitario es

$$\mathbf{b}(t) = \frac{1}{w}\big(c\,\mathrm{sen}\, t,\ -c\cos t,\ R\big),$$

como se calculó en el ejercicio de los planos osculadores. Entonces

$$\beta(t) = \Big(R\cos t + \frac{ac}{w}\,\mathrm{sen}\, t,\ \ R\,\mathrm{sen}\, t - \frac{ac}{w}\cos t,\ \ ct + \frac{aR}{w}\Big).$$

Las dos primeras componentes son combinaciones lineales de $\cos t$ y $\mathrm{sen}\, t$ con los mismos dos coeficientes intercambiados, y eso siempre se puede escribir como un giro de fase. Poniendo

$$\rho = \sqrt{R^2 + \frac{a^2c^2}{w^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{R}{\rho}, \qquad \mathrm{sen}\,\varphi = \frac{ac}{w\rho},$$

se comprueba directamente que $R\cos t + \frac{ac}{w}\,\mathrm{sen}\, t = \rho\cos(t-\varphi)$ y que $R\,\mathrm{sen}\, t - \frac{ac}{w}\cos t = \rho\,\mathrm{sen}(t-\varphi)$, de modo que

$$\beta(t) = \Big(\rho\cos(t-\varphi),\ \rho\,\mathrm{sen}(t-\varphi),\ ct + \frac{aR}{w}\Big).$$

Eso es, literalmente, la ecuación de una hélice circular: **el mismo eje** OZ, el **mismo parámetro** c y por tanto el mismo paso $2\pi c$, y radio $\rho \geq R$. Solo cambian el radio, la fase y la altura de partida.

Y como $c \neq 0$, la torsión de β, que vale $c/(\rho^2 + c^2)$, no se anula nunca: β no es plana para ningún a. La pregunta del enunciado no tiene ningún caso. ■

LA IDEA: POR QUÉ TENÍA QUE SALIR OTRA HÉLICE DEL MISMO PASO

El cálculo es corto, pero el resultado se podía haber anticipado sin hacerlo, y merece la pena ver cómo.
Una hélice circular es invariante por los movimientos helicoidales de su eje: girar un ángulo ϑ alrededor de OZ y subir $c\vartheta$ la deja igual, solo que recorrida desde otro punto. Ahora bien, la construcción «tómese el punto de la binormal a distancia a» está definida a partir de la curva y de nada más, así que *hereda* esa invariancia: β tiene que ser invariante por el mismo grupo de movimientos helicoidales.

> Las órbitas de ese grupo continuo de movimientos helicoidales de eje OZ y paso $2\pi c$ son exactamente las hélices circulares de ese eje y ese paso, más la propia recta del eje. Como β no puede ser el eje —está a distancia $\rho \geq R > 0$ de él—, tiene que ser una hélice circular coaxial y del mismo paso. El cálculo solo hacía falta para saber el radio. Este es un argumento de simetría, y conviene reconocerlo porque ahorra muchas cuentas: cuando una construcción respeta un movimiento, la simetría de la curva se transmite al resultado. Aquí se trata de movimientos directos; un espejo invierte la binormal y cambia el lado elegido en $\alpha + a\mathbf{b}$.

Dónde se falla.

- *Buscar una condición que no existe.* El tercer apartado pregunta «bajo qué condiciones» y la respuesta, para paso no nulo, es «ninguna». Quien calcula τ_β con la fórmula general y comete un desliz de signo cree encontrar un valor de a que la anula. El argumento de simetría protege: β es una hélice con el mismo paso no nulo que α, y una hélice así no es plana.
- *Olvidar el caso de paso cero.* Si se admite la circunferencia como hélice degenerada, $\tau \equiv 0$ y el segundo apartado ya dice qué pasa: β es la circunferencia trasladada a un plano paralelo. Es el único caso en que β es plana.
- *Mezclar los dos lados.* $\alpha + a\mathbf{b}$ y $\alpha - a\mathbf{b}$ son las dos respuestas válidas del primer apartado, pero no se puede saltar de una a otra a lo largo de la curva: la curva resultante no sería continua.

Ejercicio 1.25. *La curva paralela a distancia a* [H1.19]

Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. con $k(s) \neq 0$ para todo s, y sea $a > 0$ una constante. Se define la **curva paralela a α a distancia** a como

$$\beta(s) = \alpha(s) + a\,\mathbf{n}(s).$$

Se pide:

1. Supóngase que α es plana.
   a) Estudiar la regularidad de β.
   b) Suponiendo β regular, obtener su curvatura en función de k y deducir que β no puede ser una recta.
   c) Si además k es constante y $0 < a < 1/k$, interpretar geométricamente el apartado anterior. ¿Qué curva es β?
2. Supóngase ahora que α tiene torsión constante no nula.
   a) Probar analíticamente que si α tiene curvatura constante y se verifica $k = a(k^2 + \tau^2)$, entonces β es una recta.
   b) Interpretar geométricamente el apartado anterior.

Resolución. La idea, antes de la cuenta. La curva paralela es la fila $(0, a, 0)$ de la tabla del mecanismo: cada punto de α se empuja una distancia fija hacia donde la curva se dobla. Todo el ejercicio sale de una sola derivada, $\dot\beta = (1 - ak)\mathbf{t} + a\tau\,\mathbf{b}$, mirando sus dos coeficientes por separado. El primero dice si el empujón hacia el centro de curvatura se come el avance de la curva, cosa que ocurre cuando a es justo el radio de curvatura. El segundo mide cuánto

se sale β del plano osculador por culpa de la torsión. La primera parte del enunciado, con α plana, apaga el segundo coeficiente y deja una curva que avanza por $\mathbf{t}$ a otro ritmo. La segunda, con k y τ constantes, congela los dos, y la pregunta se reduce a cuándo la mezcla $(1-ak)\mathbf{t} + a\tau\,\mathbf{b}$ deja de girar. Los dos vectores giran hacia la misma recta, la del normal: $\mathbf{t}$ hacia $+\mathbf{n}$ con rapidez k, y $\mathbf{b}$ hacia $-\mathbf{n}$ con rapidez τ. La mezcla no gira cuando esos dos giros, pesados por sus coeficientes, se compensan: $(1-ak)k = a\tau^2$. Esa es la hipótesis del apartado 2(a), escrita de otra forma.

La cuenta común. Derivando y usando $\dot{\mathbf{n}} = -k\,\mathbf{t} + \tau\,\mathbf{b}$,

$$\dot\beta(s) = \dot\alpha + a\,\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{t} + a\big(-k\,\mathbf{t} + \tau\,\mathbf{b}\big) = \big(1-ak(s)\big)\mathbf{t}(s) + a\,\tau(s)\,\mathbf{b}(s). \tag{1.13}$$

Obsérvese que no hay componente en $\mathbf{n}$: la curva paralela se mueve siempre dentro del plano rectificante de α.

1(a). Si α es plana, $\tau \equiv 0$ y (1.13) se reduce a $\dot\beta(s) = \big(1-ak(s)\big)\mathbf{t}(s)$. Como $\mathbf{t}$ es unitario,

$$\beta \text{ es regular en } s \qquad\Longleftrightarrow\qquad 1-ak(s) \neq 0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad k(s) \neq \frac{1}{a}.$$

Es decir, β deja de ser regular exactamente en los puntos donde el radio de curvatura de α vale a.

1(b). En un intervalo donde β es regular, $1-ak$ no se anula y, por continuidad, tiene signo constante. Sea σ el parámetro natural de β, con $\dfrac{d\sigma}{ds} = |1-ak|$. Entonces

$$\mathbf{t}_\beta = \dot\beta\,\frac{ds}{d\sigma} = \operatorname{sig}(1-ak)\,\mathbf{t},$$

y derivando respecto de σ,

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta}{d\sigma} = \operatorname{sig}(1-ak)\,\dot{\mathbf{t}}\,\frac{ds}{d\sigma} = \frac{\operatorname{sig}(1-ak)}{|1-ak|}\,k\,\mathbf{n} = \frac{k}{1-ak}\,\mathbf{n}.$$

Por tanto

$$k_\beta = \left|\frac{k(s)}{1-ak(s)}\right|.$$

Como $k(s) \neq 0$ por hipótesis, el numerador nunca se anula y $k_\beta > 0$ en todo punto. Una curva con curvatura no nula no puede ser una recta. ■

1(c). Si k es constante y α es plana, α es una circunferencia de radio $r = 1/k$. La condición $0 < a < 1/k$ dice $a < r$, y entonces $1-ak > 0$, de modo que

$$k_\beta = \frac{k}{1-ak} \qquad\Longrightarrow\qquad r_\beta = \frac{1}{k_\beta} = \frac{1-ak}{k} = \frac{1}{k} - a = r - a.$$

Además β vive en el mismo plano que α, porque $\mathbf{n}$ es paralelo a ese plano. Una curva plana con curvatura constante es una circunferencia, luego β es **la circunferencia concéntrica con α y de radio $r-a$**.

La interpretación es exactamente la que sugiere el nombre: el normal principal apunta hacia el centro, así que avanzar una distancia a en esa dirección acerca al centro en a. Y la condición $a < r$ es la que impide pasarse de largo: con $a = r$ se llega justo al centro y β degenera en un punto, que es exactamente el fallo de regularidad detectado en 1(a). ■

2(a). Ahora k y τ son constantes. Los coeficientes de (1.13) son constantes, y $|\dot\beta|^2 = (1-ak)^2 + a^2\tau^2 > 0$ porque $a\tau \neq 0$; luego β es regular en todo punto.

Derivando (1.13) otra vez, con los coeficientes constantes,

$$\ddot{\beta} = (1-ak)\,\dot{\mathbf{t}} + a\tau\,\dot{\mathbf{b}} = (1-ak)\,k\,\mathbf{n} + a\tau\,(-\tau\,\mathbf{n}) = \left[(1-ak)k - a\tau^2\right]\mathbf{n}.$$

El corchete se anula si y solo si

$$k - ak^2 - a\tau^2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad k = a\big(k^2+\tau^2\big),$$

que es exactamente la hipótesis. Entonces $\ddot{\beta} \equiv 0$, luego $\dot{\beta}$ es un vector constante y β es una recta. ■

LA IDEA: 2(B), Y POR QUÉ LA RESPUESTA YA LA CONOCES

El apartado pide una interpretación geométrica, y sale de juntar dos cosas ya vistas. Primero: una curva con curvatura y torsión constantes no nulas es una hélice circular. Segundo, del ejercicio de la hélice: si esa hélice se enrolla sobre un cilindro de radio a_0, entonces

$$a_0 = \frac{k}{k^2+\tau^2}.$$

La hipótesis $k = a(k^2+\tau^2)$ dice literalmente $a = a_0$: la distancia a la que se traza la paralela coincide con el radio del cilindro.
Y ahora la imagen. En una hélice circular, el normal principal apunta en horizontal desde el punto de la curva hacia el eje del cilindro, y la distancia hasta ese eje es justamente a_0. Luego $\beta(s) = \alpha(s) + a_0\mathbf{n}(s)$ es, en cada s, el punto del eje a la altura de $\alpha(s)$.
Es decir: β **es el eje de la hélice**. Por eso es una recta. Y se comprueba en un renglón con la parametrización estándar:

$$\alpha(t) = (a_0\cos t,\ a_0\,\mathrm{sen}\,t,\ bt), \qquad \mathbf{n}(t) = (-\cos t,\ -\mathrm{sen}\,t,\ 0),$$

$$\alpha + a_0\mathbf{n} = (0,\ 0,\ bt).$$

El apartado, que parece un cálculo abstracto, está preguntando por el eje de un cilindro.

El recíproco que completa H1.19. El enunciado original pide además probar que, si $\beta = \alpha + a\mathbf{n}$ es una recta regular, entonces α es una hélice circular de radio a. No se supone aquí que k o τ sean constantes.

Sea T el tangente unitario constante de esa recta, con el sentido del recorrido de β. Por (1.13), $T\cdot\mathbf{n} = 0$; derivando, $-kT\cdot\mathbf{t} + \tau T\cdot\mathbf{b} = 0$. Si $v = |\dot{\beta}| > 0$, las componentes de $T = \dot{\beta}/v$ son $(1-ak)/v$ y $a\tau/v$. Sustituirlas da

$$k = a(k^2+\tau^2).$$

Esta igualdad y la regularidad impiden $\tau = 0$: si se anulara, $k = 1/a$ y $\dot{\beta} = 0$ en ese punto. Además $1 - ak = a\tau^2/k > 0$.

Por otro lado, $T\cdot\mathbf{t}$ y $T\cdot\mathbf{b}$ son constantes: sus derivadas son $kT\cdot\mathbf{n} = 0$ y $-\tau T\cdot\mathbf{n} = 0$. Su cociente muestra que $a\tau/(1-ak)$ es constante. Usando la relación anterior, ese cociente es k/τ; por tanto $c = \tau/k$ es constante y no nulo. Finalmente,

$$k = ak^2(1+c^2) \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{1}{a(1+c^2)}, \qquad \tau = ck,$$

ambas constantes. Es una hélice circular, y su radio es $k/(k^2+\tau^2) = a$, como se quería. ■

Dónde se falla. Cuatro errores, y cada uno se ve con una circunferencia.

- *Tomar $|\ddot{\beta}|$, con puntos respecto de s, como curvatura de β.* En la circunferencia unidad con $a = \frac{1}{2}$, β es la circunferencia concéntrica de radio $\frac{1}{2}$, con curvatura 2. Pero $\dot{\beta} = \frac{1}{2}\mathbf{t}$ y $\ddot{\beta} = \frac{1}{2}\mathbf{n}$, así que $|\ddot{\beta}| = \frac{1}{2}$. El atajo da el inverso de la respuesta, porque s no es el parámetro natural de β: β recorre la mitad de camino por unidad de s.
- *Quitar el valor absoluto de $k_\beta = |k/(1-ak)|$.* Con la circunferencia unidad y $a = 3$, el punto se empuja más allá del centro y β es la circunferencia de radio $|1-3| = 2$, de curvatura $\frac{1}{2}$. Sin el valor absoluto saldría $-\frac{1}{2}$, que no es una curvatura.
- *Concluir en 2(a) que β es una recta solo porque $\ddot{\beta} = 0$.* Hace falta además $\dot{\beta} \neq 0$, y es aquí donde se gasta la hipótesis $\tau \neq 0$: con $\tau \equiv 0$ y $a = 1/k$, en la circunferencia, $\dot{\beta} \equiv 0$ y β es un punto, el centro, no una recta.
- *Suponer k y τ constantes en el recíproco.* El enunciado no lo da: es justo lo que hay que probar, y por eso la prueba pasa por las dos componentes constantes de T.

QUÉ DEJA. La fórmula (1.13) y, sobre todo, el hábito de traducir una condición algebraica en una geométrica antes de resolver. El enunciado da $k = a(k^2+\tau^2)$ como una hipótesis opaca; reconocer que es «a es el radio del cilindro» convierte un apartado de dos páginas en un dibujo. Este es el tipo de reconocimiento que separa un ejercicio contestado de uno resuelto.

Ejercicio 1.26. *Curvas con las mismas normales principales* [H1.23]

Sean $\alpha = \alpha(s)$ y $\beta = \beta(s)$ dos curvas regulares, con s el parámetro natural de α, tales que tienen las mismas rectas normales principales en puntos correspondientes. Se pide:

1. Probar que $\beta(s) = \alpha(s) + c\mathbf{n}(s)$ con c constante; en particular, $|\beta(s) - \alpha(s)| = |c|$.
2. Probar que s es también el parámetro natural de β si y solo si $\alpha = \beta$ o bien
$$\frac{2k}{k^2+\tau^2} = c.$$
3. Si s es también el parámetro natural de β y las dos curvas son distintas, probar que α es una hélice circular y calcular k_β y τ_β. ¿Qué tipo de curva es β?

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Compartir la recta normal principal es más fuerte de lo que parece: obliga a que β esté sobre esa recta* y *a que su normal principal sea $\pm\mathbf{n}$.*
2. *Del primer hecho sale $\beta = \alpha + \lambda\mathbf{n}$; del segundo, que $\dot{\beta}$ es ortogonal a $\mathbf{n}$. Junta las dos.*
3. *En el tercer apartado, escribe $\ddot{\beta}$ en la base del triedro de α y usa que tiene que ser paralelo a $\mathbf{n}$. Las otras dos componentes te dan lo que buscas.*

Resolución. *Primer apartado.* Compartir la recta normal principal significa, en particular, que $\beta(s)$ está en la recta normal principal de α en $\alpha(s)$, de modo que existe una función λ con

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda(s)\,\mathbf{n}(s).$$

Derivando y usando Frenet-Serret,

$$\dot{\beta} = \mathbf{t} + \dot{\lambda}\,\mathbf{n} + \lambda\big(-k\,\mathbf{t} + \tau\,\mathbf{b}\big) = \big(1-\lambda k\big)\mathbf{t} + \dot{\lambda}\,\mathbf{n} + \lambda\tau\,\mathbf{b}. \tag{1.14}$$

Por otro lado, las dos curvas tienen la misma recta normal principal, luego $\mathbf{n}_\beta = \pm\mathbf{n}$. Como el tangente de una curva es ortogonal a su normal principal, $\dot\beta$ es ortogonal a $\mathbf{n}$, y mirando la componente en $\mathbf{n}$ de (1.14) se obtiene

$$\dot\lambda(s) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(s) = c \text{ constante.}$$

Por tanto $|\beta(s) - \alpha(s)| = |c|\,|\mathbf{n}(s)| = |c|$. ■

Segundo apartado. Con $\lambda = c$ constante, (1.14) queda

$$\dot\beta = (1 - ck)\,\mathbf{t} + c\tau\,\mathbf{b}, \qquad |\dot\beta|^2 = (1-ck)^2 + c^2\tau^2.$$

El parámetro s es también el natural de β si y solo si $|\dot\beta| = 1$, es decir,

$$(1-ck)^2 + c^2\tau^2 = 1 \iff 1 - 2ck + c^2k^2 + c^2\tau^2 = 1 \iff c\big[c(k^2+\tau^2) - 2k\big] = 0.$$

Un producto es nulo si lo es uno de sus factores. O bien $c = 0$, y entonces $\beta = \alpha$, o bien

$$c = \frac{2k}{k^2+\tau^2}.\blacksquare$$

La idea del tercer apartado. Que s sea también el parámetro natural de β hace que $\ddot\beta$ sea exactamente $k_\beta\mathbf{n}_\beta$, y como $\mathbf{n}_\beta = \pm\mathbf{n}$, que $\ddot\beta$ no tenga componentes ni en $\mathbf{t}$ ni en $\mathbf{b}$. Al derivar $\dot\beta$ esas dos componentes salen $-c\dot k$ y $c\dot\tau$: anularlas es decir que ni la curvatura ni la torsión cambian. Lo demás es la cuenta de la curvatura y la torsión de β.

Tercer apartado. Supóngase $c \neq 0$. Derivando $\dot\beta$ con c constante,

$$\ddot\beta = -c\dot k\,\mathbf{t} + (1-ck)\dot{\mathbf{t}} + c\dot\tau\,\mathbf{b} + c\tau\dot{\mathbf{b}} = -c\dot k\,\mathbf{t} + \big[(1-ck)k - c\tau^2\big]\mathbf{n} + c\dot\tau\,\mathbf{b}.$$

Ahora bien, s es el parámetro natural de β, luego $\ddot\beta = k_\beta\,\mathbf{n}_\beta = \pm k_\beta\,\mathbf{n}$: es paralelo a $\mathbf{n}$. Sus componentes en $\mathbf{t}$ y en $\mathbf{b}$ deben anularse, y como $c \neq 0$,

$$\dot k \equiv 0, \qquad \dot\tau \equiv 0.$$

Así que k y τ son constantes: α es una hélice circular si $\tau \neq 0$, o una circunferencia si $\tau = 0$ (el caso de paso cero).

Curvatura y torsión de β. Sustituyendo $c = \dfrac{2k}{k^2+\tau^2}$ en el coeficiente que sobrevive:

$$1 - ck = 1 - \frac{2k^2}{k^2+\tau^2} = \frac{\tau^2 - k^2}{k^2+\tau^2}, \qquad c\tau^2 = \frac{2k\tau^2}{k^2+\tau^2},$$

$$(1-ck)k - c\tau^2 = \frac{k\tau^2 - k^3 - 2k\tau^2}{k^2+\tau^2} = \frac{-k\big(k^2+\tau^2\big)}{k^2+\tau^2} = -k.$$

Es decir, $\ddot\beta = -k\,\mathbf{n}$, de donde

$$k_\beta = k, \qquad \mathbf{n}_\beta = -\mathbf{n}.$$

Para la torsión se calcula la binormal de β:

$$\mathbf{b}_\beta = \mathbf{t}_\beta \times \mathbf{n}_\beta = \big[(1-ck)\mathbf{t} + c\tau\,\mathbf{b}\big] \times (-\mathbf{n}) = -(1-ck)\,\mathbf{b} + c\tau\,\mathbf{t},$$

usando $\mathbf{t}\times\mathbf{n} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{b}\times\mathbf{n} = -\mathbf{t}$. Derivando, con todos los coeficientes constantes,

$$\dot{\mathbf{b}}_\beta = -(1-ck)\,\dot{\mathbf{b}} + c\tau\,\dot{\mathbf{t}} = (1-ck)\tau\,\mathbf{n} + c\tau k\,\mathbf{n} = \tau\big[1 - ck + ck\big]\mathbf{n} = \tau\,\mathbf{n}.$$

Por otra parte, la definición de torsión para β da $\dot{\mathbf{b}}_\beta = -\tau_\beta\,\mathbf{n}_\beta = \tau_\beta\,\mathbf{n}$. Comparando,

$$\tau_\beta = \tau.$$

Luego β tiene la misma curvatura y la misma torsión que α: es **congruente con** α, por el teorema fundamental de las curvas alabeadas: otra hélice circular, o una circunferencia en el caso de paso cero. ■

Qué curva es β, vista en el cilindro. La constante del segundo apartado tiene una lectura inmediata. Para la hélice $\alpha(t) = (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t, bt)$, con $a > 0$, el ejercicio de la hélice circular dio $k = a/(a^2+b^2)$ y $\tau = b/(a^2+b^2)$, y entonces

$$c = \frac{2k}{k^2+\tau^2} = 2a\,:$$

c es el *diámetro* del cilindro. Como $\mathbf{n} = (-\cos t, -\,\mathrm{sen}\,t, 0)$ apunta en horizontal hacia el eje, avanzar $2a$ en esa dirección atraviesa el eje y cae en el punto diametralmente opuesto del mismo cilindro, a la misma altura:

$$\beta(t) = \alpha(t) + 2a\,\mathbf{n}(t) = (-a\cos t,\ -a\,\mathrm{sen}\,t,\ bt).$$

Es la misma hélice girada media vuelta alrededor de su eje, que es un movimiento directo; por eso tiene la misma curvatura, la misma torsión y la misma rapidez. Es la pareja exacta del ejercicio de la curva paralela: allí, avanzar sobre $\mathbf{n}$ una distancia igual al *radio* llevaba cada punto al eje; aquí, avanzar el *diámetro* lo lleva al otro lado del cilindro.

DE DÓNDE VIENE: LAS CURVAS DE BERTRAND

Dos curvas que comparten todas sus rectas normales principales se llaman **pareja de Bertrand**, por Joseph Bertrand, que las estudió a mediados del siglo XIX.
El resultado general, más fuerte que el de este ejercicio, es que una curva de curvatura y torsión no nulas admite compañera de Bertrand si y solo si existen constantes $A \neq 0$ y B con $Ak + B\tau = 1$, trabajando en tramos donde $Bk - A\tau \neq 0$ para que la compañera tenga normal principal. Es decir, la curvatura y la torsión deben estar ligadas por una relación afín. La condición $A \neq 0$ no es un tecnicismo: A es el desplazamiento orientado en la construcción $\beta = \alpha + A\mathbf{n}$; la distancia es $|A|$. Con $A = 0$, esa construcción daría la propia curva. Aquí se ha visto el caso particular en que además se exige que el parámetro natural sea común, y esa exigencia extra fuerza a que las dos sean constantes.
Hay un caso degenerado que conviene tener presente: toda curva plana tiene infinitas compañeras de Bertrand, sus curvas paralelas. Por eso los enunciados de este tipo suelen pedir explícitamente torsión no nula.

Ejercicio 1.27. *Integrar la tangente pesada por la torsión* [H1.24]

Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. cuyo intervalo de definición contiene a 0. Se define

$$\beta(s) = \int_0^s \tau(\sigma)\,\mathbf{t}(\sigma)\,d\sigma.$$

Se pide:
1. ¿Bajo qué condiciones es β una curva regular?
2. Suponiendo que β es regular, probar que α y β tienen rectas tangentes, normales principales y binormales paralelas, respectivamente.

3. ¿Puede ser β una curva plana?
4. ¿Cuándo es β una hélice? En caso de serlo, ¿qué se puede afirmar sobre ella?

Resolución. La idea, antes de la cuenta. Aquí β no se da sumándole un vector a α, sino dándole su velocidad: $\beta' = \tau\,\mathbf{t}$, penúltima fila de la tabla del mecanismo. Es decir, β va en cada instante en la misma dirección que α, pero a otro ritmo, con rapidez $|\tau|$. Dos curvas que van siempre en la misma dirección tienen el mismo tangente, salvo el signo; y como todo el triedro se fabrica derivando el tangente, tienen el mismo triedro, salvo signos. Lo único que cambia es la escala de tiempo, el paso 3 del mecanismo: $d\sigma/ds = |\tau|$. Por cada unidad de camino de β, cada vector del triedro gira lo que giraba por unidad de s dividido por $|\tau|$. Eso predice $k_\beta = k/|\tau|$ y $|\tau_\beta| = |\tau|/|\tau| = 1$; el signo de τ_β lo decide la cuenta, y es lo único que hay que vigilar.

Primer apartado. La curva está definida como una integral, así que para derivarla basta el teorema fundamental del cálculo, que devuelve el integrando evaluado en el extremo:

$$\beta'(s) = \tau(s)\,\mathbf{t}(s), \qquad |\beta'(s)| = |\tau(s)|.$$

Por tanto β es regular si y solo si $\tau(s) \neq 0$ para todo s. A partir de aquí se supone eso, y conviene extraer de ello una consecuencia que se usará todo el tiempo: una función continua que no se anula en un intervalo tiene signo constante, de modo que

$$\varepsilon = \operatorname{sig}\big(\tau(s)\big) \in \{+1, -1\}$$

es el mismo para todo s, y $\varepsilon\tau = |\tau|$. ■

Segundo apartado. Como $\beta' = \tau\mathbf{t}$ y τ es un escalar de signo constante,

$$\mathbf{t}_\beta = \frac{\beta'}{|\beta'|} = \frac{\tau}{|\tau|}\,\mathbf{t} = \varepsilon\,\mathbf{t},$$

y las tangentes ya son paralelas. Para las otras dos hay que derivar, y para derivar hay que llevar la cuenta del cambio de parámetro: si σ es el parámetro natural de β, entonces $d\sigma/ds = |\tau|$, luego $ds/d\sigma = 1/|\tau|$. Aplicando la regla de la cadena y la primera ecuación de Frenet-Serret,

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta}{d\sigma} = \varepsilon\,\dot{\mathbf{t}}\,\frac{ds}{d\sigma} = \frac{\varepsilon\,k}{|\tau|}\,\mathbf{n} = \frac{k}{\tau}\,\mathbf{n}.$$

Tomando normas y direcciones por separado, y recordando que $k > 0$,

$$k_\beta = \frac{k}{|\tau|}, \qquad \mathbf{n}_\beta = \varepsilon\,\mathbf{n}, \qquad \mathbf{b}_\beta = \mathbf{t}_\beta \times \mathbf{n}_\beta = \varepsilon^2\,(\mathbf{t}\times\mathbf{n}) = \mathbf{b}.$$

Los tres vectores del triedro de β son los de α salvo el signo común ε, y el binormal coincide exactamente. Las tres familias de rectas son paralelas. ■

Tercer apartado. No, y por una razón más fuerte de lo que el enunciado insinúa: la torsión de β no solo no se anula, sino que vale siempre 1. En efecto, derivando $\mathbf{b}_\beta = \mathbf{b}$ respecto de σ y usando la tercera ecuación de Frenet-Serret para α,

$$\frac{d\mathbf{b}_\beta}{d\sigma} = \dot{\mathbf{b}}\,\frac{ds}{d\sigma} = \frac{-\tau\,\mathbf{n}}{|\tau|} = -\varepsilon\,\mathbf{n},$$

mientras que la misma ecuación aplicada a β dice que esa derivada vale $-\tau_\beta\,\mathbf{n}_\beta = -\tau_\beta\,\varepsilon\,\mathbf{n}$. Comparando,

$$\tau_\beta \equiv 1.$$

Luego β no es plana nunca. ■

LA IDEA: POR QUÉ LA TORSIÓN SALE IGUAL A UNO, QUE ES LO RARO DE ESTE EJERCICIO

Que τ_β valga exactamente 1, sin depender de α para nada, es el tipo de resultado que uno desconfía de haber calculado bien. Tiene explicación, y es la siguiente.
El parámetro natural de β es

$$\sigma(s) = \int_0^s |\tau(\varsigma)|\,d\varsigma,$$

es decir, la torsión total acumulada. Y esa cantidad ya tenía un significado en el capítulo: como $|\dot{\mathbf{b}}| = |\tau|$, la integral de $|\tau|$ es la **longitud de la indicatriz esférica de las binormales** de α. Así que β no está medida en metros, sino en «vueltas de la binormal».
Ahora la cuenta se lee sola. La torsión tiene dimensiones de inverso de longitud: es un giro por unidad de camino. Si se cambia la unidad de camino precisamente por la que hace que se gire una unidad por cada unidad de camino, el resultado tiene que ser 1.
La construcción no está calculando la torsión de nada: está *normalizándola*, y $\tau_\beta = 1$ es la lectura de que se normalizó bien.
La analogía con el parámetro natural tiene un límite: aquí se ha construido otra curva, β. Reparametrizar α no cambiaría su torsión, que es un invariante geométrico. El valor 1 sale de combinar la nueva curva con su nuevo parámetro de arco, tal como muestra la cuenta anterior.

Cuarto apartado. Por el criterio de Lancret, β es hélice si y solo si τ_β/k_β es constante. Sustituyendo lo ya calculado,

$$\frac{\tau_\beta}{k_\beta} = \frac{1}{k/|\tau|} = \frac{|\tau|}{k} = \left|\frac{\tau}{k}\right|,$$

que es constante exactamente cuando lo es τ/k, porque el signo de τ ya se sabía constante. Es decir: β **es una hélice si y solo si** α **lo es**.

Y en ese caso se puede decir bastante más que «es una hélice». Llamando $c = |\tau/k|$ a esa constante, se tiene

$$k_\beta = \frac{k}{|\tau|} = \frac{1}{c} \qquad \text{y} \qquad \tau_\beta = 1,$$

las dos constantes. Curvatura constante y torsión constante caracterizan a la hélice circular, luego β es una hélice circular, y de una muy concreta: su radio y su parámetro de paso son

$$R_\beta = \frac{k_\beta}{k_\beta^2 + \tau_\beta^2} = \frac{c}{1+c^2}, \qquad c_\beta = \frac{\tau_\beta}{k_\beta^2 + \tau_\beta^2} = \frac{c^2}{1+c^2}.$$

Obsérvese lo que eso significa: todas las hélices con el mismo cociente τ/k —que pueden tener curvatura y torsión tan variables como se quiera— producen por esta construcción *la misma* hélice circular. La construcción borra todo salvo el invariante de Lancret. ■

Otra vía (comprobarlo en el caso más simple). Si α es ya una hélice circular, τ es constante y sale del integrando:

$$\beta(s) = \tau \int_0^s \mathbf{t}(\varsigma)\, d\varsigma = \tau\big(\alpha(s) - \alpha(0)\big),$$

es decir, β es una copia de α a escala τ. Una homotecia de razón λ divide la curvatura por $|\lambda|$ y la torsión por λ —la curvatura es positiva por definición, mientras que una razón negativa lleva incorporada la simetría central de $\mathbb{R}^3$, que cambia el signo de la torsión—. Luego

$$k_\beta = \frac{k}{|\tau|}, \qquad \tau_\beta = \frac{\tau}{\tau} = 1,$$

que es exactamente lo obtenido antes, con el signo de τ cancelándose solo. ■

Dónde se falla.

- *Olvidar el signo ε.* Quien escribe $\mathbf{t}_\beta = \mathbf{t}$ y $\mathbf{n}_\beta = \mathbf{n}$ llega, comparando $d\mathbf{b}_\beta/d\sigma = -\varepsilon\,\mathbf{n}$ con $-\tau_\beta\,\mathbf{n}$, a $\tau_\beta = \varepsilon = \operatorname{sig}(\tau)$, que es falso donde $\tau < 0$. La hélice levógira $(\cos t, \operatorname{sen} t, -t)$ tiene $\tau = -\frac{1}{2}$; su β es la hélice escalada por $-\frac{1}{2}$, y la simetría central que lleva dentro esa razón negativa la vuelve dextrógira: $\tau_\beta = +1$, no -1.
- *Leer el cuarto apartado como «β es hélice si α es hélice circular».* La condición es más débil: basta que τ/k sea constante, con k y τ tan variables como se quiera, y aun así β sale siempre circular.
- *Dar β por regular sin mirar la torsión.* La hipótesis de regularidad del segundo apartado es $\tau \neq 0$ en todo punto, y se gasta dos veces: en dividir por $|\tau|$ y en que su signo sea constante.

Ejercicio 1.28. *La curva de los centros de curvatura, con curvatura constante* [H1.25]

Sea $\alpha(s)$ una c.r.p.n. con curvatura k constante y no nula, definida en un intervalo que contiene a 0. Se define la curva β mediante

$$\beta(s) = \frac{1}{k}\,\mathbf{n}(s) + \int_0^s \mathbf{t}(\sigma)\, d\sigma.$$

Se pide:

1. Calcular el triedro de Frenet de β.
2. Calcular la curvatura y la torsión de β.
3. Probar que β no puede ser una circunferencia.
4. Probar que si α es una hélice circular, entonces β también lo es y del mismo paso. ¿Cuál es su radio?

Resolución. Antes de calcular: qué curva es esta. La integral se resuelve sola, porque $\mathbf{t} = \dot{\alpha}$:

$$\int_0^s \mathbf{t}(\sigma)\, d\sigma = \alpha(s) - \alpha(0), \qquad \text{luego} \qquad \beta(s) = \underbrace{\alpha(s) + \frac{1}{k}\mathbf{n}(s)}_{= C(s)} - \alpha(0).$$

Es decir, β es exactamente el **lugar de los centros de curvatura** de α, trasladado por el vector constante $-\alpha(0)$. Reconocerlo cambia el ejercicio de sitio: no es una construcción nueva, es una vieja conocida bajo un disfraz de integral, y lo que sigue completa el cálculo que ya se hizo para ella con curvatura constante.

Primer y segundo apartados. Derivando, con k constante y usando $\dot{\mathbf{n}} = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$,

$$\beta'(s) = \mathbf{t} + \frac{1}{k}\big(-k\,\mathbf{t} + \tau\,\mathbf{b}\big) = \frac{\tau(s)}{k}\,\mathbf{b}(s).$$

Los dos términos en $\mathbf{t}$ se cancelan, y esa cancelación es todo el ejercicio: la curva de los centros de curvatura se mueve solo en la dirección binormal. En particular β es regular si y solo si τ no se anula, cosa que se supone en adelante; como antes, $\varepsilon = \operatorname{sig}(\tau)$ es constante y $d\sigma/ds = |\tau|/k$.

De ahí sale el triedro, en cadena. El tangente es β' dividido por su módulo, y al dividir $(\tau/k)\mathbf{b}$ entre $|\tau|/k$ lo que queda es el signo de la torsión:

$$\mathbf{t}_\beta = \frac{\beta'}{|\beta'|} = \frac{\tau}{|\tau|}\,\mathbf{b} = \varepsilon\,\mathbf{b}.$$

Derivando respecto de σ, con $\dot{\mathbf{b}} = -\tau\mathbf{n}$ y $\varepsilon\tau = |\tau|$,

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta}{d\sigma} = \varepsilon\,\dot{\mathbf{b}}\,\frac{ds}{d\sigma} = \varepsilon\big(-\tau\,\mathbf{n}\big)\frac{k}{|\tau|} = -k\,\mathbf{n},$$

de donde se leen a la vez la curvatura y el normal principal, y con ellos el binormal:

$$k_\beta = k, \qquad \mathbf{n}_\beta = -\mathbf{n}, \qquad \mathbf{b}_\beta = \mathbf{t}_\beta \times \mathbf{n}_\beta = \varepsilon\,(\mathbf{b} \times (-\mathbf{n})) = \varepsilon\,\mathbf{t}.$$

Falta la torsión, y sale de la tercera ecuación de Frenet-Serret aplicada a β. Por un lado,

$$\frac{d\mathbf{b}_\beta}{d\sigma} = \varepsilon\,\dot{\mathbf{t}}\,\frac{ds}{d\sigma} = \varepsilon\,k\,\mathbf{n}\,\frac{k}{|\tau|} = \frac{k^2}{\tau}\,\mathbf{n};$$

por otro, esa derivada debe valer $-\tau_\beta\,\mathbf{n}_\beta = \tau_\beta\,\mathbf{n}$. Comparando,

$$\tau_\beta = \frac{k^2}{\tau(s)}.$$

■

Observación. El triedro de β es el de α reordenado y con signos ajustados: su tangente es $\varepsilon\mathbf{b}$, su binormal es $\varepsilon\mathbf{t}$ y su normal principal es $-\mathbf{n}$. Los dos triedros comparten los tres ejes y difieren en cómo los reparten. Eso explica de paso por qué las curvaturas coinciden: k_β mide cómo gira $\mathbf{b}$, y k mide cómo gira $\mathbf{t}$, y en esta construcción los dos giros se han intercambiado sin cambiar de tamaño porque el factor $k/|\tau|$ del cambio de parámetro compensa exactamente el $|\tau|$ de $\dot{\mathbf{b}}$.

Tercer apartado. Una circunferencia tiene torsión idénticamente nula. Pero

$$\tau_\beta = \frac{k^2}{\tau} \neq 0$$

en todo punto, porque $k \neq 0$ por hipótesis. Luego β no puede ser una circunferencia en ningún tramo regular. Si τ tiene ceros aislados, en ellos β pierde regularidad; no cambia la conclusión sobre los tramos regulares. Si $\tau \equiv 0$, entonces $\beta' \equiv 0$ y β ni siquiera es una curva, sino un punto —lo cual es razonable, porque con $\tau \equiv 0$ y k constante la propia α es una circunferencia y todos sus centros de curvatura son su centro—. ■

Cuarto apartado. Si α es una hélice circular de paso no nulo, k y τ son ambas constantes, luego $k_\beta = k$ y $\tau_\beta = k^2/\tau$ también lo son, y una curva con curvatura y torsión constantes es una hélice circular. Para comparar los pasos y los radios se usan las fórmulas que los dan a partir de los invariantes, $R = k/(k^2+\tau^2)$ y $c = \tau/(k^2+\tau^2)$:

$$c_\beta = \frac{\tau_\beta}{k_\beta^2+\tau_\beta^2} = \frac{k^2/\tau}{k^2+k^4/\tau^2} = \frac{k^2/\tau}{k^2\big(\tau^2+k^2\big)/\tau^2} = \frac{\tau}{k^2+\tau^2} = c,$$

así que el parámetro de paso es el mismo y, con él, el paso $2\pi c$. Y el radio es

$$R_\beta = \frac{k_\beta}{k_\beta^2+\tau_\beta^2} = \frac{k}{k^2+k^4/\tau^2} = \frac{\tau^2}{k\big(k^2+\tau^2\big)}.$$

■

LA IDEA: LAS DOS HÉLICES Y EL PRODUCTO DE SUS RADIOS

La fórmula del radio queda mucho más legible al compararla con la de α. Como $R = k/(k^2+\tau^2)$,

$$R_\beta = \Big(\frac{\tau}{k}\Big)^2 R, \qquad \text{y sobre todo} \qquad R\cdot R_\beta = \frac{\tau^2}{(k^2+\tau^2)^2} = c^2.$$

El producto de los dos radios es el cuadrado del parámetro de paso. Dicho de otro modo, sobre un cilindro de paso fijo, la hélice y la curva de sus centros de curvatura tienen radios *inversos* uno del otro en la escala que fija el paso: si una es estrecha, la otra es ancha.

Y eso tiene sentido si se piensa en el caso límite. Una hélice muy estrecha ($R \to 0$) es casi una recta vertical, se dobla poco y su radio de curvatura es enorme, así que sus centros de curvatura están muy lejos del eje. Una hélice muy ancha ($R \to \infty$ con c fijo) es casi una circunferencia, sus centros de curvatura están casi en el eje, y la curva β se estrecha. El producto constante c^2 es la forma exacta de ese balance.

Con la hélice $(R\cos t, R\operatorname{sen} t, ct)$ la comprobación es directa: el normal principal es $\mathbf{n} = (-\cos t, -\operatorname{sen} t, 0)$, el radio de curvatura es $1/k = (R^2+c^2)/R$, y

$$\alpha + \frac{1}{k}\mathbf{n} = \Big(-\frac{c^2}{R}\cos t,\ -\frac{c^2}{R}\operatorname{sen} t,\ ct\Big),$$

una hélice circular del mismo eje, del mismo paso y de radio c^2/R, en efecto.

Dónde se falla.

- *Usar $\tau_\beta = k^2/\tau$ sin curvatura constante.* Con k variable la curva de los centros de curvatura es la primera fila de la tabla del mecanismo, $\dot\beta = -(\dot k/k^2)\,\mathbf{n} + (\tau/k)\,\mathbf{b}$, y ya no se mueve solo por la binormal: nada de lo anterior sigue valiendo. En la espiral logarítmica $(e^t\cos t, e^t\operatorname{sen} t, 0)$, que es plana y tiene curvatura variable, la curva de sus centros de curvatura es regular aunque $\tau \equiv 0$. El tercer apartado, «si $\tau \equiv 0$, β es un punto», necesita la curvatura constante.
- *Equivocarse en el orden de un producto vectorial.* El triedro es directo: $\mathbf{t}\times\mathbf{n} = \mathbf{b}$, $\mathbf{n}\times\mathbf{b} = \mathbf{t}$ y $\mathbf{b}\times\mathbf{t} = \mathbf{n}$, y al revés cambia el signo. Aquí $\mathbf{b}_\beta = \varepsilon\,\mathbf{b}\times(-\mathbf{n}) = \varepsilon\,\mathbf{t}$; quien escribe $\mathbf{b}\times\mathbf{n} = \mathbf{t}$ obtiene $\mathbf{b}_\beta = -\varepsilon\,\mathbf{t}$ y, al comparar con $-\tau_\beta\,\mathbf{n}_\beta$, una torsión $-k^2/\tau$ con el signo cambiado. La curvatura no lo delata, porque se lee en una norma.

Ejercicio 1.29. *La indicatriz esférica de las binormales de una hélice*

Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. de clase C^5, con curvatura y torsión no nulas en todos sus puntos. Probar que si α es una hélice, entonces:
1. $(\dot{\mathbf{b}}, \ddot{\mathbf{b}}, \dddot{\mathbf{b}}) \equiv 0$;
2. la indicatriz esférica de las binormales de α recorre una circunferencia o un arco suyo.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *El apartado 1 es una propiedad de la curva $\beta = \mathbf{b}$ enunciada con las derivadas respecto del parámetro de α. ¿Qué propiedad geométrica de una curva se traduce en que sus tres primeras derivadas sean coplanarias?*
2. *Para el apartado 2, la indicatriz vive en la esfera unidad por construcción. Si además consigues que viva en un plano, ya has terminado.*
3. *El criterio de Lancret te da un vector constante asociado a la hélice. Prueba a multiplicarlo escalarmente por la binormal.*

Resolución. Sea $\beta(s) = \mathbf{b}(s)$ la indicatriz esférica de las binormales. Conviene hacer primero el apartado 2, porque el 1 se sigue de él.

Apartado 2. Como α es una hélice, por el criterio de Lancret el cociente τ/k es una constante c y el vector

$$a = c\,\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s)$$

es constante. Multiplicando escalarmente por $\mathbf{b}$ y usando la ortonormalidad del triedro,

$$\beta(s)\cdot a = \mathbf{b}(s)\cdot\big(c\,\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s)\big) = c\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{t} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 1$$

para todo s. Es decir, **la indicatriz está contenida en el plano** de ecuación $X\cdot a = 1$.

Por otro lado, β está contenida en la esfera unidad, porque $\mathbf{b}$ es unitario. Una curva contenida a la vez en un plano y en una esfera está en su intersección. Aquí $|a| = \sqrt{1+c^2} > 1$, de modo que el plano queda a distancia $1/|a| < 1$ del origen y la intersección sí es una circunferencia. Como $\dot\beta = -\tau\mathbf{n} \neq 0$, la indicatriz la recorre regularmente, entera o en parte según el intervalo de definición. ■

Apartado 1. La identidad $\beta(s)\cdot a = 1$, con a constante, puede derivarse tres veces: $\dot\beta$, $\ddot\beta$ y $\dddot\beta$ son ortogonales a a. Los tres vectores están en el mismo plano vectorial, luego su producto mixto es cero. La clase C^5 de α garantiza las tres derivadas de $\beta = \mathbf{b}$ que aparecen en este apartado. ■

LA IDEA: POR QUÉ LA INDICATRIZ DE UNA HÉLICE TIENE QUE SER UNA CIRCUNFERENCIA

El resultado es de los que se ven antes de demostrarse, y verlo ayuda a no olvidarlo. Una hélice es una curva que avanza siempre con la misma inclinación respecto de una dirección fija, su eje. Como el triedro de Frenet mantiene un ángulo constante con ese eje, cada uno de sus tres vectores, al trasladarse al origen, describe un cono de eje a y ángulo constante. Y la punta de un vector unitario que recorre un cono describe una circunferencia sobre la esfera.

Así que no solo la indicatriz de las binormales es una circunferencia: **las tres indicatrices esféricas de una hélice lo son**. La de las tangentes y la de las binormales son circunferencias en planos perpendiculares al eje, y la de las normales principales es un círculo máximo, porque $\mathbf{n}$ es siempre perpendicular al eje.

> Merece la pena guardar también el recíproco, que aparece en variantes del ejercicio: si la indicatriz de las binormales de una curva es una circunferencia, entonces $\mathbf{b}\cdot a$ es constante para el vector característico a de su plano, y derivando se llega a que la curva es una hélice.

Qué hemos aprendido: el radio de la circunferencia, y el recíproco escrito. El plano $X\cdot a = 1$ está a distancia $1/|a| = 1/\sqrt{1+c^2}$ del origen, así que corta a la esfera unidad en una circunferencia de radio

$$\sqrt{1-\frac{1}{1+c^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{1+c^2}},$$

que es el seno del ángulo constante entre la binormal y el eje. Con un número: la hélice $(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ tiene $k = \tau = \frac{1}{2}$ y $c = 1$; su binormal es $\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{sen} t, -\cos t, 1)$, que recorre la circunferencia de radio $1/\sqrt{2}$ a la altura $z = 1/\sqrt{2}$. El recíproco que menciona la caja cabe en dos líneas. Si $\mathbf{b}$ está en un plano $X\cdot u = d$, con u unitario y fijo, derivando $0 = \dot{\mathbf{b}}\cdot u = -\tau\,\mathbf{n}\cdot u$, y como $\tau \neq 0$, $\mathbf{n}\cdot u = 0$ en todo punto. Esa es la tercera caracterización de las hélices, la de los normales perpendiculares a una dirección fija, que se vio tras el criterio de Lancret.

Dónde se falla. En dar por hecho que un plano y una esfera se cortan en una circunferencia. Pueden no cortarse, o tocarse en un punto: hace falta que el plano pase a distancia menor que el radio del centro de la esfera, y por eso se calcula $1/|a| < 1$. Y en olvidar que el a de Lancret no es unitario: la distancia del plano $X\cdot a = 1$ al origen es $1/|a|$, no 1.

Ejercicio 1.30. *Las curvas esféricas y el radio que se lee en la curvatura*

Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. con $k > 0$ y $\tau \neq 0$ en todo punto. Probar que si α está contenida en una superficie esférica de radio R, entonces en todo punto

$$R^2 = \frac{1}{k^2} + \left(\left(\frac{1}{k}\right)^{\cdot}\right)^2 \frac{1}{\tau^2},$$

donde el punto indica derivada respecto del parámetro natural.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Llama c al centro de la esfera y escribe el vector $\alpha - c$ en la base móvil de la propia curva, es decir, como $a\mathbf{t} + b\mathbf{n} + d\mathbf{b}$ con a, b, d funciones de s. Toda la información está en esos tres coeficientes.*
2. *Que la curva viva en la esfera es una sola ecuación, $|\alpha - c|^2 = R^2$. Derívala; y cuando se te acaben las consecuencias, vuelve a derivar.*
3. *El primer coeficiente se anula sin esfuerzo. Los otros dos salen de comparar componente a componente en las ecuaciones de Frenet-Serret.*

Resolución. La idea, antes de la cuenta. Estar en una esfera es una condición sobre la curva *entera*, y la curvatura y la torsión son datos de un punto. El puente entre las dos cosas es siempre el mismo: se escribe el vector que va del centro a la curva en la base de Frenet, que es la base que la curva se lleva consigo, y entonces la condición global se convierte en tres ecuaciones entre funciones de s. La identidad del enunciado no es más que el teorema de Pitágoras aplicado a ese vector una vez que se conocen sus tres componentes.

Paso 1: escribir el radio-vector en la base de Frenet. El triedro $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ es una base

ortonormal de $\mathbb{R}^3$ en cada punto, así que existen funciones a, b y d con

$$\alpha(s) - c = a(s)\,\mathbf{t}(s) + b(s)\,\mathbf{n}(s) + d(s)\,\mathbf{b}(s).$$

Paso 2: la primera derivada mata el término tangente. La hipótesis es $(\alpha - c)\cdot(\alpha - c) = R^2$, constante. Derivando y usando $\dot{\alpha} = \mathbf{t}$,

$$2\,(\alpha - c)\cdot\mathbf{t} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a = (\alpha - c)\cdot\mathbf{t} = 0.$$

Geométricamente esto dice algo que conviene ver, porque es la razón de fondo: el vector que va del centro de una esfera a un punto suyo es perpendicular a la esfera, luego es perpendicular a cualquier curva trazada sobre ella. Por tanto, el centro de la esfera pertenece al plano normal de la curva en cada punto.

Paso 3: la segunda derivada da los otros dos coeficientes (el núcleo de la prueba). Con $a = 0$ queda $\alpha - c = b\,\mathbf{n} + d\,\mathbf{b}$. Derivando este vector y sustituyendo $\dot{\mathbf{n}}$ y $\dot{\mathbf{b}}$ por las ecuaciones de Frenet-Serret,

$$\mathbf{t} = \dot{b}\,\mathbf{n} + b\big(-k\,\mathbf{t} + \tau\,\mathbf{b}\big) + \dot{d}\,\mathbf{b} + d\big(-\tau\,\mathbf{n}\big) = -bk\,\mathbf{t} + \big(\dot{b} - d\tau\big)\mathbf{n} + \big(b\tau + \dot{d}\big)\mathbf{b}.$$

Igualando componente a componente en la base $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ se obtienen tres ecuaciones. La del tangente da $1 = -bk$, es decir,

$$b = -\frac{1}{k},$$

y aquí es donde se usa $k > 0$. La del normal principal da $0 = \dot{b} - d\tau$, de donde, usando ahora $\tau \neq 0$,

$$d = \frac{\dot{b}}{\tau} = \frac{1}{\tau}\Big(-\frac{1}{k}\Big)^{\cdot}.$$

La tercera ecuación, $0 = b\tau + \dot{d}$, no hace falta para lo que se pide: es una condición adicional que cumple toda curva esférica y que no se usa aquí.

Paso 4: Pitágoras. Como $\{\mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ es ortonormal,

$$R^2 = |\alpha - c|^2 = b^2 + d^2 = \frac{1}{k^2} + \left(\Big(\frac{1}{k}\Big)^{\cdot}\right)^2 \frac{1}{\tau^2},$$

donde el signo de b desaparece al elevar al cuadrado. ■

Qué hizo cada hipótesis. La condición $k > 0$ se gasta entera en el paso 3, al despejar b: sin ella el triedro ni siquiera existe. La condición $\tau \neq 0$ se gasta al despejar d, y no es un tecnicismo: si $\tau \equiv 0$ la curva es plana, una curva plana contenida en una esfera es un arco de circunferencia, y entonces k es constante, el numerador $(1/k)^{\cdot}$ se anula, pero también el denominador τ: el cociente queda indeterminado y no puede eliminarse como si valiera cero. Una misma circunferencia puede estar en esferas de distintos radios; su curvatura solo da el radio de la circunferencia. Por eso ese caso se excluye.

LA IDEA: QUÉ ESTÁ DICIENDO LA FÓRMULA

La lectura es que **una curva esférica lleva escrito el radio de su esfera**. Un habitante de la curva que solo pudiera medir cuánto se dobla y cuánto se sale del plano sabría, sin verla, en qué esfera está metido.
Los dos sumandos se leen por separado, y forman un triángulo rectángulo dibujado

en el plano normal a la curva. Un cateto es $1/k$, el radio de curvatura: la distancia del punto al centro del círculo osculador. El otro es el desplazamiento del centro de la esfera respecto de ese centro de curvatura, medido en la dirección de la binormal. Y la hipotenusa es R. Cuando la curva es un círculo máximo los dos centros coinciden, el segundo cateto se anula y queda $R = 1/k$; cuanto más se aparta la curva de un círculo máximo, más se separan los dos centros.
La fórmula es una condición necesaria, pero que el miembro derecho sea constante no basta para concluir que la curva es esférica. Una hélice circular con torsión no nula tiene k y τ constantes: ese miembro vale $1/k^2$, y sin embargo la hélice no está en una esfera. Para probar la suficiencia haría falta controlar también la ecuación $b\tau + \dot{d} = 0$ que la demostración no utilizó.

1.6 Cinco curvas clásicas

LA PREGUNTA

Las curvas de los ejemplos hasta aquí se han dado siempre por una fórmula: se escribe $\alpha(t)$ y se deriva. Muchas curvas clásicas se introdujeron como el rastro de algo que se mueve sujeto a una condición: el punto de una rueda que gira, el extremo de una cuerda que se arrastra, el punto que resuelve un problema de construcción con regla y compás. La fórmula vino después, y muchas veces siglos después. ¿Cómo se pasa de la condición a la fórmula? ¿Y qué dice la maquinaria de este capítulo, tangente, curvatura, parámetro natural, sobre curvas que nadie inventó para ilustrar un teorema?

Esta sección recorre cinco curvas clásicas. Cada una se define por una propiedad geométrica, sin fórmula; de esa propiedad se deduce la parametrización, y después se estudian sus puntos singulares, que es donde la geometría se vuelve interesante. Obligan, de paso, a montar la parametrización a partir de un dibujo en vez de recibirla hecha, que es el paso que en los ejemplos de fórmula queda escondido.

1.6.1 La cicloide, o el rastro de un punto de la rueda

Definición. La **cicloide** es la curva que describe un punto fijo de una circunferencia de radio r que rueda sin deslizar sobre una recta.

De la propiedad a la fórmula. Rodar sin deslizar significa que el arco recorrido sobre la circunferencia es igual al camino avanzado sobre la recta. Si t es el ángulo girado, el centro de la rueda está en (rt, r), y el punto marcado está en el centro más un vector de longitud r que ha girado t radianes en sentido horario desde la posición inferior:

$$\alpha(t) = \big(r(t - \operatorname{sen} t),\ r(1 - \cos t)\big), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Puntos singulares. $\alpha'(t) = r(1 - \cos t,\ \operatorname{sen} t)$, que se anula exactamente cuando $\cos t = 1$ y $\operatorname{sen} t = 0$, es decir, en $t = 2k\pi$. Esos son los instantes en que el punto marcado toca el suelo, y ahí la curva tiene una **cúspide**. El punto marcado está instantáneamente en reposo, pero eso no significa que falte una recta tangente: en $t = 0$, los términos principales son $x \sim rt^3/6$,

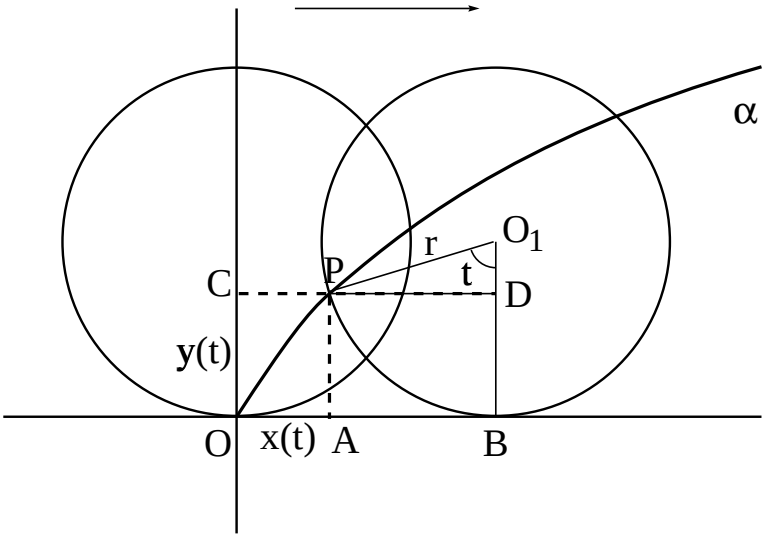
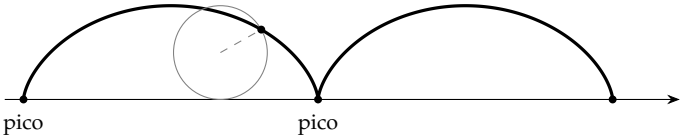


Figura 1.8: Construcción de la cicloide: el desplazamiento del centro es rt; las proyecciones del radio permiten obtener $x(t)$ e $y(t)$. Material complementario original, *La cicloide*, p. 1.

$y \sim rt^2/2$, así que la recta tangente límite es vertical. Lo que se invierte al pasar por el pico es el sentido del vector tangente unitario; las dos ramas llegan a la misma recta por el mismo lado del suelo.



DE DÓNDE VIENE: LA CURVA QUE RESOLVIÓ DOS PROBLEMAS A LA VEZ

La cicloide fue el campo de batalla del siglo XVII, hasta el punto de que se la llamó «la Helena de los geómetras» por las peleas que provocó. Dos resultados justifican la fama, y los dos son sorprendentes.

Huygens (1659) descubrió que la cicloide es **tautócrona**: si se deja caer una bola por una cicloide invertida, tarda lo mismo en llegar al fondo salga de donde salga. Lo buscaba porque quería un péndulo cuyo periodo no dependiera de la amplitud. La cicloide permitía abordar esa dependencia que seguía presente en el péndulo ordinario.

Johann Bernoulli (1696) planteó el problema de la **braquistócrona**: de todas las curvas que unen dos puntos a distinta altura, ¿por cuál baja más deprisa una bola? La respuesta es otra vez la cicloide. No la recta, que es la más corta: conviene perder camino al principio para ganar velocidad antes. El problema fue el pistoletazo de salida del cálculo de variaciones, y quien quiera ver cómo se resuelve lo tiene en el capítulo de la asignatura de modelización.

1.6.2 La epicicloide, o el rastro de una rueda que gira sobre otra

Definición. La **epicicloide** es la curva que describe un punto de una circunferencia de radio r que rueda sin deslizar por el exterior de otra circunferencia fija de radio a.

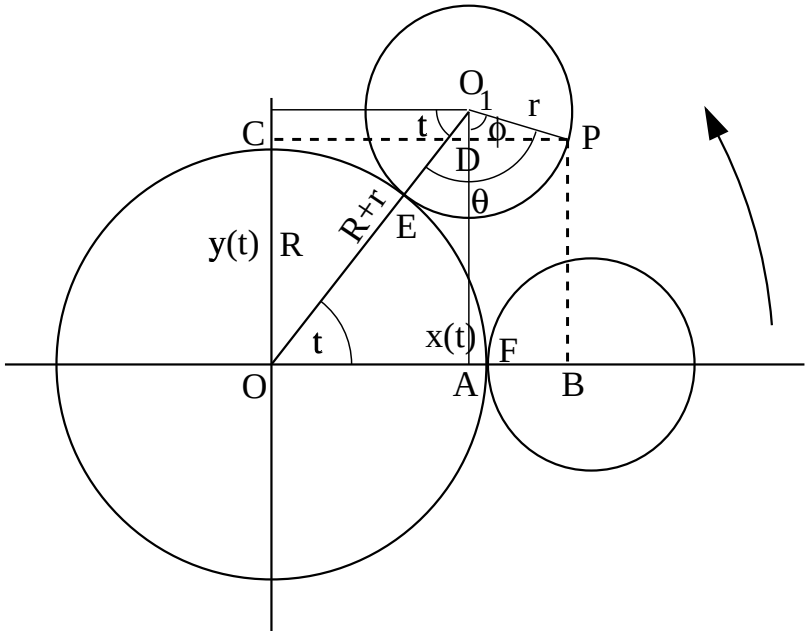
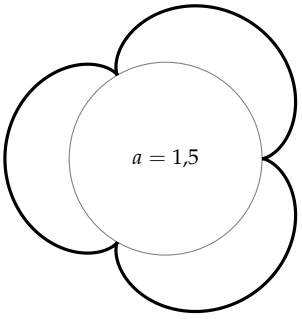


Figura 1.9: Construcción de la epicicloide por rodadura. El radio R de la circunferencia fija en el dibujo corresponde al a del texto; r es el de la rueda móvil. Figura del material complementario original, *La epicicloide*, p. 1.

De la propiedad a la fórmula. El razonamiento es el de la cicloide, con una vuelta de tuerca: el centro de la rueda móvil describe una circunferencia de radio $a + r$, y la condición de rodar sin deslizar dice que si el centro ha girado un ángulo t alrededor del origen, la rueda ha girado sobre sí misma un ángulo $\frac{a}{r}t$ *además* de acompañar al centro. Sumando los dos giros,

$$\alpha(t) = \Big((a+r)\cos t - r\cos\tfrac{a+r}{r}t,\ \ (a+r)\operatorname{sen} t - r\operatorname{sen}\tfrac{a+r}{r}t\Big).$$

Derivando y usando la fórmula del ángulo mitad se obtiene $|\alpha'(t)| = 2(a+r)\left|\operatorname{sen}\frac{at}{2r}\right|$, que se anula cuando $\frac{at}{2r}$ es múltiplo de π: otra vez los instantes en que el punto marcado toca la circunferencia fija, y otra vez picos.



$r = a/3$: tres picos

CONEXIÓN

Si a/r es racional, digamos $a/r = p/q$ en forma irreducible, la curva se cierra tras q vueltas y tiene p picos. Si es irracional, no se cierra nunca y llena densamente una corona. Esa dicotomía, racional cierra e irracional llena, es la misma que gobierna las trayectorias del toro en la asignatura de topología, y la misma de la rotación irracional en sistemas dinámicos.

DE DÓNDE VIENE: LOS EPICICLOS DE PTOLOMEO

La construcción recuerda a los epiciclos del sistema de Ptolomeo: un círculo pequeño cuyo centro gira sobre otro. Pero una epicicloide impone además una relación precisa entre los giros, la de rodar sin deslizar; una combinación de dos movimientos circulares no cumple necesariamente esa condición.
La conexión con Fourier es una analogía matemática: sumar movimientos circulares de frecuencias armónicas produce sumas trigonométricas. No identifica sin más un modelo astronómico con la teoría moderna de series.

1.6.3 La tractriz, o el rastro de algo que se arrastra

Definición. La **tractriz** es la curva descrita por los puntos P del plano tales que el segmento de tangente comprendido entre P y una recta fija tiene longitud constante a.

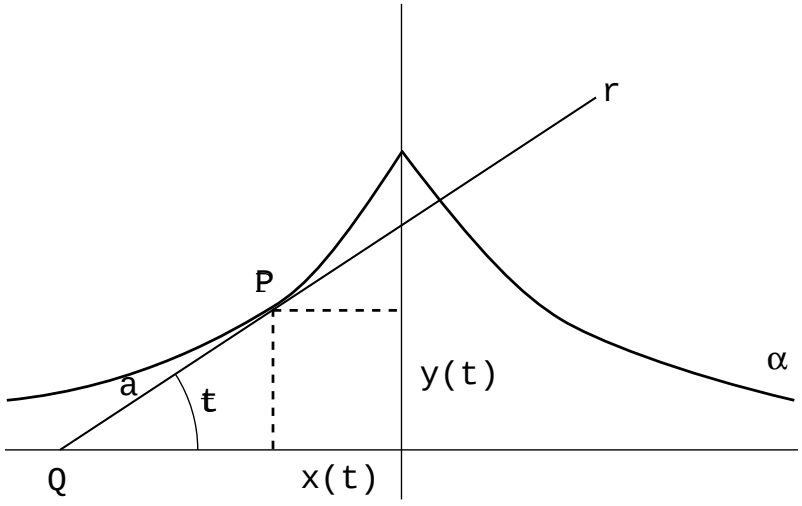


Figura 1.10: Construcción de la tractriz: el segmento de tangente PQ tiene longitud constante a, de modo que $y(t) = a \operatorname{sen} t$. Material complementario original, *La tractriz*, p. 1.

De la propiedad a la fórmula. Tomando como parámetro el ángulo t que forma la tangente con la recta fija (el eje OX), la condición «el segmento mide a» da inmediatamente $y(t) = a \operatorname{sen} t$. Para $x(t)$ se escribe la recta tangente en $\alpha(t) = (x(t), a \operatorname{sen} t)$,

$$r(\lambda) = \big(x(t) + \lambda x'(t),\ a(\operatorname{sen} t + \lambda \cos t)\big),$$

Para $t \neq \pi/2$, imponer el corte con OX da $\lambda = -\tan t$. Como la pendiente de la tangente es $\tan t = y'(t)/x'(t)$, se obtiene $x'(t) = a\cos^2 t / \operatorname{sen} t$. Integrando, salvo una traslación horizontal, resulta

$$\alpha(t) = \Big(a\big(\cos t + \log\tan\tfrac{t}{2}\big),\ a \operatorname{sen} t\Big), \qquad t \in (0, \pi),$$

La fórmula se extiende a $t = \pi/2$: allí se anulan las dos derivadas y aparece el único punto singular, el pico de arriba. Las dos ramas regulares corresponden a los intervalos a uno y otro lado.

La imagen física. Es la curva que describe una piedra atada con una cuerda de longitud a cuando se tira del otro extremo de la cuerda a lo largo de una recta. La piedra nunca alcanza la recta y siempre va detrás; de ahí el nombre, del latín *trahere*, arrastrar.

CONEXIÓN

La tractriz es el motivo por el que esta curva aparece en un curso de superficies y no solo de curvas. Al girarla alrededor de su asíntota se obtiene la **pseudoesfera**, una superficie de curvatura de Gauss **constante y negativa**, $K = -1/a^2$ en sus partes regulares, donde a es la longitud del segmento de tangente que define la tractriz. Con $a = 1$ queda $K = -1$, que es el valor con el que suele presentarse: el análogo hiperbólico de la esfera de radio 1, que tiene $K = +1$. Se calculará en el capítulo 4, y es el primer modelo concreto que se tuvo de una geometría no euclídea, lo que la convierte en una de las curvas más importantes del siglo XIX.

1.6.4 La cisoide de Diocles, o duplicar el cubo

Definición. Sea S una circunferencia de radio a y sean O y A dos puntos diametralmente opuestos. Una semirrecta que parte de O corta a S en C y a la tangente a S en A en un punto B. Sobre el segmento OB se toma el punto P con $d(O,P) = d(B,C)$. Al variar la semirrecta, P describe la **cisoide de Diocles**.

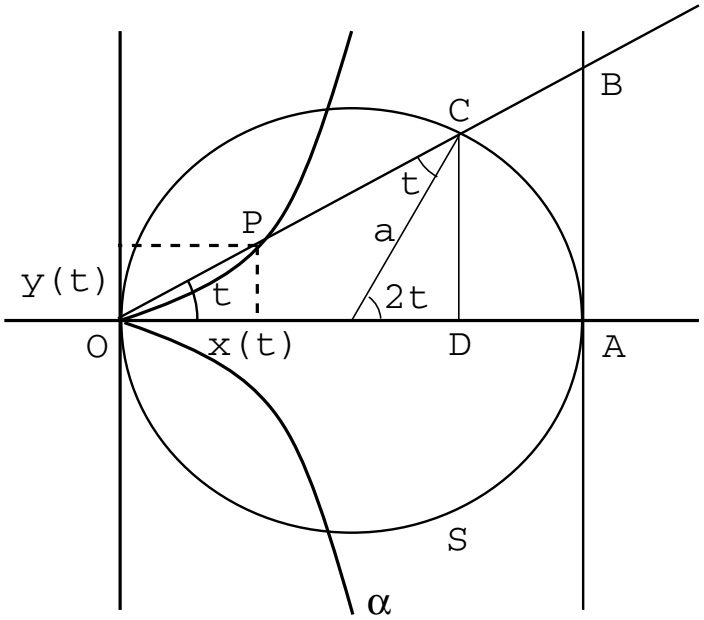


Figura 1.11: Construcción de la cisoide: sobre cada semirrecta se elige P con $OP = BC$. Material complementario original, *La cisoide de Diocles*, p. 1.

De la propiedad a la fórmula. Con O en el origen, $A = (2a, 0)$ y t el ángulo de la semirrecta, se tiene $d(O,C) = 2a\cos t$ y $d(O,B) = 2a/\cos t$, luego $d(O,P) = d(O,B) - d(O,C) =$

$2a\left(\frac{1}{\cos t} - \cos t\right) = 2a\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos t}$, y

$$\alpha(t) = \left(2a\operatorname{sen}^2 t,\ 2a\frac{\operatorname{sen}^3 t}{\cos t}\right), \qquad t \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}).$$

El origen, $t = 0$, es el único punto singular, y es una **cúspide**: las dos ramas llegan al origen con la misma recta tangente, el eje OX. Ambas tienen $x \geq 0$: quedan a lados opuestos del eje, pero se acercan al origen desde el mismo semieje.

DE DÓNDE VIENE: LA DUPLICACIÓN DEL CUBO

Diocles (siglo II a. C.) inventó esta curva para resolver uno de los tres problemas clásicos de la Antigüedad: construir un cubo de volumen doble que uno dado, es decir, construir $\sqrt[3]{2}$. Con regla y compás es imposible, cosa que no se demostró hasta Wantzel en 1837; pero *con la cisoide dibujada*, sí se puede. Es un ejemplo temprano y limpio de una idea que domina las matemáticas modernas: cuando una herramienta no basta, no siempre hay que abandonar el problema; a veces basta con ampliar la caja de herramientas y ser honesto sobre lo que se ha añadido.

1.6.5 La bruja de Agnesi

Definición. Sea una circunferencia de diámetro a tangente al eje OX en el origen, y sea A el punto diametralmente opuesto al origen. Una recta por el origen corta a la circunferencia en C y a la tangente en A en un punto B. El punto P con la abscisa de B y la ordenada de C describe la **bruja de Agnesi**.

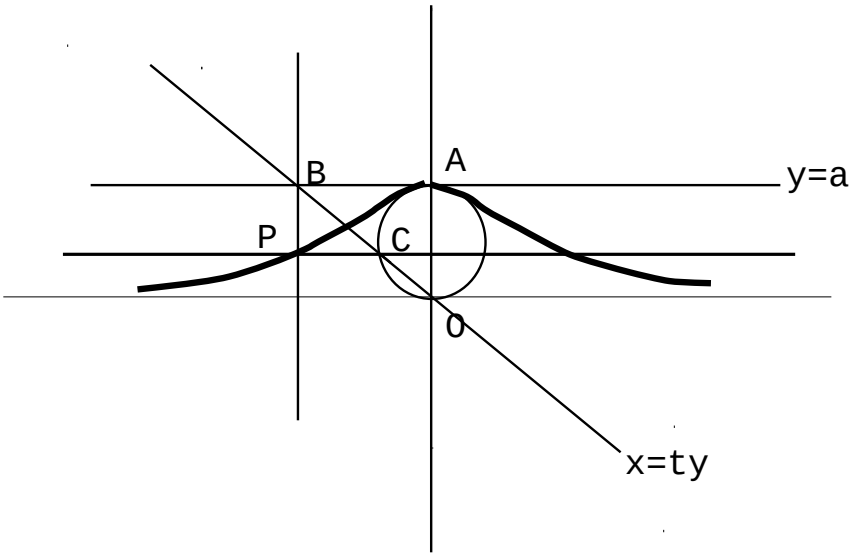


Figura 1.12: Construcción de la bruja de Agnesi: P tiene la abscisa de B y la ordenada de C. Esquema del material complementario original, *La bruja de Agnesi*, p. 1, con los rótulos corregidos y adaptados a la notación del texto. Aquí a es el diámetro de la circunferencia.

Tomando las rectas $x = ty$, los puntos de la curva son $(at, a/(1+t^2))$; al eliminar t se obtiene

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2},$$

una curva regular en todo punto: es la gráfica de una función diferenciable, y para gráficas $\alpha(t) = (t, f(t))$ nunca hay puntos singulares, porque la primera componente de α' vale siempre 1. Es un buen contraejemplo para la impresión de que toda curva clásica tiene picos.

DE DÓNDE VIENE: NO ES UNA BRUJA

Maria Gaetana Agnesi la incluyó en 1748 en el primer libro de cálculo escrito por una mujer, y la llamó *versiera*, del latín *vertere*, girar. Su traductor inglés confundió *versiera* con *avversiera*, que en italiano significa «diablesa», y de ahí «bruja». El nombre se quedó.
Vale la pena saber dónde reaparece: normalizada para que su integral valga 1, la bruja de Agnesi es exactamente la densidad de **Cauchy**, la distribución que sirve de contraejemplo favorito en probabilidad porque no tiene media. Esta construcción geométrica reaparece así como un ejemplo de por qué la ley de los grandes números necesita hipótesis de integrabilidad.

QUÉ DEJA. El método, que es el mismo en las cinco: elegir como parámetro el ángulo o la magnitud que aparece en la definición geométrica, traducir la condición a una ecuación, y despejar. Y una observación que se repite: los puntos singulares no son un accidente del cálculo, sino los instantes en que el punto trazador se detiene. Pero velocidad nula no implica por sí sola una esquina: puede haber una cúspide con recta tangente o solo un fallo del parámetro, como en $(t^3, 0)$. Hay que mirar la imagen local de la curva.

Repaso del capítulo

REPASO INTERCALADO: CURVAS, PRIMERA RONDA

Se contestan **a libro cerrado**, en un folio, y solo después se comprueban. Intentarlo antes de mirar permite distinguir lo que puedes reconstruir de lo que solo reconoces al leer; la comprobación posterior sirve para corregir los errores.
Este es el primer bloque de repaso del libro y, por serlo, no puede mezclar con capítulos anteriores. Los de los capítulos siguientes sí lo hacen, y ahí está buena parte de su valor.
Este bloque tiene tres rondas de dificultad creciente. La primera se hace al terminar el capítulo; la segunda, dos o tres sesiones después; la tercera, al acabar el capítulo de superficies. No se hacen las tres seguidas.

Primera ronda: reconstruir.

1. Enuncia la definición de c.p.r.. Para cada una de las dos condiciones, di qué se rompe si se quita.
2. ¿Qué diferencia hay entre una singularidad esencial y una no esencial? Da un ejemplo de cada una.
3. Escribe las tres ecuaciones de Frenet-Serret sin mirar. Después, di cuáles dos salen de las definiciones y cuál hay que demostrar.
4. ¿Por qué **n** es ortogonal a **t**? La respuesta cabe en una línea y es una regla que se usa cuatro veces en el capítulo.
5. Da la definición de parámetro natural y su caracterización práctica.
6. ¿Cuáles de estos son invariantes geométricos: el vector velocidad, el vector tangente unitario, la recta tangente, el normal principal, la curvatura, la torsión? Para los que

no lo sean, di exactamente cómo cambian.

REPASO INTERCALADO: CURVAS, SEGUNDA RONDA

Segunda ronda: distinguir y aplicar.

1. Una curva tiene curvatura constante. ¿Es una circunferencia? Justifica y da el contraejemplo si procede.
2. Una curva tiene todos sus planos osculadores paralelos. ¿Qué se puede afirmar? ¿Y si todos pasan por un punto fijo?
3. Sin calcular nada: ¿por qué el radio de curvatura de una hélice circular es mayor que el radio del cilindro sobre el que se enrolla?
4. ¿Por qué la torsión tiene signo y la curvatura no? Contesta con la forma canónica local.
5. Con $k(s_0) > 0$ y $\tau(s_0) \neq 0$, explica por qué el osculador es el único plano del haz de la tangente que la curva atraviesa localmente. ¿Dónde se usan esas hipótesis? La palabra clave es «paridad».
6. Se define $\beta(s) = \alpha(s) + f(s)\mathbf{n}(s)$ para cierta función f. Escribe $\dot{\beta}$ en la base del triedro sin volver a mirar Frenet-Serret. ¿En qué casos desaparece la componente tangencial?
7. ¿Qué tienen en común el lugar de los centros de curvatura, la involuta y la curva paralela? Describe el método único que resuelve los tres.

REPASO INTERCALADO: CURVAS, TERCERA RONDA, CON MATERIAL ANTERIOR

Tercera ronda: con material de otras asignaturas.

Esta ronda mezcla a propósito. Cuando todos los ejercicios de una página se resuelven igual, uno nunca practica lo único que se pregunta de verdad, que es decidir qué herramienta toca.

1. El teorema fundamental de las curvas alabeadas no es un resultado de geometría. ¿De qué asignatura es, qué teorema concreto es, y dónde se usa que el sistema sea lineal?
2. Demuestra que el conjunto de puntos singulares de una curva de clase $C^{1)}$, no constante y definida en un intervalo, no puede ser denso, usando continuidad y conexión, sin hablar de sucesiones.
3. Una curva cumple $\tau/k = 3$ en todos sus puntos. ¿Qué puedes afirmar de ella, y cuál es la dirección de su eje?
4. Sea α una c.r.p.n. de curvatura constante k y torsión constante $\tau \neq 0$, con $k > 0$. Se traza $\beta = \alpha + a\mathbf{n}$. ¿Para qué valor de a es β una recta, y qué recta es? Contesta sin hacer ninguna cuenta.
5. Dos curvas comparten todas sus rectas normales principales y tienen el mismo parámetro natural, y no son la misma curva. ¿Qué son, y en qué se diferencian?
6. La matriz de Frenet-Serret es antisimétrica. ¿Qué propiedad del triedro codifica eso? ¿Qué elección adicional hace cero el acoplamiento tangente-binormal y deja solo dos funciones?
7. ¿Por qué la fórmula de Frenet no define el normal principal cuando $k = 0$? Compara

la posibilidad de prolongar el triedro por continuidad en $(t, \operatorname{sen} t, 0)$ y en $(t, t^4, 0)$ cerca de cero. ¿Qué libertad queda al elegir un triedro adaptado a una recta?

CONEXIÓN: LO QUE EL CAPÍTULO 1 DEJA PREPARADO

Antes de pasar a superficies conviene saber qué de todo esto se va a reutilizar, porque no es todo por igual.

Buena parte del trabajo que viene son curvas aisladas en $\mathbb{R}^3$; el resto se reparte entre curvas *dentro* de superficies y superficies *construidas* a partir de curvas. Lo que hay que llevarse del capítulo 1 a los siguientes es, por orden de importancia:

- **El triedro como material de construcción.** Las superficies regladas que vendrán tienen por generatrices las binormales, las normales principales o las rectas polares de una curva. El capítulo 1 no da esas superficies, pero sí todas sus piezas.
- **La técnica de derivar y sustituir por Frenet-Serret.** Es el motor de todos los ejercicios de este capítulo y seguirá siéndolo cuando la curva viva sobre una superficie.
- **El triedro de Frenet como término de comparación.** En la lección 3 aparecerá otro triedro asociado a una curva, el de Darboux, formado por el tangente, la normal intrínseca y la normal de la superficie. Compararlos es exactamente lo que produce la curvatura geodésica y la curvatura normal.
- **La pregunta «¿depende de la parametrización?»**, que en superficies se convierte en «¿depende de la parametrización local?» y es la que separa lo geométrico de lo accidental.

CAPÍTULO 2

Superficies regulares

ANTES DE LEER

Como en el capítulo anterior, se contestan antes de leer nada y fallarlas es lo normal.

1. Para curvas hubo un parámetro privilegiado, el arco. ¿Por qué no puede haber algo análogo para superficies? Piensa en qué habría que conservar y en si eso determina algo.
2. ¿Basta con que una aplicación de un abierto del plano en el espacio sea inyectiva y tenga diferencial inyectiva para que su imagen se parezca a un trozo de plano?
3. La esfera se puede describir con una sola fórmula, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. ¿Se puede cubrir con una sola carta global, homeomorfa a un abierto del plano?
4. ¿Qué significa exactamente que una superficie tenga dos caras, y qué superficie conocida no las tiene?

Las respuestas están, por orden, en las secciones 2.1, 2.1, 2.1.2 y 2.5.

2.1 La definición de superficie

LA PREGUNTA

Una curva se define como una aplicación de un intervalo en el espacio y el mecanismo funciona. Lo natural es copiarlo poniendo un trozo de plano donde estaba el intervalo. ¿Por qué esa copia no basta, y qué es exactamente lo que le pasa a la esfera para que ese mecanismo no se le pueda aplicar?

La idea: la asimetría que lo cambia todo

Conviene empezar por lo que *no* se puede hacer, porque explica toda la arquitectura del capítulo.
Para curvas hubo suerte. Existía un parámetro privilegiado, el arco, y con él se pudo definir una curva regular como una clase de equivalencia de aplicaciones. El truco funcionaba porque cada clase tenía un representante canónico, esencialmente único: dos parametrizaciones naturales de la misma curva se diferencian en una traslación del parámetro y, quizás, un cambio de sentido. Un ser unidimensional que viviera sobre la curva podría fijar un origen y un sentido de recorrido y usar la longitud recorrida con signo como coordenada local.
Para superficies eso se rompe, y se rompe a tres niveles distintos. Merece la pena verlos por separado, porque el tercero es el más profundo y el que anticipa la lección 3.

Primer nivel: el área no determina un representante

Lo natural sería sustituir la longitud por el área y pedir «parametrizaciones por área». Dos de ellas se diferenciarían en un difeomorfismo del plano que conserva áreas, es decir, con valor absoluto del determinante jacobiano igual a 1.

El problema es que hay demasiados. Por ejemplo, todos los difeomorfismos de la forma

$$f(x, y) = \big(x + h(y),\ y\big),$$

con h cualquier función diferenciable de una variable, conservan el área. Su jacobiano es una matriz triangular con unos en la diagonal, luego su determinante vale 1 sea cual sea h. Con una familia tan grande de cambios permitidos, no queda ningún representante esencialmente único.

Segundo nivel: la parametrización natural era una isometría, y aquí no las hay

La conservación de longitudes tiene una lectura geométrica: la parametrización natural es una *isometría local* entre un intervalo abierto de la recta y la curva. Se mide la distancia recorriendo el arco de curva, no tomando el segmento recto entre sus extremos en el espacio.

Para superficies eso es falso salvo en casos muy concretos. En general *no existen isometrías entre abiertos del plano y superficies*. Un trozo de esfera no se puede aplanar sin estirarlo o romperlo, cosa que sabe cualquiera que haya intentado envolver una pelota con papel. Esa imposibilidad no es un defecto técnico: es un hecho geométrico con nombre, y la lección 3 estará dedicada a medirlo.

Tercer nivel: la topología de una superficie es más rica

Una curva regular es, topológicamente, poca cosa. Una superficie puede ser una esfera, un toro, una banda de Möbius. Pretender describir todo eso con *una* aplicación definida en un abierto del plano es esperar demasiado.

LA IDEA: LA SALIDA, Y POR QUÉ ES LA BUENA

De estos tres fracasos sale la definición correcta, que combina las dos aproximaciones posibles en lugar de elegir una.
Por un lado, se pone el énfasis en la superficie como **subconjunto del espacio**, considerado por sí mismo, y no en una aplicación concreta. Eso resuelve el problema de la falta de representante canónico: no hay que elegir ninguno.
Por otro, la idea de «parecerse a un trozo de plano» se formaliza **localmente**, con aplicaciones que sí funcionan bien en pequeño. Y no se pide una, se pide una familia que cubra todo el conjunto.
Un detalle importante sobre qué significa «parecerse». No se habla solo de topología, sino sobre todo de estructura diferencial: tiene que ser posible derivar funciones sobre la superficie igual que se hace en un abierto del plano. Como calcular una derivada parcial es una operación puramente local, basta con que el parecido sea local para que la derivación tenga sentido.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ

La alternativa: copiar la definición de curva tal cual. Es decir, llamar superficie a la imagen de una única aplicación $x : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable, regular y homeomorfa sobre su imagen. Una fórmula, un objeto, igual que con las curvas.
Lo que tenía a favor. La simplicidad. No hay atlas, no hay cambios de carta, no hay que comprobar que nada encaje con nada. Y funciona perfectamente para el plano, el cilindro abierto, el helicoide, el paraboloide y cualquier carta de Monge.
Lo que la hundió. La esfera. Una aplicación así es un homeomorfismo sobre su imagen, luego la esfera sería homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^2$; pero la esfera es compacta y ningún abierto no vacío del plano lo es. Con esa definición la esfera no sería una superficie, ni el toro, ni nada cerrado y acotado. Es decir, quedarían fuera precisamente los ejemplos por los que uno quiere la teoría.
Dónde sigue viva. Como parametrización local, el ladrillo con que se cubre la superficie. La *superficie parametrizada* de la sección siguiente exige menos: suavidad y regularidad, sin pedir siquiera inyectividad. Y en los enunciados aparece constantemente, con la fórmula "dar una superficie parametrizada cuya imagen esté contenida en", que es la manera de pedir un ladrillo sin comprometerse con el edificio.

2.1.1 Superficies parametrizadas

LA PREGUNTA

Antes de saber qué es una superficie conviene saber qué es un trozo de superficie. ¿Cuál es la condición mínima que hay que exigirle a una aplicación de un abierto del plano en el espacio para que su imagen merezca llamarse un trozo de superficie, y no un pliegue, una arista o un punto?

Definición. Una **superficie parametrizada** (s.p.) en $\mathbb{R}^3$ es una aplicación $x : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, con U abierto, tal que:
1. x es de clase $C^{\infty)}$;
2. si $x = x(u, v)$, entonces $\dfrac{\partial x}{\partial u} \times \dfrac{\partial x}{\partial v} \neq 0$ en todos los puntos de U (condición de regularidad,

C.R.).
Si además x es inyectiva, se llama **superficie simple**.

A partir de ahora se escribe

$$\mathbf{X}_1 = \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \mathbf{X}_2 = \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Observación (sobre la notación)**.** Hay una colisión de símbolos que conviene señalar una vez y no volver a mencionar: la superficie se llama x y su primera componente también, de modo que se escribe $x(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$. Es la notación clásica y se conserva. El contexto distingue la aplicación vectorial $x : U \to \mathbb{R}^3$ de su primera componente escalar. Ambas dependen de (u,v); lo que cambia es si el valor es un vector o un número.

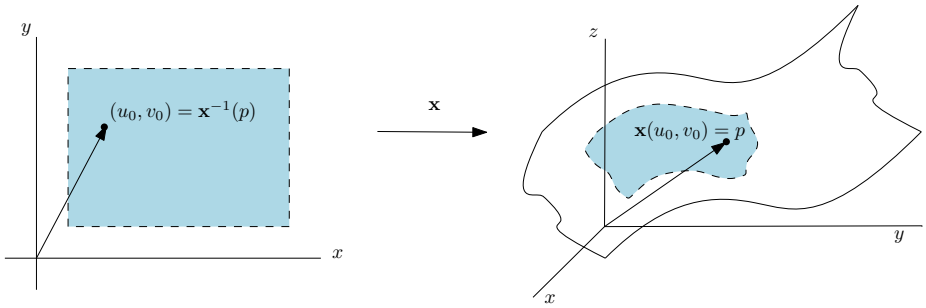


Figura 2.1: Una parametrización lleva un par de coordenadas a un punto del espacio. Los dos números describen la posición sobre la superficie; no son las tres coordenadas cartesianas del punto. Figura del material oficial, lección 2.

LA IDEA: QUÉ COMPRA LA CONDICIÓN DE REGULARIDAD

Es la traducción exacta de la que se pedía a las curvas, subida una dimensión.
Que $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \neq 0$ equivale a que $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ sean linealmente independientes en cada punto, y eso equivale a que la matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

tenga rango máximo, igual a 2, es decir, a que la diferencial Dx sea inyectiva.
Geométricamente: la aproximación lineal conserva dos direcciones independientes. Si los dos vectores fueran paralelos, degeneraría esa aproximación, no necesariamente la imagen. Por ejemplo, $(u,v) \mapsto (u, v^3, 0)$ tiene rango uno cuando $v = 0$, aunque su imagen es todo el plano. La regularidad controla la parametrización.
Merece la pena guardar las tres formulaciones juntas, porque los enunciados usan una u otra sin avisar: producto vectorial no nulo, vectores independientes, jacobiana de rango dos.

Ejemplo (grafos, o cartas de Monge)**.** Sea $f = f(u,v)$ de clase $C^{\infty)}$ en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$. La aplicación

$$x : U \to \mathbb{R}^3, \qquad x(u,v) = \big(u,\ v,\ f(u,v)\big)$$

es una superficie simple, llamada **grafo de** f o **carta de Monge**, y suele escribirse $z = f(x, y)$. Es el ejemplo básico y, como se verá, también el ejemplo universal: toda superficie regular es localmente de esta forma.

Su regularidad se comprueba de un vistazo: $\mathbf{X}_1 = (1, 0, f_u)$, $\mathbf{X}_2 = (0, 1, f_v)$ y

$$\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = \left(-f_u,\ -f_v,\ 1\right) \neq 0$$

siempre, porque la tercera componente vale 1.

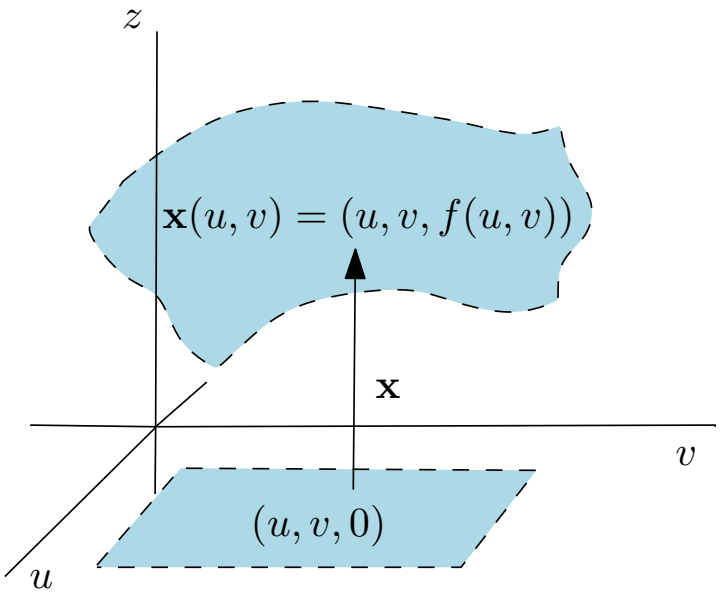


Figura 2.2: En una carta de Monge, la proyección sobre el dominio recupera (u, v) y la función f da la altura. Figura del material oficial, lección 2.

Ejemplo (una superficie simple que no se parece a un trozo de plano)**.** Este contraejemplo es el que obliga a añadir una condición más a la definición, y conviene entenderlo bien.

Sea

$$x : (-1, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad x(u, v) = \left(\frac{3u}{1+u^3},\ \frac{3u^2}{1+u^3},\ v\right),$$

el cilindro sobre el folium de Descartes. Es una superficie simple: es diferenciable, cumple la condición de regularidad y es inyectiva.

Y sin embargo su imagen **no es homeomorfa a un abierto del plano**. El motivo está en la curva de base. Cuando $u = 0$ la curva pasa por el origen, y cuando $u \to +\infty$ vuelve a acercarse al origen tanto como se quiera, sin alcanzarlo nunca. Es decir, el lazo se cierra asintóticamente sobre su propio punto de partida.

La consecuencia es que la aplicación inversa no es continua: hay puntos de la imagen tan próximos como se quiera al origen que provienen de parámetros u enormes, es decir, de parámetros lejanísimos del $u = 0$ que da el origen. Puntos vecinos en la imagen vienen de parámetros que no lo son.

Además, cerca del origen la base tiene tres ramas: las dos que llegan por $u \to 0^-$ y $u \to 0^+$, y la que vuelve por $u \to +\infty$. Al extenderlas en la dirección v, se juntan tres hojas a lo largo del eje vertical. Esa ramificación explica por qué la imagen tampoco es localmente un disco; no se trata solo de haber elegido una mala inversa.

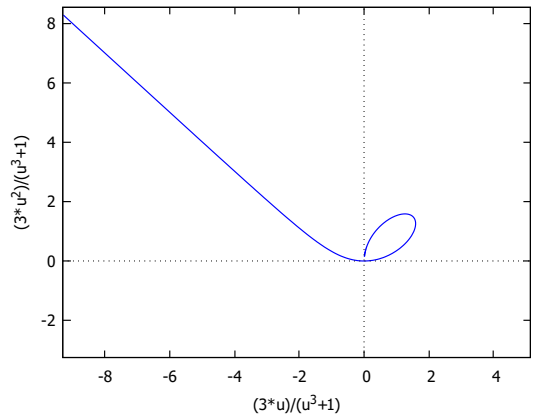


Figura 2.3: Curva de base del cilindro sobre el folium: la rama que vuelve al origen cuando $u \to +\infty$ se acumula junto a las dos ramas correspondientes a $u \to 0$. Extender esta curva verticalmente produce la superficie del ejemplo. Figura del material oficial, lección 2.

EXPLÍCATE. *Antes de seguir: ¿en qué se parece este contraejemplo al de la sección sobre curvas con la misma imagen? Los dos explotan la misma diferencia entre dos conceptos. Nombra los dos conceptos.*

LA IDEA: INYECTIVA NO BASTA, HACE FALTA HOMEOMORFISMO

El ejemplo anterior deja la lección central de la sección. La inyectividad garantiza que existe una inversa; no garantiza que sea continua. Y sin continuidad de la inversa, la imagen puede tener una forma que no se parece en nada a un trozo de plano, por muy suave e inyectiva que sea la parametrización.
Es exactamente el mismo fenómeno que se vio en curvas al distinguir «inyectiva» de «homeomorfismo sobre su imagen», y es la razón de que la definición de superficie regular incluya explícitamente esa condición.
La buena noticia es que, al restringir el *dominio* a un entorno suficientemente pequeño de cada parámetro, sí se obtiene un homeomorfismo sobre la imagen de ese entorno. Esto no impide que otras partes lejanas del dominio se acumulen sobre ella.

LA IDEA: EL TRUCO DE SUBIR UNA DIMENSIÓN

Antes de la cuenta conviene ver el obstáculo y el rodeo, porque el rodeo es reutilizable.
El obstáculo. Se quiere aplicar el teorema de la función inversa, que es la herramienta de siempre para pasar de «la derivada no degenera» a «hay un homeomorfismo local». Pero ese teorema exige una aplicación entre espacios de la *misma* dimensión, y aquí x va de dimensión 2 a dimensión 3. Sobra una dimensión en la llegada.
El rodeo, y la imagen que lo explica. En lugar de buscar otro teorema, se *engorda* la superficie hasta convertirla en un bloque sólido: a cada punto se le permite despegarse un poco en vertical, con un tercer parámetro t. La superficie original queda dentro del bloque como la rebanada $t = 0$. Ahora sí hay una aplicación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, el teorema se aplica al bloque entero, y lo que dice del bloque se lee luego sobre la rebanada. **Esa es toda la demostración: engordar, aplicar el teorema, cortar por la rebanada.**
El único punto que hay que cuidar es que el bloque no degenere, y de eso se encarga la

condición de regularidad: el menor 2×2 que no se anula es exactamente lo que hace que el determinante 3×3 del bloque tampoco se anule.
Este mismo movimiento reaparece en la demostración de que toda superficie regular es localmente un grafo, y en varios argumentos de la lección 4. Conviene guardarlo.

Proposición. Para toda s.p. $x : U \to \mathbb{R}^3$ y todo $(u_0, v_0) \in U$, existe un entorno abierto $V \subseteq U$ de (u_0, v_0) tal que $x|_V : V \to x(V)$ es un homeomorfismo, con la topología inducida por la euclídea de $\mathbb{R}^3$ en $x(V)$.

Paso 1: localizar el menor que no degenera. Sea $(u_0, v_0) \in U$. Por la condición de regularidad, la jacobiana de x en ese punto tiene rango 2, luego alguno de sus menores de orden 2 no se anula; supóngase, sin pérdida de generalidad, que es

$$\left.\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\right|_{(u_0,v_0)} \neq 0.$$

Paso 2: engordar la superficie hasta un bloque (el núcleo de la prueba). El movimiento decisivo es **añadir una dimensión artificial** para poder aplicar el teorema de la función inversa, que necesita una aplicación entre espacios de la misma dimensión. Defínase

$$f : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad f(u, v, t) = x(u, v) + (0, 0, t).$$

Es de clase $C^{\infty)}$, cumple $f(u, v, 0) = x(u, v)$, y su jacobiano en $(u_0, v_0, 0)$ es

$$|J_f|_{(u_0,v_0,0)} = \left.\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right|_{(u_0,v_0,0)} \neq 0,$$

porque desarrollando por la última fila se obtiene justamente el menor no nulo de antes.
Paso 3: aplicar el teorema al bloque. Por el teorema de la función inversa, existen un entorno abierto G de $(u_0, v_0, 0)$ en $U \times \mathbb{R}$ y un entorno abierto H de $x(u_0, v_0)$ en $\mathbb{R}^3$ tales que $f|_G$ es un difeomorfismo entre G y H. Sea $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la proyección $\pi(x, y, z) = (x, y)$ y sea

$$V = \{(u, v) \in U : (u, v, 0) \in G\}.$$

Es abierto, por continuidad de $(u, v) \mapsto (u, v, 0)$, y contiene a (u_0, v_0). Esta elección asegura que la rebanada usada en el paso siguiente queda dentro de G.
Paso 4: cortar por la rebanada $t = 0$. Para todo $(u, v) \in V$ se tiene $x(u, v) = f(u, v, 0)$ con $(u, v, 0) \in G$. La restricción $x|_V$ es inyectiva y su inversa en $x(V)$ es la aplicación continua $\pi \circ (f|_G)^{-1}$. Por tanto es un homeomorfismo sobre su imagen. ■

Qué hizo cada hipótesis, y qué no se ha probado. La regularidad (rango 2) es lo único

que se ha usado, y se ha usado una sola vez, en el paso 1. La diferenciabilidad $C^{\infty)}$ es más de lo necesario: bastaría $C^{1)}$, que es lo que pide el teorema de la función inversa. Y conviene subrayar lo que el enunciado *no* dice: que x sea un homeomorfismo global sobre su imagen. Eso es falso, como muestra el cilindro sobre el folium, y esa es precisamente la razón de que la definición de superficie regular tenga que exigirlo aparte en vez de deducirlo. Tampoco se afirma que $x(V)$ sea abierto en la imagen completa $x(U)$: la rama que regresa en el folium muestra por qué puede no serlo.

2.1.2 Superficies regulares

LA PREGUNTA

Un trozo de superficie no basta: la esfera no cabe en uno solo, igual que la Tierra no cabe en una hoja de papel sin romperse. La solución que se adoptó fue cubrirla con varios trozos y exigir que encajen. ¿Qué hay que exigirle exactamente al encaje, y por qué no vale con que los trozos simplemente se solapen?

Definición. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^3$ con la topología euclídea relativa. Se dice que M es una **superficie regular** (s.r.) si para cada $p \in M$ existen un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ y una aplicación diferenciable $x : U \to \mathbb{R}^3$ de clase $C^{\infty)}$ tales que:

(i) $x(U) \subseteq M$ y es entorno abierto de p en M; es decir, existe un abierto euclídeo $G \subseteq \mathbb{R}^3$ con $p \in G$ y $x(U) = G \cap M$;

(ii) x es homeomorfismo sobre su imagen, con la topología euclídea relativa;

(iii) x es una s.p., y por (ii) una superficie simple.

Una aplicación que cumple (i), (ii) y (iii) se llama **parametrización local** (p.l.) de M en p. Su inversa $x^{-1} : x(U) \to U$ se llama **carta local**, el conjunto $x(U)$ es un **entorno coordenado** y el par $\big(u(p), v(p)\big) = x^{-1}(p)$ son las **coordenadas locales** de p. Si $0 \in U$ y $x(0) = p$, la p.l. está **centrada en** p.

Definición. Un **atlas** de una s.r. M es una familia $\mathcal{A} = \{x_i\}_{i\in I}$ de p.l. de M tales que $M = \bigcup_{i\in I} x_i(U_i)$.

LA IDEA: QUÉ AÑADE CADA UNA DE LAS TRES CONDICIONES

Las tres condiciones no son redundantes y conviene saber contra qué protege cada una.

- **(iii)** es lo de siempre: suavidad y no degeneración. Sin ella la imagen podría tener picos o aplastarse.
- **(ii)** es la que descarta el cilindro sobre el folium del ejemplo (p. 110). Exige que el parecido con el plano sea también topológico y no solo diferencial.
- **(i)** es la más fácil de pasar por alto y la más sutil. Pide que la imagen sea un abierto *de la superficie*, es decir, que la p.l. cubra todo un trozo completo de M alrededor de p. Por ejemplo, si M es la unión de dos planos que se cortan, una carta de uno de ellos cumple (ii) y (iii), pero alrededor de un punto del cruce deja fuera la otra hoja. Su imagen no es un entorno en M.

La palabra que resume la definición entera es **atlas**, y la metáfora geográfica es exacta. La Tierra no cabe en un mapa plano, pero cabe en un libro de mapas: cada página cubre

un trozo, las páginas se solapan, y en la zona de solape hay una regla para pasar de una a otra. Una p.l. es una página, una carta local es la regla que asigna coordenadas, y el cambio de cartas es la instrucción de traducción entre páginas vecinas.

Observación (reparametrizar una p.l.)**.** Si $x : U \to M$ es una p.l. y $f : V \to U$ es un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^2$, entonces $y = x \circ f$ es otra p.l. de M con la misma imagen. A f se le llama **transformación coordenada** o **reparametrización regular**.

La comprobación de la condición de regularidad es la que hay que retener, porque gobierna todo lo que viene después. Por la regla de la cadena,

$$Y_j = \sum_{i=1}^{2} \mathbf{X}_i \frac{\partial u_i}{\partial v_j}, \qquad j = 1, 2,$$

y tomando producto vectorial, con $a_{ij} = \partial u_i / \partial v_j$ y usando que $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 \times \mathbf{X}_2 = 0$ y $\mathbf{X}_2 \times \mathbf{X}_1 = -\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$,

$$Y_1 \times Y_2 = \big(a_{11}\mathbf{X}_1 + a_{21}\mathbf{X}_2\big) \times \big(a_{12}\mathbf{X}_1 + a_{22}\mathbf{X}_2\big) = \big(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\big)\, \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2.$$

El paréntesis es el determinante de la matriz jacobiana $J(f) = (a_{ij})$. Es decir,

$$Y_1 \times Y_2 = \big(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2\big) \det\big(J(f)\big). \tag{2.1}$$

LA IDEA: LA FÓRMULA (2.1) ES LA DEL CAPÍTULO 1, SUBIDA DE DIMENSIÓN

Esta igualdad es a las superficies lo que $\beta' = \alpha' \frac{dt}{dr}$ era a las curvas, y conviene leerla igual: *un cambio de coordenadas reescala el vector normal por un factor no nulo, y no hace nada más*.

Con una diferencia importante. En curvas el factor era $\frac{dt}{dr}$, un número cuyo signo decía si se invertía el sentido de recorrido. Aquí el factor es $\det J(f)$, y su signo dirá si se invierte la *cara* de la superficie. Todo el concepto de orientación de la sección 2.5 sale de ahí.

Consecuencia inmediata: el plano tangente no depende de la p.l., porque $Y_1 \times Y_2$ y $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ son paralelos. El vector normal unitario sí puede cambiar de signo. Es exactamente el reparto que había entre la recta tangente, invariante, y el vector tangente unitario, que cambiaba de signo.

Observación. Si $x : U \to M$ es una p.l. y $V \subseteq U$ es abierto, entonces $x|_V$ también es una p.l.. Se pueden encontrar parametrizaciones locales con dominio tan pequeño como se quiera, y esto se usará sin mencionarlo cada vez que convenga achicar un entorno.

2.1.2.1 Toda superficie regular es localmente un grafo

Proposición. Si M es una s.r. y $p \in M$, existe una p.l. de M en p de una de estas tres formas:

$$x(u,v) = \big(u, v, f(u,v)\big), \qquad x(u,v) = \big(u, f(u,v), v\big), \qquad x(u,v) = \big(f(u,v), u, v\big),$$

para cierta función diferenciable f. Recíprocamente, todo conjunto que sea localmente el grafo de una función diferenciable es una s.r.. En particular, toda carta de Monge es una s.r..

La idea, antes de la cuenta: mirar la superficie desde arriba. La imagen es la del capítulo 1 con una dimensión más. Proyéctese el trozo de superficie sobre uno de los tres planos coordenados, es decir, mírese desde arriba, desde delante o desde un lado. Si la sombra que se ve no se pisa a sí misma — y siempre hay al menos una de las tres direcciones en la que no se pisa, porque el plano tangente no puede ser vertical respecto de los tres ejes a la vez — entonces cada punto de la sombra levanta un único punto de la superficie, y esa altura es la función f del enunciado.

Dicho de otro modo: ser un grafo es poder usar la sombra como sistema de coordenadas. Y la condición de regularidad es exactamente la garantía de que alguna de las tres sombras sirve. Ahí está también la explicación de por qué el enunciado ofrece *tres* formas y no una: la esfera vista desde arriba se pisa en el ecuador, y allí hay que mirarla de lado.

Paso 1 de la ida: elegir la dirección desde la que mirar. Sea $x : W \to M$ una p.l. con $p = x(u_0, v_0)$. Por la condición de regularidad su jacobiana tiene rango 2, luego algún menor de orden 2 no se anula; supóngase que es el formado por las derivadas de x e y.
Paso 2 de la ida: invertir la sombra (el núcleo de la prueba). Sea $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la proyección $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Entonces $\pi \circ x : W \to \mathbb{R}^2$ tiene jacobiano no nulo en (u_0, v_0), que es precisamente ese menor. Por el teorema de la función inversa existen abiertos $V \subseteq W$ con $(u_0, v_0) \in V$ y $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tales que

$$\pi \circ x|_V : V \longrightarrow U$$

es un difeomorfismo, con inversa diferenciable que se escribe $(x, y) \mapsto \big(u(x, y), v(x, y)\big)$.
Paso 3 de la ida: componer al revés y leer la altura. Compóngase ahora en el otro orden:

$$x|_V \circ \big(\pi \circ x|_V\big)^{-1}(x, y) = \big(x,\ y,\ z(u(x, y), v(x, y))\big).$$

Las dos primeras componentes se simplifican a x e y porque, por construcción, $\pi \circ x|_V$ era exactamente la aplicación que devolvía esas dos coordenadas. Llamando $f(x, y) = z\big(u(x, y), v(x, y)\big)$, que es diferenciable por ser composición de diferenciables, se obtiene que $x(V)$ es el grafo de f, y $y(x, y) = \big(x, y, f(x, y)\big)$ es la p.l. buscada. Aquí se usa que la parametrización original es un homeomorfismo: $x(V)$ es abierto en M.
Vuelta: un grafo siempre es una superficie regular, y por una razón barata. Aquí no hace falta ningún teorema: la inversa de un grafo es la propia proyección, que es continua de oficio. Sea M tal que cada punto tiene un entorno $G = x(U)$ con $x(u, v) = \big(u, v, f(u, v)\big)$. La proyección $\pi|_G$ cumple $(\pi|_G \circ x)(u, v) = (u, v)$, luego $\pi|_G$ es la inversa de x, y es continua por ser una proyección: x es homeomorfismo sobre su imagen. Y la condición de regularidad sale del cálculo ya hecho para los grafos,

$$\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = \Big(-\frac{\partial f}{\partial u},\ -\frac{\partial f}{\partial v},\ 1\Big) \neq 0.$$

Luego x es una p.l. y M es una s.r.. ■

Qué hizo cada hipótesis. La ida gasta la regularidad en el paso 1 y no vuelve a usarla; todo lo demás es el teorema de la función inversa y álgebra de composiciones. La vuelta no usa el teorema de la función inversa en absoluto, y por eso es tan corta: en un grafo la inversa

está dada por la proyección, mientras que en el caso general hay que fabricarla. Ese contraste explica por qué los grafos son el caso fácil y por qué conviene reducirse a ellos siempre que el problema sea local.

LA IDEA: QUÉ SIGNIFICA ESTE RESULTADO, Y POR QUÉ ES TAN ÚTIL

Dice que, en pequeño, no hay superficies exóticas: toda superficie regular es la gráfica de una función de dos variables, quizás tras elegir bien cuál de los tres ejes hace de altura.
Es el análogo exacto de «toda curva es localmente una gráfica» del capítulo 1, y tiene el mismo uso práctico: cuando un problema local se atasca, siempre se puede suponer que la superficie es un grafo, que es el caso más fácil de todos.
La necesidad de las tres formas no es un tecnicismo. Una esfera cerca de un punto del ecuador no se puede escribir como $z = f(x, y)$: la proyección identifica puntos a ambos lados del ecuador y el plano tangente es vertical. Hay que usar $x = f(y, z)$ o $y = f(x, z)$, según el punto. Las seis cartas hemisféricas siguientes cubren todos esos casos; no se afirma que sean el atlas con menos cartas.

Ejemplo (la esfera con seis cartas)**.** Sea $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y sea $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$. Las seis aplicaciones

$$x^{\pm}(u, v) = \big(\pm\sqrt{1 - u^2 - v^2},\ u,\ v\big), \quad y^{\pm}(u, v) = \big(u,\ \pm\sqrt{1 - u^2 - v^2},\ v\big),$$
$$z^{\pm}(u, v) = \big(u,\ v,\ \pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}\big),$$

son p.l. cuyas imágenes son los seis hemisferios abiertos, y entre las seis recubren S^2. Cada una es un grafo, luego por la proposición anterior la esfera es una s.r..

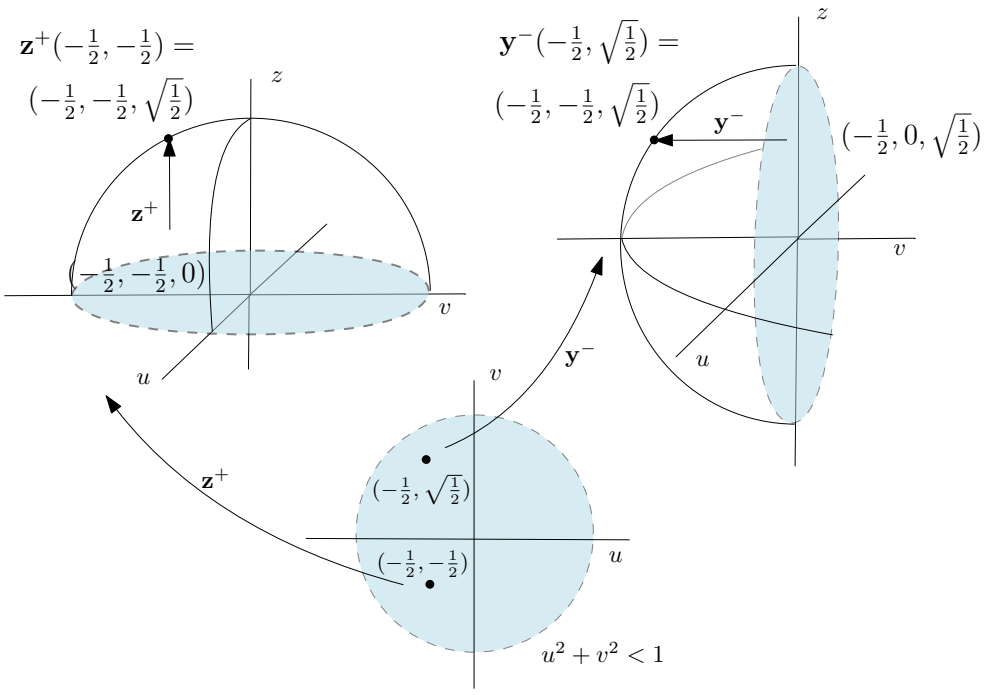


Figura 2.4: Dos cartas hemisféricas describen el mismo punto $(-1/2,-1/2,\sqrt{1/2})$ a partir de sombras distintas. Los puntos con una coordenada cero pertenecen a los planos de proyección; las flechas z^+ e y^- los elevan hasta la esfera. Figura del material oficial, lección 2.

Ejemplo (la esfera con dos cartas: proyecciones estereográficas)**.** Seis cartas son más de las necesarias. Con las proyecciones estereográficas desde el polo norte $N=(0,0,1)$ y desde el polo sur $S=(0,0,-1)$ bastan dos:

$$x(u,v)=\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\frac{2v}{u^2+v^2+1},\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right),\qquad x^{-1}(x,y,z)=\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right),$$

$$y(u,v)=\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\frac{2v}{u^2+v^2+1},\frac{1-u^2-v^2}{u^2+v^2+1}\right),\qquad y^{-1}(x,y,z)=\left(\frac{x}{1+z},\frac{y}{1+z}\right).$$

Se tiene $x(\mathbb{R}^2)=S^2\setminus\{N\}$ e $y(\mathbb{R}^2)=S^2\setminus\{S\}$, dos abiertos que recubren la esfera.

Dos cartas es el mínimo: **no existe una parametrización global de la esfera**. La razón es topológica y no tiene que ver con la habilidad de quien busque la fórmula. Un abierto de $\mathbb{R}^2$ no es compacto y la esfera sí, y un homeomorfismo conserva la compacidad.

CONEXIÓN: COORDENADAS GENERALIZADAS Y ÁNGULOS DE EULER

En mecánica, unas coordenadas generalizadas describen una configuración mediante los parámetros que realmente pueden variar. Una partícula obligada a permanecer sobre una esfera de radio R tiene tres coordenadas cartesianas, pero dos grados de libertad. Con colatitud ϑ y longitud φ se escribe

$$x(\vartheta,\varphi)=R(\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi,\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi,\cos\vartheta).$$

La regla de la cadena da su velocidad:

$$\alpha'=\vartheta' x_\vartheta+\varphi' x_\varphi.$$

Las dos derivadas angulares son las componentes de la velocidad en la base coordenada, no

sus componentes en una base de vectores unitarios. Esta distinción será esencial al calcular energía cinética.
En un polo, $x_\varphi = 0$: variar la longitud no mueve el punto. El defecto está en estas coordenadas; la esfera sigue siendo lisa y una carta hemisférica la describe allí. Es el mismo tipo de dificultad que aparece con los ángulos de Euler de un sólido: cuando dos de los ejes angulares coinciden, dos variaciones de los ángulos describen el mismo movimiento infinitesimal. La orientación del sólido sigue existiendo; hace falta otra descripción local. El rango de una parametrización mide la independencia *de las variaciones que esa parametrización representa*.

CONEXIÓN: TOPOLOGÍA

Los tres argumentos de esta sección que no son cálculo son de Topología, y merece la pena reconocerlos como tales:

- Que no haya parametrización global de la esfera es la conservación de la compacidad por homeomorfismos.
- El folium distingue biyección continua de homeomorfismo; además, sus tres ramas junto al origen producen en el cilindro una ramificación incompatible con un entorno en forma de disco.
- Que la definición hable de «entorno abierto en M» es el uso de la topología relativa, no la de $\mathbb{R}^3$: un trozo de esfera es abierto en la esfera y no lo es en el espacio.

Esta última confusión es la fuente más habitual de errores en los primeros ejercicios del tema. Cuando un enunciado diga «abierto», conviene preguntarse siempre abierto *dónde*.

2.1.3 El criterio práctico y el cambio de cartas

Comprobar las tres condiciones de la definición cada vez sería insoportable. El resultado siguiente es el que se usa de verdad.

Proposición. Sea M una s.r., $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y $x : U \to \mathbb{R}^3$ una s.p. con $x(U) \subseteq M$. Entonces $x(U)$ es abierto en M y, si además x es inyectiva, su inversa es continua y x es una p.l. de M.

La idea: usar el grafo de M como coordenadas. Cerca de $p = x(u_0, v_0)$, escribamos M como un grafo $z = F(X, Y)$ sobre un abierto del plano; las otras dos formas se tratan igual. Por continuidad, podemos restringir x a un entorno del parámetro cuya imagen quede en ese grafo. Sea $h = \pi \circ x$, con $\pi(X, Y, Z) = (X, Y)$. Como $x = (h_1, h_2, F \circ h)$, si Dh tuviera rango menor que dos, también lo tendría Dx. La regularidad garantiza, por tanto, $\det Dh(u_0, v_0) \neq 0$.
La función inversa da abiertos A y B con $h|_A : A \to B$ difeomorfismo. Entonces $x(A)$ es exactamente el grafo de F sobre B, abierto en M. Así, cada punto de $x(U)$ tiene un entorno en M contenido en $x(U)$: $x(U)$ es abierto. El mismo argumento aplicado a cada restricción de x a un abierto de U muestra que x es una aplicación abierta. Si además es inyectiva, su inversa es continua y cumple todas las condiciones de p.l..

LA IDEA: LO QUE ESTE RESULTADO AHORRA

Es la herramienta de trabajo del capítulo, y su lectura práctica es esta:

Si ya se sabe que M es una superficie regular, para comprobar que una aplicación con imagen en M es una parametrización local basta ver que es una superficie simple.

Es decir, la condición topológica, que es la incómoda, se regala. Solo hay que comprobar suavidad, regularidad e inyectividad, que son cálculos.
Y de ahí el método estándar para atacar cualquier ejercicio del tema, que conviene fijar porque es el mismo siempre:
1. primero se prueba que el conjunto es una s.r., casi siempre con el teorema del valor regular de la sección siguiente;
2. después se comprueba que la aplicación candidata es una superficie simple con imagen dentro de ese conjunto;
3. y esta proposición concluye que es una p.l..

Saltarse el primer paso es el error típico: sin saber de antemano que M es regular, la continuidad de la inversa no está garantizada, y el cilindro sobre el folium está ahí para recordarlo.

Ejemplo (el criterio en acción: longitud y latitud en la esfera)**.** Las seis cartas hemisféricas ya han probado que S^2 es una s.r.. Sea

$$x(\theta,\varphi) = \big(\cos\varphi\cos\theta,\ \cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \mathrm{sen}\,\varphi\big), \qquad (\theta,\varphi)\in(0,2\pi)\times\big(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\big),$$

con θ la longitud y φ la latitud. Los tres pasos del método:
1. *La imagen está en la esfera:* la suma de los cuadrados es $\cos^2\varphi\,(\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\,\theta)+\mathrm{sen}^2\,\varphi=1$.
2. *Es una superficie simple.* Es diferenciable; derivando, $x_\theta\times x_\varphi=\cos\varphi\ x(\theta,\varphi)$, de norma $\cos\varphi>0$ porque la latitud no llega a $\pm\pi/2$. Y es inyectiva: la tercera coordenada, $\mathrm{sen}\,\varphi$, determina φ en $(-\pi/2,\pi/2)$, y entonces, como $\cos\varphi>0$, las dos primeras determinan $(\cos\theta,\mathrm{sen}\,\theta)$ y con ello θ en $(0,2\pi)$.
3. *El criterio concluye* que x es una p.l. de la esfera. Su imagen es la esfera menos el semimeridiano cerrado $\theta=0$, que va de polo a polo.

Lo que se ha ahorrado es probar a mano que la aplicación que devuelve longitud y latitud a partir del punto es continua: con arcosenos y arcotangentes por tramos se puede, pero es largo y no enseña nada. Y la fórmula del producto vectorial dice dónde no se puede alargar la carta: en los polos, $\cos\varphi=0$ y la longitud deja de mover el punto, que es el defecto de estas coordenadas que señalaba la caja sobre coordenadas generalizadas.

Teorema (cambio de cartas)**.** Sea M una s.r. y sean $x:U\to M$ e $y:V\to M$ dos p.l. con $G=x(U)\cap y(V)\neq\emptyset$. Entonces

$$h=x^{-1}\circ y|_{y^{-1}(G)}:y^{-1}(G)\longrightarrow x^{-1}(G)$$

es un difeomorfismo.

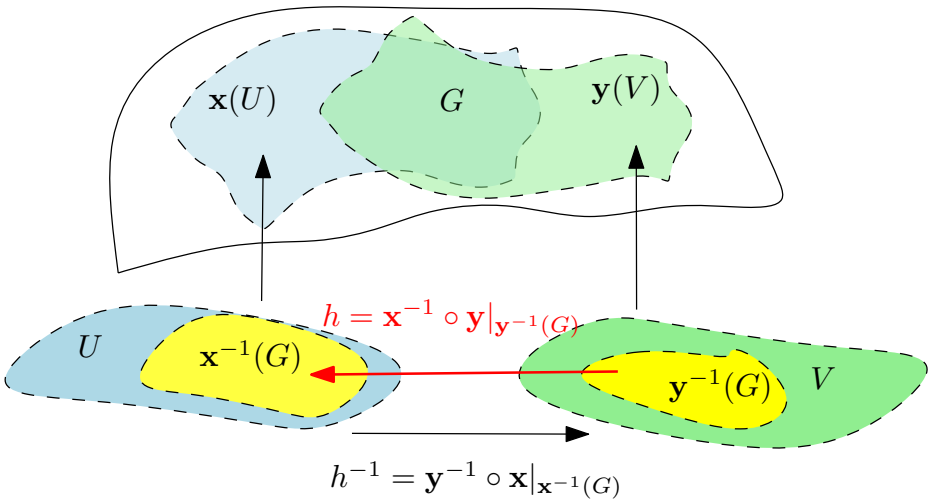


Figura 2.5: El solape G es una misma región de la superficie con dos descripciones. Para pasar de coordenadas de y a coordenadas de x se sube mediante y y se baja mediante x^{-1}: $h = x^{-1} \circ y$. Figura del material oficial, lección 2.

LA IDEA: POR QUÉ ESTE TEOREMA ES EL QUE HACE POSIBLE TODA LA ASIGNATURA

Sin él, nada de lo que viene tendría sentido.
Todo lo que se define de aquí en adelante se define *en coordenadas*: los coeficientes métricos, los símbolos de Christoffel, las curvaturas. Si al cambiar de carta las fórmulas se rompieran, esas definiciones dependerían de la página del atlas que uno hubiera abierto, y no serían propiedades de la superficie.
Que el cambio de cartas sea un difeomorfismo es lo que garantiza que se pueden derivar las fórmulas de una carta a otra y comparar los resultados. Es la versión para superficies de la pregunta «¿depende de la parametrización?» del capítulo 1, y la respuesta es que el cambio siempre es todo lo bueno que hace falta.

La idea, antes de la cuenta: el obstáculo y cómo se sortea. La aplicación $h = x^{-1} \circ y$ es composición de dos, y de las dos solo y es diferenciable de entrada. El problema es x^{-1}: está definida sobre $x(U)$, que no es un abierto de $\mathbb{R}^3$ sino un trozo de superficie, donde aún no hemos definido la diferenciabilidad.

El arreglo consiste en **extender x^{-1} a un abierto del espacio**, y la herramienta para hacerlo ya está construida unas páginas atrás: la proposición (p. 114) probó que, cerca de cada punto, proyectar la superficie sobre el plano coordenado adecuado es un difeomorfismo. Con eso, x^{-1} deja de ser una aplicación definida sobre una superficie y pasa a ser, localmente, «proyectar y deshacer la proyección», dos cosas diferenciables sobre abiertos de espacios euclídeos. A partir de ahí solo hace falta la regla de la cadena.

Paso 1: h es homeomorfismo, y eso es gratis. Las dos parametrizaciones locales son homeomorfismos sobre su imagen, luego $h = x^{-1} \circ y$ lo es sobre la suya, por composición. Lo único que falta demostrar es la diferenciabilidad, en los dos sentidos.
Paso 2: extender x^{-1} a un abierto de $\mathbb{R}^3$ (el núcleo de la prueba). Sea $q_0 \in y^{-1}(G)$ y sea $p = y(q_0)$. Por la demostración de la proposición (p. 114) existe un entorno V de

$x^{-1}(p)$ tal que

$$\pi \circ x|_V : V \longrightarrow \pi\big(x(V)\big)$$

es un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^2$, donde π es la proyección sobre el plano coordenado que en ese punto sirve de sombra. Se define entonces

$$f = \big(\pi \circ x|_V\big)^{-1} \circ \pi,$$

que está definida y es diferenciable en el *abierto de* $\mathbb{R}^3$ $W = \pi^{-1}\big(\pi(x(V))\big)$, por ser composición de una proyección con un difeomorfismo. Y sobre los puntos de la superficie que caen en $W \cap x(V)$ coincide con x^{-1}: si $q = x(u_1, u_2)$ con $(u_1, u_2) \in V$, entonces $\pi(q) = (\pi \circ x)(u_1, u_2)$ y deshacer esa aplicación devuelve (u_1, u_2), que es justamente $x^{-1}(q)$.

Paso 3: encajar y dentro de ese abierto y componer. Como y es continua, hay un entorno $V_1 \subseteq y^{-1}(G)$ de q_0 con $y(V_1) \subseteq W \cap x(V)$. Sobre V_1 se tiene entonces

$$h = x^{-1} \circ y = f \circ y,$$

composición de dos aplicaciones diferenciables entre abiertos de espacios euclídeos. Luego h es diferenciable en q_0, que era arbitrario.

Paso 4: la vuelta, que es la misma cuenta con los papeles cambiados. Lo único que cambia es cuál de las dos cartas se extiende: se repite el paso 2 con y en lugar de x, obteniendo una extensión diferenciable de y^{-1}, y el paso 3 con x en lugar de y. Sale que $h^{-1} = y^{-1} \circ x$ es diferenciable. Las dos lo son y una es la inversa de la otra: h es un difeomorfismo. ■

Qué hizo cada hipótesis. La regularidad se gasta entera en el paso 2, dentro de la proposición (p. 114): es lo que garantiza que alguna de las tres sombras sirva. Que M sea superficie *regular* y no solo la imagen de una superficie simple es lo que da el paso 1, la continuidad de las inversas; y sin esa continuidad ni siquiera se puede empezar, porque el paso 3 necesita meter la imagen de y dentro de un abierto de la superficie. El cilindro sobre el folium del ejemplo (p. 110) es la superficie simple cuya inversa no es continua, y por eso la definición de superficie regular exige esa condición aparte.

Ejemplo (un cambio de cartas hecho a mano: las dos proyecciones estereográficas)**.** El teorema dice que el cambio de cartas es un difeomorfismo, pero no dice qué aspecto tiene. En la esfera se puede calcular entero. Las dos cartas del ejemplo de las proyecciones estereográficas, x desde el polo norte e y desde el polo sur, se solapan en la esfera menos los dos polos. Para pasar de las coordenadas de x a las de y se sube con x y se baja con y^{-1}. Escribiendo $q = u^2 + v^2$, el punto $x(u, v)$ tiene tercera coordenada $z = (q-1)/(q+1)$, luego $1 + z = 2q/(1+q)$, y

$$y^{-1}\big(x(u,v)\big) = \left(\frac{2u/(1+q)}{2q/(1+q)}, \frac{2v/(1+q)}{2q/(1+q)}\right) = \frac{(u,v)}{u^2+v^2}, \qquad (u,v) \neq (0,0).$$

Es la **inversión** respecto de la circunferencia unidad: conserva la dirección del punto y cambia su distancia ρ al origen por $1/\rho$. Es diferenciable fuera del origen y es su propia inversa, así que es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ en sí mismo, como garantizaba el teorema; el cambio en sentido contrario, $x^{-1} \circ y$, es la misma aplicación. Con números: el punto $\left(\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$ de la

esfera tiene coordenadas $(2,0)$ en la carta del polo norte y $\left(\frac{1}{2},0\right)$ en la del polo sur.

Su determinante jacobiano vale

$$\det J = -\frac{1}{(u^2+v^2)^2} < 0,$$

y el signo tiene lectura geométrica. Derivando las dos cartas se obtiene

$$\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = -\frac{4}{(1+q)^2}\, x(u,v) \quad \text{(polo norte)}, \qquad Y_1 \times Y_2 = +\frac{4}{(1+q)^2}\, y(u,v) \quad \text{(polo sur)}.$$

Como el punto de la esfera unidad es su propio vector normal hacia fuera, la primera carta orienta la esfera hacia dentro y la segunda hacia fuera: el jacobiano negativo es exactamente eso. La sección 2.5 explica qué hacer con ello.

Diferenciar aplicaciones desde una superficie y hacia ella. Esta es la consecuencia del cambio de cartas que cierra la sección. Sea $G \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Para $f : M \to G$, se dice que f es diferenciable en p si $f \circ x$ es de clase $C^{\infty)}$ cerca de $x^{-1}(p)$, para una p.l. x en p. Para $g : G \to M$, se pide que, cerca de $q \in G$, su imagen quede en una carta $x(U)$ y $x^{-1} \circ g$ sea de clase $C^{\infty)}$. En ambos casos, ser diferenciable significa serlo en todos los puntos.

Por qué no depende de la carta. Al sustituir x por otra parametrización y, la expresión de f pasa a $f \circ y = (f \circ x) \circ (x^{-1} \circ y)$; la de g pasa a $y^{-1} \circ g = (y^{-1} \circ x) \circ (x^{-1} \circ g)$, en los entornos adecuados. Los cambios de cartas son difeomorfismos, así que ambas composiciones siguen siendo diferenciables. También son continuas: localmente se recuperan f y g componiendo sus expresiones continuas con x^{-1} o con x, respectivamente.

Una p.l. es un difeomorfismo sobre su imagen. Con estas definiciones, tanto $x : U \to x(U)$ como $x^{-1} : x(U) \to U$ son diferenciables: sus expresiones en la propia carta son la identidad de U. No era una hipótesis adicional de la definición de superficie; acaba de deducirse.

2.2 Construcción de superficies de nivel

LA PREGUNTA

En un mapa de montaña, cada curva de nivel une los puntos que están a la misma altura, y mirando cómo se apretan se adivina la pendiente sin haber estado allí. En un mapa del tiempo, las isobaras hacen lo mismo con la presión. Es la manera más antigua de describir una forma: decir qué cantidad se mantiene constante sobre ella. ¿Cuándo el conjunto de puntos donde una cantidad vale lo mismo es de verdad una superficie lisa, y qué tiene que fallar para que aparezca una punta o un cruce?

Hasta ahora, para probar que un conjunto es una s.r. hacía falta exhibir un atlas. Esta sección da el atajo que se usa en la mayoría de los ejercicios: reconocer la superficie como el conjunto donde una función vale una constante.

Definición. Sean $G \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto y $f : G \to \mathbb{R}$ diferenciable. Un punto $p \in G$ es **punto crítico** de f si $(\nabla f)(p) = 0$, y su imagen $f(p)$ es un **valor crítico**. Un valor $c \in f(G)$ que no es crítico se llama **valor regular**.

LA IDEA: CUIDADO CON LA DEFINICIÓN DE VALOR REGULAR

Hay aquí una asimetría que se cuela con muchísima facilidad y conviene fijar.
Un *punto* es crítico o no según lo que le pase a él solo. Un *valor* c es regular cuando **ningún** punto de todo el conjunto de nivel $f^{-1}(c)$ es crítico. Basta un solo punto crítico en ese nivel para estropearlo entero. Y nótese lo que *no* se pide: que ∇f no se anule nunca. Puede anularse cuanto quiera fuera del nivel c, y de hecho suele hacerlo.

Teorema (del valor regular)**.** Sean $G \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto y $f : G \to \mathbb{R}$ diferenciable. Si $c \in \mathbb{R}$ es un valor regular de f, entonces cada componente conexa del conjunto de nivel $f^{-1}(c) = \{p \in G : f(p) = c\}$ es una s.r., llamada **superficie de nivel** de f.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: EL GRADIENTE PROHÍBE QUE EL NIVEL SE PLIEGUE

Vuélvase al mapa de montaña de la pregunta. Una curva de nivel solo puede dejar de ser lisa donde el gradiente se anula: en una cima, en un collado, en el fondo de un valle. Ahí el nivel puede reducirse a un punto o cruzarse consigo mismo en forma de aspa. Y *aplanarse* es, dicho con fórmulas, que el gradiente se anule.
Esa es toda la idea del teorema, y la imagen predice el enunciado: pedir que c sea un valor regular es pedir que en ninguna parte de ese nivel el terreno esté plano; y si en todo el nivel hay pendiente, en todo el nivel se puede despejar una coordenada en función de las otras dos, que es ser un grafo, que ya sabemos que es ser una superficie regular.
El mecanismo, en una frase: gradiente no nulo ⇒ se puede despejar ⇒ es un grafo ⇒ es superficie. La herramienta que hace el «se puede despejar» es el teorema de la función implícita, y la que hace el último paso es la proposición anterior. El teorema no aporta nada más que encadenar esas dos.
Y conviene desmontar antes una lectura falsa. Se tiende a leer el enunciado como si dijera «los conjuntos de nivel son las superficies», y no lo dice: dice una implicación, y nada en el sentido contrario. Quien la invierta concluirá cosas falsas, y la observación que sigue a la demostración lo desarrolla con un contraejemplo de una línea.

Paso 1: elegir la coordenada que se va a despejar. Sea $p = (x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(c)$. Como c es valor regular,

$$(\nabla f)_p = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_p, \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_p \right) \neq 0,$$

luego alguna parcial no se anula; supóngase que es $\left(\partial f/\partial z\right)_p \neq 0$.
Paso 2: despejarla con el teorema de la función implícita (el núcleo de la prueba). El teorema de la función implícita da entonces un entorno abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ de (x_0, y_0), un entorno abierto $V \subseteq \mathbb{R}$ de z_0 y una función diferenciable $g : U \to V$ con $g(x_0, y_0) = z_0$ tales que, para $(x, y) \in U$ y $z \in V$,

$$f(x, y, z) = c \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = g(x, y).$$

Es decir, cerca de p el conjunto de nivel *es* un grafo.

Paso 3: comprobar que ese grafo es una parametrización local. Sea $x : U \to \mathbb{R}^3$ dada por $x(x,y) = \big(x, y, g(x,y)\big)$. Ya se sabe que es una superficie simple. Su imagen está en $f^{-1}(c)$ y es abierta en él, porque $x(U) = f^{-1}(c) \cap (U \times V)$. Y es homeomorfismo sobre su imagen, porque su inversa coincide con la proyección $\pi(x,y,z) = (x,y)$ restringida, que es continua. Tomando U como un disco suficientemente pequeño, $x(U)$ es conexo y queda en una sola componente del nivel. Luego x es una p.l. de la componente conexa de $f^{-1}(c)$ que contiene a p, y como p era arbitrario se concluye. ■

Qué hizo cada hipótesis. La hipótesis de valor regular se gasta entera en el paso 1, y se gasta *en cada punto del nivel*: por eso no basta con que el gradiente no se anule en un punto, sino en todos los del nivel. Si se debilita a «el gradiente no se anula en p», lo que se obtiene es que el nivel es una superficie *cerca de* p, que es un enunciado más débil y a menudo suficiente. La conexión aparece solo en la conclusión, para poder hablar de componentes: el nivel entero puede tener varios trozos separados, como ocurre con el hiperboloide de dos hojas, y cada uno es una superficie por su cuenta.

Observación (el teorema no es una caracterización)**.** Esto hay que subrayarlo porque es el error de razonamiento más común del tema. El teorema dice que si las hipótesis se cumplen, el conjunto de nivel es regular. **No dice nada** cuando no se cumplen.

Si c resulta ser valor crítico, el conjunto de nivel puede ser perfectamente una superficie regular. El ejemplo más limpio es $f(x,y,z) = z^2$ con $c = 0$: el gradiente $(0,0,2z)$ se anula en todo el nivel $z = 0$, así que 0 es valor crítico, y sin embargo $f^{-1}(0)$ es el plano $z = 0$, que es una s.r. de manual.

Conclusión operativa: del fallo de las hipótesis no se deduce nada. Para probar que algo *no* es superficie regular hay que dar otro argumento, por ejemplo el topológico del vértice del cono o uno que descarte un plano tangente.

EXPLÍCATE. *Reformula con tus palabras la diferencia entre «c es valor crítico» y «el nivel c no es una superficie regular». Si no distingues las dos frases, el ejemplo de z^2 te dirá por qué importa.*

Ejemplo (los cuatro de siempre)**.** Merece la pena tener estos cuatro resueltos, porque son la base de casi todos los ejercicios.

1. **Plano.** $f(x,y,z) = ax + by + cz + d$ con $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Aquí $\nabla f = (a,b,c)$ no se anula nunca, luego $f^{-1}(0)$ es una s.r.: el plano de vector característico (a,b,c).
2. **Esfera.** $f(x,y,z) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 - r^2$ con $r > 0$. Se tiene $\nabla f = \big(2(x-x_0), 2(y-y_0), 2(z-z_0)\big)$, que solo se anula en el centro (x_0, y_0, z_0), y ese punto *no* está en $f^{-1}(0)$ porque allí f vale $-r^2 \neq 0$. Luego 0 es valor regular y la esfera es una s.r..
3. **Cilindro.** $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - r^2$ con $r > 0$. El gradiente $(2x, 2y, 0)$ se anula en todo el eje OZ, que no corta a $f^{-1}(0)$. Luego el cilindro es una s.r..
4. **Silla de montar.** $f(x,y,z) = z - xy$. El gradiente $(-y, -x, 1)$ no se anula nunca porque su tercera componente vale 1. Luego el paraboloide hiperbólico $z = xy$ es una s.r..

LA IDEA: EL PATRÓN QUE SE REPITE EN TODOS

En el plano y en la silla el gradiente no se anula en ningún punto del espacio, y ahí no hay nada que discutir. Los casos que enseñan algo son los otros dos, la esfera y el cilindro, donde el gradiente sí se anula en algún sitio y hay que ir a mirar dónde. En

los dos el argumento tiene la misma forma, y conviene automatizarla:
1. se calcula ∇f;
2. se resuelve dónde se anula, que suele ser un punto, una recta o una circunferencia;
3. se comprueba que ese conjunto no toca el nivel que interesa, casi siempre evaluando f en él.

El paso tres es el que se olvida, y es el único que de verdad usa la hipótesis. En el toro, por ejemplo, el gradiente se anula en la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, que es la circunferencia central del tubo, el «alma» del toro. Esa circunferencia no toca la superficie, y la forma de comprobarlo es evaluar: en sus puntos la función vale $-r^2 \neq 0$. Sin esa comprobación el argumento no vale nada.

Conexión: frentes de onda y velocidades compatibles con una ligadura

Para una onda plana, la fase es $\Phi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$. A tiempo fijo, los puntos de fase constante forman un plano perpendicular a $\mathbf{k}$. El teorema del valor regular permite hacer la misma lectura para una fase espacial $F(\mathbf{r})$: donde $\nabla F \neq 0$, el frente $F = c$ es una superficie lisa.
Si una curva $\alpha(\tau)$ permanece en ese frente fijo, derivar $F(\alpha(\tau)) = c$ da

$$\nabla F(\alpha(\tau)) \cdot \alpha'(\tau) = 0.$$

Así se reconoce el plano tangente como $\ker dF_p$: contiene las velocidades compatibles, a primer orden, con mantener constante la fase. Es la misma cuenta que se hace al derivar una ligadura mecánica $F(\mathbf{r}) = c$.
Se ha fijado el tiempo del frente. Si se sigue un punto de un frente que se mueve, la condición es $\partial_t \Phi + \nabla_{\mathbf{r}} \Phi \cdot \mathbf{r}' = 0$; la velocidad ya no tiene por qué ser tangente al frente instantáneo. Tampoco basta pedir el mismo valor de $\cos \Phi$ para fijar la fase: el coseno no es inyectivo.

Conexión: Diferenciación de Funciones de Varias Variables

El teorema del valor regular es el teorema de la función implícita, sin más. Y la proposición de que toda s.r. es localmente un grafo era el teorema de la función inversa. Las dos herramientas centrales de aquella asignatura son, literalmente, las dos formas de construir superficies de esta.
Esto no es casualidad, y la simetría merece guardarse:
- **Función inversa**: dada una parametrización, se obtiene una ecuación.
- **Función implícita**: dada una ecuación, se obtiene una parametrización.

Una superficie se puede describir de las dos maneras, y el trabajo técnico de la lección consiste en poder pasar de una a otra cuando conviene.

El camino que no se tomó

La alternativa: definir toda superficie como un conjunto de nivel. En vez de atlas, pedir que $M = f^{-1}(c)$ para alguna $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable con c valor regular.
Lo que tenía a favor. Muchísimo, y por eso la tentación es real. No hace falta ningún atlas ni ningún cambio de carta. El vector normal sale gratis, $\mathbf{N} = \nabla f / |\nabla f|$. La orientabilidad sale gratis, porque ese campo está definido en toda la superficie de una vez. Y casi todos los ejemplos que uno escribe llegan ya en esa forma.
Lo que la hundió. Que solo produce superficies orientables, justamente por ese campo normal global. Con esa definición el interior de la banda de Möbius, sin su borde, no sería una superficie. La botella de Klein también es no orientable, pero ya queda fuera del marco de este curso: no puede realizarse como superficie regular de $\mathbb{R}^3$ sin autointersecciones. Una definición que deja

fuera los ejemplos más interesantes de la teoría no puede ser la definición.
Dónde sigue viva. Localmente es equivalente: toda superficie regular es, cerca de cada uno de sus puntos, un conjunto de nivel, y de hecho una carta de Monge. Lo que falla es el paso de lo local a lo global, que es exactamente la distinción que este capítulo está construyendo. Y como herramienta de trabajo el teorema del valor regular es insustituible: es la manera más barata que existe de probar que algo es una superficie.

Ejercicios de esta sección

Ejercicio 2.1. *Una familia con un caso degenerado* [H2.12]

Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera

$$M_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = z^2 + a\}.$$

Probar que M_a es una s.r. si y solo si $a \neq 0$. Decir, justificadamente, qué superficie, regular o no, es M_a para cada valor de a.

Resolución. Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, de modo que $M_a = f^{-1}(a)$. Se tiene

$$\nabla f = (2x,\ 2y,\ -2z),$$

que se anula únicamente en el origen. Y $f(0, 0, 0) = 0$.

Caso $a \neq 0$. El origen no pertenece a M_a, porque allí f vale $0 \neq a$. Luego ningún punto del nivel es crítico, a es valor regular y por el teorema del valor regular cada componente conexa de M_a es una s.r..

Caso $a = 0$. Ahora el origen sí está en M_0, luego 0 es valor crítico y el teorema no se aplica. Como se advirtió, de ahí no se deduce nada: hay que probar directamente que M_0 no es regular.

El conjunto M_0 es el cono $x^2 + y^2 = z^2$. Sea V un entorno conexo del origen en M_0. Entonces $V \setminus \{0\}$ es disconexo: los conjuntos $V \cap \{z > 0\}$ y $V \cap \{z < 0\}$ son abiertos en $V \setminus \{0\}$, disjuntos, no vacíos porque V es entorno del origen, y lo recubren.

Si M_0 fuera una s.r., existiría un homeomorfismo de un entorno del origen sobre un abierto del plano. Tomando dentro de ese abierto un disco centrado en la imagen del origen, su preimagen sería un entorno del origen en M_0 homeomorfo a un disco. Pero un disco menos su centro es conexo, y acabamos de ver que el entorno menos el origen no lo es. Contradicción. Luego M_0 no es una s.r.. ■

Identificación de las tres superficies.

- Si $a > 0$: $x^2 + y^2 - z^2 = a$ es un **hiperboloide de una hoja**, conexo.
- Si $a = 0$: es el **cono** $x^2 + y^2 = z^2$, que no es una s.r.. Quitando el vértice, cada una de sus dos napas sí lo es.
- Si $a < 0$: escribiendo $a = -c^2$ queda $z^2 - x^2 - y^2 = c^2$, un **hiperboloide de dos hojas**, con dos componentes conexas, cada una de ellas una s.r..

La idea: la familia entera, vista de golpe

Este ejercicio es mejor de lo que parece porque contiene los tres casos posibles de una transición, y conviene verla como una película.
Imagina a decreciendo desde un valor positivo. Al principio hay un hiperboloide de una hoja, con una «cintura» circular de radio $\sqrt{a}$ en el plano $z = 0$. Al bajar a, esa cintura se estrecha. Cuando $a = 0$ la cintura se cierra en un punto: las dos mitades se tocan y aparece el vértice del cono. Y al seguir bajando, la superficie se rompe en dos piezas separadas.
El valor crítico es exactamente el instante en que la topología cambia, y por eso es el único donde la regularidad falla. Esa correspondencia entre valores críticos y cambios de topología no es una casualidad de este ejemplo; es el núcleo de una teoría entera, la teoría de Morse, que queda fuera de este curso pero que conviene saber que existe.

Qué deja. El esquema completo para atacar cualquier «probar que esto es una superficie regular»: gradiente, dónde se anula, y si eso corta al nivel. Y, sobre todo, el hábito de no confundir «no se cumplen las hipótesis» con «la conclusión es falsa». Para probar que algo *no* es superficie regular siempre hace falta un argumento aparte, que en la familia consiste en quitar el vértice y contar componentes conexas.

2.3 Dos familias de superficies destacadas: superficies de revolución y regladas

La pregunta

Un alfarero hace un jarrón girando un perfil en el torno; un albañil levanta una torre de refrigeración curvada con vigas perfectamente rectas. Son las dos maneras que ha tenido la gente de fabricar superficies desde mucho antes de que existiera ninguna teoría, y entre las dos producen casi todos los objetos del catálogo clásico. ¿Qué tienen esos dos procedimientos para ser tan fértiles, y qué comparten un jarrón y una torre de vigas que no comparta cualquier otra superficie?

Estas dos familias no aparecen por gusto: son las que salen una y otra vez, y casi siempre construidas a partir de una curva del capítulo 1.

2.3.1 Superficies de revolución

Definición. Dada una curva C contenida en un plano Π y una recta r de ese mismo plano, la **superficie de revolución** de **generatriz** C y **eje** r es el lugar geométrico obtenido al girar C alrededor de r. Las distintas posiciones que ocupa la generatriz al girar se llaman **meridianos**, y las circunferencias que describe cada punto de la generatriz se llaman **paralelos**.

Sin pérdida de generalidad se toma Π igual al plano $y = 0$, el eje igual al eje OZ, y la generatriz como imagen de una c.p.r. plana sin autointersecciones $\alpha(t) = \big(x(t), 0, z(t)\big)$. Cualquier otra situación se reduce a esta con un movimiento rígido. Entonces la superficie es la imagen de

$$x : (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad x(t,\theta) = \big(x(t)\cos\theta,\ x(t)\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z(t)\big),$$

La fórmula se lee sola: la tercera coordenada no depende de θ, porque girar no cambia la altura, y las dos primeras son las de un punto del plano a distancia $x(t)$ del eje girado un ángulo θ. Es decir, t dice *en qué punto de la generatriz* se está y θ dice *cuánto se ha girado*; los meridianos son las curvas de θ constante y los paralelos las de t constante.

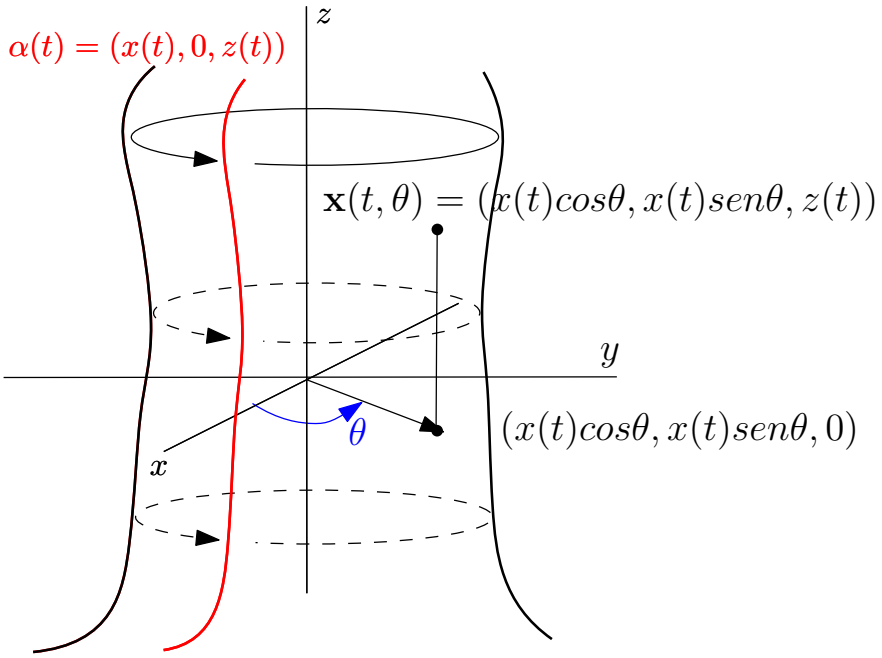


Figura 2.6: El perfil rojo gira alrededor del eje z. Fijar θ da un meridiano; fijar t da un paralelo. Figura del material oficial, lección 2.

Derivando respecto de cada parámetro,

$$\mathbf{X}_1 = \big(x'\cos\theta,\ x'\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z'\big), \qquad \mathbf{X}_2 = \big(-x\,\mathrm{sen}\,\theta,\ x\cos\theta,\ 0\big),$$

donde $\mathbf{X}_1$ es la velocidad con la que se recorre el meridiano y $\mathbf{X}_2$ la velocidad con la que se recorre el paralelo, que es horizontal porque el paralelo no sube. Su producto vectorial es

$$\big(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2\big)(t,\theta) = \big(-x(t)z'(t)\cos\theta,\ -x(t)z'(t)\,\mathrm{sen}\,\theta,\ x(t)x'(t)\big), \tag{2.2}$$

donde la tercera componente sale de $x'x\cos^2\theta + x'x\,\mathrm{sen}^2\theta$, que es la cancelación del ángulo que reaparecerá en todas las cuentas de revolución.

LA IDEA: LA CONDICIÓN $x(t) \neq 0$ Y QUÉ SIGNIFICA

De (2.2) se ve que las tres componentes llevan el factor $x(t)$. Sacarlo fuera deja

$$\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = x(t)\big(-z'\cos\theta,\ -z'\,\mathrm{sen}\,\theta,\ x'\big),$$

y el vector del paréntesis no se anula nunca, porque $(x', z') \neq (0,0)$ por la condición de regularidad de la generatriz. Así que

$$x \text{ es una s.p.} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x(t) \neq 0.$$

Y $x(t) = 0$ significa que la generatriz corta al eje de giro. Geométricamente está clarísimo: un punto de la generatriz situado sobre el eje se queda quieto al girar, y por tanto no genera un paralelo sino un único punto. La fórmula pierde regularidad allí; eso no obliga a que la superficie tenga un pico.
Salvo aviso explícito, se conviene $x(t) > 0$.
Aquí hay una distinción que conviene tener muy clara. Ese punto puede ser:

- **Singular solo para esta parametrización.** Los polos de la esfera: la esfera entera es una s.r. perfectamente buena, y los polos solo se pierden porque se ha elegido describirla por revolución.
- **Singular de verdad.** El vértice del cono: ahí no hay ninguna parametrización que salve el punto, y el motivo es topológico, no de cálculo.

Es la misma distinción entre singularidad esencial y no esencial del capítulo 1.

Ejemplo (el catálogo). ▪ **Esfera.** Generatriz $\alpha(t) = (r\cos t, 0, r\,\mathrm{sen}\,t)$ con $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, que da $x(t,\theta) = (r\cos t\cos\theta,\ r\cos t\,\mathrm{sen}\,\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,t)$. Las curvas de θ constante son semicircunferencias sin polos, contenidas en círculos máximos; los paralelos son las circunferencias de latitud constante. La imagen no contiene los polos.

- **Cilindro.** Generatriz la recta $\alpha(t) = (r, 0, t)$, paralela al eje. Da $x(t,\theta) = (r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ t)$.
- **Cono.** Generatriz la bisectriz $\alpha(t) = (t, 0, t)$. Da $x(t,\theta) = (t\cos\theta,\ t\,\mathrm{sen}\,\theta,\ t)$, cuya imagen es la cuádrica $x^2 + y^2 = z^2$. **No es una s.r.**: ningún entorno del vértice es homeomorfo a un abierto del plano. Restringiendo a $t > 0$ sí lo es.
- **Toro.** Generatriz la circunferencia $\alpha(t) = (R + r\cos t,\ 0,\ r\,\mathrm{sen}\,t)$ con $R > r > 0$. Da

$$x(t,\theta) = \big((R + r\cos t)\cos\theta,\ (R + r\cos t)\,\mathrm{sen}\,\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,t\big),$$

con ecuación implícita $\big(\sqrt{x^2+y^2} - R\big)^2 + z^2 = r^2$.

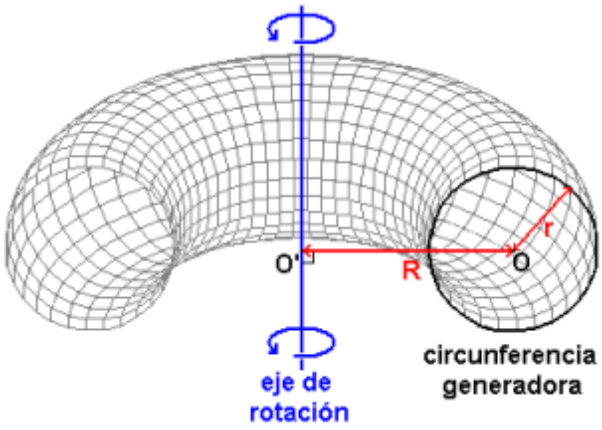


Figura 2.7: El toro se obtiene al girar una circunferencia de radio r cuyo centro está a distancia $R > r$ del eje. El corte del dibujo deja visible la generatriz; no es un borde de la superficie. Figura del material oficial, lección 2.

LA IDEA: CUÁNTAS CARTAS HACEN FALTA, Y POR QUÉ

Supongamos que el perfil es una curva regular embebida en $x > 0$: sus coordenadas describen correctamente la topología de su imagen. La construcción siguiente da un atlas, sin afirmar que tenga el menor número de cartas. Una p.l. necesita ser inyectiva, así que el ángulo θ tiene que recorrer un intervalo abierto de longitud 2π como mucho. Y un intervalo abierto siempre deja fuera un valor de θ, es decir, **un meridiano**.

- Si la generatriz **no es compacta**, el parámetro t ya recorre un intervalo abierto y no hay que cortar nada más. Bastan dos cartas, con θ en $(0, 2\pi)$ y en $(-\pi, \pi)$: cada una pierde un meridiano y entre las dos lo cubren todo.
- Si la generatriz **es compacta**, también hay que cortar t, y se pierde además **un paralelo**. Bastan cuatro cartas, combinando dos intervalos para t y dos para θ.

Con la esfera y el toro: la esfera menos los polos tiene generatriz no compacta y le bastan dos cartas; para el toro, de generatriz compacta, la construcción da cuatro. Con otras elecciones se puede cubrir con tres.

2.3.2 Superficies regladas

Definición. Una superficie es **reglada** si está formada por segmentos rectilíneos abiertos, llamados **generatrices**, que se apoyan en una curva regular llamada **directriz**, de modo que por cada punto de la superficie pasa uno de esos segmentos.

Si $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ es la directriz y $w : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ es un campo diferenciable de vectores no nulos a lo largo de ella que da las direcciones de las generatrices, las parametrizaciones locales son

$$x : (a, b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad x(t, v) = \alpha(t) + v\, w(t),$$

restringidas a los abiertos donde cumplan las condiciones de p.l..

LA IDEA: POR QUÉ ESTAS DOS FAMILIAS LO SON CASI TODO

Merece la pena decirlo sin rodeos. La combinación directriz-generatriz es *el* mecanismo de la asignatura: una superficie reglada construida sobre una curva y, muy a menudo, una curva construida a su vez sobre otra curva.
Y ahí es donde el capítulo 1 se cobra su inversión: las generatrices que aparecen una y otra vez son los vectores del triedro de Frenet. Superficie de las tangentes, $w = \mathbf{t}$. De las normales principales, $w = \mathbf{n}$. De las binormales, $w = \mathbf{b}$. Cuando en la lección 3 aparezca la normal intrínseca, también.
Dicho de otro modo: el triedro de Frenet no era el final del capítulo 1, era el material de construcción del resto de la asignatura.

Ejemplo (el catálogo de regladas)**.** ▪ **Superficie de las tangentes**, o desarrollable tangencial: $w(t) = \mathbf{t}(t)$, con la propia α como directriz. Para que se cumpla la condición de regularidad hace falta $v \neq 0$, porque sobre la propia curva las dos derivadas parciales son paralelas.

- **Superficie de las normales principales**: $w(t) = \mathbf{n}(t)$.
- **Superficie de las binormales**: $w(t) = \mathbf{b}(t)$.
- **Cilindros**: generatrices paralelas, $w(t) = w$ constante. Hay que eliminar los puntos donde $\alpha'(t)$ y w sean paralelos.
- **Conos**: todas las generatrices pasan por un punto P exterior a la curva, el **vértice**, con $w(t) = \overrightarrow{OP} - \alpha(t)$. Hay que tomar $v \neq 1$, ya que $v = 1$ da el vértice, donde esta parametrización es singular, y quitar los t_0 para los que $\overrightarrow{OP} - \alpha(t_0)$ sea paralelo a $\alpha'(t_0)$.
- **Banda de Möbius**: directriz la circunferencia $\alpha(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, 0)$ y $w(t) = \left(-\operatorname{sen}\frac{t}{2}\cos t,\ -\operatorname{sen}\frac{t}{2}\operatorname{sen} t,\ \cos\frac{t}{2}\right)$, lo que da

$$x(t,v) = \left(\left(a - v\operatorname{sen}\tfrac{t}{2}\right)\cos t,\ \left(a - v\operatorname{sen}\tfrac{t}{2}\right)\operatorname{sen} t,\ v\cos\tfrac{t}{2}\right),$$

con $(t,v) \in (0,2\pi) \times (-l,l)$ y $0 < l < a$. Esta carta deja fuera un segmento de la banda: para cerrarla hay que incluirlo con otra carta. La fórmula satisface $x(t+2\pi, v) = x(t,-v)$, que describe el pegado con media vuelta.

LA IDEA: CÓMO SE CONSTRUYE LA BANDA DE MÖBIUS, PASO A PASO

La fórmula parece sacada de la nada y no lo está. Se construye así.
Se toma un segmento vertical de longitud $2l$, con su punto medio a distancia a del origen sobre el eje OX. Ese segmento empieza a girar alrededor del eje OZ, manteniendo su punto medio en el plano $z = 0$. La clave es que, mientras gira un ángulo t alrededor del eje, el segmento se inclina un ángulo $t/2$ respecto de la vertical, dentro del plano que lo contiene.
El factor un medio es todo. Al completar una vuelta entera, $t = 2\pi$, el segmento se ha inclinado π, es decir, ha quedado dado la vuelta: lo que era el extremo de arriba es ahora el de abajo. Por eso la banda se cierra sobre sí misma con una torsión, y por eso tiene una sola cara.
Con t en lugar de $t/2$ el segmento daría la vuelta completa y se obtendría una banda con una vuelta completa, orientable y homeomorfa a un cilindro, aunque no con la forma de un cilindro circular. La superficie no orientable de la sección siguiente sale, literalmente, de dividir un ángulo entre dos.

Las dos derivadas, de una vez para todas. El catálogo pone condiciones («$v \neq 0$», «quitar los puntos donde α' y w sean paralelos», «$v \neq 1$») sin decir de dónde salen. Salen todas de la misma cuenta, y conviene hacerla una sola vez en general, porque todo lo que se pregunte sobre una reglada concreta (si es regular, cuál es su plano tangente, si es orientable) empieza por ella. Como v entra de forma lineal en $x(t, v) = \alpha(t) + v\, w(t)$,

$$\mathbf{X}_1 = \alpha'(t) + v\, w'(t), \qquad \mathbf{X}_2 = w(t),$$

y, desarrollando el producto vectorial (el término $v\, w \times w$ es nulo),

$$\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = \alpha' \times w + v\,(w' \times w).$$

Se lee así. Los dos vectores $\alpha' \times w$ y $w' \times w$ dependen solo de t, es decir, de la generatriz en la que se está; a lo largo de una misma generatriz, el producto vectorial es una función afín de v.

- El primer sumando es lo que queda sobre la propia directriz, $v = 0$. Allí el plano tangente lo generan la velocidad de la directriz y la dirección de la generatriz, y hay regularidad exactamente cuando la generatriz no es tangente a la directriz.
- El segundo sumando mide cuánto gira la generatriz al avanzar por la directriz, y decide qué pasa lejos de ella. Si los dos sumandos son paralelos, el normal conserva su dirección a lo largo de toda la recta; si no lo son, el normal va girando a medida que uno se aleja de la directriz.

Es la misma fórmula con la que el capítulo 4 clasificará los puntos de una reglada (sección 4.5.3).

Dónde puede fallar la regularidad. Hay una observación que ahorra casi todo el trabajo. Supóngase que $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = 0$ en un punto (t, v) y multiplíquese escalarmente por $\alpha'(t)$. El primer sumando desaparece, porque $\alpha' \times w$ es perpendicular a α', y queda

$$v\, \alpha' \cdot (w' \times w) = v\, (\alpha', w', w) = 0.$$

Si el determinante (α', w, w') no se anula en ese t, tiene que ser $v = 0$; pero entonces $\alpha' \times w = 0$, es decir, α' y w son paralelos, y con dos columnas paralelas el determinante sí se anula. Contradicción. Por tanto:

en una generatriz con $(\alpha', w, w') \neq 0$ no hay ningún punto singular.

Los puntos singulares, cuando los hay, viven en las generatrices donde ese determinante se anula, y allí son los ceros de una función afín de v: uno como mucho, o la recta entera si los dos sumandos se anulan a la vez. El catálogo lo confirma caso por caso:

- *Superficie de las tangentes.* Con $w = \mathbf{t}$ el determinante tiene dos columnas iguales; el punto singular de cada generatriz es $v = 0$, la propia curva.
- *Cilindros.* Con w constante, $w' = 0$ y el producto vale $\alpha' \times w$ en toda la recta: o la generatriz es entera regular, o entera singular, donde α' y w son paralelos.
- *Conos.* Con $w = \overrightarrow{OP} - \alpha$ es $w' = -\alpha'$, y el producto vale $(1 - v)\, \alpha' \times w$: se anula en $v = 1$, el vértice.
- *Normales principales y binormales de una curva con $\tau \neq 0$.* Los determinantes valen $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \dot{\mathbf{n}}) = \tau$ y $(\mathbf{t}, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}) = \tau$, así que no tienen ni un punto singular, sin necesidad de calcular más.

La condición $(\alpha', w, w') = 0$ tiene nombre propio en el capítulo 4: es la de superficie *desarrollable*. Y enlaza con la lectura de hace un momento, la de si el normal conserva su dirección a lo largo de la generatriz: eso ocurre cuando los dos sumandos son paralelos, y un cálculo

con el doble producto vectorial da $(\alpha' \times w) \times (w' \times w) = -(\alpha', w, w')\, w$. Como $w \neq 0$, los dos sumandos son paralelos exactamente cuando el determinante se anula: es la misma condición.

El mecanismo, cuando la reglada se construye sobre una curva. Es la situación de casi todos los problemas: una c.r.p.n. α con $k > 0$ y una generatriz que es uno de los vectores de su triedro, o una combinación de ellos. Los pasos son siempre los mismos.

1. *Parametrizar.* Se escribe $x(s, v) = \alpha(s) + v\, w(s)$, con el w que dicte la construcción.
2. *Derivar con Frenet.* $\mathbf{X}_1 = \mathbf{t} + v\, \dot{w}$, y $\dot{w}$ se escribe en la base $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ con $\dot{\mathbf{t}} = k\mathbf{n}$, $\dot{\mathbf{n}} = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$, $\dot{\mathbf{b}} = -\tau\mathbf{n}$.
3. *Multiplicar en la base del triedro*, que es ortonormal y directa: $\mathbf{t} \times \mathbf{n} = \mathbf{b}$, $\mathbf{n} \times \mathbf{b} = \mathbf{t}$, $\mathbf{b} \times \mathbf{t} = \mathbf{n}$, y el orden inverso cambia el signo. Para $w = \mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ o $\mathbf{b}$ el resultado está ya en la tabla del capítulo 1, en la caja «la misma derivada fabrica las superficies regladas» de los ejercicios de la sección 1.5.
4. *Leer.* La superficie es regular donde ese vector no se anula, y sobre la directriz su plano tangente es el generado por $\mathbf{t}$ y w. En cuanto a la orientación, el campo $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 / |\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|$ está definido en todo el dominio de parámetros, de modo que orienta la superficie parametrizada. Para trasladarlo a la imagen hace falta que x sea inyectiva. Si además se sabe ya que la imagen es una s.r., el criterio práctico (proposición de la p. 118) convierte a x en una carta global. Lo único que puede estropear la orientación es global: una directriz cerrada a lo largo de la cual w vuelva invertido, que es la banda de Möbius.

Dónde se falla. En el paso 2, mezclar convenios: aquí $\dot{\mathbf{b}} = -\tau\mathbf{n}$, y otros textos escriben $+\tau\mathbf{n}$, lo que cambia el signo de los términos con τ pero no dónde se anulan. En el paso 3, el orden del producto: $\mathbf{t} \times \mathbf{b} = -\mathbf{n}$, y no $+\mathbf{n}$. En el paso 4, olvidar que en la superficie de las tangentes hay que quitar $v = 0$, y dar por orientable la imagen sin haber comprobado que la parametrización es inyectiva.

Ejemplo (las tres regladas de la hélice circular)**.** Sea la hélice $\alpha(s) = \big(a\cos\frac{s}{c},\ a\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{c},\ b\frac{s}{c}\big)$, con $a > 0$, $b \neq 0$ y $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, que es la hélice $(a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t, bt)$ del capítulo 1 parametrizada por el arco. Su triedro y sus curvaturas son

$$\mathbf{t} = \tfrac{1}{c}\big(-a\,\mathrm{sen}\,\tfrac{s}{c},\ a\cos\tfrac{s}{c},\ b\big), \quad \mathbf{n} = \big(-\cos\tfrac{s}{c},\ -\mathrm{sen}\,\tfrac{s}{c},\ 0\big), \quad \mathbf{b} = \tfrac{1}{c}\big(b\,\mathrm{sen}\,\tfrac{s}{c},\ -b\cos\tfrac{s}{c},\ a\big),$$

con $k = a/c^2$ y $\tau = b/c^2$. La normal principal es horizontal y apunta hacia el eje del cilindro.

Las normales principales dan el helicoide. Con $w = \mathbf{n}$,

$$x(s, v) = \Big((a - v)\cos\tfrac{s}{c},\ (a - v)\,\mathrm{sen}\,\tfrac{s}{c},\ b\tfrac{s}{c}\Big),$$

y llamando $\theta = s/c$ y $\rho = a - v$ queda $(\rho\cos\theta,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\theta,\ b\theta)$: una recta horizontal que corta al eje y sube a la vez que gira, la escalera de caracol. Es el **helicoide**, que reaparecerá en los capítulos 3 y 4. La tabla del capítulo 1 da $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = -v\tau\,\mathbf{t} + (1 - vk)\,\mathbf{b}$, y sustituyendo k y τ,

$$|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|^2 = v^2\tau^2 + (1 - vk)^2 = \frac{b^2 + (a - v)^2}{c^2} > 0.$$

Es regular en todos sus puntos, incluidos los de $v = a$, donde la generatriz atraviesa el eje: allí el producto no se anula porque $b \neq 0$. Era de esperar sin calcular nada, porque el determinante vale $\tau \neq 0$.

Las binormales dan una superficie regular en todas partes por la misma razón; el ejercicio de la superficie de las binormales, en la sección 2.4, la estudia para una curva cualquiera.

Las tangentes tienen determinante nulo y un punto singular en cada generatriz, sobre la propia hélice. Con $a = b = 1$ y otro nombre para el parámetro, es la superficie del ejercicio «una reglada escondida en una fórmula fea», unas páginas más abajo.

Qué se ha ganado. Para decidir dónde es regular una reglada basta una fórmula de una línea, $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = \alpha' \times w + v\,(w' \times w)$, y un determinante que se calcula de memoria cuando w es un vector del triedro. Queda abierta la pregunta de cómo se curva la superficie a lo largo de cada generatriz, y ese mismo determinante es el que la contestará en el capítulo 4.

DE DÓNDE VIENE: MONGE, Y POR QUÉ LAS REGLADAS IMPORTABAN TANTO

Que las superficies regladas ocupen un lugar central en un curso de geometría diferencial no es un capricho histórico.
Gaspard Monge, fundador de la geometría descriptiva y de la École Polytechnique, trabajó sistemáticamente con ellas a finales del siglo XVIII y principios del XIX, en obras como su *Application de l'analyse à la géométrie*. Su nombre sigue en la «carta de Monge» que se ha usado más arriba para los grafos.
El interés era en buena parte práctico: una superficie formada por rectas se puede construir con materiales rectos, y algunas de ellas, las desarrollables, se pueden fabricar doblando una lámina plana sin estirarla. Esa propiedad, que aquí aparecerá como curvatura de Gauss nula, es la razón de que un cilindro se pueda hacer con una hoja de papel y una esfera no.

Ejercicio 2.2. *Girar una hipérbola* [H2.1]

Sea la rama de la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 1$, $z = 0$, con $x > 0$. Se hace girar alrededor del eje OY. Probar que la superficie de revolución obtenida es una s.r. y obtener dos parametrizaciones locales de ella.

Resolución. *La generatriz.* La identidad $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ parametriza la rama con $x > 0$:

$$\alpha(t) = (\operatorname{ch} t,\ \operatorname{sh} t,\ 0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

La superficie. Al girar alrededor de OY, la coordenada y se conserva y el par (x, z) describe una circunferencia de radio $\operatorname{ch} t$:

$$x(t, \theta) = \big(\operatorname{ch} t \cos\theta,\ \operatorname{sh} t,\ \operatorname{ch} t \operatorname{sen}\theta\big).$$

Es una superficie regular. Eliminando los parámetros,

$$x^2 + z^2 = \operatorname{ch}^2 t, \qquad y^2 = \operatorname{sh}^2 t \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 + z^2 - y^2 = 1.$$

Es un **hiperboloide de una hoja**. Tomando $f(x, y, z) = x^2 + z^2 - y^2$ se tiene $\nabla f = (2x, -2y, 2z)$, que se anula únicamente en el origen, y el origen no pertenece al nivel $f = 1$ porque allí f vale 0. Luego 1 es valor regular y la superficie es una s.r..

Dos parametrizaciones locales. Como la superficie ya se sabe regular, por el criterio práctico basta con dar restricciones inyectivas de x. Sirven

$$x\big|_{\mathbb{R}\times(0,2\pi)} \qquad \text{y} \qquad x\big|_{\mathbb{R}\times(-\pi,\pi)},$$

cuyas imágenes son la superficie menos un meridiano cada una, y entre las dos la recubren. Bastan dos porque la generatriz no es compacta. ■

LA IDEA: DOS FORMAS DE VER LA MISMA SUPERFICIE

El hiperboloide de una hoja aparece aquí como superficie de revolución, pero tiene otra descripción que conviene conocer porque cambia por completo lo que se puede decir de él: es una **superficie reglada**, y además de dos maneras distintas. Por cada punto suyo pasan dos rectas enteramente contenidas en la superficie.
Esto anticipa el capítulo 4: toda reglada regular tiene curvatura de Gauss no positiva, y el hiperboloide de una hoja la tiene negativa en todos sus puntos, que por tanto son hiperbólicos. Se comprueba también con la fórmula del perfil: la rama de hipérbola es convexa vista desde el eje, y la fórmula de las superficies de revolución permitirá comprobar que aquí la curvatura de Gauss es negativa.
Es el ejemplo estrella de superficie con las dos estructuras a la vez, y por eso aparece en todas partes, tanto entre las superficies de revolución como entre las regladas.

Ejercicio 2.3. *Dos superficies que no caben en una sola carta* [H2.4]

Probar que el toro no admite ningún atlas formado por una sola parametrización local, y que tampoco lo admite la esfera.

Resolución. El argumento es el mismo para los dos y no es de geometría diferencial, sino de topología.

Si una s.r. admitiera un atlas de una sola p.l. $x : U \to M$, entonces x sería un homeomorfismo entre el abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ y toda M. Ahora bien, el toro y la esfera son **compactos**, por ser cerrados y acotados en $\mathbb{R}^3$, y la compacidad se conserva por homeomorfismos. Luego U tendría que ser compacto.

Pero un abierto no vacío de $\mathbb{R}^2$ nunca es compacto: no es cerrado en $\mathbb{R}^2$, porque un abierto propio no contiene sus puntos frontera, y no puede ser todo $\mathbb{R}^2$, que no es acotado. Contradicción. ■

LA IDEA: QUÉ SUPERFICIES SÍ CABEN EN UNA CARTA

Del argumento se saca la regla general: **ninguna superficie compacta admite una parametrización global**. Esfera, toro y cualquier otra cerrada y acotada quedan descartadas de entrada, sin mirar sus fórmulas.
Entre las que sí caben están los planos, las cartas de Monge, el cilindro cortado por un meridiano, el helicoide y el paraboloide. Ser no compacta no basta: el toro menos un punto, que se estudia más abajo, da el contraejemplo. Y es precisamente por eso que la definición de superficie regular necesita atlas y no una sola aplicación: si bastara con una, la esfera no sería superficie.

Ejercicio 2.4. *Una silla disfrazada* [H2.5]

Sea la superficie regular dada por la parametrización global $x(u,v) = (u+v,\ u-v,\ uv)$, con $u, v \in \mathbb{R}$. Reparametrizarla como carta de Monge.

Resolución. Se trata de despejar u y v en función de las dos primeras coordenadas y sustituir en la tercera. Llamando $\bar{x} = u + v$ e $\bar{y} = u - v$,

$$u = \frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}, \qquad v = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{2},$$

que es una transformación lineal de determinante no nulo y por tanto un cambio de coordenadas admisible. Sustituyendo,

$$z = uv = \frac{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{x}-\bar{y})}{4} = \frac{\bar{x}^2-\bar{y}^2}{4}.$$

Luego la superficie es la carta de Monge

$$y(\bar{x},\bar{y}) = \left(\bar{x},\ \bar{y},\ \frac{\bar{x}^2-\bar{y}^2}{4}\right),$$

es decir, el **paraboloide hiperbólico** $z = \frac{1}{4}(x^2 - y^2)$, una silla de montar. ■

LA IDEA: LA MORALEJA PRÁCTICA

Una superficie puede venir escrita de forma que no se reconozca. Aquí el enunciado da una parametrización con un producto uv en la tercera coordenada, y solo al cambiar a las coordenadas naturales aparece la silla.
El movimiento es siempre el mismo y conviene tenerlo: **si dos de las tres coordenadas permiten despejar los parámetros, sustituye en la tercera y tendrás una carta de Monge**. Y una carta de Monge es lo más cómodo que existe: su normal se escribe de memoria, sus coeficientes métricos son inmediatos y se ve de un vistazo qué superficie es.
Vale la pena comparar esta silla con el paraboloide de revolución del ejercicio sobre áreas iguales: son las dos superficies que allí medían lo mismo sobre la misma sombra y que, sin embargo, tienen todos sus puntos de tipos opuestos.

Ejercicio 2.5. *Reparametrizar el cilindro para que las hélices sean líneas paramétricas* [H2.8]

Se considera la parametrización local del cilindro circular de radio r, $x(u,v) = (r\cos u,\ r\operatorname{sen} u,\ v)$ con $(u,v) \in (0,2\pi) \times \mathbb{R}$. Reparametrizarla de modo que todas las hélices $a_b(t) = (r\cos t,\ r\operatorname{sen} t,\ bt)$, con $t \in (0,2\pi)$ y $b \in \mathbb{R}$, se conviertan en líneas paramétricas.

Resolución. En las coordenadas dadas, cada hélice corresponde a la recta $v = bu$. Para que cambiar b elija una línea coordenada, se toma precisamente b como segunda coordenada:

$$\bar{u} = u, \qquad \bar{v} = \frac{v}{u}.$$

La división es válida porque $0 < u < 2\pi$. Este cambio es un difeomorfismo de $(0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ en sí mismo: su inversa es $(\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (\bar{u}, \bar{u}\bar{v})$ y su determinante jacobiano es $1/u \neq 0$. La nueva parametrización es

$$y(\bar{u}, \bar{v}) = \big(r\cos\bar{u},\ r\,\mathrm{sen}\,\bar{u},\ \bar{u}\bar{v}\big).$$

Fijar $\bar{v} = b$ da exactamente $a_b(\bar{u})$, como se pedía. ■

LA IDEA: ELEGIR COMO COORDENADA LO QUE DISTINGUE A LAS CURVAS

La coordenada nueva es la pendiente v/u de las rectas del mapa. Al fijarla se elige una hélice; al variar u se la recorre. Es la táctica general: cuando una familia de curvas protagoniza un problema, buscar una cantidad constante en cada miembro y usarla como coordenada.
No es lo mismo fijar un paso b_0 y considerar sus trasladadas verticales, $v = b_0 u + c$. Para esa otra familia serviría la cizalla $\bar{v} = v - b_0 u$. El enunciado pide que varíe b, y por eso aquí se usa v/u.

Ejercicio 2.6. *Dos maneras de fabricar superficies nuevas* [H2.6]

Sea M una superficie regular.
1. Probar que todo abierto de M es una superficie regular.
2. Si $f : G \to \mathbb{R}^3$ es un difeomorfismo sobre su imagen, siendo G un abierto de $\mathbb{R}^3$ tal que $M \subseteq G$, probar que $f(M)$ es una superficie regular.

Resolución. 1. Todo abierto es superficie regular. Sea $V \subseteq M$ abierto en la topología inducida y sea $p \in V$. Como M es s.r., existe una p.l. $x : U \to M$ con $p \in x(U)$. Se define

$$U' = x^{-1}\big(V \cap x(U)\big),$$

que es abierto de $\mathbb{R}^2$ porque x es continua y $V \cap x(U)$ es abierto en $x(U)$, y que contiene al punto $x^{-1}(p)$.

La restricción $x\big|_{U'}$ cumple las tres condiciones:
- es diferenciable, por serlo x;
- es regular, porque $x_u \times x_v \neq 0$ en todo U, en particular en U';
- es homeomorfismo sobre su imagen, porque la restricción de un homeomorfismo a un abierto lo sigue siendo.

Y su imagen es $V \cap x(U)$, abierto de V que contiene a p. Como p era arbitrario, V es s.r..

2. La imagen por un difeomorfismo. Sea $q \in f(M)$, digamos $q = f(p)$ con $p \in M$, y sea $x : U \to M$ una p.l. con $p \in x(U)$. Se define

$$y = f \circ x : U \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Se comprueban las tres condiciones:
- *Diferenciable*: composición de diferenciables.
- *Regular*: por la regla de la cadena, $y_u = df_{x(u,v)}(x_u)$ e $y_v = df_{x(u,v)}(x_v)$. Al ser f un difeomorfismo, su diferencial en cada punto es un **isomorfismo** de $\mathbb{R}^3$, y un isomorfismo lleva vectores linealmente independientes en vectores linealmente independientes. Como $\{x_u, x_v\}$ es independiente, también lo es $\{y_u, y_v\}$, luego $y_u \times y_v \neq 0$.

- *Homeomorfismo sobre su imagen*: x lo es sobre $x(U)$ y f lo es sobre su imagen; la composición de homeomorfismos es homeomorfismo.

Falta ver que $y(U) = f(x(U))$ es abierto en $f(M)$. Lo es porque $x(U)$ es abierto en M y $f\big|_M : M \to f(M)$ es un homeomorfismo, de modo que lleva abiertos de M en abiertos de $f(M)$. ■

LA IDEA: LA LISTA DE MOVIMIENTOS PERMITIDOS

Estos dos apartados dan la caja de herramientas que se usa constantemente sin decirlo: **Recortar** una s.r. por un abierto da otra s.r.. Por eso cualquier p.l. de una s.r. es a su vez una s.r., y por eso se puede razonar localmente sin preocuparse.
Deformar una s.r. por un difeomorfismo del ambiente da otra s.r.. Y ahí entran, en particular, **todos los movimientos rígidos** (giros, traslaciones, simetrías) y **las homotecias de razón no nula**: la esfera girada sigue siendo esfera, el elipsoide es la imagen de la esfera por una aplicación lineal invertible y por tanto es s.r. sin necesidad de calcular nada.
La observación de fondo es que **ser superficie regular es una propiedad que sobrevive a los difeomorfismos**, no a cualquier aplicación. Con una aplicación diferenciable cualquiera se pierde: la proyección de la esfera sobre un plano es diferenciable y su imagen es un disco cerrado, que no es s.r..

Ejercicio 2.7. *El toro: regularidad, plano tangente y recta normal* [H2.9]

Sea $U = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ y se define

$$x : U \to \mathbb{R}^3 : \ (u, v) \longmapsto \big((2 + \cos u)\cos v,\ (2 + \cos u)\operatorname{sen} v,\ \operatorname{sen} u\big).$$

1. Demostrar que x es una superficie parametrizada.
2. Calcular el plano tangente y la recta normal en un punto arbitrario.

Resolución. 1. Es superficie parametrizada. Las componentes son composiciones de senos y cosenos con polinomios, luego x es diferenciable. Queda la regularidad:

$$x_u = (-\operatorname{sen} u \cos v,\ -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,\ \cos u), \qquad x_v = \big(-(2+\cos u)\operatorname{sen} v,\ (2+\cos u)\cos v,\ 0\big).$$

Su producto vectorial es

$$x_u \times x_v = -(2 + \cos u)\,\big(\cos u \cos v,\ \cos u \operatorname{sen} v,\ \operatorname{sen} u\big).$$

El vector del paréntesis es unitario, porque $\cos^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \operatorname{sen}^2 v + \operatorname{sen}^2 u = \cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u = 1$. Por tanto

$$|x_u \times x_v| = 2 + \cos u \ \geq\ 1 > 0$$

para todo (u, v), y x es regular. Es el toro de radios $R = 2$ y $r = 1$.

2. Plano tangente y recta normal. El campo normal unitario es

$$N(u, v) = -\big(\cos u \cos v,\ \cos u \operatorname{sen} v,\ \operatorname{sen} u\big),$$

que apunta hacia el alma del tubo, como se ve al restar del punto el centro de la circunferencia generatriz correspondiente.

El **plano tangente** en $x(u_0, v_0)$ es el que pasa por ese punto con direcciones x_u y x_v. Su ecuación implícita se obtiene imponiendo ortogonalidad a N:

$$\cos u_0 \cos v_0\, X + \cos u_0 \operatorname{sen} v_0\, Y + \operatorname{sen} u_0\, Z = \langle x(u_0, v_0),\, n_0 \rangle,$$

donde $n_0 = -N(u_0, v_0)$. Ese producto escalar vale

$$(2 + \cos u_0)\cos u_0\big(\cos^2 v_0 + \operatorname{sen}^2 v_0\big) + \operatorname{sen}^2 u_0 = 2\cos u_0 + \cos^2 u_0 + \operatorname{sen}^2 u_0 = 1 + 2\cos u_0.$$

Luego el plano tangente es

$$\boxed{\cos u_0 \cos v_0\, X + \cos u_0 \operatorname{sen} v_0\, Y + \operatorname{sen} u_0\, Z = 1 + 2\cos u_0.}$$

Y la **recta normal** es

$$X(\lambda) = x(u_0, v_0) + \lambda\big(\cos u_0 \cos v_0,\ \cos u_0 \operatorname{sen} v_0,\ \operatorname{sen} u_0\big), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

■

Qué dice la fórmula, en tres puntos. La ecuación recuadrada se comprueba mirando el toro, y conviene hacerlo antes de fiarse de ella.

- *Ecuador exterior*, $u_0 = 0$, el punto $(3\cos v_0, 3\operatorname{sen} v_0, 0)$: queda $\cos v_0\, X + \operatorname{sen} v_0\, Y = 3$, el plano vertical a distancia 3 del eje. Es el que tocaría una pared apoyada por fuera.
- *Ecuador interior*, $u_0 = \pi$, el punto $(\cos v_0, \operatorname{sen} v_0, 0)$: queda $-\cos v_0\, X - \operatorname{sen} v_0\, Y = -1$, el plano vertical a distancia 1 del eje, dentro del agujero.
- *Circunferencia de arriba*, $u_0 = \pi/2$, el punto $(2\cos v_0, 2\operatorname{sen} v_0, 1)$: queda $Z = 1$, el mismo plano para todos los v_0. Una bandeja apoyada sobre el toro lo toca a lo largo de toda esa circunferencia, no en un punto. Esos puntos serán los parabólicos del capítulo 4.

Ejercicio 2.8. *Una superficie dada por una ecuación* [H2.11]

Sea la ecuación $xz - 2y^2 + 3y = 1$. Justificar que define una superficie regular y calcular el vector normal en $P = (1, 0, 1)$, así como el plano tangente en dicho punto.

Resolución. Sea $f(x, y, z) = xz - 2y^2 + 3y$, que es polinómica y por tanto diferenciable. Su gradiente es

$$\nabla f = (z,\ -4y + 3,\ x),$$

que se anula únicamente cuando $z = 0$, $x = 0$ e $y = \frac{3}{4}$, es decir en el único punto $Q = (0, \frac{3}{4}, 0)$. Y ese punto **no está en el nivel** que interesa, porque

$$f(Q) = 0 - 2 \cdot \tfrac{9}{16} + \tfrac{9}{4} = -\tfrac{9}{8} + \tfrac{9}{4} = \tfrac{9}{8} \neq 1.$$

Luego 1 es valor regular de f y $f^{-1}(1)$ es una s.r..

En $P = (1, 0, 1)$ se comprueba primero que el punto está en la superficie: $f(1, 0, 1) = 1 \cdot 1 - 0 + 0 = 1$. El vector normal es

$$\nabla f(P) = (1,\ 3,\ 1), \qquad N(P) = \frac{1}{\sqrt{11}}\,(1, 3, 1),$$

y el plano tangente,

$$(x - 1) + 3(y - 0) + (z - 1) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x + 3y + z = 2.$$

■

Ejercicio 2.9. *Los dos hiperboloides* [H2.16]

Demostrar que los hiperboloides $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ y $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ son superficies regulares. Recubrir cada uno de ellos con dos parametrizaciones locales. ¿Qué se puede decir de su orientabilidad?

Resolución. Regularidad. Tomando $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, ambos conjuntos son niveles suyos: el primero es $f^{-1}(1)$ y el segundo, $f^{-1}(-1)$. Como $\nabla f = (2x, 2y, -2z)$ se anula solo en el origen y $f(0, 0, 0) = 0$, ni 1 ni -1 tienen al origen en su nivel. Ambos valores son regulares y ambos conjuntos son superficies regulares.

Dos parametrizaciones para el de una hoja. El de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ es de revolución alrededor de OZ, con perfil la hipérbola. Usando funciones hiperbólicas,

$$x(u, v) = (\operatorname{ch} u \cos v,\ \operatorname{ch} u \operatorname{sen} v,\ \operatorname{sh} u),$$

que efectivamente cumple la ecuación, porque $\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1$. Restringiendo el segundo parámetro a $(0, 2\pi)$ y a $(-\pi, \pi)$ se obtienen dos p.l., cada una de las cuales cubre la superficie menos un meridiano, y entre las dos la recubren.

Dos parametrizaciones para el de dos hojas. En $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ se tiene $z^2 = 1 + x^2 + y^2 \geq 1$, luego $z \geq 1$ o bien $z \leq -1$: la superficie tiene **dos componentes conexas**, separadas por la banda $|z| < 1$. Cada una es un grafo global sobre todo el plano OXY:

$$y_{\pm}(x, y) = \big(x,\ y,\ \pm\sqrt{1 + x^2 + y^2}\,\big), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

dos cartas de Monge, una por hoja. Si se exige dominio conexo para cada carta, dos es el mínimo; la definición usada aquí permite también abiertos disconexos.

Orientabilidad. Los dos son orientables, y por la misma razón: **toda superficie de nivel de una función diferenciable con valor regular es orientable**, ya que

$$N = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

es un campo normal unitario diferenciable definido *globalmente* sobre ella. En el de una hoja ese campo apunta hacia fuera del tubo; en el de dos hojas, donde N es proporcional a $(x, y, -z)$, apunta hacia abajo en la hoja de arriba y hacia arriba en la de abajo, es decir, en sentidos opuestos en cada hoja, pero eso no rompe nada, porque la orientabilidad solo pide que el campo sea continuo, y las dos hojas ni se tocan. ■

Ejercicio 2.10. *Caracterización del plano por su normal* [H2.17]

Probar que una superficie regular conexa y orientable está contenida en un plano si y solo si su campo normal unitario es constante.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Una de las dos implicaciones se contesta sin escribir nada: piensa quién es el plano tangente de un plano en cada uno de sus puntos. Para la otra, toma dos puntos y únelos por una curva dentro de la superficie: ahí es donde entra la conexión.*
2. *Deriva el producto escalar del punto por la normal a lo largo de esa curva.*

Resolución. (⇒) Si M está contenida en el plano de ecuación $\langle X, a\rangle = c$ con $|a| = 1$, entonces su plano tangente en cada punto es el plano vectorial $a^{\perp}$. Un normal unitario continuo solo puede ser a o $-a$; por conexión mantiene el mismo signo y es constante.

(⇐) Supóngase $N \equiv a$ constante y unitario. Se fija $p_0 \in M$ y se toma $p \in M$ cualquiera. Como M es conexa, y una s.r. es localmente conexa por caminos, M es conexa por caminos y existe una curva diferenciable a trozos $\alpha : [0,1] \to M$ con $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha(1) = p$. Se considera la función

$$h(t) = \langle \alpha(t),\, a\rangle.$$

Su derivada es

$$h'(t) = \langle \alpha'(t),\, a\rangle = 0,$$

porque $\alpha'(t)$ es tangente a M y $a = N$ es normal. Luego h es constante y

$$\langle p, a\rangle = h(1) = h(0) = \langle p_0, a\rangle.$$

Como p era arbitrario, todo punto de M satisface $\langle X, a\rangle = \langle p_0, a\rangle$: la superficie está contenida en un plano. No tiene por qué ocuparlo entero; un disco abierto es ya un ejemplo. ■

LA IDEA: DÓNDE SE USA CADA HIPÓTESIS

Conviene ver que las tres hipótesis del enunciado hacen falta y qué pasa si se quitan.
La **orientabilidad** es lo que permite hablar de "el" campo normal: en una superficie no orientable no hay ninguno global y el enunciado no tendría sentido.
La **conexión** es lo que permite unir dos puntos cualesquiera por una curva. Sin ella el resultado es falso: dos planos paralelos forman una s.r. orientable con normal constante que no es un plano. El campo es el mismo en las dos piezas, pero la constante $\langle X, a\rangle$ es distinta en cada una.
Y la **diferenciabilidad** es lo que permite derivar. La demostración entera es una derivada de una línea, y esa línea dice algo muy visual: si al moverse por la superficie el vector de posición nunca gana componente en la dirección a, es que uno no se está separando del plano perpendicular a a.

CONEXIÓN

Este resultado es la primera de una familia de caracterizaciones "rígidas" que reaparecen a lo largo del curso, todas con la misma estructura: una condición diferencial simple obliga a la superficie a ser una concreta.
Aquí, normal constante fuerza el plano. Más adelante se verá que *todas las normales pasan por un punto* fuerza la esfera, que *todos los puntos son umbilicales* fuerza plano o esfera, y que $L_{ij} \equiv 0$ fuerza también el plano. Las cuatro se demuestran igual: se deriva la condición a lo largo de curvas y se integra.

Ejercicio 2.11. *Una reglada escondida en una fórmula fea* [H2.2]

Sea la aplicación $x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$x(u,v) = \big(\cos v - (u+v)\,\operatorname{sen} v,\ \operatorname{sen} v + (u+v)\cos v,\ u+2v\big).$$

Estudiar si es una superficie parametrizada y probar que su imagen es una superficie reglada.

Resolución. La idea, antes de la cuenta. Una reglada es una expresión *afín* en uno de los parámetros: $\alpha(v) + u\,w(v)$. Aquí u aparece solo en primer grado y siempre multiplicado por lo mismo, así que basta separar lo que lleva u de lo que no lo lleva. Para la regularidad no hay que inventar nada: se calcula $x_u \times x_v$ y se mira dónde se anula.

Es reglada. Basta agrupar. Escribiendo $u+v$ y separando,

$$x(u,v) = \underbrace{\big(\cos v - v\,\operatorname{sen} v,\ \operatorname{sen} v + v\cos v,\ 2v\big)}_{\alpha(v)} + u\,\underbrace{\big(-\operatorname{sen} v,\ \cos v,\ 1\big)}_{w(v)},$$

que es exactamente la forma $\alpha(v) + u\,w(v)$ de una superficie reglada, con directriz α y generatrices en la dirección de w.

Es superficie parametrizada casi en todas partes. Derivando y abreviando $s = \operatorname{sen} v$, $c = \cos v$, $w = u+v$,

$$x_u = (-s,\ c,\ 1), \qquad x_v = (-2s - wc,\ 2c - ws,\ 2),$$

y el producto vectorial resulta

$$x_u \times x_v = (u+v)\,(s,\ -c,\ 1), \qquad |x_u \times x_v| = \sqrt{2}\,|u+v|.$$

Luego x es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$, pero **solo es regular donde** $u+v \neq 0$. No es superficie parametrizada en $\mathbb{R}^2$ entero; sí lo es en cada uno de los dos semiplanos abiertos $u+v>0$ y $u+v<0$. ■

Qué es esta superficie. La fórmula fea tiene detrás una curva conocida. El vector $w(v) = (-\operatorname{sen} v, \cos v, 1)$ es la velocidad de la hélice $\beta(v) = (\cos v,\ \operatorname{sen} v,\ v)$, y agrupando de otra manera,

$$x(u,v) = \beta(v) + (u+v)\,\beta'(v).$$

Es la **superficie de las tangentes de la hélice**, con $u+v$ en el papel de la distancia medida sobre cada recta tangente. Ahora el resultado de la regularidad se entiende: $x_u = \beta'$, $x_v = 2\beta' + (u+v)\beta''$, y

$$x_u \times x_v = (u+v)\,\beta' \times \beta'' = (u+v)\,(\operatorname{sen} v,\ -\cos v,\ 1).$$

La recta de puntos singulares, $u+v=0$, es la propia hélice, porque $x(-v,v) = \beta(v)$. Es la condición «$v \neq 0$» del catálogo de regladas, escrita en otras coordenadas.

Qué hemos aprendido, y dónde se falla. Dos cosas se llevan a cualquier otro problema. La primera: ante una parametrización desconocida, buscar el parámetro en que es afín y reconocer la curva de la que sale; la fórmula *parece* regular en todas partes y no lo es. La segunda: sobre una curva con $k>0$ y $\tau \neq 0$, como esta hélice, la superficie de las tangentes

es la única de las tres regladas de Frenet con puntos singulares, siempre sobre la curva; su determinante $(\beta', \beta', \beta'')$ es nulo, y los de las otras dos valen τ. El error típico es concluir «no es superficie parametrizada» y detenerse: lo es en cada uno de los dos semiplanos, que son las dos hojas de la superficie a un lado y otro de la hélice.

Ejercicio 2.12. *Rectas inclinadas sobre una circunferencia* [H2.3]

Una recta variable r corta a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ en un punto P y es ortogonal al radio en dicho punto, formando un ángulo de $\pi/4$ con la tangente a la circunferencia en P. Hallar la expresión como superficie parametrizada de la superficie reglada engendrada por r.

Resolución. *La base ortonormal en cada punto.* En $P(u) = (\cos u,\ \operatorname{sen} u,\ 0)$ se tienen tres direcciones ortogonales naturales: la del radio, la de la tangente y la vertical,

$$\rho(u) = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0), \qquad \tau(u) = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0), \qquad k = (0, 0, 1).$$

La dirección de la recta. Que r sea ortogonal al radio obliga a que su dirección esté en el plano generado por τ y k. Hay dos direcciones de recta posibles que forman $\pi/4$ con τ. Elegimos la que tiene componente vertical positiva:

$$w(u) = \cos\frac{\pi}{4}\,\tau(u) + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\,k = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-\operatorname{sen} u,\ \cos u,\ 1\big).$$

La superficie. Absorbiendo el factor $1/\sqrt{2}$ en el parámetro,

$$\boxed{x(u, v) = \big(\cos u - v \operatorname{sen} u,\ \operatorname{sen} u + v \cos u,\ v\big).}$$

Qué superficie es. Eliminando los parámetros,

$$x^2 + y^2 = \cos^2 u - 2v \operatorname{sen} u \cos u + v^2 \operatorname{sen}^2 u + \operatorname{sen}^2 u + 2v \operatorname{sen} u \cos u + v^2 \cos^2 u = 1 + v^2,$$

y como $z = v$,

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 :$$

el **hiperboloide de una hoja**. Para comprobar también la regularidad,

$$x_u \times x_v = (\cos u - v \operatorname{sen} u, \operatorname{sen} u + v \cos u,\ -v), \qquad |x_u \times x_v|^2 = 1 + 2v^2 > 0.$$

Por tanto x es superficie parametrizada para $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. ■

CONEXIÓN

Aquí se cierra un círculo con el ejercicio en el que se hizo girar una rama de hipérbola alrededor de OY. Allí salió un hiperboloide congruente, con el eje girado, como superficie de revolución, y se comentó de pasada que además era reglada de dos maneras. Este ejercicio lo demuestra: la familia obtenida con ángulo $+\pi/4$ es una de las dos, y tomando $-\pi/4$, es decir $w = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\operatorname{sen} u, \cos u, -1)$, sale la otra.
Que por cada punto pasen *dos* rectas de la superficie es lo que hace del hiperboloide de una hoja el ejemplo favorito de todo el tema. Como reglada tiene $K \leq 0$; como tiene dos familias distintas de rectas, resulta natural preguntar por su curvatura. En el capítulo 4 se podrá comprobar

$K = -1/(1+2v^2)^2 < 0$ en todos sus puntos. Tener dos familias de rectas no basta por sí solo para concluirlo: un plano tiene muchas. Compárese con la reglada del ejercicio anterior, que solo tiene una familia y sí es desarrollable.
Y hay una consecuencia práctica: se puede construir una estructura con forma hiperbólica usando vigas rectas. Es una ventaja geométrica de esta superficie.

Ejercicio 2.13. *El gradiente es normal a las superficies de nivel* [H2.10]

Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable, M una superficie de nivel de f y $p \in M$. Probar que $(\nabla f)_p$ es normal a M en p.

Resolución. Sea $v \in T_p(M)$ arbitrario. Por la caracterización del plano tangente, existe una curva diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$.

Como la curva vive dentro de la superficie de nivel, la función $f \circ \alpha$ es **constante**, igual al valor c del nivel. Derivando en $t = 0$ y aplicando la regla de la cadena,

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_0 f(\alpha(t)) = (\nabla f)_p \cdot \alpha'(0) = (\nabla f)_p \cdot v.$$

Como v era un vector tangente cualquiera, $(\nabla f)_p$ es ortogonal a todo $T_p(M)$, es decir, normal a M en p. ■

QUÉ DEJA. Este resultado de tres líneas es el que sostiene la mitad de los cálculos del curso, y conviene tenerlo con sus dos consecuencias.

La primera: donde $\nabla f \neq 0$ en una superficie dada por $f = c$, un campo normal unitario es $\mathbf{N} = \nabla f / |\nabla f|$, sin necesidad de parametrizar. Eso ahorra páginas cada vez que aparece una superficie implícita.

La segunda: como ese campo está definido *globalmente* sobre toda la superficie de nivel, **toda superficie de nivel con valor regular es orientable**. Es el argumento que se usó con los dos hiperboloides y que sirve igual para la esfera, el elipsoide o el toro escrito implícitamente. La banda de Möbius, que no es orientable, no puede escribirse así.

Ejercicio 2.14. *El pie de la perpendicular desde el origen* [H2.14]

Sea $x : U \to \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada. Se considera la recta normal a x en cada punto $x(u, v)$. Desde el origen se traza la recta perpendicular a esta recta normal y su intersección se denota por $y(u, v)$.

1. Si $y(u, v)$ es una superficie parametrizada, probar que su expresión paramétrica es $y = x - x \cdot \mathbf{N}\mathbf{N}$.
2. Probar que si x es un plano, entonces y también lo es.
3. Justificar qué superficie es y en los casos en que x sea la esfera S^2, un cilindro de eje OZ o un cono de vértice el origen y eje OZ.

Resolución. 1. La fórmula. La recta normal en $x(u, v)$ es $\{x + t\mathbf{N} : \ t \in \mathbb{R}\}$. El pie de la perpendicular desde el origen es el punto p de esa recta cuyo vector de posición es ortogonal a la dirección de la recta:

$$\big(x + t\mathbf{N}\big) \cdot \mathbf{N} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x \cdot \mathbf{N} + t = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = -x \cdot \mathbf{N},$$

donde se ha usado $\mathbf{N}\cdot\mathbf{N} = 1$. Sustituyendo,

$$y = x - x\cdot\mathbf{N}\,\mathbf{N}.$$

Se reconoce lo que es: la **proyección ortogonal del vector de posición sobre el plano tangente vectorial**: se proyecta un vector sobre el subespacio de direcciones, no un punto sobre el plano afín que pasa por x.

2. Si x es un plano. Entonces $\mathbf{N} \equiv \mathbf{N}_0$ es constante y la ecuación del plano es $X\cdot\mathbf{N}_0 = c$ para cierta constante c. Luego

$$y = x - c\,\mathbf{N}_0,$$

que es la traslación de x por el vector constante $-c\mathbf{N}_0$: otro plano, concretamente el plano paralelo **que pasa por el origen**.

3. Los tres casos.

La esfera unidad centrada en el origen. Aquí $\mathbf{N} = \pm x$, luego $x\cdot\mathbf{N} = \pm 1$ y

$$y = x - (\pm 1)(\pm x) = x - x = 0.$$

La imagen se reduce al **origen**: no es una superficie. Y es lo esperable, porque todas las normales de la esfera pasan por el centro, de modo que el pie de la perpendicular desde el centro a cada una de ellas es el propio centro.

El cilindro de eje OZ y radio r. Con $x(u,v) = (r\cos u,\ r\,\mathrm{sen}\,u,\ v)$ se tiene $\mathbf{N} = (\cos u, \mathrm{sen}\,u, 0)$ y $x\cdot\mathbf{N} = r$, luego

$$y = x - r\mathbf{N} = (0,\ 0,\ v)\ :$$

la imagen es el **eje** OZ, una recta. Tampoco es una superficie. Geométricamente: las normales del cilindro son radiales y cortan al eje, así que el pie de la perpendicular desde el origen cae siempre sobre el eje.

El cono de vértice el origen y eje OZ. Con $x(u,v) = (u\cos v,\ u\,\mathrm{sen}\,v,\ au)$, en los tramos $u \neq 0$, sale $\mathbf{N} = (-a\cos v,\ -a\,\mathrm{sen}\,v,\ 1)/\sqrt{a^2+1}$ y

$$x\cdot\mathbf{N} = \frac{-au\cos^2 v - au\,\mathrm{sen}^2 v + au}{\sqrt{a^2+1}} = 0,$$

de modo que $y = x$: la imagen es **el propio cono**. La razón es que el vector de posición x va a lo largo de la generatriz que pasa por el origen y es, por tanto, tangente a la superficie; siendo tangente, es ya perpendicular a la normal, y el pie de la perpendicular es el punto de partida. ■

LA IDEA: TRES RESULTADOS DISTINTOS DE LA MISMA CONSTRUCCIÓN

Los ejemplos muestran tres resultados distintos: colapso a un punto, colapso a una recta y conservación de la superficie. En el cono, fuera del vértice, no hay degeneración de la construcción.

El valor de $x\cdot\mathbf{N}$ mide **cuánto se aleja el vector de posición de ser tangente**. Si vale $\pm|x|$, el vector de posición es *todo* normal: eso es la esfera centrada en el origen, y y colapsa al origen. Si vale 0, el vector de posición es *todo* tangente: eso es el cono con vértice en el origen, e y no se mueve. El cilindro está en medio: la componente normal es constante e igual al radio, y y colapsa al eje, que es un grado menos de degeneración.

En otros ejemplos hay que comprobar la regularidad de y directamente. No se debe confundir esta construcción con el pie de la perpendicular al *plano tangente*: ese pie es $x \cdot \mathbf{NN}$, la componente complementaria.

Ejercicio 2.15. *La esfera agujereada sí cabe en una carta; el toro agujereado, no* [H2.7]

Probar que el toro menos un punto es una s.r. no compacta que no es imagen de una superficie simple que sea un homeomorfismo sobre su imagen. Comparar con la esfera menos un punto.

Resolución. Es superficie regular. El toro menos un punto es un abierto del toro, por ser el complementario de un punto en un espacio Hausdorff, y ya se probó que todo abierto de una s.r. es una s.r..

No es compacto. Si T es el toro y $p \in T$, entonces $T \setminus \{p\}$ no es cerrado en $\mathbb{R}^3$: el punto p es adherente a él, por ser el toro una superficie y por tanto no tener puntos aislados, y sin embargo no le pertenece. Un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^3$ es cerrado, luego $T \setminus \{p\}$ no lo es.

El contraste con la esfera. Antes de la parte negativa conviene ver el caso en que la respuesta es afirmativa, porque es el que explica dónde está la diferencia. La esfera menos un punto *sí* es imagen de una única carta: la inversa de la **proyección estereográfica** desde el punto suprimido,

$$x(u,v) = \frac{1}{u^2+v^2+1}\big(2u,\ 2v,\ u^2+v^2-1\big), \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

es una superficie simple, homeomorfismo sobre su imagen, cuya imagen es exactamente S^2 menos el polo norte. Es el ejemplo estándar de superficie no compacta con parametrización global.

Por qué con el toro falla. Si existiera una superficie simple $x : U \to \mathbb{R}^3$, homeomorfismo sobre su imagen, con $x(U) = T \setminus \{p\}$, entonces $T \setminus \{p\}$ sería homeomorfo al abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Y eso es falso.

La herramienta topológica que hace falta es el **teorema de Jordan**: una curva cerrada simple del plano separa el plano en un interior y un exterior.

Elijamos en el toro un meridiano y un paralelo que no pasen por p. Son curvas cerradas simples y se cruzan transversalmente en un solo punto. Bajo el supuesto homeomorfismo con U, sus imágenes seguirían siendo dos curvas cerradas simples del plano con un solo cruce: cerca de él, una pasa de un lado de la otra al lado opuesto. Pero esto contradice Jordan. Después de cruzar de dentro a fuera, una curva cerrada debe volver a entrar para regresar al punto de partida, y eso exige otro cruce. Luego tal homeomorfismo no existe.

Es una prueba topológica, con Jordan como resultado previo; la compacidad por sí sola no resuelve el enunciado una vez retirado el punto. ■

LA IDEA: EL MAPA DE QUIÉN CABE EN UNA CARTA

Conviene ordenar los tres casos, porque juntos dan la regla general.
El **toro entero** y la **esfera entera** no caben en una carta, y la razón es elemental: son compactos y los abiertos del plano no lo son.

La **esfera menos un punto** sí cabe, y la carta es la estereográfica. Al quitar un punto desaparece la compacidad y con ella el obstáculo, porque la esfera no tenía ningún otro.
El **toro menos un punto** no cabe, y ahí el obstáculo ya no es la compacidad sino la forma de cruzarse de sus curvas cerradas. Un abierto del plano puede tener agujeros, como una corona circular, pero no admite el cruce único de un meridiano con un paralelo.
La moraleja es que quitar la compacidad elimina un obstáculo, pero no todos. En este ejercicio el argumento que queda es topológico: lo aporta Jordan.

2.4 Plano tangente y vector normal a una superficie regular

LA PREGUNTA

Una bola apoyada sobre una mesa toca en un solo punto, y sin embargo "sabe" hacia dónde rodaría si la mesa se inclinara: en ese punto la mesa le ofrece una dirección de apoyo y un plano entero de posibles movimientos. Un panel solar necesita la misma información, hacia dónde mira la superficie en cada punto, para orientarse al sol. ¿Cómo se define con precisión "hacia dónde mira" una superficie en un punto, y por qué todas las direcciones tangentes forman un plano y no cualquier otra cosa?

Definición. Sea $x : U \to M$ una p.l. y $p = x(u_0, v_0)$. El **plano tangente** a x en p es el que pasa por p y tiene como vector característico $\mathbf{X}_1(p) \times \mathbf{X}_2(p)$. El **vector normal** a x en p es

$$\mathbf{N}(p) = \frac{\mathbf{X}_1(p) \times \mathbf{X}_2(p)}{|\mathbf{X}_1(p) \times \mathbf{X}_2(p)|},$$

unitario y bien definido por la condición de regularidad. La **recta normal** es la que pasa por p con dirección $\mathbf{N}(p)$, y el **campo normal unitario** es la aplicación $\mathbf{N} : U \to \mathbb{R}^3$ correspondiente. Sus valores están en la esfera unidad. Si esta aplicación $\mathbf{N}$ es a su vez una superficie simple, recibe el nombre de **indicatriz esférica de las normales**, que es su nombre clásico. No siempre lo es: en un plano, por ejemplo, $\mathbf{N}$ es constante.

Proposición. Si $f : V \to U$ es una transformación coordenada e $y = x \circ f$, entonces el plano tangente y la recta normal a y coinciden con los de x en los puntos correspondientes. El vector normal cambia de sentido exactamente cuando $\det J(f) < 0$.

La idea, en una línea. Cambiar de carta multiplica el producto vectorial por un número no nulo, y multiplicar un vector por un número no mueve la recta que genera ni el plano que le es perpendicular: solo puede darle la vuelta, y le da la vuelta cuando ese número es negativo.

Todo sale de la igualdad (2.1), ya establecida al estudiar los cambios de carta,

$$\mathbf{Y}_1 \times \mathbf{Y}_2 = \big(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2\big) \det J(f),$$

y de que $\det J(f) \neq 0$ por ser f una transformación coordenada. Los dos productos vectoriales son entonces proporcionales con factor no nulo, luego generan la misma

recta —la normal— y tienen el mismo plano perpendicular —el tangente—; y como multiplicar por un escalar solo puede conservar o invertir el sentido, el vector normal se invierte exactamente cuando ese escalar es negativo, es decir, cuando $\det J(f) < 0$. ■

Gracias a esta invariancia se puede hablar del **plano tangente a** M **en** p y de la recta normal sin referencia a ninguna p.l. concreta. Conviene distinguir dos objetos que suelen recibir el mismo nombre: $T_p(M) = \operatorname{span}\{\mathbf{X}_1(p), \mathbf{X}_2(p)\}$ es el **plano vectorial** de direcciones, que pasa por el origen; $p + T_p(M)$ es el **plano afín** que pasa por p, definido arriba. Al dibujar los vectores tangentes con origen en p se identifica visualmente uno con el otro. En las operaciones con vectores usaremos $T_p(M)$ en el sentido vectorial.

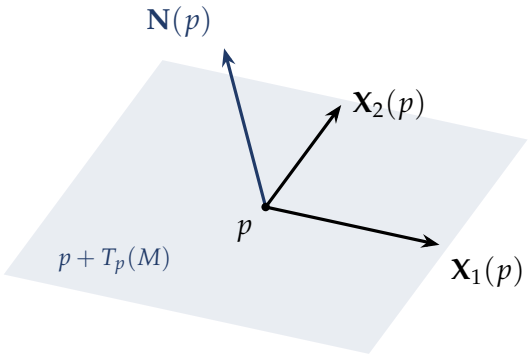


Figura 2.8: El plano afín tangente pasa por p y tiene las direcciones de los dos campos coordenados, dibujados con origen en p. El vector normal unitario es su producto vectorial normalizado. Cambiar de parametrización local no mueve el plano; solo puede invertir el sentido de $\mathbf{N}$.

2.4.1 Qué es de verdad el plano tangente

La definición anterior es operativa pero no explica nada: dice cómo calcular el plano, no qué es. La caracterización geométrica es la que sigue, y es la que hay que tener en la cabeza.

Definición. Una **curva diferenciable en** $x(U)$ es la imagen por x de una curva parametrizada diferenciable en U; es decir, es de la forma $\alpha(t) = x\big(u(t), v(t)\big)$. Un **vector tangente a** x **en** p es el vector velocidad en p de alguna curva diferenciable en $x(U)$ que pase por p. Se denota

$$T_p(x) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{u} \text{ es tangente a } x \text{ en } p\}.$$

Esta definición coincide con la de aplicación diferenciable de un intervalo a $x(U)$: por la definición de diferenciabilidad en cartas, α lo es si y solo si $x^{-1} \circ \alpha = (u, v)$ lo es. Recíprocamente, dadas $u(t)$ y $v(t)$ diferenciables, la composición $\alpha = x \circ (u, v)$ es diferenciable. Así, hablar de curvas mediante sus coordenadas no añade ni elimina curvas diferenciables.

Definición. Las **curvas paramétricas** en x son las imágenes de las rectas coordenadas de U: la *u-curva* $\alpha(u) = x(u, v_0)$ y la *v-curva* $\beta(v) = x(u_0, v)$. Por cada punto de $x(U)$ pasa exactamente una de cada familia.

Ejemplo. En una superficie de revolución, las curvas paramétricas son justamente los meridianos y los paralelos: la t-curva es la posición que ocupa la generatriz para un ángulo fijo, y la θ-curva es la circunferencia que describe un punto de la generatriz al girar.

En una superficie reglada $x(t,v) = \alpha(t) + v\,w(t)$, la curva $v = 0$ es la directriz y las v-curvas son las generatrices rectilíneas. En la parte regular, las curvas $v = v_0$ son transversales a las generatrices. La distancia al punto correspondiente de la directriz, medida sobre cada recta, es $|v_0|\,|w(t)|$; vale la constante $|v_0|$ si w es unitario.

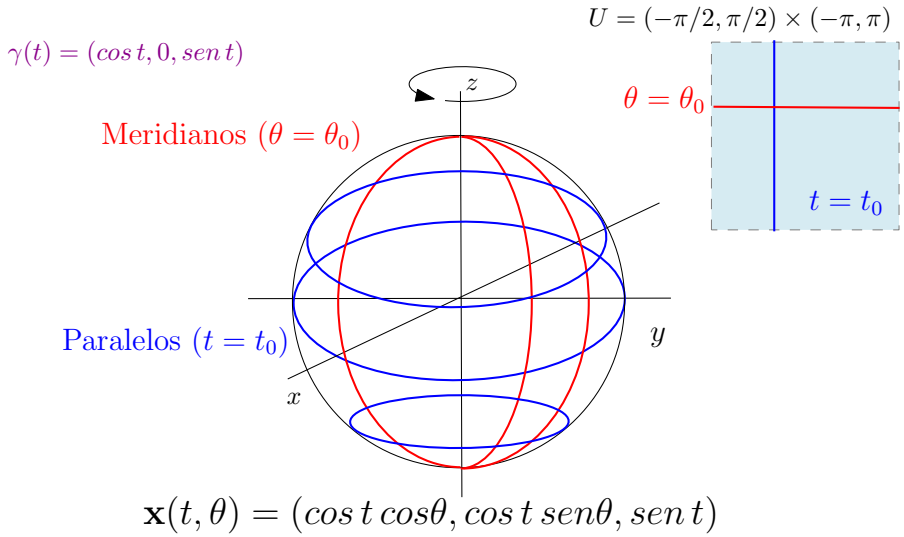


Figura 2.9: Meridianos y paralelos de la esfera unidad, con la notación de la figura: t es la latitud y θ la longitud. Las rectas coordenadas del dominio se convierten en curvas de la superficie. Figura del material oficial, lección 2.

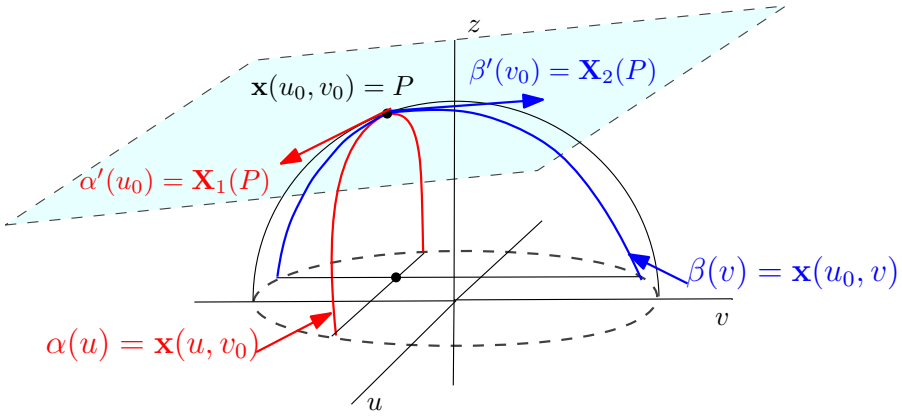


Figura 2.10: Las velocidades de las dos curvas coordenadas generan el plano tangente. Los vectores $X_1(P)$ y $X_2(P)$ son tangentes a las curvas roja y azul, respectivamente. Figura del material oficial, lección 2.

La idea, en versión intuitiva: el plano tangente no depende de la carta

El plano tangente se define eligiendo una parametrización —es el generado por $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$—, y la misma superficie admite infinitas, cada una con sus propios campos coordenados. Hay, pues, una deuda que pagar antes de seguir; y el teorema la salda: el plano generado es siempre el mismo. La razón es la regla de la cadena. Al cambiar de carta, los nuevos vectores básicos son combinaciones lineales de los viejos con los coeficientes del jacobiano del cambio, y ese jacobiano es invertible. Una combinación lineal invertible cambia la *base*, no el *plano* que esa base genera.
Conviene quedarse con el patrón, porque se repite en todo el curso: cada vez que algo se define eligiendo una carta hay que comprobar que no depende de la elección, y la comprobación es siempre esta, la regla de la cadena y un jacobiano invertible.

Teorema. $T_p(x)$ es un espacio vectorial de dimensión 2 y coincide con el plano vectorial de direcciones tangentes a x en p. Además, $\mathbf{u} \in T_p(x)$ si y solo si $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{X}_1(p) + \mu \mathbf{X}_2(p)$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

La idea, antes de la cuenta: el catálogo de velocidades permitidas. Se comparan dos conjuntos —las velocidades con las que se puede pasar por p sin salirse de la superficie, y el plano generado por los dos campos coordenados— y, como toda igualdad de conjuntos, se demuestra por doble inclusión. Una de las dos la hace sola la regla de la cadena: moverse por la superficie es moverse en el mapa, luego toda velocidad es u' veces el primer campo más v' veces el segundo.

La que cuesta es la contraria, y es el núcleo, porque hay que *fabricar* una curva con la velocidad pedida y eso no lo da ningún teorema. La imagen resuelve el problema antes de empezar: para ir en la dirección λ por un eje del mapa y μ por el otro, se dibuja en el mapa la recta que va en esa dirección y se mira su imagen sobre la superficie.

Paso 1: los campos coordenados son tangentes. Como U es abierto, existe $\varepsilon > 0$ con $(u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon) \times (v_0 - \varepsilon, v_0 + \varepsilon) \subseteq U$. La u-curva $\alpha(u) = x(u, v_0)$ cumple $\alpha(u_0) = p$ y $\alpha'(u_0) = \mathbf{X}_1(p)$, luego $\mathbf{X}_1(p) \in T_p(x)$. Lo mismo para $\mathbf{X}_2(p)$ con la v-curva.
Paso 2: todo vector tangente es combinación, por la regla de la cadena. Si $\mathbf{u} \in T_p(x)$, existe una curva diferenciable $\alpha(t) = x\big(u(t), v(t)\big)$ con $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = \mathbf{u}$. Por la regla de la cadena,

$$\alpha'(t) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt}, \qquad \text{luego} \qquad \mathbf{u} = u'(t_0)\,\mathbf{X}_1(p) + v'(t_0)\,\mathbf{X}_2(p).$$

Paso 3: toda combinación es tangente, exhibiendo la curva (el núcleo de la prueba). Dado $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{X}_1(p) + \mu \mathbf{X}_2(p)$, la curva que hay que fabricar es la imagen de la recta del mapa que arranca en (u_0, v_0) con dirección (λ, μ):

$$\alpha(t) = x\big(u_0 + \lambda t,\ v_0 + \mu t\big),$$

definida para t en un intervalo suficientemente pequeño para que el argumento siga en U. Cumple $\alpha(0) = p$, y derivando por la regla de la cadena, que aquí da $u'(0) = \lambda$ y $v'(0) = \mu$ porque las dos coordenadas son afines en t,

$$\alpha'(0) = \lambda\,\mathbf{X}_1(p) + \mu\,\mathbf{X}_2(p) = \mathbf{u},$$

que es exactamente lo que se pedía.
Paso 4: contar la dimensión. $T_p(x)$ es entonces el subespacio generado por $\mathbf{X}_1(p)$ y $\mathbf{X}_2(p)$, que son linealmente independientes por la condición de regularidad. Luego es un espacio vectorial de dimensión 2 con base $\{\mathbf{X}_1(p), \mathbf{X}_2(p)\}$, y es el plano vectorial ortogonal a $\mathbf{X}_1(p) \times \mathbf{X}_2(p)$. Al trasladarlo por p se obtiene el plano afín tangente. ■

Qué hizo cada hipótesis. La regularidad aparece una sola vez y al final, en el paso 4, y su papel es dimensional: sin ella los dos campos podrían generar una recta o incluso el subespacio nulo. Y hay algo más sutil que conviene ver: que U sea *abierto* se usa en los pasos 1 y 3, y no es un detalle. En los dos hay que moverse un poco en el mapa sin salirse de él, y por eso las curvas que se construyen están definidas solo en un intervalo pequeño. De ahí que el plano tangente sea un objeto local: se lee en un entorno del punto; no hace falta que una sola carta cubra la superficie entera.

LA IDEA: DOS DEFINICIONES Y POR QUÉ CONVIENE TENER LAS DOS

El teorema dice que dos cosas muy distintas coinciden, y cada una sirve para algo distinto.
La **definición geométrica** es «todas las velocidades posibles de curvas que pasan por p sin salirse de la superficie». Es la que hay que usar para *entender*: el plano tangente es el conjunto de direcciones en las que uno puede moverse quedándose sobre la superficie, a primer orden.
La **definición operativa** es «el generado por $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$». Es la que hay que usar para *calcular*: da una base concreta en la que escribir cualquier vector con dos números.
Y la traducción entre ambas es la regla de la cadena, que aparece en la demostración: las coordenadas de $\mathbf{u}$ en la base $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$ son exactamente $\big(u'(t_0), v'(t_0)\big)$, las derivadas de las coordenadas locales de la curva. Esa identificación es la que permite, de aquí en adelante, escribir una curva sobre la superficie por sus dos funciones coordenadas $u(t)$ y $v(t)$ y olvidarse del espacio ambiente.

EXPLÍCATE. *En la tercera parte de la demostración hubo que elegir con cuidado el intervalo donde definir la curva. ¿Por qué no vale tomar $t \in \mathbb{R}$ sin más? La respuesta explica por qué la construcción es local.*

Ejercicios de esta sección

Ejercicio 2.16. *Todas las normales pasan por un punto* [H2.13]

Demostrar que si todas las rectas normales a una superficie parametrizada de dominio conexo pasan por un mismo punto, entonces su imagen es parte de una esfera centrada en ese punto.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Traduce «la recta normal en $x(u, v)$ pasa por P» a una igualdad vectorial. Aparece una función escalar desconocida.*
2. *Deriva esa igualdad respecto de cada variable y multiplica escalarmente por $\mathbf{N}$. Dos de los tres términos se anulan, cada uno por un motivo distinto.*

3. *La regla del capítulo 1 sobre campos de módulo constante sigue valiendo aquí.*

Resolución. Que la recta normal en $x(u,v)$ pase por el punto P significa que el vector que va de P a $x(u,v)$ es paralelo a $\mathbf{N}(u,v)$; es decir, existe una función escalar λ con

$$x(u,v) - P = \lambda(u,v)\,\mathbf{N}(u,v). \tag{2.3}$$

Esa función es diferenciable, porque multiplicando escalarmente por $\mathbf{N}$, que es unitario, se obtiene $\lambda = (x-P)\cdot\mathbf{N}$, composición de aplicaciones diferenciables.

Derivando (2.3) respecto de u,

$$\mathbf{X}_1 = \frac{\partial\lambda}{\partial u}\,\mathbf{N} + \lambda\,\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial u},$$

y multiplicando escalarmente por $\mathbf{N}$:

$$\underbrace{\mathbf{X}_1\cdot\mathbf{N}}_{=0} = \frac{\partial\lambda}{\partial u}\underbrace{\mathbf{N}\cdot\mathbf{N}}_{=1} + \lambda\,\underbrace{\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial u}\cdot\mathbf{N}}_{=0}.$$

El primer término se anula porque $\mathbf{X}_1$ es tangente y $\mathbf{N}$ es normal. El último se anula porque $\mathbf{N}$ es un campo de módulo constante, luego es ortogonal a sus derivadas. Queda $\partial\lambda/\partial u = 0$. Repitiendo la cuenta con $\mathbf{X}_2$ y v en lugar de $\mathbf{X}_1$ y u — lo único que cambia es la variable respecto de la que se deriva: $\mathbf{X}_2\cdot\mathbf{N} = 0$ por ser $\mathbf{X}_2$ tangente, $\mathbf{N}\cdot\mathbf{N} = 1$ por ser $\mathbf{N}$ unitario y $\partial\mathbf{N}/\partial v\cdot\mathbf{N} = 0$ por la misma regla del módulo constante — queda también $\partial\lambda/\partial v = 0$.

Por tanto λ es constante en cada componente conexa del dominio, y tomando módulos en (2.3),

$$|x(u,v) - P| = |\lambda|\,|\mathbf{N}(u,v)| = |\lambda|.$$

Es decir, en cada componente conexa todos los puntos están a la misma distancia de P, y su imagen está contenida en una esfera de centro P. Como el dominio es conexo, la esfera es una sola. ■

Observación. La conexión del dominio es necesaria para concluir que hay una sola esfera: con un dominio formado por dos discos disjuntos, uno enviado a una esfera de radio 1 centrada en P y el otro a una de radio 2, todas las normales pasan por P y no hay una única esfera. En cambio, $\lambda \neq 0$ no es una hipótesis adicional: si la constante λ fuera nula, la imagen se reduciría al punto P, cosa que la condición de regularidad impide, de modo que basta con señalarlo.

LA IDEA: EL MISMO EJERCICIO QUE YA HICISTE EN EL CAPÍTULO 1

Merece la pena poner los dos enunciados uno al lado del otro, porque son el mismo problema en dimensiones distintas y se resuelven con el mismo movimiento.
En curvas: si todas las rectas normales principales de una curva pasan por un punto fijo, la curva es una circunferencia. Aquí: si todas las rectas normales de una superficie pasan por un punto fijo, la superficie es parte de una esfera.
Y el método es idéntico en los dos casos:

1. escribir la condición como «vector diferencia igual a un escalar por un campo unitario»;
2. derivar;

3. proyectar sobre el campo unitario, con lo que caen los términos tangenciales por ortogonalidad y el término de la derivada del campo por ser este de módulo constante;
4. concluir que el escalar es constante.

Este esquema resuelve, entre los dos capítulos, al menos cinco problemas de las hojas. Conviene aprendérselo como un todo y no como cinco cosas distintas.

QUÉ DEJA. El esquema de arriba, entero. Y una observación que rentabiliza el ejercicio: la función $\lambda = (x - P)\cdot\mathbf{N}$ mide la componente normal del vector que va de P a x. Su valor absoluto es la distancia de P al plano afín tangente. Probar que es constante es el núcleo de varios problemas sobre superficies.

Ejercicio 2.17. *La superficie reglada de las binormales*

Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. alabeada con $k(s) > 0$, y sea

$$X(s,t) = \alpha(s) + t\,\mathbf{b}(s)$$

la superficie reglada de sus binormales. Estudiar si X es una superficie parametrizada y discutir su orientabilidad. Calcular además el plano tangente a lo largo de la propia curva α.

Resolución. La idea, antes de la cuenta. Es el mecanismo de las regladas construidas sobre una curva, con $w = \mathbf{b}$: derivar con Frenet, multiplicar en la base del triedro y leer. Se puede prever el resultado. El determinante $(\mathbf{t}, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}})$ vale τ, pero aquí ni siquiera hace falta: sobre la curva, $\mathbf{X}_1 = \mathbf{t}$ y $\mathbf{X}_2 = \mathbf{b}$ son ortonormales, y al alejarse por la generatriz $\mathbf{X}_1$ solo gana una componente en la dirección $\mathbf{n}$, perpendicular a las dos. Nada puede cancelar el término que ya había en $t = 0$.

Es una superficie parametrizada. Las derivadas parciales son

$$\mathbf{X}_1 = \frac{\partial X}{\partial s} = \dot{\alpha} + t\,\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{t} - t\tau\,\mathbf{n}, \qquad \mathbf{X}_2 = \frac{\partial X}{\partial t} = \mathbf{b},$$

donde se ha usado $\dot{\mathbf{b}} = -\tau\,\mathbf{n}$. El producto vectorial es

$$\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = \big(\mathbf{t} - t\tau\,\mathbf{n}\big) \times \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{b} - t\tau\,(\mathbf{n} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{n} - t\tau\,\mathbf{t},$$

usando $\mathbf{t} \times \mathbf{b} = -\mathbf{n}$ y $\mathbf{n} \times \mathbf{b} = \mathbf{t}$. Como $\mathbf{t}$ y $\mathbf{n}$ son ortonormales,

$$|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|^2 = 1 + t^2\tau^2 \;\geq\; 1 > 0.$$

El producto vectorial no se anula nunca, sea cual sea la torsión y sea cual sea t. Luego X cumple la condición de regularidad en todo su dominio y es una s.p..

Orientabilidad. Sobre el dominio de parámetros, el campo

$$\mathbf{N}(s,t) = \frac{-\mathbf{n}(s) - t\tau(s)\,\mathbf{t}(s)}{\sqrt{1 + t^2\tau^2(s)}}$$

está definido, es unitario y es diferenciable. Esto orienta la superficie parametrizada. Para concluir que su *imagen* es una superficie regular orientable hace falta justificar que ese normal define un campo sin ambigüedad en la imagen; por ejemplo, basta que X sea una carta

global. La condición de regularidad por sí sola no excluye autointersecciones ni identifica los normales de parámetros que representan el mismo punto.

Plano tangente a lo largo de α. Basta hacer $t = 0$:

$$\mathbf{X}_1(s,0) = \mathbf{t}(s), \qquad \mathbf{X}_2(s,0) = \mathbf{b}(s), \qquad \mathbf{N}(s,0) = -\mathbf{n}(s).$$

El plano tangente en los puntos de la curva está generado por **t** y **b**: es exactamente el **plano rectificante** de α. ■

LA IDEA: POR QUÉ SALE EL PLANO RECTIFICANTE, SIN CALCULAR

El resultado se puede prever antes de derivar nada, y conviene acostumbrarse a hacerlo porque justificar sin calcular es siempre más barato y más seguro.
El plano tangente a una superficie reglada, en un punto de la directriz, tiene que contener dos direcciones: la de la propia directriz, que es **t**, y la de la generatriz que pasa por ese punto, que aquí es **b**. El plano generado por **t** y **b** es, por definición, el rectificante. No hay nada más que decidir.
El mismo razonamiento da de golpe los otros dos casos clásicos:

- Superficie de las **normales principales**: el plano tangente a lo largo de la curva está generado por **t** y **n**, luego es el **osculador**.
- Superficie de las **tangentes**: ahí los dos vectores coinciden y la condición de regularidad falla sobre la propia curva, que es justo por lo que se exige $t \neq 0$ en ese caso.

Saber qué plano tangente hay a lo largo de la directriz es lo que permite contestar, en el capítulo 4, si la curva es línea asintótica o línea de curvatura de esa superficie. Los apartados que vienen después se apoyan enteramente en este cálculo.

Qué hemos aprendido: cómo gira el plano tangente a lo largo de una binormal. El cálculo da más de lo que se ha pedido. Sobre la curva el normal es $-\mathbf{n}(s)$; a distancia t sobre la misma generatriz es $\mathbf{N}(s,t)$, y el ángulo φ entre los dos cumple

$$\cos\varphi = \mathbf{N}(s,t)\cdot\big(-\mathbf{n}(s)\big) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2\tau^2}}, \qquad \text{es decir,} \qquad \operatorname{tg}\varphi = |t\,\tau|.$$

En palabras: al alejarse por la binormal, el plano tangente gira alrededor de ella, y lo que lo hace girar es la torsión. Con la hélice $(\cos u, \operatorname{sen} u, u)$, cuya torsión vale $\frac{1}{2}$, a distancia $t = 2$ de la curva el plano tangente ha girado ya 45°. Muy lejos, **N** se acerca a $\pm\mathbf{t}$, según el signo de $t\tau$, y el plano tangente se acerca al plano normal de la curva, que es el que contiene a la binormal y es perpendicular a **t**.

El caso límite lo aclara todo. Si $\tau \equiv 0$, la curva es plana, **b** es un vector constante $\mathbf{b}_0$ y la superficie es el cilindro recto $\alpha(s) + t\,\mathbf{b}_0$ levantado sobre ella. Entonces $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = -\mathbf{n}$ no depende de t: el plano tangente es el mismo a lo largo de toda la generatriz. Esa es la propiedad que en el capítulo 4 caracteriza a las desarrollables (sección 4.5.3); la superficie de las binormales de una curva con torsión no nula, cuyo plano tangente gira, no lo es.

Dónde se falla. Escribir $\mathbf{t} \times \mathbf{b} = +\mathbf{n}$: el normal sale con el signo cambiado y, con él, la orientación que se elija para los apartados siguientes. Pensar que la regularidad depende de la torsión: la norma vale al menos 1 para cualquier curva; la torsión solo decide si el plano tangente gira. Y dar por orientable la imagen sin mirar si la parametrización es inyectiva, que es el matiz que se ha señalado en la resolución.

2.5 Orientación de superficies

LA PREGUNTA

Elegir un lado de una superficie parece trivial: se pinta una cara de rojo y la otra de azul. Möbius y Listing descubrieron en 1858, de forma independiente, que hay superficies donde eso no se puede hacer. ¿Qué propiedad exacta falla ahí, y cómo se detecta sin tener que recorrer la superficie entera?

LA IDEA: QUÉ PROBLEMA SE ESTÁ RESOLVIENDO

En cada punto de una p.l., el plano tangente viene con una base ordenada, $\{\mathbf{X}_1(p), \mathbf{X}_2(p)\}$, y por tanto con un sentido de giro positivo. Equivalentemente, viene con un lado marcado: el que señala $\mathbf{N}(p)$.
La pregunta de la sección es si esas elecciones locales se pueden coser en una elección global coherente. Es decir: ¿se puede pintar toda la superficie de un color por un lado y de otro por el otro, sin que los colores se encuentren?
Para casi todas las superficies conocidas la respuesta es sí, y parece obvio que deba serlo. El interés de la sección está en el ejemplo donde no.

Si $f : V \to U$ es una transformación coordenada e $y = x \circ f$, entonces $T_p(x) = T_p(y)$, pero se pasa de la base $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$ a la base $\{Y_1, Y_2\}$ por la matriz $J(f)$. De (2.1),

$$\mathbf{N}_x = \operatorname{sig}\big(\det J(f)\big)\, \mathbf{N}_y,$$

de modo que la orientación se conserva cuando $\det J(f) > 0$ y se invierte cuando es negativo.

Definición. Una s.r. M es **orientable** si existe un atlas $\mathcal{A}$ tal que, para cada par de p.l. de $\mathcal{A}$ con imágenes que se cortan, se verifica $\det J\big(x^{-1} \circ y\big) > 0$ en todos los puntos de la intersección. Ese atlas se llama **atlas de orientación** y, elegido uno, M queda **orientada**. Si no existe ninguno, M es **no orientable**.

Un **campo diferenciable normal** sobre un abierto $G \subseteq M$ es una aplicación diferenciable $\Gamma : G \to \mathbb{R}^3$ con $\Gamma(p) \perp T_p(M)$. Es unitario si $|\Gamma(p)| = 1$ en todo G.

Teorema. Una s.r. M es orientable si y solo si existe un campo diferenciable normal unitario $\Gamma : M \to \mathbb{R}^3$ definido en toda M.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: PINTAR UNA CARA DE LA SUPERFICIE

El enunciado traduce una condición sobre *cartas* a una condición sobre *pintura*, y esa es la imagen que hay que llevarse.
La imagen. Oriéntese una superficie como se pinta una pared: se elige una de las dos caras y se la pinta entera, sin levantar la brocha. Tener un campo normal unitario global Γ es exactamente eso: en cada punto, una flecha que dice cuál de los dos lados es el pintado, y las flechas varían con continuidad. Ser orientable es que la pintada se pueda completar; no serlo es que, al dar la vuelta entera, uno se encuentre pintando por el otro lado el mismo trozo que ya había pintado, que es literalmente lo que pasa en la banda de Möbius.
Y la imagen predice las dos implicaciones. Si hay un atlas con cambios de jacobiano

positivo, cada carta trae su brocha y todas las brochas coinciden donde se solapan: se pinta por trozos. Recíprocamente, si la superficie ya viene pintada, se coge cualquier atlas y a cada carta se le pregunta si su normal apunta al lado pintado o al otro; a las que apuntan al otro se les da la vuelta intercambiando las dos variables, y ya está.
El corazón del argumento, en una frase: una función continua que solo puede valer $+1$ o -1 sobre un conexo es constante. De ahí sale que cada carta esté enteramente bien o enteramente mal. Si una carta tiene varias componentes, basta restringirla a cada una antes de aplicar el argumento.

Ida: de atlas orientado a brocha global. Si M es orientable, se toma un atlas de orientación y se define $\Gamma(p) = \mathbf{N}_x(p)$ para cualquier p.l. x del atlas cuya imagen contenga a p. Está bien definido: si p está en dos de ellas, $\mathbf{N}_x(p) = \mathbf{N}_y(p)$ porque el jacobiano del cambio es positivo. Y es diferenciable porque la diferenciabilidad es local y Γ coincide localmente con cada $\mathbf{N}_x$.
Vuelta, paso 1: comparar cada carta con la brocha. Sea Γ un campo normal unitario global y sea $\mathcal{A}$ un atlas cualquiera. Restringiendo cada carta a las componentes conexas de su dominio, que son abiertas por ser $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, obtenemos otro atlas con dominios conexos. Para cada p.l. x se considera

$$f : x(U) \to \mathbb{R}, \qquad f(p) = \Gamma(p) \cdot \mathbf{N}_x(p).$$

Vuelta, paso 2: una función continua con dos valores sobre un conexo es constante (el núcleo de la prueba). Es continua, y como $\Gamma(p)$ y $\mathbf{N}_x(p)$ son ambos unitarios y colineales, solo puede valer $+1$ o -1. Al ser $x(U)$ conexo, f es constante. Si vale 1 se deja la p.l. como está; si vale -1 se reparametriza intercambiando las variables, lo que invierte el normal.
Vuelta, paso 3: recomponer el atlas corregido. Haciendo esto con todas se obtiene un atlas $\mathcal{B}$ en el que todos los normales coinciden con Γ, y por tanto entre sí; de la relación entre normales se sigue que todos los jacobianos de los cambios son positivos. ■

Por qué se restringen las cartas. La conexión permite elegir un solo signo por carta. No es una hipótesis adicional sobre M: siempre podemos dividir los dominios en componentes abiertas. Esto es distinto de exigir que los *solapes* sean conexos, que no se consigue simplemente dividiendo cada carta en sus componentes. En la banda de Möbius aparecerán dos cartas conexas cuyo solape tiene dos componentes con signos incompatibles.

También basta pedir un campo normal unitario *continuo*: en cada carta conexa coincide con $\mathbf{N}_x$ o con $-\mathbf{N}_x$, así que resulta diferenciable. Si se da un campo normal continuo que nunca se anula, primero se normaliza dividiendo por su norma. Un campo que puede anularse no sirve: el campo cero existe en toda superficie.

LA IDEA: ESTE ES EL TEOREMA QUE HAY QUE USAR

La definición con atlas es la buena conceptualmente, pero es incómoda de verificar: obliga a mirar todos los pares de cartas. El teorema anterior la sustituye por algo mucho más manejable, y es lo que se usa en la práctica:

Orientable equivale a que se pueda elegir un vector normal unitario en cada punto, de forma continua y sin ambigüedad.

Con esta formulación, «tener dos caras» deja de ser una metáfora: la cara positiva es la que señala Γ. Y la no orientabilidad se vuelve concreta: significa que al pasear el vector normal por la superficie se puede volver al punto de partida con el vector del revés. Consecuencias inmediatas, y cada una resuelve por sí sola varios ejercicios:

- Toda s.r. cubierta por una sola p.l. es orientable, porque ya tiene su $\mathbf{N}$ global. En particular, los planos y las cartas de Monge.
- Toda superficie de nivel regular es orientable: sirve el campo $\nabla f/|\nabla f|$, que está definido en todo el nivel precisamente porque c es valor regular.
- Las superficies de revolución construidas con el atlas de esta lección son orientables: se recorre la generatriz con un sentido fijo y se usa siempre el mismo sentido angular. Los normales coinciden al cambiar el ángulo en 2π y, si la generatriz es cerrada, al cambiar su parámetro en un período.

El segundo es especialmente rentable: da de golpe la esfera, el cilindro, el toro y la silla.

Proposición. Si una s.r. admite un atlas de dos p.l. cuya intersección es conexa, entonces es orientable.

La idea, en una línea. Con una sola zona de solape, o las dos brochas ya casan o no casan en ninguna parte; y si no casan, basta darle la vuelta a una de las dos cartas intercambiando sus coordenadas, que es la operación que cambia el signo del jacobiano.

Sean $x : U \to M$ e $y : V \to M$ las dos p.l.. Si el solape es vacío, el atlas ya es de orientación. Si no, $\det J(x^{-1} \circ y)$ tiene signo constante por continuidad y conexión. Si es positivo ya está. Si es negativo, se sustituye y por $y' = y \circ f$, donde $f : V' \to V$, $f(u,v) = (v,u)$ y $V' = \{(u,v) : (v,u) \in V\}$. Su jacobiano tiene determinante -1. Entonces $\{x, y'\}$ es otro atlas con la misma unión de imágenes y

$$\det J\big(x^{-1} \circ y'\big) = \det J\big(x^{-1} \circ y\big) \cdot \det J(f) > 0. \blacksquare$$

El ejemplo que la estrena: la esfera con sus dos proyecciones estereográficas. Su cambio de cartas, calculado tras el teorema del cambio de cartas, es la inversión $(u,v) \mapsto (u,v)/(u^2+v^2)$, definida en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, que es conexo; su jacobiano, $-1/(u^2+v^2)^2$, es negativo en todo el solape. Es exactamente la situación de la proposición: se intercambian las variables en la carta del polo norte, que orientaba hacia dentro, y con eso las dos normales apuntan hacia fuera y el atlas es de orientación. Es una segunda prueba de que la esfera es orientable, sin usar el gradiente.

La idea, en versión intuitiva: la banda de Möbius, en versión cartas

Este criterio es la banda de Möbius escrita con cartas en lugar de con papel y celo. Recúerdese cómo se construye la banda: se toma una tira, se le da media vuelta a un extremo y se pega. Al recorrerla, la normal vuelve al punto de partida apuntando hacia el otro lado.

Con dos cartas ocurre lo mismo. Cada carta trae su propia normal, y en la zona donde se solapan las dos normales coinciden o son opuestas según el signo del jacobiano del cambio. Si la intersección fuera conexa, no habría problema: si en ella el signo es negativo, basta darle la vuelta a una de las dos cartas (intercambiar sus coordenadas) para que pase a ser positivo, y las normales casan en toda la superficie.
La hipótesis del teorema es que la intersección tiene **dos** componentes y el signo es distinto en cada una. Ahí ya no hay arreglo posible: dar la vuelta a una carta cambia el signo en las dos componentes a la vez, así que si antes eran $+$ y $-$, después son $-$ y $+$. Nunca se consigue que sean los dos positivos.
Y esa imposibilidad es exactamente el paseo de la banda de Möbius: se sale de la primera componente con la normal hacia arriba, se cruza la segunda carta, y se vuelve a entrar por la otra componente con la normal hacia abajo. La superficie tiene un solo lado.

Teorema. Sea M una s.r. recubierta por dos p.l. de dominios conexos cuya intersección tiene **dos componentes conexas**, de modo que el determinante jacobiano del cambio de cartas es positivo en una y negativo en la otra. Entonces M es no orientable.

Paso 1: suponer que hay brocha y fijar los signos. Supóngase que M fuera orientable y sea Γ un campo normal unitario global. Sean x e y las dos p.l., con $x(U) \cap y(V) = W_1 \cup W_2$, y $\det J(x^{-1} \circ y) > 0$ en W_1 y < 0 en W_2.
Paso 2: cada carta decide su signo de una vez, por conexión. Existen constantes $\varepsilon_x, \varepsilon_y \in \{1, -1\}$ tales que $\Gamma = \varepsilon_x \mathbf{N}_x$ en $x(U)$ y $\Gamma = \varepsilon_y \mathbf{N}_y$ en $y(V)$.
Paso 3: los dos solapes piden signos incompatibles. En W_1 los normales coinciden, de modo que $\varepsilon_x = \varepsilon_y$. En W_2 son opuestos, de modo que $\varepsilon_x = -\varepsilon_y$. Ningún par de signos cumple ambas igualdades. Luego Γ no existe. ■

Qué hizo cada hipótesis. Que la intersección tenga *dos* componentes es lo que hace imposible el arreglo: con una sola, el signo negativo se corrige dando la vuelta a una carta y no hay contradicción ninguna — es justo lo que dice la proposición anterior. Que los signos sean *distintos* en cada componente es lo que impide que la vuelta sirva de algo, porque la vuelta cambia los dos a la vez. Y la conexión de cada carta es la que permite el paso 2: sin ella, Γ podría coincidir con $\mathbf{N}_x$ en un trozo y con $-\mathbf{N}_x$ en otro, y la contradicción del paso 3 no se produciría.

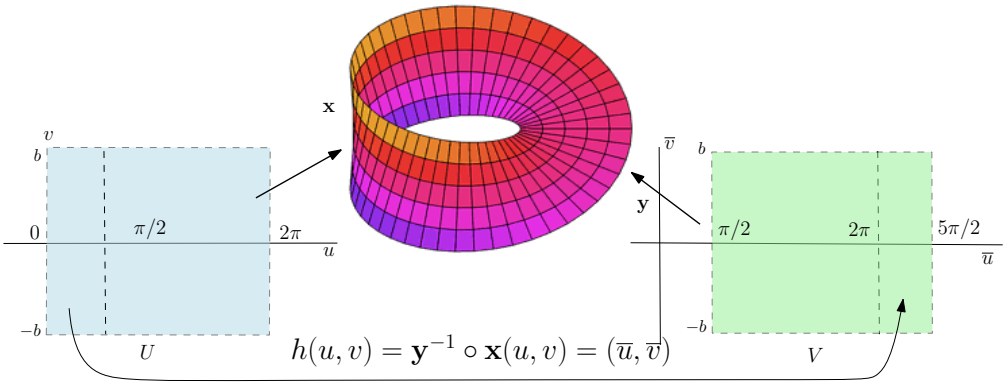
Corolario. La banda de Möbius es una s.r. no orientable.

La idea, en una línea. Se cubre la banda con dos cartas que son la misma fórmula sobre dos intervalos de ángulo desplazados; se solapan en dos zonas, y en una de ellas el segmento generador llega dado la vuelta, lo que mete un -1 en el jacobiano. Con eso, el criterio anterior se aplica sin más.

Se toman las dos p.l. dadas por la misma fórmula

$$x(u,v) = \left(\left(a - v \operatorname{sen} \tfrac{u}{2}\right) \cos u,\ \left(a - v \operatorname{sen} \tfrac{u}{2}\right) \operatorname{sen} u,\ v \cos \tfrac{u}{2} \right)$$

sobre los dominios $U = (0, 2\pi) \times (-b, b)$ y $V = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right) \times (-b, b)$, con $0 < b < a$. Consideramos la banda sin su borde. Sus imágenes cubren la banda y se cortan en dos componentes conexas. El cambio de coordenadas es la identidad en una de ellas, con jacobiano 1, y es $\bar{u} = u + 2\pi$, $\bar{v} = -v$ en la otra, con jacobiano -1, porque al dar la vuelta el segmento llega invertido. Por el teorema anterior, la banda no es orientable. ■



$$\mathbf{x}(u,v) = ((a - v sen\tfrac{u}{2})cosu, (a - v sen\tfrac{u}{2})senu, v cos\tfrac{u}{2})$$

$$\mathbf{y}(\overline{u},\overline{v}) = ((a - \overline{v} sen\tfrac{\overline{u}}{2})cos\overline{u}, (a - \overline{v} sen\tfrac{\overline{u}}{2})sen\overline{u}, \overline{v} cos\tfrac{\overline{u}}{2})$$

$$\mathbf{y}(\overline{u},\overline{v}) = \mathbf{x}(u,v) \qquad \begin{matrix}\overline{u} = u + 2\pi \\ \overline{v} = -v\end{matrix}$$

Figura 2.11: Las dos cartas de la banda de Möbius se solapan en dos componentes. La transición señalada corresponde a la que cruza el corte angular: $(\bar{u}, \bar{v}) = (u + 2\pi, -v)$. En la otra componente es la identidad. Figura del material oficial, lección 2.

La idea: dónde está el -1, en una frase

Todo el corolario se reduce a una observación: al recorrer la banda una vez entera y volver al punto de partida, el segmento generador ha girado media vuelta, de modo que su extremo de arriba es ahora el de abajo. Ese cambio de v por $-v$ es el que mete el signo negativo en el jacobiano.

Y es exactamente el factor un medio del ángulo de inclinación que se comentó al construir la banda. Con un giro completo en vez de medio, el jacobiano sería positivo en las dos componentes y saldría una banda orientable, homeomorfa a un cilindro.

Merece la pena notar que la orientabilidad es una propiedad **global**. Cualquier trozo pequeño de la banda de Möbius es perfectamente orientable, como lo es cualquier carta. Lo que falla es la posibilidad de coser todas las elecciones locales, y eso solo se ve dando la vuelta entera.

De dónde viene: dos matemáticos y la misma banda

La banda fue descrita hacia 1858 por August Ferdinand Möbius y por Johann Benedict Listing, de forma independiente y casi simultánea. Listing publicó antes, pero el nombre que se quedó fue el de Möbius.

Lo interesante es el contexto. Ninguno de los dos buscaba una curiosidad: los dos estaban intentando clasificar superficies, y se toparon con un objeto que rompía la clasificación que tenían. Listing fue además quien acuñó la palabra *topología*, en 1847, para el tipo de propiedades que la banda pone en juego, las que no dependen de distancias ni de ángulos.
Que la no orientabilidad aparezca en un curso de geometría diferencial local tiene su gracia, porque es justamente la propiedad que la geometría local no puede ver.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ

La alternativa: orientar con el atlas en vez de con la normal. En lugar de pedir un campo normal unitario continuo, se puede pedir un atlas cuyos cambios de carta tengan todos jacobiano positivo. Es una definición distinta, y para superficies de $\mathbb{R}^3$ es equivalente.
Lo que tiene a favor la de la normal. Es visual y se comprueba: se pinta un lado. Y para una superficie metida en el espacio es lo que uno quiere decir cuando dice "dos caras".
Lo que tiene a favor la del atlas. Que no menciona el espacio ambiente. Y esa es la diferencia decisiva en cuanto se sale de este curso: en una superficie abstracta, definida por sus cartas y sin estar metida en ningún $\mathbb{R}^3$, no hay ningún sitio donde vivan los vectores normales, y la definición de la normal deja de tener sentido. La del atlas sigue funcionando sin tocar una letra.
Quién ganó. Las dos, en ámbitos distintos. Aquí se usa la de la normal porque es la que se calcula; en topología diferencial y en Geometría y Topología de Superficies se usa la del atlas porque es la que sobrevive. Conviene saber que son la misma cosa antes de encontrarse la otra sin previo aviso.

Ejercicios de esta sección

Ejercicio 2.18. *La banda de Möbius generalizada* [H2.15]

Sea AB un segmento abierto de longitud L en el plano OXZ, con su punto medio a distancia $a > 0$ del origen sobre el eje OX y ortogonal a dicho eje. Se gira AB alrededor de OZ un ángulo u a la vez que se inclina respecto de OZ un ángulo ru, con $r \in \mathbb{R}$. Se pide:
1. Expresar el conjunto descrito como una superficie parametrizada, con $u \in (0, 2\pi)$.
2. Hallar los valores de r para los que el segmento vuelve a su posición original cuando $u \to 2\pi$, y aquellos para los que llega en posición invertida.
3. Hallar los vectores tangentes a las líneas paramétricas cuando $u \to 0$ y cuando $u \to 2\pi$. ¿Qué se puede decir de la normal en ambos casos?

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Es una superficie reglada: identifica la directriz y el campo de direcciones de las generatrices.*
2. *«Inclinarse un ángulo ru respecto de OZ» ocurre dentro del plano que contiene al eje y al punto medio. Ese plano lo generan la dirección radial y la vertical.*
3. *En el apartado 3, cuidado: el punto de la superficie que corresponde a $(2\pi, v)$ no es el que corresponde a $(0, v)$, sino a otro valor del segundo parámetro. Averigua cuál antes de comparar normales.*

Resolución. *Primer apartado.* El punto medio del segmento describe la circunferencia $\alpha(u) = (a\cos u,\ a\,\mathrm{sen}\,u,\ 0)$, que se toma como directriz. La dirección del segmento vive en el plano generado por el vector radial $(\cos u, \mathrm{sen}\,u, 0)$ y el vertical $(0, 0, 1)$, e inclinada un ángulo ru

respecto del vertical:

$$w(u) = \big(-\operatorname{sen}(ru)\cos u,\ -\operatorname{sen}(ru)\operatorname{sen} u,\ \cos(ru)\big).$$

Por tanto, con v recorriendo el segmento desde su punto medio,

$$x(u,v) = \alpha(u) + v\,w(u) = \Big(\big(a - v\operatorname{sen}(ru)\big)\cos u,\ \big(a - v\operatorname{sen}(ru)\big)\operatorname{sen} u,\ v\cos(ru)\Big),$$

con $(u,v) \in (0,2\pi) \times \big(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\big)$. Además es regular, porque

$$|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|^2 = (a - v\operatorname{sen}(ru))^2 + r^2v^2 > 0.$$

Si $r = 0$, la expresión vale a^2; si $r \neq 0$, su anulación exigiría $v = 0$ y entonces el primer sumando sería a^2, contradicción. Para interpretar los apartados siguientes como bandas cerradas en el sentido angular *embebidas* en $\mathbb{R}^3$, basta tomar $L < 2a$, evitando que los segmentos alcancen el eje. El intervalo angular abierto del primer apartado deja fuera la costura.

Con $r = \frac{1}{2}$ se recupera exactamente la banda de Möbius de la sección anterior.

Segundo apartado. La dirección inicial del segmento es $w(0) = (0,0,1)$, y al completar la vuelta es

$$w(2\pi) = \big(-\operatorname{sen}(2\pi r),\ 0,\ \cos(2\pi r)\big).$$

- **Vuelve a la posición original** cuando $w(2\pi) = w(0)$, es decir, $\operatorname{sen}(2\pi r) = 0$ y $\cos(2\pi r) = 1$, o sea $2\pi r = 2k\pi$. Por tanto $r \in \mathbb{Z}$.
- **Llega invertido** cuando $w(2\pi) = -w(0)$, es decir, $\operatorname{sen}(2\pi r) = 0$ y $\cos(2\pi r) = -1$, o sea $2\pi r = (2k+1)\pi$. Por tanto $r = k + \frac{1}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$: los semienteros.

Para cualquier otro valor de r el segmento llega a una posición distinta de la inicial y de la invertida, y el conjunto no cierra sobre sí mismo de forma compatible.

Tercer apartado. Las derivadas parciales son

$$\mathbf{X}_2 = \frac{\partial x}{\partial v} = w(u),$$

$$\mathbf{X}_1 = \frac{\partial x}{\partial u} = \Big(-vr\cos(ru)\cos u - \big(a - v\operatorname{sen}(ru)\big)\operatorname{sen} u,\ - vr\cos(ru)\operatorname{sen} u + \big(a - v\operatorname{sen}(ru)\big)\cos u,\ -vr\operatorname{sen}(ru)\Big).$$

Evaluando en los dos extremos:

$$\mathbf{X}_1(0,v) = (-vr,\ a,\ 0), \qquad \mathbf{X}_2(0,v) = (0,0,1).$$

Tomemos r semientero, que es el caso interesante. Entonces $\operatorname{sen}(2\pi r) = 0$ y $\cos(2\pi r) = -1$, con lo que

$$\mathbf{X}_1(2\pi,v) = (vr,\ a,\ 0), \qquad \mathbf{X}_2(2\pi,v) = (0,0,-1).$$

Ahora el punto delicado. No se pueden comparar directamente las normales en $(0,v)$ y en $(2\pi,v)$, porque no son el mismo punto de la superficie. En efecto,

$$x(2\pi,v) = (a,\ 0,\ -v), \qquad x(0,v) = (a,\ 0,\ v),$$

de modo que el punto alcanzado en $(2\pi, v)$ es el mismo que en $(0, -v)$. La comparación correcta es esa. Calculando los dos productos vectoriales:

$$\mathbf{X}_1(0,-v) \times \mathbf{X}_2(0,-v) = (vr,\ a,\ 0) \times (0,0,1) = (a,\ -vr,\ 0),$$

$$\mathbf{X}_1(2\pi,v) \times \mathbf{X}_2(2\pi,v) = (vr,\ a,\ 0) \times (0,0,-1) = (-a,\ vr,\ 0).$$

Los dos vectores son opuestos. Es decir, al recorrer la banda una vez entera y volver al mismo punto, el vector normal llega **invertido**: la banda obtenida al incluir la costura, bajo la condición de anchura anterior, es **no orientable**. El parche cortado del primer apartado sí admite el normal de su parametrización.

Si en cambio r es entero, se tiene $\cos(2\pi r) = 1$ y entonces $x(2\pi, v) = x(0, v)$, $\mathbf{X}_1(2\pi, v) = \mathbf{X}_1(0, v)$ y $\mathbf{X}_2(2\pi, v) = \mathbf{X}_2(0, v)$: la normal coincide y la superficie es orientable. ■

LA IDEA: EL EJERCICIO ENTERO EN UNA FRASE

Entre las bandas que cierran en el sentido angular, la banda es no orientable si y solo si el segmento llega invertido: ocurre para $r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. Aquí hablamos de la banda con su costura y con la anchura que evita autointersecciones.
Todo lo demás del ejercicio es aritmética alrededor de esa frase. Al recorrer una vuelta entera alrededor del eje, el segmento se inclina $2\pi r$ radianes, es decir, da r vueltas completas, o lo que es lo mismo, $2r$ medias vueltas. Un número par de medias vueltas, o sea r entero, devuelve todo a su sitio; un número impar de medias vueltas, o sea r semientero, lo deja del revés. Con $r = \frac{1}{2}$, que es la banda de Möbius, hay exactamente una media vuelta.
Merece la pena notar también el error que el apartado 3 está diseñado para provocar, porque es el error que se comete de verdad: comparar las normales en $(0, v)$ y $(2\pi, v)$ sin darse cuenta de que no son el mismo punto de la superficie. Hecho así, salen dos vectores que no son opuestos y la conclusión se estropea. Cuando dos juegos de coordenadas describen la misma zona, siempre hay que identificar primero qué parámetro corresponde a qué punto.

QUÉ DEJA. La familia completa de bandas, que generaliza a la vez el cilindro y la de Möbius con un solo parámetro. Y el aviso metodológico, que vale para todo el resto de la asignatura: antes de comparar dos objetos calculados en cartas distintas, hay que saber qué punto es qué.

CONEXIÓN: GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA DE SUPERFICIES

La orientabilidad, que aquí parece una condición técnica que se comprueba mirando jacobianos, es en la asignatura siguiente una hipótesis central y un objeto de estudio por derecho propio. En la parte de geometría, Gauss–Bonnet afirma, para una superficie riemanniana compacta sin borde, que $\int_M K\, dA = 2\pi\chi(M)$: la integral de su curvatura de Gauss solo depende de la topología. La versión del curso se presenta para superficies orientables, pero la identidad también vale para las no orientables. La distinción es la misma que entre integrar una función respecto de una medida y una forma diferencial: la densidad de *área* dA es positiva y no necesita orientación; una *forma de área orientada* sí la necesita.
En la parte de topología, orientabilidad y característica de Euler clasifican, salvo homeomorfismo, las superficies compactas, conexas y sin borde. La banda de Möbius de esta sección deja de ser una curiosidad y pasa a ser el ladrillo con el que se construyen todas las superficies no orientables.

> Merece la pena guardar el detalle: aquí se ha demostrado que la banda no es orientable con un argumento de jacobianos y de dos componentes conexas. Ese argumento es el mismo que allí separa las dos mitades de la clasificación.

Ejercicio 2.19. *Comprobaciones finales de la lección 2*

Completar los siguientes puntos de los ejercicios 4–8 de la lección original: (1) dar el cambio entre las cartas estereográficas de la esfera; (2) justificar que la parte no crítica de cualquier nivel es una superficie regular; (3) comparar regularidad y componentes tangentes en dos cartas; (4) precisar qué ocurre en el vértice de un cono.

Resolución. 1. Dos cartas para la esfera. La carta desde el polo norte ya apareció al comparar la esfera agujereada con el toro. Escribiendo $q = u^2 + v^2$, las dos son

$$x_N(u,v) = \frac{(2u, 2v, q-1)}{1+q}, \qquad x_S(u,v) = \frac{(2u, 2v, 1-q)}{1+q}.$$

Sus inversas son $(x/(1-z), y/(1-z))$ y $(x/(1+z), y/(1+z))$, respectivamente; son diferenciables en sus imágenes. Además, x_S es la reflexión de x_N en $z = 0$, así que conserva su regularidad. Cubren la esfera y, fuera de $(u,v) = (0,0)$, el cambio es

$$x_S^{-1} \circ x_N(u,v) = \frac{(u,v)}{u^2+v^2}.$$

Es la inversión respecto de la circunferencia unidad; su jacobiano y lo que dice sobre la orientación están en el ejemplo que sigue al teorema del cambio de cartas.

2. Quitar los puntos críticos. Para $f : V \to \mathbb{R}$ diferenciable, $W = V \setminus \mathrm{Crit}(f)$ es abierto y $\nabla(f|_W)$ nunca se anula. Por tanto, cualquier c es valor regular de $f|_W$, y $f^{-1}(c) \setminus \mathrm{Crit}(f)$ es una superficie regular si es no vacío. Sus componentes conexas son abiertas en ella (las superficies son localmente conexas), por lo que también son superficies regulares. Aplicado al cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, recupera sus dos napas sin el vértice.

3. Curvas y componentes. Si $\alpha = x \circ \bar{\alpha}$, entonces $\alpha' = Dx\,\bar{\alpha}'$. El diferencial Dx es inyectivo, así que $\alpha' = 0$ si y solo si $\bar{\alpha}' = 0$: la regularidad de la curva equivale a la de su expresión en coordenadas. Si $y = x \circ h$ y $J = Dh$, un vector con componentes columna b en la base de y tiene componentes $a = Jb$ en la de x, por la misma regla de la cadena. En particular, $b = J^{-1}a$.

4. El vértice. Para el cono circular doble ya se dio el argumento de las dos napas. Más generalmente, si un cono con vértice 0 fuese regular allí, cada generatriz $t \mapsto tp$ daría $p \in T_0M$: todo el cono estaría en ese plano. Así, un cono que no esté contenido en un plano no puede ser regular en su vértice. La afirmación «ningún cono es regular en su vértice» necesita, por tanto, excluir el caso plano, si se admite como cono degenerado. ■

Repaso del capítulo

REPASO INTERCALADO: SUPERFICIES, PRIMERA RONDA

A libro cerrado, como siempre. Y como siempre, dos tercios de las preguntas son del capítulo anterior: mezclar es el punto, no un descuido.

Primera ronda: reconstruir, con material de los dos capítulos.

1. Enuncia las tres condiciones de la definición de superficie regular y di, para cada una, contra qué patología protege.
2. ¿Por qué no existe para superficies un análogo del parámetro natural? Da las tres razones, de menos a más profunda.
3. *Del capítulo 1:* escribe las ecuaciones de Frenet-Serret y di qué codifica la antisimetría de su matriz.
4. Enuncia el teorema del valor regular. Di después qué *no* afirma, y da el contraejemplo que lo demuestra.
5. *Del capítulo 1:* ¿cuándo puede asignarse un aparato de Frenet en un punto de curvatura nula, y cuándo no?
6. Da las dos definiciones de plano tangente, la geométrica y la operativa, y explica qué resultado las conecta.
7. ¿Qué significa que una superficie sea orientable? Da la definición con atlas y la caracterización con campo normal, y di cuál se usa en la práctica.

REPASO INTERCALADO: SUPERFICIES, SEGUNDA RONDA

Segunda ronda: distinguir y aplicar.

1. Una aplicación de un abierto del plano en el espacio es suave, regular e inyectiva. ¿Es su imagen una superficie regular? Justifica con un ejemplo concreto.
2. *Del capítulo 1:* una curva tiene curvatura constante. ¿Qué puede ser? ¿Y si además tiene torsión nula?
3. Explica cómo construir un atlas de cuatro cartas para una superficie de revolución de generatriz compacta que no corta el eje. ¿Prueba esa construcción que cuatro sea el mínimo?
4. El gradiente de una función se anula en cierto punto. ¿Qué puedes concluir sobre el conjunto de nivel que pasa por él?
5. *Del capítulo 1:* demuestra que la involuta de una curva nunca puede ser una recta.
6. Explica por qué toda superficie de nivel regular es orientable, en dos frases y sin usar la definición con atlas.
7. En la superficie reglada de las binormales de una curva, ¿qué plano es el tangente a lo largo de la propia curva? Contéstalo sin derivar nada.
8. ¿Por qué la banda de Möbius no es orientable, y dónde exactamente aparece el signo negativo?

REPASO INTERCALADO: SUPERFICIES, TERCERA RONDA, CON MATERIAL ANTERIOR

Tercera ronda: mezclando los dos capítulos y otras asignaturas.

1. Se da una curva α y se construye la superficie reglada cuyas generatrices son sus normales principales. Da una parametrización, estudia su regularidad y di cuál es el plano tangente a lo largo de α.
2. *Del capítulo 1:* dos curvas comparten todas sus rectas normales principales. ¿Qué se puede afirmar sobre la distancia entre ellas, y por qué?
3. Las dos herramientas centrales de Diferenciación de Funciones de Varias Variables aparecen en este capítulo como las dos formas de construir superficies. Di cuáles son y qué hace cada una.
4. Prueba que si todas las rectas normales a una superficie conexa pasan por un punto, entonces es parte de una esfera. Después, enuncia el resultado análogo del capítulo 1 y comprueba que la demostración es la misma.
5. Se considera la familia de superficies $x^2 + y^2 = z^2 + a$. Describe qué ocurre al variar a desde valores positivos hasta negativos, y en qué instante exacto falla la regularidad.
6. *Del capítulo 1:* justifica sin calcular por qué la curva paralela a una hélice circular de paso no nulo, desplazada hacia el eje a distancia igual al radio de su cilindro, es una recta.
7. Un segmento gira alrededor de un eje mientras se inclina un ángulo proporcional al girado, con constante r. ¿Para qué valores de r la superficie resultante es no orientable? Contesta razonando sobre el segmento, no sobre el jacobiano.
8. Demuestra que no existe una parametrización global de la esfera. El argumento no es de geometría diferencial: ¿de qué es?

CONEXIÓN: LO QUE LOS CAPÍTULOS 1 Y 2 DEJAN PREPARADO

Con estos dos capítulos están ya todas las piezas y ninguna de las preguntas interesantes. Conviene ver qué falta.

Se sabe qué es una superficie y cómo reconocerla; se sabe qué es su plano tangente; se sabe construir superficies a partir de curvas. Lo que no se sabe todavía es **medir** sobre ellas ni decir **cuánto se curvan**, que son las dos preguntas de las dos lecciones que quedan.

- La lección 3, *geometría intrínseca*, contesta a la primera. Dota al plano tangente de un producto escalar, la primera forma fundamental, y con él mide longitudes, ángulos y áreas sobre la superficie. Todo lo que se pueda calcular con esa herramienta es lo que vería un habitante de la superficie sin salir de ella.
- La lección 4, *geometría extrínseca*, contesta a la segunda. Estudia cómo varía el vector normal $\mathbf{N}$ al moverse por la superficie, exactamente igual que en el capítulo 1 se estudió cómo variaba el triedro al moverse por la curva. La aplicación de Gauss y el endomorfismo de Weingarten hacen el papel que allí hacían la indicatriz esférica y las ecuaciones de Frenet-Serret.

Y la pregunta que enlaza las dos, y que da el resultado más importante de toda la geometría diferencial clásica, es esta: ¿hay algo de la curvatura, que se define mirando la superficie desde fuera, que un habitante de la superficie pueda averiguar sin asomarse? La respuesta es que sí, y es la razón de que la lección 3 se llame intrínseca.

CAPÍTULO 3

Geometría intrínseca

ANTES DE LEER

1. Un habitante de una superficie que no puede asomarse fuera de ella, ¿qué puede medir? ¿Y qué no?
2. Sobre una esfera, ¿qué curvas hacen el papel de las rectas del plano? Da una propiedad de las rectas que se pueda trasladar y otra que no.
3. Si transportas un vector tangente a lo largo de un camino cerrado sobre una esfera, manteniéndolo «lo más paralelo posible», ¿vuelve igual que salió?
4. Sobre una superficie se pueden medir longitudes, ángulos y áreas. ¿Cuántas funciones hacen falta para poder medir las tres cosas, y de qué dependen?

Las respuestas están, por orden, en las secciones 3.1, 3.5, 3.4 y 3.2.

LA IDEA: QUÉ CAMBIA A PARTIR DE AQUÍ

Los dos capítulos anteriores han construido el escenario. Este empieza a medir en él, y lo hace desde un punto de vista muy concreto que conviene fijar antes de nada.

Imagina un ser bidimensional que vive *dentro* de la superficie y no puede salirse ni asomarse al espacio ambiente. Puede tender cuerdas y medir su longitud, puede medir ángulos entre dos caminos que se cruzan, puede medir áreas de regiones. Lo que no puede hacer es ver cómo está colocada su superficie en $\mathbb{R}^3$.

Todo lo que ese habitante puede averiguar se llama **intrínseco**. Todo lo que requiere mirar desde fuera se llama **extrínseco**. Este capítulo es la geometría del habitante; el siguiente, la del observador externo.

La herramienta única del habitante es un producto escalar en cada plano tangente. Con él mide longitudes, y con longitudes mide ángulos y áreas. Ese producto escalar es la primera forma fundamental, y es la protagonista absoluta del capítulo.

3.1 La primera forma fundamental

LA PREGUNTA

Un habitante de una superficie no puede salir de ella, pero sí puede medir: longitudes de caminos, ángulos entre ellos, áreas de regiones. ¿Cuánta información hay que darle para que pueda medir todo eso? Y sobre todo: ¿es esa información menos que la que hace falta para describir la superficie dentro del espacio?

A partir de ahora se trabaja siempre con una p.l. de una s.r., escrita $x = x(u_1, u_2)$, y se escribe g_{ij} en vez de $g_{ij}(u_1, u_2)$ cuando el punto esté claro por el contexto.

El punto de partida es el único material disponible en cada punto: los dos campos coordenados $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$, que son una base del plano tangente. Con dos vectores en un espacio euclídeo solo se pueden formar tres productos escalares distintos, porque el producto escalar es simétrico y el cuarto repite al tercero. Esos tres números son toda la información métrica del punto, y son los que se bautizan ahora.

Definición. Se llaman **coeficientes métricos** de una p.l. a las funciones

$$g_{ij} = \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{X}_j, \qquad i, j = 1, 2,$$

que forman en cada punto la matriz

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Conviene leer las tres funciones antes de operar con ellas, porque cada una tiene un significado geométrico directo, y en la sección 3.2 se demostrará que es exactamente ese. Los dos coeficientes de la diagonal son cuadrados de longitudes, $g_{11} = |\mathbf{X}_1|^2$ y $g_{22} = |\mathbf{X}_2|^2$: miden a qué velocidad se recorren las dos curvas paramétricas, es decir, cuánto se estira el mapa en cada dirección coordenada. El coeficiente cruzado $g_{12} = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2$ es un producto escalar entre vectores distintos: junto con sus longitudes determina el ángulo mediante $\cos\varphi = g_{12}/\sqrt{g_{11}g_{22}}$. En particular, $g_{12} = 0$ dice que las direcciones coordenadas son perpendiculares. Estirar y torcer; no hay nada más que una parametrización pueda hacerle a la métrica.

Esta matriz es simétrica, porque el producto escalar lo es, y es definida positiva:

$$g_{11} = |\mathbf{X}_1|^2 > 0, \qquad g = \det G = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = |\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|^2 > 0,$$

donde la última igualdad es la identidad de Lagrange y la desigualdad estricta viene de la condición de regularidad.

Las dos desigualdades merecen una frase cada una, porque son las que garantizan que G sirve para medir. La primera es corta: $g_{11} = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_1 = |\mathbf{X}_1|^2$, y $\mathbf{X}_1$ no puede ser el vector nulo, porque entonces $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ no serían independientes y no habría plano tangente. La segunda es la que de verdad usa la regularidad. La identidad de Lagrange dice que $|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|^2 = |\mathbf{X}_1|^2|\mathbf{X}_2|^2 - (\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2)^2$, que es literalmente $g_{11}g_{22} - g_{12}^2$; y la condición de regularidad de una p.l. es precisamente $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \neq 0$. Así que el determinante g es no nulo por la misma razón por la que la superficie tiene plano tangente en el punto, y positivo porque es el cuadrado de una norma. Dicho en corto: $g > 0$ **es la condición de regularidad traducida al idioma de**

los coeficientes métricos. Y como $|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|$ es el área del paralelogramo que generan los dos campos coordenados, $\sqrt{g}$ es un área; por eso reaparecerá como integrando al medir regiones.

Con ella, el producto escalar de dos vectores tangentes $X = \sum_i \lambda_i \mathbf{X}_i$ e $Y = \sum_j \mu_j \mathbf{X}_j$ se escribe

$$X \cdot Y = \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_i \mu_j \, g_{ij} = (\lambda_1 \ \lambda_2)\, G\, (\mu_1 \ \mu_2)^t.$$

La cuenta que hay detrás es solo desarrollar por bilinealidad: al multiplicar $\sum_i \lambda_i \mathbf{X}_i$ por $\sum_j \mu_j \mathbf{X}_j$ salen cuatro sumandos, y en cada uno sobrevive el producto $\mathbf{X}_i \cdot \mathbf{X}_j = g_{ij}$. Pero la consecuencia no es de cálculo, sino de principio, y es el motivo de toda la sección: en el miembro de la derecha ya no aparece $\mathbb{R}^3$ por ninguna parte. Solo hay cuatro coordenadas de vectores y tres funciones sobre un abierto del plano. El producto escalar del espacio se ha dejado guardado dentro de G, y a partir de aquí se puede calcular sin volver a mirar dónde está la superficie.

Definición. La **primera forma fundamental** (P.F.F.) de la superficie en p es la regla que a cada par de vectores tangentes les asigna su producto escalar:

$$I_p : T_p(x) \times T_p(x) \to \mathbb{R}, \qquad I_p(X, Y) = X \cdot Y = \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_i \mu_j \, g_{ij}.$$

Es una forma bilineal simétrica y definida positiva, de matriz G en la base $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$.

LA IDEA: LA PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL ES LA REGLA DE MEDIR

La palabra «forma» despista y el objeto es sencillo: la P.F.F. *es* el producto escalar de $\mathbb{R}^3$, pero restringido al plano tangente y escrito en la base de los campos coordenados. Que no aporte nada nuevo como operación es justo lo que la hace útil. Lo que aporta es que se escribe con **tres funciones de dos variables**, g_{11}, g_{12} y g_{22}, definidas sobre un abierto del plano. Es decir, la información métrica en cada carta cabe en tres funciones que el habitante puede determinar midiendo longitudes. Para la superficie entera hacen falta las cartas del atlas y sus cambios de coordenadas.

Merece la pena verlo así: la P.F.F. es la traducción del producto escalar del espacio al idioma de las coordenadas locales. Y una vez traducido, se puede olvidar el espacio.

Ejemplo (el plano en polares, a mano)**.** Antes de usar G en superficies curvadas conviene verla donde todo se sabe de antemano. El plano $z = 0$ con la carta polar

$$x(r, \theta) = (r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 0), \qquad r > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi,$$

tiene como campos coordenados

$$\mathbf{X}_1 = (\cos\theta,\ \mathrm{sen}\,\theta,\ 0), \qquad \mathbf{X}_2 = (-r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ r\cos\theta,\ 0)\,:$$

el primero es el radial unitario, y el segundo es tangente a la circunferencia de radio r y tiene longitud r. Sus tres productos escalares son

$$g_{11} = 1, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = r^2, \qquad \text{es decir,} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Cada número se lee. Moverse dr en el mapa es recorrer dr en el plano; moverse $d\theta$ es recorrer un arco de circunferencia de longitud $r\,d\theta$, tanto más largo cuanto más lejos del origen; y

las dos direcciones son perpendiculares. Con la fórmula bilineal, el vector de componentes (λ_1, λ_2) mide $\sqrt{\lambda_1^2 + r^2\lambda_2^2}$: en el punto $r = 2$, el de componentes $(0, 1)$ mide 2, no 1.

Qué se ha ganado. Dos cosas que se usarán sin parar. La primera: *la matriz G es de la carta, no de la superficie*. El mismo plano con la carta cartesiana $x(u_1, u_2) = (u_1, u_2, 0)$ tiene $G = \mathrm{Id}$, y con la polar, $\mathrm{diag}(1, r^2)$: la geometría es la misma y los coeficientes, distintos. Lo que no depende de la carta son las longitudes, los ángulos y las áreas que se calculan con ellos, y la sección 3.2 lo comprueba. La segunda: $g = \det G = r^2$, luego $\sqrt{g} = r$, que es el factor r de $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ en las integrales dobles en polares. El $\sqrt{g}$ que se ha presentado como un área es, en el plano, el jacobiano del cambio de variables de siempre.

Queda una última pieza, que ahora parece burocracia y en la subsección siguiente será la herramienta principal. Como $g > 0$, la matriz es invertible, y se escribe $G^{-1} = (g^{hk})$, con

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \qquad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g}, \qquad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}, \qquad \sum_{k=1}^{2} g_{ik}g^{kj} = \delta_i^{\,j}.$$

No hay nada que memorizar: son las cuatro entradas de la inversa de una matriz 2×2, con la diagonal intercambiada, el cruzado cambiado de signo y todo dividido por el determinante. La última igualdad es solo $G\,G^{-1} = \mathrm{Id}$ escrita por componentes.

Para qué sirve, dicho de antemano: los coeficientes g_{ij} contestan a la pregunta «dadas las coordenadas de un vector, ¿cuánto mide?», y los g^{hk} contestan a la pregunta inversa, «dados los productos escalares de un vector contra los dos campos coordenados, ¿cuáles eran sus coordenadas?». Esa segunda pregunta es exactamente la que aparece al despejar los símbolos de Christoffel, y por eso allí saldrá un G^{-1} sin avisar.

CONEXIÓN: LA MATRIZ DE GRAM, DESDE LA PROBABILIDAD HASTA LA SUPERFICIE

En cualquier espacio con producto escalar, una base e_1, e_2 tiene matriz de Gram $G_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$. Al escribir $v = a_1e_1 + a_2e_2$,

$$\|v\|^2 = a_1^2G_{11} + 2a_1a_2G_{12} + a_2^2G_{22}.$$

La primera forma fundamental es esta misma construcción con $e_i = X_i(p)$. Lo nuevo es disponer de ella en cada punto de la superficie, con una base que varía.
En probabilidad aparece una cuenta idéntica. Para variables $Z_1, Z_2 \in L^2$, centradas, el producto escalar es $\langle Z_i, Z_j \rangle = \mathbb{E}[Z_iZ_j]$; su matriz de Gram es la matriz de covarianzas Σ, y

$$\mathrm{Var}(a_1Z_1 + a_2Z_2) = a_1^2\Sigma_{11} + 2a_1a_2\Sigma_{12} + a_2^2\Sigma_{22}.$$

En ambos casos, los términos cruzados registran que la base puede no ser ortogonal. También se reconoce el papel de la inversa: para proyectar un vector Y sobre $\mathrm{span}\{Z_1, Z_2\}$, la condición de ortogonalidad del residuo conduce a $\sum_j \Sigma_{ij}a_j = \langle Y, Z_i \rangle$. Es la misma operación que recuperar componentes tangentes a partir de sus productos escalares.
La regularidad de una carta asegura que X_1, X_2 son independientes y G es definida positiva. Una covarianza puede ser singular: si $Z_2 = 2Z_1$, la combinación $2Z_1 - Z_2$ tiene norma cero. Para que Σ sea definida positiva hace falta independencia *lineal en L^2*, que es una condición distinta de la independencia probabilística. La conexión es la construcción de Gram; no identifica covarianza y curvatura.

CONEXIÓN: LA MÉTRICA DENTRO DE LA ENERGÍA CINÉTICA

Para una partícula de masa m sobre una superficie fija, $\alpha(t) = x(u_1(t), u_2(t))$. Aquí las primas indican derivadas respecto del tiempo. La fórmula $\alpha' = \sum_i u_i' X_i$ transforma la energía cinética ordinaria en

$$T = \frac{m}{2}\|\alpha'\|^2 = \frac{m}{2}\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_1,u_2)u_i'u_j'.$$

Por tanto, los coeficientes de la energía cinética en coordenadas generalizadas ya contenían la primera forma fundamental. La misma expresión cuadrática mide el cuadrado de una velocidad y, al multiplicar por dt^2, el elemento de longitud.
Para la esfera de radio R con colatitud ϑ y longitud φ,

$$G = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta \end{pmatrix}, \qquad T = \frac{mR^2}{2}\big((\vartheta')^2 + \mathrm{sen}^2\,\vartheta(\varphi')^2\big).$$

Es la energía cinética del péndulo esférico de longitud R. El factor $\mathrm{sen}\,\vartheta$ aparece porque un mismo cambio de longitud recorre menos distancia cerca del polo. Si se usa la latitud $u = \pi/2 - \vartheta$, como en el capítulo anterior, ese factor se escribe $\cos u$: la geometría es la misma. La gravedad añade un potencial y cambia la trayectoria del péndulo, pero no cambia esta métrica de sus configuraciones.

3.1.1 Las ecuaciones de Gauss

Los campos $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ generan el plano tangente, y junto con $\mathbf{N}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$ en cada punto. Lo natural es preguntarse cómo se escriben en esa base las derivadas segundas de la parametrización.

Definición. Sean $X_{ij} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}$, que cumplen $X_{ij} = X_{ji}$. Escribiéndolos en la base $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{N}\}$,

$$X_{ij} = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \mathbf{X}_k + L_{ij}\,\mathbf{N}, \qquad i,j = 1,2, \tag{3.1}$$

que se llaman **ecuaciones de Gauss**. Los Γ_{ij}^k son los **símbolos de Christoffel** de la superficie y los L_{ij} son los **coeficientes de la segunda forma fundamental**. Por la simetría de X_{ij} se tiene $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ y $L_{ij} = L_{ji}$.

LA IDEA: QUÉ ESTÁ HACIENDO (3.1)

Esta es la ecuación central de la asignatura y merece leerse muy despacio, porque de ella salen las dos lecciones que quedan.
Se está derivando dos veces la parametrización y partiendo el resultado en dos trozos:
- la parte que cae **dentro** del plano tangente, con coeficientes Γ_{ij}^k;
- la parte que sale **fuera**, en la dirección de $\mathbf{N}$, con coeficientes L_{ij}.

Y esa separación es exactamente la separación entre intrínseco y extrínseco. Los símbolos de Christoffel gobiernan la lección 3, que es esta; los coeficientes L_{ij} gobiernan la lección 4.
Compárese con el capítulo 1 y se verá el paralelismo entero. Allí se derivaba el triedro de Frenet y se escribía el resultado en el propio triedro, y los coeficientes que aparecían eran la curvatura y la torsión. Aquí se deriva la base $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{N}\}$ y se escribe el

resultado en ella misma, y los coeficientes son los Γ y los L. Es la misma idea: *montar una referencia adaptada al objeto y estudiar cómo varía*.
La diferencia es de tamaño. En curvas había dos funciones; aquí hay seis símbolos de Christoffel independientes y tres coeficientes L_{ij}.

El caso más sencillo, a mano. En el plano en polares del ejemplo anterior las derivadas segundas se calculan de cabeza:

$$X_{11} = 0, \qquad X_{12} = (-\operatorname{sen}\theta,\ \cos\theta,\ 0) = \frac{1}{r}\,\mathbf{X}_2, \qquad X_{22} = (-r\cos\theta,\ -r\operatorname{sen}\theta,\ 0) = -r\,\mathbf{X}_1.$$

Las tres están ya escritas en la base $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{N}\}$, y los coeficientes se leen sin hacer nada: $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 1/r$, $\Gamma^1_{22} = -r$, los otros cuatro símbolos son nulos, y los tres L_{ij} también, porque ninguna derivada segunda se sale del plano. Cada símbolo tiene su lectura. $X_{22} = -r\mathbf{X}_1$ es la aceleración de la circunferencia de radio r recorrida con θ: apunta al centro, y es la centrípeta. $X_{12} = \mathbf{X}_2/r$ dice que, al alejarse del origen, el campo angular crece en su propia dirección, porque su longitud es r. La consecuencia que conviene fijar desde ya: **que haya símbolos de Christoffel no nulos no significa que la superficie esté curvada**. El plano es plano y en polares tiene dos. Los Γ miden cómo se tuercen y se estiran los campos coordenados; cómo se dobla la superficie en el espacio lo miden los L_{ij}, que aquí son cero.

Proposición. Se verifica

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_{h=1}^{2} X_{ij}\cdot\mathbf{X}_h\, g^{hk}, \qquad L_{ij} = X_{ij}\cdot\mathbf{N}.$$

La idea, en una línea. Para extraer un coeficiente de una descomposición en una base se aprovecha la ortogonalidad del normal: multiplicar por $\mathbf{N}$ deja solo L_{ij}. Multiplicar por los campos coordenados elimina la parte normal, pero mezcla los coeficientes tangenciales porque esa base no es ortonormal. La inversa de (g_{ij}) deshace precisamente esa mezcla.

Paso 1: proyectar sobre el normal. La fórmula de L_{ij} sale de multiplicar escalarmente (3.1) por $\mathbf{N}$: los términos tangenciales desaparecen y queda $X_{ij}\cdot\mathbf{N} = L_{ij}$.
Paso 2: proyectar sobre los campos coordenados y despejar con la métrica inversa. Para la otra fórmula, se multiplica (3.1) por $\mathbf{X}_h$, con lo que ahora desaparece el término normal:

$$X_{ij}\cdot\mathbf{X}_h = \sum_{l=1}^{2} \Gamma^l_{ij}\, g_{lh}.$$

Multiplicando por g^{hk} y sumando en h, la matriz y su inversa se cancelan:

$$\sum_{h=1}^{2} X_{ij}\cdot\mathbf{X}_h\, g^{hk} = \sum_{h,l=1}^{2} \Gamma^l_{ij}\, g_{lh}\, g^{hk} = \sum_{l=1}^{2} \Gamma^l_{ij}\,\delta^k_l = \Gamma^k_{ij}.\blacksquare$$

La idea, en versión intuitiva: los símbolos de Christoffel no miran hacia fuera

La proposición anterior deja los Γ^k_{ij} a medio camino, y conviene ver por qué antes de seguir. Su miembro derecho contiene $X_{ij}\cdot\mathbf{X}_h$, es decir, una derivada segunda de la

parametrización; y una derivada segunda es, en principio, información de fuera. Lo que hace el teorema que viene a continuación es sustituir ese producto por derivadas de los g_{ij}, y ahí está la puerta del teorema egregio. Traducido: **los símbolos de Christoffel se pueden calcular sin salir de la superficie**.
Recúerdese qué son. Al derivar dos veces una parametrización aparece un vector que, en general, apunta hacia fuera de la superficie; se descompone en su parte tangente y su parte normal, y los Γ_{ij}^k son los coeficientes de la parte tangente. Definidos así, parece imprescindible mirar desde fuera: hay que saber dónde está metida la superficie en el espacio para poder decir qué es «tangente» y qué es «normal».
La fórmula del teorema de Gauss demuestra que esa impresión es falsa. A su derecha solo aparecen los g_{ij} y sus derivadas primeras, es decir, la primera forma fundamental: el instrumento con el que un habitante de la superficie mide longitudes y ángulos sin asomarse. Luego un ser plano, atrapado en la superficie y sin la menor idea de que existe un espacio ambiente, puede calcular todos los símbolos de Christoffel midiendo distancias en su propio mundo.
Esa es la bisagra de todo el capítulo. A partir de aquí, cualquier objeto que se logre escribir en términos de los Γ_{ij}^k será automáticamente intrínseco, y la curvatura de Gauss es precisamente uno de ellos: por eso el teorema que viene después se llama *egregio*, esto es, sorprendente. La sorpresa no está en la cuenta, está aquí: en que la parte tangente de la segunda derivada, que se definió mirando desde fuera, se pueda recuperar desde dentro.

Teorema (de Gauss)**.** Se verifica

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{2}\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_h}\right) g^{hk}, \qquad i,j,k = 1,2.$$

La idea, antes de la cuenta: por qué esa combinación de tres y no otra. La proposición anterior ya había dejado el resultado a un paso: decía que los Γ_{ij}^k se obtienen de los productos $X_{ij}\cdot\mathbf{X}_h$. Falta únicamente demostrar que ese producto — donde aparece una derivada segunda, que es información aparentemente extrínseca — se puede escribir con derivadas de los g_{ij}, que es información de dentro.

El obstáculo, y cómo se sortea. Al derivar un coeficiente métrico $g_{ih} = \mathbf{X}_i\cdot\mathbf{X}_h$ salen *dos* sumandos, porque la regla del producto deriva uno de los factores $\mathbf{X}_i$ o $\mathbf{X}_h$ cada vez: el que se quiere y otro que sobra. Una sola derivada no sirve, entonces, porque trae basura. Pero si se derivan tres coeficientes distintos y se suman con los signos $+,+,-$, la basura de cada uno es la basura de otro y se cancela, mientras que el término útil aparece dos veces. De ahí el $\frac{1}{2}$ del enunciado: no es un ajuste estético, es que el término bueno sale duplicado.

El corazón, en una frase: la combinación $+,+,-$ está diseñada para que los términos cruzados se maten entre sí. Eso es todo el teorema de Gauss. La cuenta que sigue solo comprueba que, en efecto, se matan.

Paso 1: derivar los tres coeficientes métricos. Se derivan los coeficientes métricos,

usando que $g_{ih} = \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{X}_h$ y la regla del producto:

$$\frac{\partial g_{ih}}{\partial u_j} = X_{ij}\cdot\mathbf{X}_h + \mathbf{X}_i\cdot X_{jh}, \qquad \frac{\partial g_{jh}}{\partial u_i} = X_{ij}\cdot\mathbf{X}_h + \mathbf{X}_j\cdot X_{ih}, \qquad -\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_h} = -X_{ih}\cdot\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i\cdot X_{jh}.$$

Paso 2: sumar con los signos $+,+,-$ y ver morir la basura (el núcleo de la prueba). Al sumar las tres, los cuatro términos con índices cruzados se cancelan dos a dos y quedan dos copias del mismo:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_h}\right) = X_{ij}\cdot\mathbf{X}_h.$$

Paso 3: sustituir en la proposición anterior. Con eso, $X_{ij}\cdot\mathbf{X}_h$ ha quedado escrito solo con derivadas de los coeficientes métricos, y sustituyendo en la fórmula de Γ^k_{ij} se concluye. ■

Qué hizo cada hipótesis, y qué no aparece. Lo notable de esta demostración es lo que *no* usa: en ningún momento interviene $\mathbf{N}$, ni los coeficientes L_{ij}, ni nada que tenga que ver con cómo está colocada la superficie en el espacio. Solo se ha usado la simetría de las derivadas segundas, $X_{ij} = X_{ji}$, que es el teorema de Schwarz y vale por ser la parametrización de clase $C^{\infty)}$; y la invertibilidad de la matriz (g_{ij}), que es la condición de regularidad disfrazada. Si se quita la simetría de Schwarz, los términos cruzados dejan de emparejarse y la cancelación del paso 2 no ocurre: ahí, y en ningún otro sitio, está el peso del teorema.

La comprobación con el plano en polares. Con $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$ y $g_{22} = r^2$, la única derivada no nula es $\partial g_{22}/\partial r = 2r$, y la fórmula da

$$\Gamma^1_{22} = \tfrac{1}{2}\big(0+0-2r\big)\cdot 1 = -r, \qquad \Gamma^2_{12} = \tfrac{1}{2}\big(0+2r-0\big)\cdot\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r},$$

los mismos que se leyeron a mano en X_{22} y en X_{12}. Lo que cambia es lo que se ha usado. Allí, las derivadas segundas de x, es decir, cómo está colocado el plano en el espacio. Aquí, solo la función $g_{22} = r^2$, que un habitante del plano obtiene midiendo la longitud de las circunferencias centradas en el origen.

Definición. Un concepto que depende únicamente de los coeficientes métricos y de sus derivadas se llama **intrínseco**, *aunque se haya definido con el campo normal o admita expresiones en las que este intervenga*. Una expresión concreta en la que aparece el campo normal se llama **extrínseca**.

El matiz es importante y se pierde con facilidad: intrínseco o extrínseco califica a un *concepto* según lo que se pueda calcular con él, no a la primera fórmula con que se definió. Los símbolos de Christoffel se definen con el normal y son intrínsecos; lo que el teorema anterior demuestra es exactamente eso.

LA IDEA: POR QUÉ EL TEOREMA DE GAUSS ES UNA NOTICIA IMPORTANTE

El teorema acaba de decir algo que no era en absoluto evidente.
Los símbolos de Christoffel se han *definido* como las componentes tangenciales de las derivadas segundas de x, y para calcular esas componentes hacía falta conocer $\mathbf{N}$, es decir, saber cómo está colocada la superficie en el espacio. Parecían, por tanto, objetos extrínsecos.

El teorema demuestra que no: se pueden calcular usando únicamente g_{ij} y sus derivadas primeras. **Los símbolos de Christoffel se obtienen de la métrica**. Sus valores dependen de las coordenadas elegidas: intrínseco no significa que los símbolos numéricos sean los mismos en cualquier carta. El habitante de la superficie puede calcularlos midiendo longitudes, sin asomarse nunca.

Y esa es la puerta por la que entra todo el capítulo. Como se verá, la curvatura geodésica, la derivada covariante, el transporte paralelo y las geodésicas se escriben todos en términos de los Γ. Por tanto todos ellos son intrínsecos, aunque sus definiciones originales hablen del espacio ambiente.

Merece la pena guardar el criterio operativo: *si una fórmula se puede escribir con g_{ij}, g^{hk}, sus derivadas y los Γ, puede calcularse desde dentro una vez fijadas las coordenadas*. Si aparece $\mathbf{N}$ o L_{ij}, hay que comprobar si esa dependencia se puede eliminar; la primera fórmula por sí sola no decide si el objeto es extrínseco.

De dónde viene: Gauss, la geodesia y los símbolos de Christoffel

Que esta lección se llame intrínseca y que el teorema anterior lleve el nombre de Gauss no es casualidad, y la historia explica por qué el punto de vista es este.

Entre 1818 y 1832 Carl Friedrich Gauss dirigió la triangulación geodésica del reino de Hannover, un trabajo de campo enorme que consistía en medir ángulos y distancias sobre la superficie de la Tierra. Es decir, pasó años haciendo exactamente lo que hace el habitante de una superficie: medir desde dentro, sin poder salir.

De ahí salió, en 1827, su memoria *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, donde se plantea sistemáticamente qué propiedades de una superficie se pueden determinar con esas medidas. El resultado central de esa memoria es el que cierra la lección 4, y su nombre lo dice todo: *theorema egregium*, teorema notable.

Los símbolos que hoy llevan el nombre de Elwin Bruno Christoffel llegaron algo después, hacia 1869, en un trabajo suyo sobre transformación de formas cuadráticas diferenciales. Christoffel no estudiaba superficies: buscaba cómo reconocer cuándo dos expresiones cuadráticas describen la misma geometría. Riemann ya había planteado el marco general en 1854, en su lección de habilitación sobre las hipótesis en que se funda la geometría; lo que aportaron los símbolos de Christoffel fue la maquinaria de cálculo que faltaba, y de ella salió después el lenguaje de la relatividad general.

Conexión: de la relatividad especial a una métrica variable

En relatividad especial, el intervalo de Minkowski se escribe, con la convención espacial positiva,

$$\eta(\Delta X, \Delta X) = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2.$$

Una transformación de Lorentz conserva esta forma: su matriz A cumple $A^t \eta A = \eta$. En un cambio general de coordenadas se transforman la matriz de la métrica y las componentes de los vectores de forma compensada; las transformaciones de Lorentz conservan además esta misma matriz η. Es el mismo principio de invariancia, con una diferencia: la primera forma fundamental es positiva definida, mientras que η es indefinida. Un vector no nulo puede tener intervalo nulo; no puede tener longitud riemanniana nula.

La distinción también aclara la parametrización. Para una curva temporal,

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = \frac{1}{c}\sqrt{-\eta\left(\frac{dX}{d\lambda}, \frac{dX}{d\lambda}\right)}$$

define tiempo propio, del mismo modo que la norma de la velocidad define longitud de arco en una superficie. Una curva nula carece de ese parámetro de tiempo propio.
Los coeficientes métricos pueden variar sin que haya curvatura. Incluso el plano, en polares, tiene $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$: los coeficientes y algunos símbolos de Christoffel varían, aunque la geometría siga siendo plana. Por eso la curvatura no se detecta mirando si aparece una derivada no nula de G.
La generalización a relatividad general permite métricas lorentzianas variables en cuatro dimensiones. Las fórmulas de la conexión, la derivada covariante y las geodésicas mantienen su forma, con cuatro índices posibles; las trayectorias de caída libre son geodésicas del espacio-tiempo. Las superficies permiten entender visualmente esa maquinaria sin presuponer que ya se haya estudiado relatividad general.

Conexión: Geometría y topología de superficies

Los tres coeficientes métricos son la base de un aparato que en la asignatura siguiente se usa constantemente y que aquí no llega a montarse: el de las **coordenadas de dirección**.
La idea es esta. Una curva sobre la superficie viene dada por $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$, y si $u_1'(t) \neq 0$, su vector tangente es proporcional a

$$\mathbf{X}_1 + \frac{du_2}{du_1}\,\mathbf{X}_2.$$

En esas direcciones, la pendiente queda fijada por un solo número, el valor de du_2/du_1, que se llama *coordenada de dirección*. Con él, dos curvas que se cortan con coordenadas de dirección λ y μ son ortogonales en el punto si y solo si

$$g_{11} + g_{12}(\lambda + \mu) + g_{22}\lambda\mu = 0,$$

condición que se escribe entera con los coeficientes métricos de esta sección. De ahí salen en GTS las familias de curvas, los sistemas de curvas y las trayectorias ortogonales.
La dirección $\mathbf{X}_2$ queda fuera de esta escritura: es la pendiente vertical. Se trata directamente, sin dividir por u_1': el producto escalar entre $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ es g_{12}, de modo que las curvas coordenadas son ortogonales exactamente cuando $g_{12} = 0$.

El camino que no se tomó

La alternativa: medir directamente en el espacio y no aislar nada. Para calcular la longitud de una curva sobre una superficie basta con verla como curva de $\mathbb{R}^3$ e integrar $|\alpha'|$. Para el área, otro tanto. ¿Para qué inventar unos coeficientes g_{ij}?
Lo que tenía a favor. Que funciona, que no exige aprender nada nuevo y que da los mismos números. Durante más de un siglo, de Euler en adelante, la geometría de superficies se hizo así.
Lo que la hundió. Que no distingue lo que se ve desde dentro de lo que solo se ve desde fuera. Calcular cada vez desde el ambiente oculta la pregunta de si un trozo de plano y un trozo de cilindro miden igual para quien vive en ellos. Aislar los tres coeficientes g_{11}, g_{12}, g_{22} y comprobar que con ellos solos se miden longitudes, ángulos y áreas es lo que permite formular esa pregunta, y es el paso que da Gauss en 1827.
Lo que costó entenderlo. Nada de esto era obvio. Que exista una cantidad calculable solo con los g_{ij} y que coincida con el producto de las curvaturas principales, que se calculan mirando desde fuera, le pareció notable al propio Gauss, que tituló el resultado *Theorema Egregium*. Se verá en el capítulo siguiente.

Ejercicios de esta sección

Ejercicio 3.1. *Los símbolos de Christoffel de las superficies de siempre* [H3.1]

Obtener los símbolos de Christoffel del cilindro, de la esfera, del catenoide $x(u,v) = (\operatorname{ch} u \cos v,\ \operatorname{ch} u \operatorname{sen} v,\ u)$ y de la pseudoesfera

$$x(u,v) = \Big(a \operatorname{sen} u \cos v,\ a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,\ a\big(\cos u + \ln \tan \tfrac{u}{2}\big)\Big), \qquad a > 0.$$

Resolución. La idea, antes de la cuenta. Las cuatro parametrizaciones tienen algo en común que conviene ver antes de derivar nada: en las cuatro $g_{12} = 0$, porque las curvas coordenadas se cortan en ángulo recto, y los coeficientes solo dependen de u. En coordenadas ortogonales la fórmula del teorema de Gauss se simplifica mucho: G^{-1} es diagonal, con $g^{11} = 1/g_{11}$ y $g^{22} = 1/g_{22}$, y en la suma sobre h solo sobrevive el sumando $h = k$. Por ejemplo, $\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}\big(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22}\big) g^{11}$, y con $g_{12} = 0$ queda solo el último término, con su signo menos. Hechas las seis cuentas una vez, y escribiendo $g_{ii,j} = \partial g_{ii}/\partial u_j$,

$$\Gamma^1_{11} = \frac{g_{11,1}}{2g_{11}}, \quad \Gamma^1_{12} = \frac{g_{11,2}}{2g_{11}}, \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{g_{22,1}}{2g_{11}},$$
$$\Gamma^2_{11} = -\frac{g_{11,2}}{2g_{22}}, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{g_{22,1}}{2g_{22}}, \quad \Gamma^2_{22} = \frac{g_{22,2}}{2g_{22}}.$$

La tabla se lee así: cada símbolo es media derivada de un coeficiente de la diagonal dividida por otro, y solo llevan signo menos los dos cuyo índice de arriba no aparece abajo, Γ^1_{22} y Γ^2_{11}. Si además los coeficientes dependen solo de u_1, las derivadas respecto de u_2 se anulan y sobreviven como mucho tres: Γ^1_{11}, Γ^1_{22} y Γ^2_{12}. Es lo que va a pasar en las cuatro superficies.

Cilindro $x(u,v) = (r\cos u,\ r \operatorname{sen} u,\ v)$. Se tiene $\mathbf{X}_1 = (-r \operatorname{sen} u, r\cos u, 0)$ y $\mathbf{X}_2 = (0,0,1)$, de donde

$$g_{11} = r^2, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = 1.$$

Los tres son **constantes**, luego todas sus derivadas se anulan y, por la fórmula del teorema de Gauss, **todos los símbolos de Christoffel son nulos**.

Esfera $x(u,v) = (\cos u \cos v,\ \cos u \operatorname{sen} v,\ \operatorname{sen} u)$, con $-\pi/2 < u < \pi/2$. Derivando y tomando productos escalares:

$$g_{11} = 1, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = \cos^2 u.$$

La única derivada no nula es $\partial g_{22}/\partial u = -2\cos u \operatorname{sen} u$, y de la tabla sobreviven $\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}\,\partial_u g_{22}$ y $\Gamma^2_{12} = \partial_u g_{22}/(2g_{22})$:

$$\Gamma^1_{22} = \cos u \operatorname{sen} u, \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = -\frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}.$$

Catenoide. Con $\mathbf{X}_1 = (\operatorname{sh} u \cos v,\ \operatorname{sh} u \operatorname{sen} v,\ 1)$ y $\mathbf{X}_2 = (-\operatorname{ch} u \operatorname{sen} v,\ \operatorname{ch} u \cos v,\ 0)$,

$$g_{11} = \operatorname{sh}^2 u + 1 = \operatorname{ch}^2 u, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = \operatorname{ch}^2 u.$$

Las únicas derivadas no nulas son $\partial g_{11}/\partial u = \partial g_{22}/\partial u = 2 \operatorname{ch} u \operatorname{sh} u$, y de la tabla sobreviven los tres anunciados en la idea, $\Gamma^1_{11} = \partial_u g_{11}/(2g_{11})$, $\Gamma^1_{22} = -\partial_u g_{22}/(2g_{11})$ y $\Gamma^2_{12} = \partial_u g_{22}/(2g_{22})$:

$$\Gamma^1_{11} = \operatorname{th} u, \qquad \Gamma^1_{22} = -\operatorname{th} u, \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \operatorname{th} u,$$

y los demás nulos.

Pseudoesfera. Es la superficie que genera la tractriz del capítulo 1 al girar alrededor de su asíntota. Su perfil no viene parametrizado por su arco, como tampoco el del catenoide anterior. Toda la cuenta depende de una derivada, que conviene hacer despacio porque es donde se tuerce:

$$\frac{d}{du}\Big(\cos u + \ln\tan\frac{u}{2}\Big) = -\operatorname{sen} u + \frac{1}{\tan(u/2)}\cdot\frac{1}{2\cos^2(u/2)} = -\operatorname{sen} u + \frac{1}{\operatorname{sen} u} = \frac{\cos^2 u}{\operatorname{sen} u},$$

donde el paso central es $2\operatorname{sen}(u/2)\cos(u/2) = \operatorname{sen} u$ y el último, $1-\operatorname{sen}^2 u = \cos^2 u$. Con ella,

$$\mathbf{X}_1 = a\Big(\cos u\cos v,\ \cos u\operatorname{sen} v,\ \frac{\cos^2 u}{\operatorname{sen} u}\Big), \qquad \mathbf{X}_2 = a\big(-\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v,\ \operatorname{sen} u\cos v,\ 0\big),$$

y sumando cuadrados, con $\cos^2 u + \cos^4 u/\operatorname{sen}^2 u = \cos^2 u(\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u)/\operatorname{sen}^2 u$,

$$g_{11} = a^2\frac{\cos^2 u}{\operatorname{sen}^2 u}, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = a^2\operatorname{sen}^2 u.$$

En el intervalo $0 < u < \pi$, donde la fórmula del perfil está definida, $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = a^4\cos^2 u$ solo se anula en $u = \pi/2$. Trabajaremos en $0 < u < \pi/2$; la otra rama regular es $\pi/2 < u < \pi$. La circunferencia $u = \pi/2$ corresponde a la cúspide de la tractriz y queda fuera de estos parches regulares.

Las derivadas respecto de v son todas nulas, y respecto de u,

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u} = -\frac{2a^2\cos u}{\operatorname{sen}^3 u}, \qquad \frac{\partial g_{22}}{\partial u} = 2a^2\operatorname{sen} u\cos u.$$

Como $g_{12} = 0$, en la fórmula del teorema de Gauss solo sobrevive el sumando $h = k$, con $g^{11} = 1/g_{11}$ y $g^{22} = 1/g_{22}$, y queda

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u} = -\frac{1}{\operatorname{sen} u\cos u}, \qquad \Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u} = -\frac{\operatorname{sen}^3 u}{\cos u},$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u} = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u},$$

y $\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = 0$. ■

LA IDEA: LO QUE DICE CADA UNO DE LOS CUATRO RESULTADOS

Los cuatro casos enseñan cosas distintas y merece la pena separarlas.

En el cilindro todos los símbolos se anulan. La consecuencia se lee sin hacer ninguna cuenta y resuelve varios ejercicios de golpe: la ecuación de las geodésicas se reduce a $\ddot{u}_k = 0$, luego las coordenadas de una geodésica son funciones afines del parámetro. Es decir, **las geodésicas del cilindro son las imágenes de las rectas del plano de parámetros**. Al desenrollar el cilindro, salen rectas. Aquí eso deja de ser una metáfora y se convierte en una ecuación diferencial que se integra de cabeza.

En la esfera no. Y el símbolo que sobrevive con un $\operatorname{sen} u$ es el responsable de que los paralelos, salvo el ecuador, no sean geodésicas.

En el catenoide, $g_{11} = g_{22}$ y $g_{12} = 0$. Una parametrización así se llama *conforme*:

conserva los ángulos, aunque no las distancias. Los coeficientes métricos son la métrica del plano multiplicada por un factor común, lo que la hace especialmente cómoda y explica por qué los símbolos salen tan simétricos.

En la pseudoesfera aparece además Γ^1_{11}, porque g_{11} varía. Compárese con la esfera, que tiene la misma forma de parametrización por meridianos y paralelos: allí $g_{11} = 1$, y ese 1 hace que Γ^1_{11} se anule, porque Γ^1_{11} es, salvo el factor $\frac{1}{2}$, la derivada logarítmica de g_{11}. Aquí $g_{11} = a^2 \cot^2 u$ no es constante, luego $\Gamma^1_{11} \neq 0$, y la lectura geométrica de eso es concreta: **el parámetro u no mide longitud sobre el meridiano**. Recorrer una unidad de u cuesta $\sqrt{g_{11}} = a \cot u$ unidades de longitud, mucho cerca de $u = 0$ y casi nada cerca de la arista.

De ahí sale la regla de diagnóstico que más tiempo ahorra al calcular símbolos: *en coordenadas ortogonales*, $g_{12} = 0$, se tiene $\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\partial_u \log g_{11}$. Por tanto, si además $g_{11} = 1$, ese símbolo se anula. Sin la hipótesis $g_{12} = 0$, no puede usarse esta simplificación: la fórmula general mezcla los coeficientes.

Dónde se falla.

- *Usar la tabla sin $g_{12} = 0$.* Con $g_{12} \neq 0$ la inversa no es diagonal, $g^{11} \neq 1/g_{11}$, y cada símbolo mezcla los tres coeficientes. En la carta de Monge de $z = xy$, por ejemplo, $g_{12} = uv$, y ahí hay que usar la fórmula general.
- *El signo de Γ^1_{22}.* Se comprueba con una imagen. En la esfera, una geodésica que sale tangente a un paralelo del hemisferio norte tiene $u' = 0$, y la ecuación de las geodésicas (sección 3.5) da $u'' = -\Gamma^1_{22}\, v'^2 < 0$: baja hacia el ecuador, que es lo que hace el círculo máximo tangente a ese paralelo. Con el signo cambiado subiría hacia el polo.
- *Los términos cruzados.* En la ecuación de las geodésicas, $\sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} u'_i u'_j$ contiene $\Gamma^k_{12} u'_1 u'_2$ y $\Gamma^k_{21} u'_2 u'_1$, que son iguales: el cruzado va con un 2. En la del transporte paralelo, $\sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} f_i u'_j$, los dos cruzados son $\Gamma^k_{12} f_1 u'_2$ y $\Gamma^k_{21} f_2 u'_1$, que son distintos y no se juntan.

CONEXIÓN: LA PSEUDOESFERA ES A LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA LO QUE LA ESFERA A LA ELÍPTICA

Los símbolos recién calculados son todo lo que hace falta para la cuenta que da sentido a esta superficie, y que se completa en el capítulo siguiente: la pseudoesfera tiene **curvatura de Gauss constante y negativa**, $K = -1/a^2$.

La comprobación es de dos líneas con la fórmula $K = -f''/f$ de las superficies de revolución (proposición (p. 270)), que exige el perfil parametrizado por su arco. Aquí $ds/du = \sqrt{g_{11}} = a \cot u$, luego, con $f = a \operatorname{sen} u$ la distancia al eje,

$$f'(s) = \frac{df/du}{ds/du} = \frac{a\cos u}{a\cot u} = \operatorname{sen} u, \qquad f''(s) = \frac{d(\operatorname{sen} u)/du}{ds/du} = \frac{\cos u}{a\cot u} = \frac{\operatorname{sen} u}{a},$$

y por tanto $K = -f''/f = -1/a^2$, constante. Conviene guardar también que $h'(s) = \cos u$, de modo que $f'^2 + h'^2 = 1$: el perfil, medido así, va a velocidad uno.

Ese $-1/a^2$ es la razón de que la pseudoesfera aparezca en un curso de superficies. La esfera de radio a tiene $K = +1/a^2$ y sobre ella la suma de los ángulos de un triángulo geodésico pasa de π; en un triángulo geodésico sencillo contenido en un parche regular de la pseudoesfera se queda corta. Para triángulos de la misma área, el exceso y el defecto tienen el mismo valor absoluto. Ese enunciado es el teorema de Gauss-Bonnet de la asignatura siguiente, donde el exceso angular resulta ser exactamente $\iint K\, dA$. La pseudoesfera es el ejemplo con el que se ve un modelo *local* de geometría hiperbólica en $\mathbb{R}^3$. Los parches de la pseudoesfera no representan el plano hiperbólico completo.

QUÉ DEJA. La regla práctica que ahorra más tiempo en toda la lección: *cada coeficiente métrico constante mata varios símbolos de Christoffel*. Antes de lanzarse a la fórmula conviene mirar cuáles lo son. Y los cuatro resultados en sí, que reaparecen constantemente.

Ejercicio 3.2. *Cuando el primer parámetro mide longitud* [H3.2]

Probar que si los coeficientes métricos de una superficie parametrizada son $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$ y $g_{22} = f(u, v)$, entonces las curvas $u =$ cte determinan segmentos de longitudes iguales sobre las curvas $v =$ cte.

Resolución. La idea, en una línea. Un trozo de u-curva se mide integrando $\sqrt{g_{11}}$, y si $g_{11} = 1$ el integrando vale 1 en todas partes: la longitud es la diferencia de parámetros, se mida sobre la curva $v = v_0$ que se mida.

Las curvas $v =$ cte son las u-curvas, $\alpha(u) = x(u, v_0)$. Su vector velocidad es $\mathbf{X}_1$, y la longitud del arco entre $u = a$ y $u = b$ vale

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \sqrt{g_{11}}\, du = \int_a^b 1\, du = b - a.$$

El resultado no depende de v_0: entre las dos curvas $u = a$ y $u = b$, todos los segmentos de u-curva miden lo mismo. ■

LA IDEA: QUÉ CLASE DE SUPERFICIE ES ESA

Que $g_{11} = 1$ dice que la primera familia de curvas paramétricas está parametrizada por su arco, y que $g_{12} = 0$ dice que las dos familias se cortan perpendicularmente. Juntas convierten a u en una *distancia*: moverse una unidad en u es recorrer una unidad de longitud sobre la superficie, se esté donde se esté.
Es la situación de una carretera con salidas perpendiculares equidistantes, y tiene nombre: coordenadas semigeodésicas. La esfera con su parametrización de revolución es un ejemplo, con $g_{11} = 1$ y $g_{22} = \cos^2 u$: los meridianos están parametrizados por su arco y cortan a los paralelos en ángulo recto.

Qué hemos aprendido, y dónde se falla. La cuenta solo ha usado $g_{11} = 1$. La otra hipótesis, $g_{12} = 0$, trabaja en otro sitio, y es la que explica el nombre. Con $g_{11} = 1$ y $g_{12} = 0$, la tabla de las coordenadas ortogonales del ejercicio anterior da $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = 0$, de modo que la u-curva $u_1 = s$, $u_2 = v_0$ cumple las dos ecuaciones de las geodésicas de la sección 3.5: **las curvas $v =$ cte son geodésicas parametrizadas por el arco**, y las curvas $u =$ cte quedan equidistantes a lo largo de ellas. Una de las dos familias es geodésica; de ahí «semigeodésicas». El error típico es dar la vuelta al enunciado. Las curvas $v =$ cte *no* cortan trozos iguales sobre las curvas $u =$ cte, porque esa longitud se integra con $\sqrt{g_{22}}$, que en general depende de u. En la esfera, el arco del paralelo de latitud u_0 entre dos meridianos separados Δv mide $\Delta v \cos u_0$: un grado de longitud mide en la Tierra unos 111 km sobre el ecuador y la mitad sobre el paralelo de 60°.

Ejercicio 3.3. *Dos superficies distintas con la misma área* [H3.5]

Probar que son iguales las áreas de las regiones de las superficies

$$z = \frac{a}{2}(x^2 + y^2), \qquad z = a\,xy, \qquad a > 0,$$

que se proyectan sobre la misma región del plano OXY.

Resolución. La idea, en una línea. El área solo ve el integrando $\sqrt{g}$, y en una carta de Monge $\sqrt{g} = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$: basta ver que las dos funciones tienen, punto a punto, gradientes del mismo módulo.

Las dos son cartas de Monge, $x(u, v) = (u, v, f(u, v))$, y para ellas $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = (-f_u, -f_v, 1)$, de donde el elemento de área es

$$\sqrt{g} = |\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2| = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}.$$

Basta comparar ese integrando en los dos casos:

$$f = \tfrac{a}{2}(u^2 + v^2): \quad f_u = au,\ f_v = av \qquad \Longrightarrow \qquad 1 + f_u^2 + f_v^2 = 1 + a^2(u^2 + v^2),$$

$$f = a\,uv: \quad f_u = av,\ f_v = au \qquad \Longrightarrow \qquad 1 + f_u^2 + f_v^2 = 1 + a^2(u^2 + v^2).$$

Los dos integrandos coinciden *punto a punto*, luego las integrales sobre cualquier región común del plano de parámetros son iguales. ■

LA IDEA: DOS SUPERFICIES MUY DISTINTAS QUE MIDEN IGUAL

El resultado sorprende porque las dos superficies no se parecen en nada. La primera es un paraboloide de revolución, una copa, con todos sus puntos elípticos. La segunda es una silla de montar, con todos sus puntos hiperbólicos. Una se curva hacia el mismo lado en todas las direcciones y la otra cruza su plano tangente.
Y sin embargo, sobre la misma sombra en el suelo, tienen exactamente la misma área. La razón es que el área solo ve el módulo del gradiente, y las dos funciones tienen el mismo gradiente en módulo aunque apunte en direcciones distintas.
Es un buen recordatorio de lo poco que determina el área. Dos superficies pueden tener la misma densidad de área $\sqrt{\det G}$ sin tener la misma primera forma fundamental. Aquí coinciden los determinantes de sus matrices métricas, no las matrices; por eso pueden diferir incluso en la curvatura de Gauss, que también es intrínseca.

Dónde se falla. En concluir que, como miden lo mismo, el habitante no las distingue. Con $a = 1$ y en el punto de parámetros $(1, 0)$, la copa tiene $f_u = 1$, $f_v = 0$ y $G = \mathrm{diag}(2, 1)$; la silla tiene $f_u = 0$, $f_v = 1$ y $G = \mathrm{diag}(1, 2)$. Mismo determinante, matrices distintas: la copa estira el mapa en la dirección de u y la silla en la de v. Y en el capítulo siguiente se verá que en ese punto la curvatura de Gauss vale $\frac{1}{4}$ en una y $-\frac{1}{4}$ en la otra.

Ejercicio 3.4. *Superficies con coeficientes métricos constantes* [H3.18]

Sea $x(u, v)$ una superficie parametrizada con $g_{11} = a$, $g_{12} = 0$ y $g_{22} = b$ constantes. Se pide:

1. Calcular la longitud de las líneas paramétricas y el área de la región encerrada por $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$ y $v = 1$.

---

2. Hallar las geodésicas parametrizadas de x y comprobar si las líneas paramétricas lo son.

Resolución. La idea, en una línea. Coeficientes constantes quieren decir que la regla de medir es la misma en todos los puntos: longitudes y áreas se integran de constantes, y los símbolos de Christoffel, que se hacen con derivadas de los g_{ij}, se anulan todos.

1. La u-curva entre $u = 0$ y $u = 1$ mide $\int_0^1 \sqrt{g_{11}}\, du = \sqrt{a}$, y la v-curva mide $\sqrt{b}$. El área de la región es

$$A = \iint_{[0,1]^2} \sqrt{g}\, du\, dv = \sqrt{ab}\,,$$

porque $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = ab$ es constante y $a, b > 0$ por regularidad. Se supone que el dominio contiene el cuadrado; si la parametrización lo recubre varias veces en la imagen, la integral cuenta esas multiplicidades.

2. Al ser los coeficientes constantes, todas sus derivadas se anulan y con ellas todos los símbolos de Christoffel. La ecuación de las geodésicas se reduce a

$$\ddot{u}_k = 0, \qquad k = 1, 2,$$

cuyas soluciones son $u_1 = \lambda_1 s + \mu_1$ y $u_2 = \lambda_2 s + \mu_2$, en los intervalos que permanecen en el dominio. Las geodésicas no constantes son las imágenes de las rectas recorridas a velocidad constante; con $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ se obtienen las geodésicas constantes. Si se pide parámetro natural, hay que imponer $a\lambda_1^2 + b\lambda_2^2 = 1$.

Las líneas paramétricas son rectas de ese plano, con una de las dos coordenadas constante, luego **sí son geodésicas**. ■

LA IDEA: ESTA SUPERFICIE ES UN PLANO DISFRAZADO

Que los coeficientes métricos sean constantes significa que la superficie es **localmente isométrica al plano**. Basta cambiar a $\tilde{u} = \sqrt{a}\, u$ y $\tilde{v} = \sqrt{b}\, v$ para que la métrica sea $d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2$.

Todo lo que se ha calculado confirma esa lectura: las longitudes se recuperan reescalando las dos coordenadas, el área se multiplica por $\sqrt{ab}$, y las geodésicas corresponden a rectas del plano. El metro del habitante no cambia según la dirección: cambian las unidades de las coordenadas del mapa. La afirmación es local; un habitante del cilindro puede distinguirlo globalmente del plano dando una vuelta completa.

El cilindro es el ejemplo más conocido, con $a = r^2$ y $b = 1$. Y por eso sus geodésicas son generatrices, paralelos y hélices: las tres familias de rectas del plano desenrollado.

Dónde se falla. Dos sitios. El área es $\sqrt{ab}$ y no ab: el integrando es la raíz del determinante. Y en el segundo apartado, «geodésica parametrizada» es la recta recorrida a velocidad constante, no la recta como conjunto: la curva $u = e^s$, $v = 0$ recorre un trozo de la misma línea paramétrica y no es geodésica parametrizada, porque $\ddot{u} = e^s \neq 0$.

3.2 Medidas en una superficie

LA PREGUNTA

Arquímedes calculó el área de la esfera dos mil años antes de que existiera la primera forma fundamental, aprovechando una propiedad especial de la esfera y su cilindro circunscrito. ¿Hay un método que sirva para cualquier superficie y que use únicamente lo que se puede medir sin salir de ella?

Aquí se cobra la inversión de la sección anterior: con los tres coeficientes métricos se miden longitudes, ángulos y áreas, y en ninguna de las tres fórmulas aparece el espacio ambiente.

Si $\alpha(t) = x\big(u_1(t), u_2(t)\big)$ es una c.p.r. sobre la superficie, ya se sabe del capítulo 2 que $\alpha'(t) = u_1'(t)\mathbf{X}_1 + u_2'(t)\mathbf{X}_2$.

3.2.1 Longitud

La definición de longitud es la del capítulo 1 y no cambia: integrar el módulo de la velocidad. Lo único que se hace es sustituir esa velocidad por su expresión en coordenadas locales. Como $\alpha' = u_1'\mathbf{X}_1 + u_2'\mathbf{X}_2$, su módulo al cuadrado es el producto escalar de ese vector consigo mismo, que es justo el caso $X = Y = \alpha'$ de la fórmula bilineal de la sección anterior, con $\lambda_i = \mu_i = u_i'$. Queda

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(t)\, u_i'(t)\, u_j'(t)}\; dt.$$

Escrita en palabras: la longitud de un camino se obtiene integrando la raíz de una forma cuadrática en las derivadas de las coordenadas, cuyos coeficientes son los g_{ij} evaluados a lo largo del camino. Los u_i' son los datos del camino; los g_{ij}, los de la superficie.

LA IDEA: EL HABITANTE YA PUEDE MEDIR

Esta fórmula es el momento en que la geometría intrínseca empieza a existir. Para calcular la longitud de un camino sobre la superficie no hace falta saber dónde está la superficie: basta con conocer las tres funciones g_{ij} sobre el dominio de parámetros y la expresión del camino en coordenadas locales.

Dicho de otro modo, todo el problema se ha reducido a un cálculo en un abierto del plano, con una regla de medir distorsionada. Esa es exactamente la situación de un mapa: el mapa es plano, pero lleva impresa una escala que cambia de un punto a otro, y con ella se recuperan las distancias verdaderas.

El primer caso particular es el más barato y el que da sentido a los nombres.

Teorema (interpretación geométrica de g_{11} y g_{22})**.** Dado $p = x(u_{10}, u_{20})$, el parámetro de arco con signo de la u_1-curva $\alpha(u_1) = x(u_1, u_{20})$, referido a p, es

$$s(u_1) = \int_{u_{10}}^{u_1} \sqrt{g_{11}(\sigma, u_{20})}\; d\sigma,$$

y para la u_2-curva $\beta(u_2) = x(u_{10}, u_2)$ vale lo mismo cambiando g_{11} por g_{22} e integrando en u_2. La longitud del segmento de curva entre p y el punto considerado es $|s|$; s es negativo antes del valor de referencia.

Sale de aplicar la fórmula anterior a un camino que solo mueve una coordenada: en la u_1-curva se tiene $u_1' = 1$ y $u_2' = 0$, con lo que de los cuatro sumandos sobrevive uno, g_{11}, y la raíz del sumatorio se queda en $\sqrt{g_{11}}$. Esto es lo que autoriza a llamar a $\sqrt{g_{11}}$ el factor de escala en la dirección u_1: cuando vale 1, la coordenada u_1 mide directamente longitud sobre la superficie; cuando vale 3, cada unidad de u_1 recorre tres unidades de camino real.

3.2.2 Ángulo

El ángulo se lee del mismo sitio que la longitud, porque también es un producto escalar disfrazado: $\cos\varphi$ es el producto escalar de los dos vectores velocidad dividido por sus dos módulos. Sustituyendo cada uno de los tres factores por su expresión en coordenadas se obtiene una fórmula larga pero sin ninguna idea nueva. Si α y β son dos c.p.r. sobre la superficie que se cortan en p, con coordenadas $u_i(t)$ y $\bar{u}_i(\tau)$ respectivamente, el ángulo φ que forman cumple

$$\cos\varphi = \frac{\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(p)\, u_i'(t_0)\, \bar{u}_j'(\tau_0)}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(p)\, u_i'(t_0)\, u_j'(t_0)}\ \sqrt{\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(p)\, \bar{u}_i'(\tau_0)\, \bar{u}_j'(\tau_0)}}.$$

Y otra vez el caso particular es el que se recuerda.

Teorema (interpretación geométrica de g_{12})**.** El ángulo que forman en p las dos curvas paramétricas que pasan por p cumple

$$\cos\varphi = \frac{g_{12}(p)}{\sqrt{g_{11}(p)}\sqrt{g_{22}(p)}}.$$

En consecuencia, las curvas paramétricas son ortogonales en p si y solo si $g_{12}(p) = 0$.

La cuenta es la misma poda de antes hecha dos veces: en la u_1-curva solo sobrevive $u_1' = 1$ y en la u_2-curva solo $\bar{u}_2' = 1$, así que del numerador queda el término cruzado g_{12} y de cada raíz del denominador un solo coeficiente diagonal. La segunda frase del teorema es entonces gratis: un cociente con denominador no nulo se anula cuando se anula el numerador, y $\cos\varphi = 0$ es el ángulo recto.

LA IDEA: QUÉ MIDE CADA COEFICIENTE, EN UNA LÍNEA CADA UNO

Los tres teoremas anteriores dan el significado exacto de las tres funciones, y conviene tenerlo porque convierte los g_{ij} de símbolos en objetos:

- g_{11} y g_{22} miden **cuánto se estira** la parametrización en cada dirección coordenada. Su raíz cuadrada es el factor de conversión entre distancia en el mapa y distancia real.
- g_{12} mide **cuánto se inclina** la retícula de coordenadas. Vale cero exactamente cuando las curvas paramétricas se cortan en ángulo recto, y entonces se dice que la parametrización es ortogonal.

Buscar parametrizaciones con $g_{12} = 0$ es una táctica constante, porque simplifica todas las fórmulas posteriores. Y hay una clase entera que la cumple de oficio: en toda superficie de revolución, meridianos y paralelos se cortan perpendicularmente, luego

$g_{12} \equiv 0$.

Ejemplo (la hélice del cilindro, medida desde dentro)**.** Se toma el cilindro de radio r con su carta habitual, $x(u,v) = (r\cos u,\ r\operatorname{sen} u,\ v)$, cuyos coeficientes son $g_{11} = r^2$, $g_{12} = 0$ y $g_{22} = 1$. La hélice es la curva $u = t$, $v = ct$, con $c > 0$, es decir, $u' = 1$ y $v' = c$. Su longitud en una vuelta es

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{g_{11}u'^2 + g_{22}v'^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + c^2}\, dt = 2\pi\sqrt{r^2 + c^2},$$

y el ángulo φ que forma con las generatrices, de componentes $(0,1)$, cumple

$$\cos\varphi = \frac{g_{22}\, v'}{\sqrt{r^2 + c^2}\,\sqrt{g_{22}}} = \frac{c}{\sqrt{r^2 + c^2}},$$

que es constante. Con los paralelos, de componentes $(1,0)$, sale $r/\sqrt{r^2 + c^2}$, y los dos ángulos suman un recto. Con $r = c = 1$, una vuelta mide $2\pi\sqrt{2} \approx 8{,}886$ y la hélice corta a las generatrices a $45°$.

Qué se ha ganado. Son los mismos números que el capítulo 1 obtenía derivando la hélice en $\mathbb{R}^3$, y aquí han salido de tres constantes, r^2, 0 y 1, sin mirar el espacio. Y se ve de dónde vienen: con $\tilde{u} = ru$ la métrica pasa a ser la del plano, la hélice se convierte en la recta de pendiente c/r, y una vuelta es la hipotenusa de un triángulo de catetos $2\pi r$ y $2\pi c$. El ángulo constante con las generatrices es el que el criterio de Lancret pide a una hélice.

3.2.3 Área

Definición. Para las regiones habituales del curso, tomamos un dominio plano D limitado por una curva cerrada simple, regular a trozos, con $\overline{D}$ compacto y contenido en U. Su imagen $x(D)$ es un **dominio** de la superficie y $R = x(\overline{D})$ es la **región**, dominio junto con frontera. El **área** de R es

$$A(R) = \iint_{x^{-1}(R)} |\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|\, du_1\, du_2 = \iint_{x^{-1}(R)} \sqrt{g}\, du_1\, du_2.$$

LA IDEA: DE DÓNDE SALE LA RAÍZ DE g

El integrando no es arbitrario. El paralelogramo generado por $\mathbf{X}_1\, du_1$ y $\mathbf{X}_2\, du_2$ es la imagen aproximada de un rectángulo infinitesimal del dominio de parámetros, y el área de un paralelogramo es el módulo del producto vectorial de sus lados. De ahí $|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|$, que por la identidad de Lagrange es $\sqrt{g}$.

Lo importante es la segunda igualdad: el área también es intrínseca, porque $\sqrt{g}$ se calcula con los coeficientes métricos. El habitante puede medir superficies sin salir de la suya.

La fórmula es aditiva e invariante por movimientos rígidos y por cambios de parámetros, y da área uno al cuadrado unidad del plano. Estas propiedades son comprobaciones necesarias, pero por sí solas no caracterizan de manera única el área sobre todas las superficies. La elección de $\sqrt{g}$ expresa además la regla local de medir áreas con el producto escalar del plano tangente.

Por qué el área no depende de la carta. Si $y = x \circ h$, con jacobiano $J = Dh$, la regla de la cadena da $G_y = J^t (G_x \circ h) J$. Tomando determinantes y raíces,

$$\sqrt{\det G_y} = (\sqrt{\det G_x} \circ h)\, |\det Dh|.$$

El factor que aparece es exactamente el del teorema de cambio de variables de la integral doble. Por tanto, calcular el área en x o en y da lo mismo, incluso si el cambio invierte la orientación.

El puente con integración y medida. La misma fórmula define la medida de área para conjuntos medibles del parche: $dA = \sqrt{g}\, du_1\, du_2$. Una región compacta dentro de la carta tiene área finita, pero no debe sustituirse *compacta* por *acotada* sin más. La acotación de R en $\mathbb{R}^3$ no implica la de $x^{-1}(R)$ en el plano, pues un homeomorfismo no conserva acotación. Para conjuntos generales se admite área infinita. Si hacen falta varias cartas, se divide la región en piezas medibles y se suman sus áreas sin contar los solapes dos veces.

CONEXIÓN: GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA DE SUPERFICIES

El elemento de área $dA = \sqrt{g}\, du_1\, du_2$ que acaba de definirse no es un detalle de cálculo: es una de las dos mitades del teorema que vertebra toda la asignatura siguiente.
El teorema de Gauss–Bonnet relaciona, para una región compacta R de una superficie orientada con borde regular a trozos, las siguientes cantidades: se recorre cada componente C_i del borde con R a la izquierda, y φ_e es el ángulo exterior con signo en cada esquina.

$$\sum_i \int_{C_i} K_g\, ds \;+\; \iint_R K\, dA \;+\; \sum_e \varphi_e \;=\; 2\pi\, \mathcal{X}(R),$$

donde $\mathcal{X}(R)$ es la característica de Euler-Poincaré de la región. La segunda integral es la que usa este elemento de área, y K es la curvatura de Gauss, que aparecerá en el capítulo 4.
Las dos curvaturas y el elemento de área se construyen en este libro; en GTS se incorporan los giros del borde, la característica de Euler y el resultado que los relaciona. Conviene tenerlo presente al estudiar: lo que aquí parecen definiciones sueltas son las piezas de un único enunciado que se verá el cuatrimestre siguiente.

Ejercicios de esta sección

Ejercicio 3.5. *El área de una superficie de revolución, y la respuesta a Arquímedes*

Sea $\alpha(s) = \big(f(s), 0, h(s)\big)$, con $s \in [s_0, s_1]$ y $f > 0$, una curva plana del plano OXZ parametrizada naturalmente. Supongamos que recorre una sola vez un perfil simple (que puede ser cerrado), y sea $x(s, v)$ la superficie de revolución que genera al girar alrededor del eje OZ. Probar que el área de la región comprendida entre los dos paralelos correspondientes a s_0 y s_1 vale

$$A = 2\pi \int_{s_0}^{s_1} f(s)\, ds.$$

Aplicarlo para hallar el área de una superficie esférica de radio r y la de un toro de radios $R > r$.

Resolución. La idea, en una línea. El elemento de área es $\sqrt{g}$, y en una superficie de revolución con el perfil parametrizado por su arco resulta que $\sqrt{g}$ vale exactamente f, la

distancia al eje. Una vez visto eso, la integral doble se separa y la de la variable angular da 2π sin hacer nada.

Los coeficientes métricos. Girando el perfil, $x(s,v) = \big(f(s)\cos v,\ f(s)\operatorname{sen} v,\ h(s)\big)$, y derivando,

$$\mathbf{X}_1 = \big(f'\cos v,\ f'\operatorname{sen} v,\ h'\big), \qquad \mathbf{X}_2 = \big(-f\operatorname{sen} v,\ f\cos v,\ 0\big),$$

de donde $g_{11} = f'^2 + h'^2 = 1$, porque el perfil va a velocidad uno; $g_{12} = 0$, porque los términos en $\cos v \operatorname{sen} v$ se cancelan; y $g_{22} = f^2$. Por tanto

$$\sqrt{g} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{f^2} = f,$$

donde la última igualdad usa $f > 0$.

La integral. Con la definición de área, y siendo el dominio el rectángulo $[s_0, s_1] \times (0, 2\pi)$,

$$A = \iint \sqrt{g}\, ds\, dv = \int_0^{2\pi}\!\!\int_{s_0}^{s_1} f(s)\, ds\, dv = 2\pi \int_{s_0}^{s_1} f(s)\, ds.$$

El integrando no depende de v —esa es toda la simetría de revolución—, así que la integral interior sale como factor. El meridiano de costura que falta al tomar $0 < v < 2\pi$ tiene área cero, así que no altera el resultado. ■

La esfera. El perfil es el semicírculo $\alpha(s) = \big(r\cos(s/r), 0, r\operatorname{sen}(s/r)\big)$, que está parametrizado naturalmente y recorre $s \in [-\pi r/2, \pi r/2]$. En los extremos $f = 0$: se aplica la fórmula entre paralelos interiores y se hace tender estos a los polos, que tienen área cero. Con $f(s) = r\cos(s/r)$,

$$A = 2\pi \int_{-\pi r/2}^{\pi r/2} r\cos\frac{s}{r}\, ds = 2\pi r\Big[r\operatorname{sen}\frac{s}{r}\Big]_{-\pi r/2}^{\pi r/2} = 2\pi r\,(r + r) = 4\pi r^2.$$

El toro. El perfil es la circunferencia de radio r centrada a distancia R del eje, $\alpha(s) = \big(R + r\cos(s/r), 0, r\operatorname{sen}(s/r)\big)$ con $s \in [0, 2\pi r]$, también parametrizada por su arco. Con $f(s) = R + r\cos(s/r)$,

$$A = 2\pi \int_0^{2\pi r} \Big(R + r\cos\frac{s}{r}\Big) ds = 2\pi\Big[Rs + r^2\operatorname{sen}\frac{s}{r}\Big]_0^{2\pi r} = 4\pi^2 Rr,$$

porque el coseno completa un período entero y su integral se anula.

LA IDEA: LA FÓRMULA ES «LONGITUD POR CAMINO RECORRIDO»

La expresión $A = 2\pi \int f\, ds$ se lee sola si se reordena mentalmente: cada trocito de perfil de longitud ds barre, al dar la vuelta, una banda de anchura ds y de longitud $2\pi f$, que es el perímetro de la circunferencia que describe. Multiplicar y sumar es la integral.

Y de ahí sale la lectura que la hace memorable. Sacando el 2π y la longitud total L del perfil como factores, $A = 2\pi \bar{f}\, L$, donde $\bar{f}$ es la distancia media al eje, que es la distancia del *centro de masas* del perfil al eje. Es decir: **el área es la longitud del perfil por la distancia que recorre su centro de masas**. Es el teorema de Pappus, del siglo IV, mil quinientos años anterior a todo el aparato de este capítulo.

En el toro se comprueba de un vistazo, y por eso conviene tener el resultado: el perfil es una circunferencia de longitud $2\pi r$, su centro de masas está en el centro y recorre

una circunferencia de longitud $2\pi R$, y el producto es $4\pi^2 Rr$ sin integrar nada.
La esfera merece un comentario aparte, porque es la respuesta a la pregunta que abrió esta sección. La banda esférica entre dos alturas tiene el mismo área que la banda del cilindro circunscrito entre esas mismas dos alturas: al subir, el radio de los paralelos disminuye pero la superficie se inclina, y los dos efectos se compensan exactamente. Esa compensación es lo que Arquímedes demostró por otros medios, y lo que aquí sale al sustituir $\sqrt{g} = f$ en una integral. El método general no solo recupera su resultado: explica de dónde venía.

Dónde se falla. Al aplicar $A = 2\pi \int f$ con un perfil que no está parametrizado por su arco. En general $\sqrt{g} = f\sqrt{f'^2 + h'^2}$, y el segundo factor solo vale 1 con el parámetro arco. Con la esfera escrita como $(r\cos u,\ 0,\ r\,\mathrm{sen}\,u)$, $u \in [-\pi/2, \pi/2]$, la rapidez del perfil es r y $\sqrt{g} = r^2\cos u$; olvidar ese factor r da $2\pi \int r\cos u\,du = 4\pi r$, que ni siquiera tiene unidades de área. La comprobación de unidades es gratis y lo delata.

3.3 Curvatura geodésica

LA PREGUNTA

Quien conduce por una carretera de montaña siente dos cosas distintas: el volante, que gira cuando la carretera tuerce, y la barriga, que sube y baja con los cambios de rasante. La segunda la pone la montaña; la primera la pone el trazado, y es la única que el conductor controla. ¿Cómo se separa, con un número, lo que una curva gira *dentro* de la superficie de lo que gira porque la superficie se dobla debajo de ella?

LA IDEA: PARTIR LA CURVATURA EN DOS

Aquí se juntan por primera vez los dos primeros capítulos, y la idea es sencilla.
Una curva trazada sobre una superficie se dobla, y su curvatura k mide cuánto. Pero ese doblarse tiene dos causas muy distintas mezcladas:

- una parte es **culpa de la superficie**: aunque uno camine todo lo recto que pueda sobre una esfera, acaba describiendo una circunferencia, porque la esfera se curva bajo sus pies;
- la otra parte es **culpa del caminante**: si además gira a la izquierda, la curva se dobla más, y ese giro sí lo nota él.

La primera es la **curvatura normal**: la componente de $\ddot{\alpha}$ perpendicular a la superficie, que el habitante no puede percibir. La segunda es la **curvatura geodésica**: la componente dentro del plano tangente, que sí percibe.
Todo lo que sigue es escribir esa separación con cuidado.

Definición. Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. sobre una p.l., y sea $\mathbf{N}(s)$ el normal de la superficie a lo largo de ella. Se define la **normal intrínseca** de α por

$$\mathbf{S}(s) = \mathbf{N}(s) \times \mathbf{t}(s),$$

que es unitaria y tangente a la superficie. El triedro ortonormal directo $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{S}(s), \mathbf{N}(s)\}$ se llama **triedro de Darboux** de α.

Definición. Las funciones $K_g(s)$ y $K_n(s)$ definidas por

$$\ddot{\alpha}(s) = K_g(s)\,\mathbf{S}(s) + K_n(s)\,\mathbf{N}(s) \tag{3.2}$$

se llaman **curvatura geodésica** y **curvatura normal** de α. Si $k > 0$, también $\ddot{\alpha} = k\mathbf{n}$. Si $k = 0$, ambas componentes son cero y no hace falta definir $\mathbf{n}$.

De (3.2) y de la ortonormalidad del triedro de Darboux se sigue de inmediato

$$k^2(s) = K_g^2(s) + K_n^2(s).$$

LA IDEA: DOS TRIEDROS SOBRE LA MISMA CURVA

Merece la pena poner uno al lado del otro los dos triedros que ahora conviven sobre α, porque compararlos es lo que produce todo este capítulo y buena parte del siguiente.

- El **triedro de Frenet** $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ es de la curva y solo de la curva. No sabe que hay una superficie.
- El **triedro de Darboux** $\{\mathbf{t}, \mathbf{S}, \mathbf{N}\}$ es de la curva *dentro de* la superficie. Comparte el tangente con el de Frenet, pero sustituye el par $\{\mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ por el par $\{\mathbf{S}, \mathbf{N}\}$, adaptado a la superficie.

Donde $k > 0$, los dos son ortonormales directos y comparten el primer vector. Llamemos φ al ángulo orientado de $\mathbf{S}$ a $\mathbf{n}$ alrededor de $\mathbf{t}$. Entonces $K_g = k\cos\varphi$ y $K_n = k\,\mathrm{sen}\,\varphi$. No hay que confundirlo con el ángulo θ de Meusnier, que se mide entre $\mathbf{n}$ y $\mathbf{N}$.

La relación de Pitágoras $k^2 = K_g^2 + K_n^2$ es exactamente eso: descomponer un vector de módulo k en dos direcciones perpendiculares.

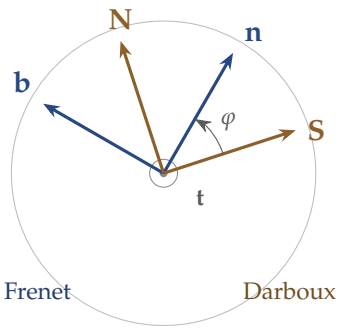


Figura 3.1: Los dos triedros vistos desde el vector tangente, que sale hacia el lector y es común a ambos. Todo lo demás vive en el plano normal a $\mathbf{t}$, y un triedro es el otro girado un ángulo φ. Ese ángulo es la única información que hace falta para traducir entre los dos lenguajes.

LA IDEA: QUÉ SE LEE EN ESA FIGURA

La figura resume medio capítulo y merece mirarse un momento.

Los cuatro vectores $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{S}$ y $\mathbf{N}$ viven todos en el mismo plano, el perpendicular a $\mathbf{t}$. Los dos pares son bases ortonormales de ese plano, y uno es el otro girado un ángulo. Nada más.

De ahí sale todo lo que viene:

- Descomponer $\ddot{\alpha} = k\,\mathbf{n}$ en la base de Darboux da $k\cos\varphi$ y $k\,\mathrm{sen}\,\varphi$, que son la curva-

tura geodésica y la normal. El teorema de Meusnier es leer esa figura.
- Que $k^2 = K_g^2 + K_n^2$ es Pitágoras en ese plano.
- Donde $k > 0$, ser geodésica es que $\mathbf{n}$ sea paralelo a $\mathbf{N}$; ser línea asintótica es que sea paralelo a $\mathbf{S}$, o que $\mathbf{b}$ sea paralelo a $\mathbf{N}$. Se admiten ambos sentidos. Donde $k = 0$, se anulan a la vez K_g y K_n.
- Y la relación $\tau = \tau_g + \dot{\varphi}$ del capítulo siguiente dice simplemente que la torsión de la curva es la de la superficie más lo que gire el dibujo al avanzar.

Ejemplo (un paralelo de la esfera, a mano)**.** Antes de las fórmulas en coordenadas, el caso más sencillo con los vectores a la vista. En la esfera de radio r, el paralelo de latitud u_0, con $0 \le u_0 < \pi/2$, es una circunferencia de radio $r\cos u_0$, así que $k = 1/(r\cos u_0)$, y su normal principal $\mathbf{n}$ es horizontal y apunta al eje. El normal de la esfera, tomado hacia dentro, apunta al centro de la esfera. Los dos viven en el plano perpendicular a $\mathbf{t}$ (el plano meridiano del punto) y forman un ángulo igual a la latitud, $\theta = u_0$: el centro del paralelo está a la misma altura que el punto; el de la esfera, $r\,\mathrm{sen}\,u_0$ más abajo.

De ahí sale todo sin derivar. La curvatura normal es la sombra de $k\mathbf{n}$ sobre $\mathbf{N}$: $|K_n| = k\cos u_0 = 1/r$. La geodésica, la otra componente: $|K_g| = k\,\mathrm{sen}\,u_0 = \tan u_0/r$. Y Pitágoras se comprueba solo: $\frac{1}{r^2\cos^2 u_0} = \frac{1}{r^2} + \frac{\tan^2 u_0}{r^2}$. Con números, en la esfera unidad y a 60° de latitud, el paralelo tiene radio $\frac{1}{2}$ y se dobla con $k = 2$; de eso la esfera impone 1, que es la curvatura normal, y el caminante pone $\sqrt{3}$, que es la geodésica: $4 = 1 + 3$. Con el normal hacia fuera y el paralelo recorrido hacia el este, $\mathbf{S} = \mathbf{N} \times \mathbf{t}$ apunta al norte y $K_g = +\tan u_0/r$: el caminante gira hacia el polo.

Qué se ha ganado. La descomposición deja de ser abstracta. La parte normal, $1/r$, es la misma para todas las curvas de la esfera en todas las direcciones, porque la esfera se curva igual hacia todos lados; es lo que el suelo impone. La parte geodésica depende de la curva: vale cero solo en el ecuador, $u_0 = 0$, y crece hacia el polo. Eso es lo que las fórmulas que vienen ahora calculan sin mirar la figura.

Proposición. Se verifica

$$K_n(s) = \sum_{i,j=1}^{2} L_{ij}(s)\,\dot{u}_i(s)\,\dot{u}_j(s), \qquad K_g(s)\,\mathbf{S}(s) = \sum_{k=1}^{2}\Big\{\ddot{u}_k(s) + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^k(s)\,\dot{u}_i(s)\,\dot{u}_j(s)\Big\}\mathbf{X}_k(s).$$

La idea, en una línea. Se deriva dos veces la curva escrita en coordenadas, se sustituyen las derivadas segundas de la superficie por las ecuaciones de Gauss — que son precisamente las que separan lo tangente de lo normal — y se comparan las dos descomposiciones del mismo vector $\ddot{\alpha}$; lo tangencial es K_g y lo normal es K_n.

Se parte de $\dot{\alpha} = \sum_i \dot{u}_i\,\mathbf{X}_i$ y se deriva otra vez, con la regla del producto y la de la cadena:

$$\ddot{\alpha} = \sum_{i,j=1}^{2} \dot{u}_i\,\dot{u}_j\,X_{ij} + \sum_{i=1}^{2}\ddot{u}_i\,\mathbf{X}_i.$$

Sustituyendo X_{ij} por las ecuaciones de Gauss (3.1) y agrupando por componentes,

$$\ddot{\alpha} = \sum_{k=1}^{2}\Big\{\ddot{u}_k + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\dot{u}_i\dot{u}_j\Big\}\mathbf{X}_k + \Big\{\sum_{i,j}L_{ij}\dot{u}_i\dot{u}_j\Big\}\mathbf{N}.$$

Comparando con (3.2), la parte normal da K_n y la tangencial da $K_g\mathbf{S}$. ■

LA IDEA: LA CONSECUENCIA QUE IMPORTA

Mirando la segunda fórmula, en ella aparecen únicamente los símbolos de Christoffel y las coordenadas de la curva. Y los Γ son intrínsecos por el teorema de Gauss.
Por tanto, **la curvatura geodésica es intrínseca**, una vez elegida la orientación de la superficie para fijar su signo; $|K_g|$ no depende de esa elección. El habitante de la superficie puede medirla. La curvatura normal, en cambio, se escribe con los L_{ij}, que involucran a $\mathbf{N}$: es extrínseca, y el habitante no la percibe.
Esto confirma la intuición con la que empezó la sección, y no era evidente: que el caminante nota su propio giro y no nota la curvatura del suelo es ahora un teorema y no una metáfora.

Proposición. Se verifica

$$K_g(s) = \begin{vmatrix} \dot{u}_1(s)\sqrt{g(s)} & \dot{u}_2(s)\sqrt{g(s)} \\ \ddot{u}_1(s) + \sum_{i,j}\Gamma^1_{ij}\dot{u}_i\dot{u}_j & \ddot{u}_2(s) + \sum_{i,j}\Gamma^2_{ij}\dot{u}_i\dot{u}_j \end{vmatrix},$$

y en consecuencia K_g es una cantidad intrínseca, con la orientación fijada.

La idea, en una línea. K_g es la componente de la aceleración tangencial hacia la izquierda de la velocidad. En coordenadas, «hacia la izquierda» se mide con un determinante 2×2 entre las componentes de la velocidad y las de esa aceleración, y el factor $\sqrt{g}$ convierte el área del mapa en área de la superficie.

Escribamos $A_k = \ddot{u}_k + \sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}\dot{u}_i\dot{u}_j$ y $A = A_1\mathbf{X}_1 + A_2\mathbf{X}_2$. La proposición anterior da $K_g\mathbf{S} = A$.
Paso 1: sacar K_g con un producto mixto. Como $\mathbf{S}$ es unitario, $K_g = A\cdot\mathbf{S} = A\cdot(\mathbf{N}\times\mathbf{t}) = \mathbf{N}\cdot(\mathbf{t}\times A)$, permutando cíclicamente el producto mixto.
Paso 2: el producto vectorial de dos vectores tangentes. Con $\mathbf{t} = \dot{u}_1\mathbf{X}_1 + \dot{u}_2\mathbf{X}_2$, los términos $\mathbf{X}_i\times\mathbf{X}_i$ se anulan y $\mathbf{X}_2\times\mathbf{X}_1 = -\mathbf{X}_1\times\mathbf{X}_2$, así que $\mathbf{t}\times A = (\dot{u}_1A_2 - \dot{u}_2A_1)\,\mathbf{X}_1\times\mathbf{X}_2$.
Paso 3: el factor de área. Como $\mathbf{N} = (\mathbf{X}_1\times\mathbf{X}_2)/\sqrt{g}$ y $|\mathbf{X}_1\times\mathbf{X}_2| = \sqrt{g}$, se tiene $\mathbf{N}\cdot(\mathbf{X}_1\times\mathbf{X}_2) = \sqrt{g}$. Juntando,

$$K_g = \sqrt{g}\,(\dot{u}_1A_2 - \dot{u}_2A_1),$$

que es el determinante escrito arriba. ■

Una comprobación con el ejemplo. En la esfera unidad con la carta de latitud y longitud, $\sqrt{g} = \cos u$, y el paralelo $u = u_0$ recorrido por su arco tiene $\dot{u}_1 = 0$, $\dot{u}_2 = 1/\cos u_0$, $A_1 = \Gamma^1_{22}\dot{u}_2^2 = \tan u_0$ y $A_2 = 0$. El determinante da $K_g = -\tan u_0$. El signo menos es el del normal de esa carta, $\mathbf{X}_1\times\mathbf{X}_2 = -\cos u\ x$, que apunta hacia dentro; con el normal hacia fuera sale el $+\tan u_0$ del ejemplo del paralelo.

Proposición. Se verifica $K_g(s) = (\mathbf{N}(s), \dot{\alpha}(s), \ddot{\alpha}(s))$, y por tanto donde $k(s) > 0$, $K_g(s) =$

$k(s)\cos\varphi(s)$, siendo $\varphi(s)$ el ángulo entre $\mathbf{N}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$ (su coseno coincide con el del ángulo orientado de la figura).

La idea, en una línea. La aceleración de la curva es un solo vector, $k\,\mathbf{n}$, escrito en dos bases distintas: la de Frenet y la de Darboux. Esta proposición y el teorema de Meusnier que viene detrás no hacen otra cosa que proyectar ese vector sobre un eje de la base de Darboux y leer el resultado en la de Frenet: aquí sobre $\mathbf{S}$, allí sobre $\mathbf{N}$. Toda la trigonometría de los dos enunciados es el coseno del ángulo entre las dos bases.

De $\ddot{\alpha} = K_g\mathbf{S} + K_n\mathbf{N}$ y de la ortonormalidad se obtiene

$$K_g = \ddot{\alpha}\cdot\mathbf{S} = (\ddot{\alpha}, \mathbf{N}, \mathbf{t}) = (\mathbf{N}, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}),$$

usando $\mathbf{S} = \mathbf{N}\times\mathbf{t}$ y permutando cíclicamente el producto mixto. Donde $k > 0$, como $\dot{\alpha}\times\ddot{\alpha} = k\,\mathbf{b}$, se concluye $K_g = \mathbf{N}\cdot k\,\mathbf{b} = k\cos\varphi$. ■

Teorema (de Meusnier)**.** Donde $k(s) > 0$, se verifica $K_n(s) = k(s)\cos\theta(s)$, donde $\theta(s)$ es el ángulo entre $\mathbf{n}(s)$ y $\mathbf{N}(s)$.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: LA SOMBRA DE LA ACELERACIÓN SOBRE EL NORMAL

Antes de la línea de cuenta, la imagen que la predice, porque el enunciado es más profundo de lo que su aspecto sugiere.
La imagen. La curva, al pasar por el punto, se dobla con intensidad k y en la dirección $\mathbf{n}$. La superficie, por su parte, solo se entera de la parte de ese doblado que sale perpendicular a ella, es decir, de la sombra de $k\,\mathbf{n}$ sobre $\mathbf{N}$. Y la sombra de un vector sobre otro unitario es su módulo por el coseno del ángulo. Eso es literalmente el enunciado: $K_n = k\cos\theta$.
La consecuencia que la imagen ya anuncia, y que es el contenido real del teorema: la sombra sobre $\mathbf{N}$ es la misma para todas las curvas que pasan por el punto en la misma dirección, porque solo depende de cómo está inclinada la superficie ahí. Dicho de otro modo, entre dos curvas con la misma tangente, la que se dobla lo justo para seguir a la superficie tiene $K_g = 0$ y curvatura mínima $|K_n|$. Las que tienen $K_g \neq 0$ se doblan más: a la componente normal añaden un giro tangencial.
Y el precio de esa lectura hay que decirlo: donde $k = 0$ no hay $\mathbf{n}$ y el ángulo θ no existe, así que la fórmula deja de tener sentido aunque K_n siga perfectamente definida. Es el mismo agujero que en el capítulo 1.

La demostración cabe en un movimiento: proyectar la ecuación de Darboux sobre $\mathbf{N}$. Multiplicando (3.2) escalarmente por $\mathbf{N}$ y usando que $\mathbf{S}$ es tangente y por tanto su producto escalar con $\mathbf{N}$ es nulo, sobrevive un solo sumando:

$$K_n = k\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{N} = k\cos\theta.\blacksquare$$

Juntando las dos últimas expresiones, para todo s con $k(s) \neq 0$,

$$\mathbf{N}(s) = \frac{K_n(s)}{k(s)}\,\mathbf{n}(s) + \frac{K_g(s)}{k(s)}\,\mathbf{b}(s).$$

LA IDEA: QUÉ DICE DE VERDAD MEUSNIER

El enunciado parece una identidad trigonométrica y es un resultado con contenido. Dice que la curvatura normal **no depende de la curva**, sino solo de su dirección tangente. En efecto, $K_n = \sum L_{ij}\dot{u}_i\dot{u}_j$ depende únicamente de la superficie, a través de los L_{ij}, y de las componentes del vector tangente. Dos curvas distintas que pasen por el mismo punto con la misma dirección tienen la misma curvatura normal, por muy diferentes que sean por lo demás.
De ahí la lectura práctica: la curvatura normal es una propiedad de la *superficie en una dirección*, no de la curva. Esa observación es la que abre la lección 4, donde K_n se estudiará como una función definida sobre las direcciones tangentes y sus valores extremos serán las curvaturas principales.
Y la lectura geométrica de Meusnier: para una dirección tangente dada, $k \geq |K_n|$, con igualdad exactamente cuando $K_g = 0$ en el punto. La sección normal alcanza ese mínimo; otras curvas pueden alcanzarlo también en ese punto. Si $k > 0$, sus normales $\mathbf{n}$ y $\mathbf{N}$ son paralelas ($\theta = 0$ o π). Si $K_n = 0$, el mínimo es cero y no hay normal de Frenet que comparar.

Observación. Si se hace un cambio de parámetros en la superficie con jacobiano negativo, el vector normal cambia de sentido, y con él cambian de signo tanto K_g como K_n. Lo mismo ocurre con K_g al invertir el sentido de recorrido de la curva, mientras que K_n no cambia. Conviene fijar una orientación al principio de cada problema y no cambiarla a mitad.

Proposición. Para una c.p.r. con parámetro arbitrario,

$$K_g(t) = \frac{1}{|\alpha'(t)|^3}(\mathbf{N}(t), \alpha'(t), \alpha''(t)).$$

La idea, en una línea. Cambiar de parámetro añade a la aceleración un sumando en la dirección de la velocidad, el de pisar el acelerador, y el producto mixto con α' lo mata; lo que queda es la aceleración de siempre por la rapidez al cuadrado, y otra rapidez sale de α'.

Sea $\rho = ds/dt = |\alpha'| > 0$. Entonces $\alpha' = \rho\mathbf{t}$ y $\alpha'' = \rho'\mathbf{t} + \rho^2\ddot{\alpha}$. En el producto mixto, el sumando con dos factores $\mathbf{t}$ se anula; el otro da $\rho^3(\mathbf{N}, \mathbf{t}, \ddot{\alpha}) = \rho^3 K_g$. Bajo otro parámetro $t = f(r)$, el numerador se multiplica por f'^3 y el denominador por $|f'|^3$: se conserva K_g si $f' > 0$ y cambia su signo si $f' < 0$. ■

EXPLÍCATE. *Compara esta fórmula con la de la curvatura de una curva en parámetro arbitrario del capítulo 1. Aparecen el mismo cubo en el denominador y las mismas dos primeras derivadas. ¿Por qué el exponente es tres y no otro? Piensa en qué le pasa a cada factor al reescalar el parámetro.*

Cómo se lee, y un caso con números. El numerador es $\mathbf{N}\cdot(\alpha' \times \alpha'')$, la componente sobre $\mathbf{N}$ del vector $\alpha' \times \alpha''$. En el capítulo 1 la curvatura era $k = |\alpha' \times \alpha''|/|\alpha'|^3$, y $\alpha' \times \alpha''$ apunta como $\mathbf{b}$. Así que la fórmula es la de la curvatura con el módulo cambiado por la proyección sobre $\mathbf{N}$, y dividir las dos da $K_g/k = \mathbf{N}\cdot\mathbf{b}$: la misma lectura que la proposición del producto mixto, ahora sin reparametrizar. Es la fórmula que se usa en la práctica, porque el parámetro arco casi nunca se puede escribir en cerrado. Un caso: el paralelo de latitud u_0 de la esfera unidad recorrido con la longitud t, $\alpha(t) = (\cos u_0 \cos t,\ \cos u_0 \operatorname{sen} t,\ \operatorname{sen} u_0)$, que va a rapidez

$\cos u_0$ y no 1. Con el normal exterior $\mathbf{N} = \alpha$,

$$\alpha' \times \alpha'' = \cos^2 u_0\,(0,0,1), \qquad (\mathbf{N}, \alpha', \alpha'') = \operatorname{sen} u_0 \cos^2 u_0, \qquad K_g = \frac{\operatorname{sen} u_0 \cos^2 u_0}{\cos^3 u_0} = \tan u_0,$$

el valor del ejemplo del paralelo. Sin dividir por $|\alpha'|^3$ saldría $\operatorname{sen} u_0 \cos^2 u_0$, que a 60° de latitud vale 0,22 en lugar de $\sqrt{3} \approx 1{,}73$: es el error de tratar la curva como si fuera por el arco.

CONEXIÓN: GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA DE SUPERFICIES

De todos los conceptos de este capítulo, la curvatura geodésica es el que más directamente se hereda, y conviene estudiarla sabiendo para qué va a servir.

En el teorema de Gauss-Bonnet, la integral de K_g a lo largo de la frontera de una región es uno de los tres sumandos que, juntos, dan una cantidad puramente topológica. Dicho de otro modo: K_g mide cuánto gira una curva vista desde la superficie, y el teorema afirma que ese giro total, corregido con la curvatura del interior y con los ángulos de las esquinas, no depende de la región concreta sino solo de su forma topológica.

Hay un caso particular que conviene tener ya en la cabeza, porque explica de golpe por qué las geodésicas importan tanto. Si la frontera de la región está formada por geodésicas, entonces $K_g \equiv 0$ sobre ella y el primer sumando desaparece. Para un triángulo simple cuyos tres lados son geodésicos y que encierra una región disco, el teorema se reduce a

$$\iint_T K\,dA = \sum_{i=1}^{3} \tilde{\varphi}_i - \pi,$$

donde los $\tilde{\varphi}_i$ son los ángulos internos. Es decir: **el exceso de la suma de los ángulos de un triángulo geodésico sobre π es exactamente la curvatura encerrada**. En el plano la curvatura es cero y se recupera el resultado de siempre; en una esfera de radio r los ángulos suman más de π, y ese exceso es el área dividida por r^2.

Ese resultado se llama teorema de Gauss, y es la respuesta definitiva a la pregunta que abría el capítulo: un habitante de la superficie puede medir la curvatura de su mundo midiendo ángulos de triángulos, sin asomarse jamás fuera.

Ejercicios de esta sección

Ejercicio 3.6. *La misma curva sobre dos superficies distintas* [H3.7]

Hallar la curvatura geodésica de la hélice $\alpha(t) = (a\cos t,\ a\operatorname{sen} t,\ bt)$, con $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, sobre:

1. las parametrizaciones locales del cilindro circular $x(u,v) = (a\cos u,\ a\operatorname{sen} u,\ v)$;
2. las parametrizaciones locales del helicoide recto $x(u,v) = (u\cos v,\ u\operatorname{sen} v,\ bv)$, en su parte regular $u^2 + b^2 > 0$.

Resolución. La idea, antes de la cuenta. La curva es la misma en los dos apartados; solo cambia $\mathbf{N}$. Y por la proposición del producto mixto, $K_g = k\mathbf{N}\cdot\mathbf{b}$ donde $k > 0$: lo único que importa del normal de la superficie es cuánto se parece a la binormal de la hélice. En el cilindro el normal es horizontal y radial, paralelo a la normal principal de la hélice (que apunta al eje), así que es perpendicular a $\mathbf{b}$ y $K_g = 0$. En el helicoide, como se verá, el normal a lo largo de la hélice es exactamente $\mathbf{b}$, y $K_g = k$. La cuenta confirma las dos cosas.

Las derivadas de la curva son las mismas en los dos casos:

$$\alpha'(t) = (-a\,\mathrm{sen}\,t,\ a\cos t,\ b), \qquad \alpha''(t) = (-a\cos t,\ -a\,\mathrm{sen}\,t,\ 0), \qquad |\alpha'| = \sqrt{a^2+b^2} =: c.$$

Lo único que cambia es el vector normal de la superficie.

Sobre el cilindro. Aquí $\mathbf{N} = (\cos t, \mathrm{sen}\,t, 0)$, y

$$(\mathbf{N}, \alpha', \alpha'') = \begin{vmatrix} \cos t & \mathrm{sen}\,t & 0 \\ -a\,\mathrm{sen}\,t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\,\mathrm{sen}\,t & 0 \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} \cos t & \mathrm{sen}\,t \\ -a\cos t & -a\,\mathrm{sen}\,t \end{vmatrix} = 0,$$

desarrollando por la tercera columna, donde solo sobrevive el b, y observando que el menor que queda tiene sus dos filas proporcionales. Por tanto

$$K_g = \frac{1}{|\alpha'|^3}(\mathbf{N}, \alpha', \alpha'') = 0 :$$

la hélice es geodésica del cilindro.

Sobre el helicoide. La hélice es la curva paramétrica $u = a$. Con $\mathbf{X}_1 = (\cos v, \mathrm{sen}\,v, 0)$ y $\mathbf{X}_2 = (-u\,\mathrm{sen}\,v,\ u\cos v,\ b)$ se obtiene

$$\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = (b\,\mathrm{sen}\,v,\ -b\cos v,\ u), \qquad \mathbf{N} = \frac{(b\,\mathrm{sen}\,t,\ -b\cos t,\ a)}{c} \quad \text{sobre la hélice.}$$

Ahora el producto mixto no se anula. Desarrollando por la tercera fila y agrupando,

$$(\mathbf{N}, \alpha', \alpha'') = \frac{1}{c}\left[a\,c^2\cos^2 t + a\,c^2\,\mathrm{sen}^2\,t\right] = a\,c,$$

de donde

$$K_g = \frac{a\,c}{c^3} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

■

LA IDEA: LO QUE ESTE EJERCICIO ENSEÑA Y NINGÚN OTRO

La misma curva, con las mismas derivadas, da curvatura geodésica nula en una superficie y no nula en la otra. Eso deja claro algo que es fácil de olvidar: **la curvatura geodésica no es una propiedad de la curva, sino de la curva *y* la superficie**. Lo único que ha cambiado en el cálculo es el vector normal.

Y hay un segundo hallazgo escondido. En el capítulo 1 se calculó que la curvatura de la hélice vale

$$k = \frac{a}{a^2+b^2},$$

que es exactamente el valor de K_g sobre el helicoide. Como $k^2 = K_g^2 + K_n^2$, eso obliga a $K_n = 0$: **la hélice es línea asintótica del helicoide**.

Así que la misma curva es geodésica de una superficie y línea asintótica de otra, que son los dos extremos opuestos del reparto de la curvatura. Es la mejor ilustración posible de que esas propiedades no viven en la curva.

Se puede comprobar por otra vía, que además se verá en el capítulo siguiente: en el helicoide, $L_{11} = L_{22} = 0$, y entonces las curvas paramétricas son líneas asintóticas. Las u-curvas son las rectas del helicoide y las v-curvas son las hélices.

QUÉ DEJA. Que la curvatura geodésica depende de las dos cosas, curva y superficie. Los dos valores concretos, que conviene tener: la hélice es geodésica del cilindro y asintótica del helicoide. Y el hábito de mirar si el producto mixto se anula por proporcionalidad de filas antes de desarrollarlo entero, que aquí ahorra el ejercicio completo.

Ejercicio 3.7. *Cortar un cilindro con un plano inclinado* [H3.20]

Sea C el cilindro circular de eje OZ y radio $r > 0$. Hallar la curvatura geodésica de la curva intersección de C con el plano $z = ay$, con $a \in \mathbb{R}$. ¿Para qué valores de a es esa curva una geodésica de C?

Resolución. La idea, antes de la cuenta. El cilindro se desenrolla sobre el plano sin estirar nada, y en esa operación las geodésicas pasan a ser rectas. Al desenrollar, el arco del paralelo es $s = rt$ y la altura del corte es $z = ar\,\mathrm{sen}\,t$: la elipse se convierte en la sinusoide $z = ar\,\mathrm{sen}(s/r)$. Eso predice la respuesta antes de calcular: solo es geodésica si esa sinusoide es una recta, es decir, si $a = 0$. La cuenta con el producto mixto lo confirma y da además el valor exacto de K_g, que resulta ser la curvatura de la sinusoide.

La curva está en el cilindro, luego sus dos primeras coordenadas son $(r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t)$, y la condición del plano da $z = ay = ar\,\mathrm{sen}\,t$:

$$\alpha(t) = \big(r\cos t,\ r\,\mathrm{sen}\,t,\ ar\,\mathrm{sen}\,t\big).$$

Sus derivadas son

$$\alpha' = \big(-r\,\mathrm{sen}\,t,\ r\cos t,\ ar\cos t\big), \qquad \alpha'' = \big(-r\cos t,\ -r\,\mathrm{sen}\,t,\ -ar\,\mathrm{sen}\,t\big),$$

y el normal del cilindro es $\mathbf{N} = (\cos t, \mathrm{sen}\,t, 0)$. El producto mixto, desarrollado por la tercera columna, deja solo el término de la tercera fila:

$$(\mathbf{N}, \alpha', \alpha'') = -ar\,\mathrm{sen}\,t \begin{vmatrix} \cos t & \mathrm{sen}\,t \\ -r\,\mathrm{sen}\,t & r\cos t \end{vmatrix} = -ar^2\,\mathrm{sen}\,t.$$

Por otro lado, $|\alpha'|^2 = r^2\big(1 + a^2\cos^2 t\big)$. Por tanto

$$K_g(t) = \frac{(\mathbf{N}, \alpha', \alpha'')}{|\alpha'|^3} = \frac{-a\,\mathrm{sen}\,t}{r\big(1 + a^2\cos^2 t\big)^{3/2}}.$$

Para que la curva sea geodésica hace falta $K_g \equiv 0$, es decir, $a\,\mathrm{sen}\,t = 0$ para *todo* t. Como el seno no es idénticamente nulo, la única posibilidad es

$$a = 0.$$

■

LA IDEA: POR QUÉ SOLO EL CORTE HORIZONTAL

Con $a = 0$ el plano es $z = 0$ y la curva es un paralelo del cilindro, que en efecto es geodésica: su normal principal apunta horizontalmente hacia el eje, es decir, en la dirección del normal de la superficie.

Con $a \neq 0$ el plano está inclinado y la sección es una elipse. Esa elipse no es geodésica, y la fórmula dice además *dónde* se nota más: K_g se anula donde $\operatorname{sen} t = 0$, o sea en los dos puntos donde la elipse cruza el plano $y = 0$, que son sus vértices del eje menor. El módulo $|K_g|$ es máximo en los del eje mayor ($t = \pi/2, 3\pi/2$), cuyo semieje mide $r\sqrt{1+a^2}$.
Conviene contrastarlo con el ejercicio anterior. Sobre el mismo cilindro, la hélice sí es geodésica y esta elipse no, aunque las dos parezcan curvas «inclinadas» sobre él. La diferencia se ve al desenrollar: la hélice se convierte en una recta y la elipse no.

Ejercicio 3.8. *Meridianos y paralelos: cuáles son geodésicas* [H3.8]

Hallar la curvatura geodésica de las líneas paramétricas de cualquier parametrización local de una superficie de revolución, y decidir cuáles de ellas son geodésicas.

Resolución. La idea, en una línea. Con el perfil parametrizado por su arco, la tabla de las coordenadas ortogonales deja solo dos símbolos, y para cada familia de curvas coordenadas la expresión de $K_g\mathbf{S}$ se reduce a un único coeficiente que se evalúa de cabeza.

Con la generatriz parametrizada por su arco, $f'^2 + h'^2 = 1$, y $f > 0$, los coeficientes métricos son $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$ y $g_{22} = f^2$, cuya única derivada no nula es $\partial g_{22}/\partial u = 2ff'$. Por la tabla de las coordenadas ortogonales (primer ejercicio del capítulo), los únicos símbolos que sobreviven son $\Gamma^1_{22} = -g_{22,1}/2$ y $\Gamma^2_{12} = g_{22,1}/(2g_{22})$:

$$\Gamma^1_{22} = -ff', \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{f'}{f}.$$

Meridianos. Son las curvas $v = v_0$, y ya están parametrizadas por su arco porque $g_{11} = 1$. Con $\dot u_1 = 1$, $\dot u_2 = 0$ y segundas derivadas nulas, los dos coeficientes de la expresión de $K_g\mathbf{S}$ son

$$\ddot u_1 + \Gamma^1_{11} = 0, \qquad \ddot u_2 + \Gamma^2_{11} = 0,$$

porque Γ^1_{11} y Γ^2_{11} son nulos. Luego $K_g = 0$: **todos los meridianos de una superficie de revolución son geodésicas**.

Paralelos. Son las curvas $u = u_0$, y su velocidad tiene módulo $\sqrt{g_{22}} = f(u_0)$, que no es uno. Reparametrizando por el arco, $s = f(u_0)\,v$, se tiene $\dot u_1 = 0$ y $\dot u_2 = 1/f(u_0)$, y ahora

$$\ddot u_1 + \Gamma^1_{22}\,\dot u_2^2 = -ff' \cdot \frac{1}{f^2} = -\frac{f'}{f}, \qquad \ddot u_2 + \Gamma^2_{22}\,\dot u_2^2 = 0.$$

Como $|\mathbf{X}_1| = \sqrt{g_{11}} = 1$, resulta

$$\boxed{|K_g| = \left|\frac{f'(u_0)}{f(u_0)}\right|}$$

Con $\mathbf{N} = (\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2)/f$ y recorrido en el sentido de v creciente, $\mathbf{S} = -\mathbf{X}_1$, de modo que el valor con signo es $K_g = f'(u_0)/f(u_0)$. El paralelo es geodésica si y solo si $f'(u_0) = 0$. ■

LA IDEA: LOS DOS RESULTADOS, EN LENGUAJE DE ANDAR POR CASA

El primero es rotundo y conviene memorizarlo: **los meridianos siempre son geodésicas**. La razón geométrica es de simetría. Un meridiano está en un plano que contiene al eje, y ese plano es un plano de simetría de toda la superficie. Una curva que vive en un plano de simetría no tiene ningún motivo para torcerse hacia un lado más que hacia el otro, y no torcerse es exactamente ser geodésica.
El segundo dice que **un paralelo es geodésica solo donde el radio es estacionario**, esto incluye los máximos y mínimos del radio, pero también puede haber puntos estacionarios que no sean extremos. Y eso también tiene una lectura clara: en un paralelo cualquiera, caminar en línea recta te llevaría hacia donde la superficie se ensancha; para mantenerte en el paralelo tienes que corregir. Solo donde el radio deja de crecer o decrecer no hay hacia dónde corregir.
Las comprobaciones de siempre:

- **Esfera**, con $f = \cos u$: sale $|K_g| = |\tan u|$, que se anula en $u = 0$. El ecuador, y solo el ecuador. Coincide con el cálculo de la derivada covariante que se verá en la sección siguiente.
- **Cilindro**, con $f = r$ constante: $f' = 0$ en todo punto, luego *todos* los paralelos son geodésicas. Coincide con la lectura de la figura.
- **Toro**: f' se anula en el paralelo exterior y en el interior, que son los dos únicos geodésicos.

QUÉ DEJA. Los dos resultados, que resuelven de un golpe cualquier pregunta sobre geodésicas en superficies de revolución, que son la inmensa mayoría de las que se plantean. Y la técnica de reparametrizar por el arco antes de aplicar la fórmula, que es donde se pierde el factor si se hace deprisa.

Ejercicio 3.9. *El paralelo de un paraboloide, por dos caminos* [H3.9]

Calcular la curvatura geodésica del paralelo $z = 1$ en cualquier parametrización local del paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$.

Resolución. *Primera vía: el producto mixto.* El paralelo $z = 1$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ a altura 1, que se parametriza como $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$, con

$$\alpha' = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0), \qquad \alpha'' = (-\cos t, -\operatorname{sen} t, 0), \qquad |\alpha'| = 1.$$

Como carta de Monge con $f(x, y) = x^2 + y^2$, el normal es proporcional a $(-f_x, -f_y, 1)$, y sobre el paralelo, donde $x^2 + y^2 = 1$,

$$\mathbf{N} = \frac{(-2\cos t,\ -2\operatorname{sen} t,\ 1)}{\sqrt{5}}.$$

Desarrollando el producto mixto por su tercera columna, donde solo sobrevive el 1 del normal,

$$(\mathbf{N}, \alpha', \alpha'') = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} -\operatorname{sen} t & \cos t \\ -\cos t & -\operatorname{sen} t \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

de donde

$$K_g = \frac{1}{|\alpha'|^3}(\mathbf{N}, \alpha', \alpha'') = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Segunda vía: la fórmula de las superficies de revolución. El perfil es $f(t) = t$, $h(t) = t^2$, que **no** está parametrizado por su arco, ya que $f'^2 + h'^2 = 1 + 4t^2$. Hay que derivar respecto del arco:

$$\frac{df}{ds} = \frac{df/dt}{ds/dt} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}.$$

El paralelo $z = 1$ corresponde a $t = 1$, donde $f = 1$ y $df/ds = 1/\sqrt{5}$. Aplicando el resultado del ejercicio anterior,

$$|K_g| = \left|\frac{df/ds}{f}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

que coincide con lo obtenido por la primera vía. ■

LA IDEA: POR QUÉ CONVIENE HACERLO DOS VECES

Las dos vías no son redundantes: cada una comprueba una cosa distinta.
La primera es directa y no necesita ninguna teoría previa, solo la fórmula del producto mixto. Es la que se usa cuando la superficie viene dada por una ecuación.
La segunda es más rápida pero tiene una trampa, y es la que este ejercicio está comprobando: la fórmula $|K_g| = |f'/f|$ vale *solo* si la prima es respecto del arco de la generatriz. Aplicarla con el parámetro que a uno le den da $|1/1| = 1$, que es falso. El factor $1/\sqrt{5}$ que falta es exactamente el dt/ds.
Es el error más frecuente con las superficies de revolución, y la mejor defensa es la que se acaba de hacer: cuando existan dos caminos, recorrer los dos.

3.4 Derivada covariante. Paralelismo

LA PREGUNTA

En 1851 Foucault colgó un péndulo de la cúpula del Panteón de París y el plano de oscilación fue girando respecto del suelo a lo largo del día. El experimento demostraba la rotación de la Tierra. Una idealización de su movimiento se relaciona con el transporte paralelo: conservar una dirección localmente no garantiza recuperarla tras una vuelta. ¿Cómo se define derivar un campo de vectores sobre una superficie, si en dos puntos distintos ni siquiera hay manera obvia de comparar dos vectores?

LA IDEA: QUÉ QUEREMOS GENERALIZAR

En el plano, decir que un campo de vectores a lo largo de una curva es *paralelo* significa que no cambian ni su dirección ni su módulo al avanzar. Es una noción clarísima porque en el plano todos los vectores viven en el mismo sitio y se pueden comparar directamente.
Sobre una superficie eso ya no vale: dos vectores tangentes en puntos distintos viven en planos tangentes distintos, y no hay una forma obvia de decir si son «el mismo». Hay que inventarla.

El mecanismo es el que ya se ha usado dos veces en este capítulo: derivar en el espacio y quedarse con la parte tangencial, tirando la componente normal. La componente normal es justamente lo que el habitante de la superficie no puede ver, así que ignorarla es mirar la derivada con sus ojos.
Un campo cuya derivada, vista así, es nula, será *paralelo*: un campo que no cambia *para los habitantes de la superficie*, aunque un observador externo lo vea girar.

Definición. Sea $\alpha : (a,b) \to M$ una curva diferenciable sobre una s.r.. Un **campo vectorial tangente a lo largo de** α es una aplicación V que a cada t le asigna un vector $V(t) \in T_{\alpha(t)}(M)$. Escrito en una p.l., $V(t) = f_1(t)\mathbf{X}_1(t) + f_2(t)\mathbf{X}_2(t)$, y el campo se dice **diferenciable** si las componentes f_1 y f_2 lo son. La definición no depende de la carta: las componentes se transforman mediante una matriz de cambio de base diferenciable e invertible. Tampoco exige que α sea regular.

Definición. La **derivada covariante** de V a lo largo de α es la componente tangencial de V', y se denota $\dfrac{DV}{dt}$. Explícitamente,

$$\frac{DV}{dt} = V'(t) - V'(t)\cdot\mathbf{N}(t)\,\mathbf{N}(t).$$

La expresión en coordenadas, que es la que se usa siempre, sale en dos líneas, y conviene verlas. Sea la curva $\alpha(t) = x\big(u_1(t), u_2(t)\big)$ y $V = f_1\mathbf{X}_1 + f_2\mathbf{X}_2$. Al derivar, la regla del producto reparte la derivada entre las componentes y los campos coordenados, y cada campo coordenado, visto a lo largo de la curva, se deriva con la regla de la cadena: $\frac{d}{dt}\mathbf{X}_i\big(u_1(t),u_2(t)\big) = \sum_j X_{ij}\,u_j'$. Queda

$$V' = \sum_{k=1}^{2} f_k'\,\mathbf{X}_k + \sum_{i,j=1}^{2} f_i\,u_j'\,X_{ij}.$$

El primer sumando ya es tangente. En el segundo se sustituye cada X_{ij} por su descomposición de Gauss (3.1), y se agrupa:

$$V' = \sum_{k=1}^{2}\Big[f_k' + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^k\,f_i\,u_j'\Big]\mathbf{X}_k + \Big[\sum_{i,j=1}^{2} L_{ij}\,f_i\,u_j'\Big]\mathbf{N}.$$

El último corchete es la componente normal. La derivada covariante es lo que queda al tirarla:

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{k=1}^{2}\Big[f_k'(t) + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^k(t)\,f_i(t)\,u_j'(t)\Big]\mathbf{X}_k(t). \tag{3.3}$$

LA IDEA: LEER (3.3) SIN MIEDO

La fórmula tiene dos sumandos y cada uno significa una cosa distinta.
El primero, f_k', es la derivada corriente de las componentes: cómo cambian los números con los que se escribe el vector. El segundo, el que lleva los Γ, es una corrección que compensa el hecho de que **la propia base está cambiando** al moverse por la superficie. Los campos $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ no son constantes: giran y se estiran de un punto a otro, y sin esa corrección se estaría confundiendo el cambio del vector con el cambio de los ejes con

los que se mide.
Es exactamente lo mismo que pasa en coordenadas polares en el plano, donde derivar un vector obliga a tener en cuenta que los vectores radial y angular giran. Los símbolos de Christoffel son la contabilidad de ese giro.
Y como en (3.3) solo aparecen los Γ y las componentes, la derivada covariante es **intrínseca**, pese a haberse definido proyectando con $\mathbf{N}$.

CONEXIÓN: DERIVAR UNA BASE MÓVIL, COMO EN EL SÓLIDO RÍGIDO

La fórmula de Poisson expresa la derivada de un vector en una base ortonormal que gira: si $e_i' = \Omega \times e_i$ y $V = \sum_i a_i e_i$, entonces

$$V' = \sum_i a_i' e_i + \Omega \times V.$$

Derivar sólo los números a_i olvidaría el movimiento de la base. En la superficie se procede igual, y después se proyecta la derivada sobre el plano tangente. En una base coordenada, que puede girar y cambiar de longitud, los coeficientes de esa parte tangencial son los símbolos de Christoffel.
Puede verse toda la dificultad sin salir del plano. La base polar ortonormal satisface

$$e_r' = \theta' e_\theta, \qquad e_\theta' = -\theta' e_r.$$

Para $V = a e_r + b e_\theta$ resulta

$$\frac{DV}{dt} = V' = (a' - b\theta')e_r + (b' + a\theta')e_\theta.$$

Un vector paralelo no tiene por qué tener componentes constantes: sus componentes pueden cambiar precisamente para compensar el giro de los ejes. Y hay términos adicionales aunque la curvatura del plano sea cero.
Si V es la velocidad de una partícula, $a = r'$ y $b = r\theta'$. Se recupera así la aceleración polar conocida de mecánica:

$$V' = (r'' - r(\theta')^2)e_r + (r\theta'' + 2r'\theta')e_\theta.$$

El término centrípeto y el término $2r'\theta'$ salen de derivar la base. La derivada covariante organiza esa misma operación para las bases tangentes de una superficie.

Observación. Si la superficie es un plano, $\mathbf{N}$ es constante y todo campo tangente cumple $V \cdot \mathbf{N} = 0$, luego $V' \cdot \mathbf{N} = 0$ y la derivada covariante coincide con la derivada usual. La construcción generaliza, entonces, lo que ya se hacía en el plano.

Definición. Un campo V a lo largo de α es **paralelo** si $\dfrac{DV}{dt} = 0$ en todos los puntos, es decir, si $V'(t)$ es paralelo a $\mathbf{N}(t)$ para todo t.

Ejemplo (los paralelos de la esfera, y por qué solo el ecuador)**.** Sea la p.l. de la esfera unidad

$$x(u,v) = (\cos u \cos v,\ \cos u \operatorname{sen} v,\ \operatorname{sen} u), \qquad (u,v) \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi),$$

y sea $\alpha(v) = x(u_0, v)$ un paralelo. Entonces

$$\alpha'(v) = (-\cos u_0 \operatorname{sen} v,\ \cos u_0 \cos v,\ 0), \qquad \alpha''(v) = (-\cos u_0 \cos v,\ -\cos u_0 \operatorname{sen} v,\ 0),$$

$$\mathbf{N}(v) = (-\cos u_0 \cos v,\ -\cos u_0 \operatorname{sen} v,\ -\operatorname{sen} u_0).$$

Como $\alpha''\cdot\mathbf{N} = \cos^2 u_0$, la derivada covariante del campo velocidad es

$$\frac{D\alpha'}{dv} = \alpha'' - \alpha''\cdot\mathbf{N}\mathbf{N} = \cos u_0\Big((\cos^2 u_0 - 1)\cos v,\ (\cos^2 u_0 - 1)\operatorname{sen} v,\ \operatorname{sen} u_0 \cos u_0\Big),$$

que se anula únicamente cuando $u_0 = 0$.

Es decir: de todos los paralelos de la esfera, el campo velocidad solo es paralelo en el **ecuador**.

LA IDEA: QUÉ ESTÁ DICIENDO ESE EJEMPLO

Es el ejemplo que hay que tener en la cabeza para todo el capítulo.
Camina por el ecuador de la Tierra sin girar el volante: describes el ecuador. Camina por el paralelo de Madrid sin girar el volante: te sales del paralelo, porque para mantenerte en él tendrías que estar corrigiendo continuamente hacia el norte. Un paralelo que no sea el ecuador *no es una línea recta* para quien vive en la esfera, y el cálculo anterior mide exactamente cuánto hay que corregir.
Cuanto más cerca del polo, más hay que girar. Y en el límite $u_0 \to \pi/2$ el paralelo se encoge a un punto.

La misma cuenta, ahora con (3.3)**.** El ejemplo se ha resuelto mirando desde fuera: derivar en $\mathbb{R}^3$ y restar la componente normal. Rehacerlo con la fórmula en coordenadas enseña para qué sirve esta. El campo es $V = \alpha' = \mathbf{X}_2$, con componentes $f_1 = 0$ y $f_2 = 1$, que son constantes, y la curva tiene $u_1' = 0$ y $u_2' = 1$. En (3.3) las derivadas f_k' se anulan y, de los términos $\Gamma_{ij}^k f_i u_j'$, solo sobrevive el de $i = j = 2$:

$$\frac{D\alpha'}{dv} = \Gamma_{22}^1\,\mathbf{X}_1 + \Gamma_{22}^2\,\mathbf{X}_2 = \operatorname{sen} u_0 \cos u_0\ \mathbf{X}_1,$$

con los símbolos de la esfera que se calculan en el primer ejercicio del capítulo ($\Gamma_{22}^1 = \cos u \operatorname{sen} u$ y $\Gamma_{22}^2 = 0$). Sustituyendo $\mathbf{X}_1 = (-\operatorname{sen} u_0 \cos v,\ -\operatorname{sen} u_0 \operatorname{sen} v,\ \cos u_0)$ y usando $\cos^2 u_0 - 1 = -\operatorname{sen}^2 u_0$ sale exactamente el vector del ejemplo. Y el corchete normal que se ha tirado vale $L_{22} = \cos^2 u_0$, que es el $\alpha''\cdot\mathbf{N}$ restado arriba.

Lo que se ha ganado son dos lecturas que la cuenta en el espacio escondía. La primera: la corrección apunta a lo largo de $\mathbf{X}_1$, es decir, por el meridiano y hacia el norte cuando $u_0 > 0$; es el «corregir hacia el norte» de la caja anterior, ahora con dirección y tamaño. La segunda: su módulo es $\operatorname{sen} u_0 \cos u_0$, y la rapidez del paralelo es $\cos u_0$; dividiendo por la rapidez al cuadrado queda $\tan u_0$, que es la curvatura geodésica del paralelo que se calcula en los ejercicios de la sección 3.3. Todo ello sin haber calculado $\mathbf{N}$: solo con los Γ, que el habitante puede medir.

Teorema (transporte paralelo)**.** Sea $\alpha : (a,b) \to M$ una curva diferenciable, $t_0 \in (a,b)$ y $v_0 \in T_{\alpha(t_0)}(M)$. Entonces existe un único campo paralelo V a lo largo de α con $V(t_0) = v_0$. Se llama **transporte paralelo** de v_0 a lo largo de α, y a $V(t_1)$ se le llama el **transportado paralelo** de v_0 en $\alpha(t_1)$.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: LLEVAR LA FLECHA SIN TOCARLA

La imagen. Llévese una flecha clavada en el capó de un coche que recorre la superficie. La orden es no tocarla nunca: si el suelo la obliga a inclinarse porque la superficie se

dobla bajo el coche, se acepta; pero girarla dentro del suelo, jamás. Eso es transportar paralelamente, y el enunciado dice que la orden basta para determinar la flecha en cada instante: dada la posición inicial de la flecha, no hay ninguna libertad.

Por qué la imagen predice el enunciado. «No girarla dentro del suelo» es una condición sobre la *derivada* de la flecha, no sobre la flecha. Fija la velocidad de cambio en cada instante, y la posición inicial. Eso, escrito con fórmulas, es un problema de valores iniciales: una ecuación diferencial con un dato. Y el enunciado «existe un único» es palabra por palabra lo que dice el teorema de existencia y unicidad.

El corazón, en una frase: el sistema que sale es lineal, y por eso la solución está definida en toda la curva y no se escapa a mitad de camino. Esa linealidad no es un accidente afortunado: las incógnitas son las dos componentes de la flecha y la condición de paralelismo es que la derivada de cada una sea una combinación de las dos, con los símbolos de Christoffel como coeficientes. No hay forma de que salga otra cosa.

Paso 1: traducir «paralelo» a un sistema de ecuaciones sobre las componentes. Escribiendo $v_0 = \sum_i \lambda_i \mathbf{X}_i(\alpha(t_0))$ e imponiendo que la expresión (3.3) se anule, las componentes buscadas f_1 y f_2 son la solución del sistema

$$\begin{cases} f_1'(t) + \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{1}\, f_i(t)\, u_j'(t) = 0, \\[2ex] f_2'(t) + \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{2}\, f_i(t)\, u_j'(t) = 0, \end{cases} \qquad f_1(t_0) = \lambda_1, \quad f_2(t_0) = \lambda_2.$$

Paso 2: reconocer que el sistema es lineal y citar existencia y unicidad (el núcleo de la prueba). Es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias **lineal** de primer orden, con coeficientes continuos y condiciones iniciales dadas. El teorema de existencia y unicidad para sistemas lineales da una única solución, que define el campo en la p.l. considerada. Para llegar a cualquier $t_1 \in (a, b)$, se cubre el arco entre t_0 y t_1 por un número finito de cartas y se resuelve sucesivamente, usando en cada una el valor final de la anterior como dato inicial. La unicidad hace coincidir las soluciones en los solapamientos y da un campo bien definido en todo (a, b). ■

Qué hizo cada hipótesis. La diferenciabilidad de la curva es lo que hace continuos los coeficientes $u_j'(t)$ del sistema, que es justo lo que pide el teorema de existencia y unicidad; con una curva solo continua no habría sistema que resolver. Y hay una hipótesis oculta que conviene sacar a la luz: los Γ_{ij}^{k} son continuos porque la parametrización es diferenciable y la matriz (g_{ij}) es invertible — otra vez la regularidad. Obsérvese además lo que *no* hace falta: no se pide que la curva sea regular ni que esté parametrizada naturalmente. El transporte paralelo se puede hacer incluso a lo largo de una curva que se pare, porque lo único que importa es el camino recorrido en el mapa.

CONEXIÓN: OTRA VEZ ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Es el mismo movimiento que en el teorema fundamental de las curvas alabeadas. Allí, un sistema lineal en las componentes del triedro daba existencia y unicidad de la curva a partir de la curvatura y la torsión. Aquí, un sistema lineal en las componentes del campo da existencia y unicidad del transporte paralelo.
En los dos casos, la linealidad es lo que garantiza que la solución está definida en todo el intervalo y no se escapa a tiempo finito. Y en los dos casos, «único dada una condición inicial» es lo que convierte una construcción en una definición.
Merece la pena guardar el patrón, sin generalizarlo a todos los problemas: el sistema del transporte paralelo es lineal; el de las geodésicas que veremos después es, en general, no lineal, y su existencia se garantiza inicialmente solo de forma local.

Proposición. Si V y W son paralelos a lo largo de una misma curva, entonces $V(t)\cdot W(t)$ es constante. En particular, $|V|$ y $|W|$ son constantes y el ángulo entre ambos también, si los dos campos son no nulos.

La idea, en una línea. Si las dos flechas solo se mueven hacia fuera de la superficie y ambas viven dentro de ella, ninguna de las dos puede notar el movimiento de la otra: el producto escalar no tiene por dónde cambiar.

Como V es paralelo, su derivada covariante es nula, es decir, V' no tiene componente tangencial: es normal a la superficie. Como W es tangente, $V'\cdot W = 0$. Lo mismo con los papeles cambiados da $V\cdot W' = 0$. Por tanto

$$\frac{d}{dt}V\cdot W = V'\cdot W + V\cdot W' = 0.$$

De ahí que $V\cdot W$ sea constante, y tomando $W = V$ se obtiene que $|V|$ lo es. El ángulo se sigue de la fórmula del coseno. ■

LA IDEA: EL TRANSPORTE PARALELO ES UNA ROTACIÓN RÍGIDA

La proposición dice que transportar paralelamente no deforma: conserva longitudes y conserva ángulos entre vectores transportados a la vez.
Así que el transporte paralelo a lo largo de una curva es, en cada instante, una isometría lineal entre planos tangentes: la linealidad se sigue de la unicidad aplicada a combinaciones lineales de campos paralelos. Trasladar un vector «de la forma más rígida posible» tiene, entonces, un sentido preciso.
Aquí conviene adelantar el hecho más sorprendente de toda esta teoría, aunque su estudio no pertenezca a este curso. Si se transporta un vector a lo largo de una curva **cerrada**, no tiene por qué volver igual que salió: vuelve girado. En la esfera, recorrer un triángulo formado por tres arcos de círculo máximo gira el vector un ángulo que coincide con el exceso de la suma de los ángulos del triángulo sobre π.
Ese giro es la huella que deja la curvatura, y es la primera señal de que un habitante de la superficie *sí* puede detectar que su mundo está curvado, sin asomarse jamas fuera. Adonde lleva eso es al resultado que cierra la lección 4.

Observación (los recíprocos son falsos)**.** Que un campo tenga módulo constante no lo hace paralelo, y que dos campos formen ángulo constante tampoco. El contraejemplo es directo:

tómense V y W paralelos, unitarios y perpendiculares, y defínanse

$$X(t) = \cos t\, V(t) + \operatorname{sen} t\, W(t), \qquad Y(t) = -\operatorname{sen} t\, V(t) + \cos t\, W(t).$$

Los dos son unitarios y perpendiculares entre sí en todo punto, pero

$$\frac{DX}{dt} = Y(t) \neq 0, \qquad \frac{DY}{dt} = -X(t) \neq 0,$$

luego ninguno es paralelo. Lo que ocurre es que ambos van girando a la vez dentro del plano tangente, de modo que su relación mutua no cambia aunque cada uno sí.

DE DÓNDE VIENE: LEVI-CIVITA Y EL SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DEL PARALELISMO

En 1917 Levi-Civita publicó *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque*, donde formuló el transporte paralelo y lo relacionó con la curvatura riemanniana. La idea da una lectura geométrica a las ecuaciones con símbolos de Christoffel: comparar vectores de planos tangentes vecinos mediante su transporte a lo largo de una curva.

CONEXIÓN: GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA DE SUPERFICIES

El giro que sufre un vector al transportarse paralelamente por una curva cerrada, que se ha mencionado arriba como el hecho más sorprendente de esta teoría, tiene nombre propio: se llama **holonomía**, y en la asignatura siguiente se calcula.
Para el borde de una región disco orientada, el teorema de Gauss-Bonnet relaciona el giro del vector con la integral de la curvatura. Con recorrido positivo, coinciden módulo 2π; al invertir el recorrido se invierte el signo del giro. Por eso el transporte paralelo, que aquí se ha construido como una herramienta técnica para definir geodésicas, es en realidad un *instrumento de medida*: pasear un vector alrededor de una zona y ver cuánto vuelve girado es la forma que tiene el habitante de la superficie de pesar la curvatura que hay dentro.
El transporte paralelo también interviene en una idealización del péndulo de Foucault. En relatividad general, otra manifestación de la curvatura es la desviación geodésica: la aceleración relativa entre geodésicas próximas. Son aplicaciones relacionadas, pero sus enunciados y modelos físicos son distintos.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ

Dos maneras de leer la misma fórmula. Se puede empezar por las componentes: derivar f_k y añadir los términos con Γ_{ij}^k que recogen el cambio de la base. O se puede empezar por la geometría: derivar el vector en el espacio y proyectarlo sobre el plano tangente. Ambas construcciones dan (3.3).
Qué aporta cada una. La primera sirve para calcular a partir de la métrica; la segunda permite visualizar por qué derivar solo las componentes no basta. Cuando la cuenta parezca opaca, conviene pasar a la imagen y volver después a la fórmula.

Ejercicios de esta sección

Ejercicio 3.10. *La derivada covariante gira dentro del plano tangente*

Sean M una s.r. orientada, $\alpha : I \to M$ una c.r.p.n. y V un campo tangente diferenciable y unitario a lo largo de α. Probar:

1. Si $V(s) = \mathbf{t}(s)$, entonces $\dfrac{D\mathbf{t}}{ds} = K_g(s)\, \mathbf{N}(s) \times \mathbf{t}(s)$.

2. En general, existe una función diferenciable λ tal que $\dfrac{DV}{ds} = \lambda(s)\,\mathbf{N}(s) \times V(s)$ para todo $s \in I$.
3. Si α es tal que puede considerarse $V(s) = \mathbf{n}(s)$, ¿qué función es λ?

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *El primer apartado es la definición de curvatura geodésica escrita con otro nombre. Recuerda quién es* $\mathbf{N} \times \mathbf{t}$.
2. *Para el segundo, el plano tangente tiene dimensión dos. Si encuentras un vector unitario tangente ortogonal a* V*, ya tienes una base y solo queda ver que* DV/ds *es múltiplo de él.*
3. *En el tercero, pregunta primero qué condición hace falta para que el normal principal de la curva sea tangente a la superficie. Esa condición simplifica el triedro de Darboux hasta hacerlo coincidir con el de Frenet.*

Resolución. La idea, antes de la cuenta. Un campo unitario y tangente tiene poco margen. No puede alargarse ni encogerse, porque su módulo es constante, y su derivada covariante es tangente por construcción. Lo único que le queda es *girar* dentro del plano tangente, y en ese plano la dirección perpendicular a V es $\mathbf{N} \times V$. Por eso DV/ds tiene que ser múltiplo de $\mathbf{N} \times V$, y el factor λ va a ser la velocidad angular de ese giro. El segundo apartado es este argumento escrito con cuidado; el primero y el tercero calculan λ para dos campos concretos.

Primer apartado. Con $V = \mathbf{t}$ se tiene $V' = \dot{\mathbf{t}} = \ddot{\alpha}$, y por la descomposición de Darboux (3.2),

$$\ddot{\alpha} = K_g\,\mathbf{S} + K_n\,\mathbf{N}.$$

La derivada covariante es la parte tangencial, es decir, la que sobrevive al quitar la componente en $\mathbf{N}$:

$$\frac{D\mathbf{t}}{ds} = K_g(s)\,\mathbf{S}(s) = K_g(s)\,\mathbf{N}(s) \times \mathbf{t}(s),$$

sin más que recordar que $\mathbf{S} = \mathbf{N} \times \mathbf{t}$ por definición de normal intrínseca.

Segundo apartado. Hay que probar dos cosas: que DV/ds es ortogonal a V, y que $\{V, \mathbf{N} \times V\}$ es una base del plano tangente.

Lo primero. Como V es unitario, $V \cdot V = 1$ y derivando, $V' \cdot V = 0$. Ahora, V es tangente y $\mathbf{N}$ es normal, luego $\mathbf{N} \cdot V = 0$, y por tanto

$$\left\langle \frac{DV}{ds}, V \right\rangle = \big(V' - V' \cdot \mathbf{N}\mathbf{N}\big) \cdot V = \underbrace{V' \cdot V}_{=0} - V' \cdot \mathbf{N}\,\underbrace{\mathbf{N} \cdot V}_{=0} = 0.$$

Lo segundo. El vector $\mathbf{N} \times V$ es unitario, porque $\mathbf{N}$ y V lo son y son ortogonales; es tangente, porque es ortogonal a $\mathbf{N}$; y es ortogonal a V. Como el plano tangente tiene dimensión dos, $\{V, \mathbf{N} \times V\}$ es una base ortonormal suya.

Juntando ambas cosas: DV/ds es tangente y ortogonal a V, luego es múltiplo de $\mathbf{N} \times V$. Basta definir

$$\lambda(s) = \left\langle \frac{DV}{ds},\, \mathbf{N}(s) \times V(s) \right\rangle,$$

que es diferenciable por serlo todo lo que interviene. ■

Tercer apartado. Lo primero es entender la hipótesis. Para que $\mathbf{n}$ pueda hacer de V tiene que ser **tangente a la superficie**, es decir, ortogonal a $\mathbf{N}$. Por el teorema de Meusnier, $K_n = k\cos\theta$ con θ el ángulo entre $\mathbf{n}$ y $\mathbf{N}$, de modo que

$$\mathbf{n} \perp \mathbf{N} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos\theta = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad K_n \equiv 0.$$

Así que la hipótesis «puede considerarse $V = \mathbf{n}$» dice exactamente que la curvatura normal es idénticamente nula y, además, $k > 0$ para que $\mathbf{n}$ exista.

Con $K_n = 0$, la relación $k^2 = K_g^2 + K_n^2$ da $K_g = \varepsilon k$ y $\mathbf{n} = \varepsilon \mathbf{S}$, con $\varepsilon = \pm 1$ constante por continuidad en el intervalo. Por Frenet, $\dot{\mathbf{n}} = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$; como $\mathbf{b} = \varepsilon\mathbf{N}$, su parte tangencial es $D\mathbf{n}/ds = -k\mathbf{t}$. Además $\mathbf{N} \times \mathbf{n} = -\varepsilon\mathbf{t}$, de modo que

$$\frac{D\mathbf{n}}{ds} = K_g(\mathbf{N} \times \mathbf{n}), \qquad \boxed{\lambda = K_g}.$$

El resultado vale con la orientación dada. Solo si se elige $\varepsilon = 1$ se tiene además $\lambda = k$ y coinciden ambos triedros. ■

LA IDEA: LA FUNCIÓN λ ES SIEMPRE LA MISMA

Merece la pena mirar juntos los dos casos calculados, porque el resultado es más limpio de lo que el enunciado deja ver.

Con $V = \mathbf{t}$ salió $\lambda = K_g$. Con $V = \mathbf{n} = \pm\mathbf{S}$ ha vuelto a salir $\lambda = K_g$. No es casualidad: los dos campos son vectores fijos del triedro de Darboux, y lo que mide λ es *la velocidad a la que gira ese triedro dentro del plano tangente*.

Esa es la lectura correcta de todo el ejercicio. La derivada covariante de un campo unitario tangente no puede alargarlo ni sacarlo del plano; lo único que puede hacer es girarlo. Y λ es la velocidad angular de ese giro, medida por el habitante de la superficie.

Con esa imagen, el apartado 1 dice simplemente que la curvatura geodésica *es* la velocidad de giro del vector tangente vista desde dentro. Que es, palabra por palabra, la definición de curvatura del capítulo 1 trasladada a la superficie: allí era la velocidad de la indicatriz de las tangentes.

Dónde se falla. Tres sitios, los tres en el paso de la derivada ordinaria a la covariante.

- *Al proyectar $\dot{\mathbf{n}}$ en el tercer apartado.* Frenet da $\dot{\mathbf{n}} = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$, y es tentador escribir $D\mathbf{n}/ds = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$. Pero $\mathbf{b} = \pm\mathbf{N}$ es normal a la superficie, así que el sumando $\tau\mathbf{b}$ es exactamente lo que la proyección tira. Si se deja, la supuesta derivada covariante tiene componente normal, y eso es imposible por construcción.
- *Al dar $\lambda = k$ sin mirar el signo.* Lo que sale es $\lambda = K_g = \varepsilon k$. En la circunferencia unidad del plano $z = 0$, orientada con $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$, se tiene $\mathbf{S} = \mathbf{n}$ y $\lambda = 1 = k$; con $\mathbf{N} = (0, 0, -1)$, $\mathbf{S} = -\mathbf{n}$ y $\lambda = -1$. La curva es la misma: lo que cambia es hacia qué lado se mide el giro.
- *Al olvidar que V es unitario.* Sin esa hipótesis el segundo apartado es falso. En una recta del plano, $V = (1 + s)\,\mathbf{t}$ tiene $DV/ds = \mathbf{t}$, que es paralelo a V y no a $\mathbf{N} \times V$. En general, la componente de DV/ds en la dirección de V es la derivada de $|V|$, porque $DV/ds \cdot V = \frac{1}{2}\big(|V|^2\big)'$: un módulo que cambia aparece como una componente a lo largo del propio campo.

Ejercicio 3.11. *Transporte paralelo a lo largo de un paralelo de la esfera* [H3.16]

Sea S^2 la esfera unidad con su p.l. de revolución

$$x(u_1, u_2) = (\cos u_1 \cos u_2,\ \cos u_1 \operatorname{sen} u_2,\ \operatorname{sen} u_1),$$

sea $\alpha(u_2) = x(u_{10}, u_2)$ un paralelo, con $-\pi/2 < u_{10} < \pi/2$, y sea $p = \alpha(0)$. Se usan cartas angulares sucesivas para recorrer la vuelta completa. Calcular el transportado paralelo de

$\mathbf{X}_2(p)$ a lo largo de α. Si V denota ese transportado, ¿cuál es el ángulo entre $V(2\pi)$ y $\mathbf{X}_2(p)$? Deducir que el ecuador es el único paralelo de la esfera que es geodésica.

Resolución. La idea, antes de la cuenta. Sobre el paralelo, u_1 vale siempre u_{10}, así que los símbolos de Christoffel, evaluados a lo largo del camino, son *números*: el sistema lineal del transporte paralelo tiene coeficientes constantes. Un sistema así de dos ecuaciones, en el que cada componente empuja a la otra con signos opuestos, es un oscilador armónico: la solución gira a ritmo constante. Lo que se espera, por tanto, antes de calcular nada, es que el vector transportado gire dentro del plano tangente con velocidad angular constante respecto de una base ortonormal que acompaña al paralelo. La cuenta solo tiene que decir cuánto gira en una vuelta.

Coeficientes métricos.

$$\mathbf{X}_1 = (-\operatorname{sen} u_1 \cos u_2,\ -\operatorname{sen} u_1 \operatorname{sen} u_2,\ \cos u_1), \qquad \mathbf{X}_2 = (-\cos u_1 \operatorname{sen} u_2,\ \cos u_1 \cos u_2,\ 0),$$

de donde

$$g_{11} = 1, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = \cos^2 u_1.$$

Símbolos de Christoffel. La única derivada no nula de los coeficientes es $\partial g_{22}/\partial u_1 = -2\cos u_1 \operatorname{sen} u_1$. Con la tabla de las coordenadas ortogonales del primer ejercicio del capítulo, y $g^{11} = 1$, $g^{22} = 1/\cos^2 u_1$, sobreviven dos valores independientes:

$$\Gamma^1_{22} = \cos u_1 \operatorname{sen} u_1, \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = -\frac{\operatorname{sen} u_1}{\cos u_1},$$

y todos los demás son nulos.

El sistema. Sobre el paralelo, $u_1 \equiv u_{10}$ es constante y se toma u_2 como parámetro, de modo que $u_1' = 0$ y $u_2' = 1$. Escribiendo $V = f_1\mathbf{X}_1 + f_2\mathbf{X}_2$ y anulando la derivada covariante (3.3), solo quedan los términos con $j = 2$:

$$\begin{cases} f_1' + \Gamma^1_{22} f_2 = 0, \\ f_2' + \Gamma^2_{12} f_1 = 0, \end{cases} \qquad \text{es decir} \qquad \begin{cases} f_1' = -\cos u_{10} \operatorname{sen} u_{10}\ f_2, \\ f_2' = \dfrac{\operatorname{sen} u_{10}}{\cos u_{10}}\ f_1. \end{cases}$$

Abreviando $c = \cos u_{10}$ y $\sigma = \operatorname{sen} u_{10}$ y derivando la primera ecuación,

$$f_1'' = -c\,\sigma\, f_2' = -c\,\sigma\,\frac{\sigma}{c}\, f_1 = -\sigma^2 f_1 \qquad \Longrightarrow \qquad f_1'' + \sigma^2 f_1 = 0.$$

Si $\sigma \neq 0$, es la ecuación del oscilador armónico, de solución $f_1(u_2) = A\cos(\sigma u_2) + B\operatorname{sen}(\sigma u_2)$.

Condiciones iniciales. Se pide $V(0) = \mathbf{X}_2(p)$, es decir $f_1(0) = 0$ y $f_2(0) = 1$. De la primera, $A = 0$. De $f_1' = -c\sigma f_2$ se despeja $f_2 = -f_1'/(c\sigma)$, y evaluando en 0 resulta $B = -c$, si $\sigma \neq 0$. Para $\sigma = 0$, el sistema original da directamente $f_1 = 0$ y $f_2 = 1$. Ambos casos quedan reunidos en

$$\boxed{V(u_2) = -\cos u_{10} \operatorname{sen}\big(u_2 \operatorname{sen} u_{10}\big)\, \mathbf{X}_1 + \cos\big(u_2 \operatorname{sen} u_{10}\big)\, \mathbf{X}_2}$$

Conviene comprobar el módulo, que por la teoría debe ser constante:

$$|V|^2 = f_1^2 g_{11} + f_2^2 g_{22} = \cos^2 u_{10} \operatorname{sen}^2(\sigma u_2) + \cos^2(\sigma u_2) \cos^2 u_{10} = \cos^2 u_{10},$$

que en efecto no depende de u_2 y coincide con $|\mathbf{X}_2(p)|^2$.

El ángulo tras una vuelta. Usando la primera forma fundamental,

$$V(2\pi)\cdot\mathbf{X}_2(p) = f_1(2\pi)\,g_{12} + f_2(2\pi)\,g_{22} = \cos\bigl(2\pi\,\mathrm{sen}\,u_{10}\bigr)\cos^2 u_{10},$$

y dividiendo por el producto de los módulos, que vale $\cos^2 u_{10}$,

$$\cos\bigl(\text{ángulo}\bigr) = \cos\bigl(2\pi\,\mathrm{sen}\,u_{10}\bigr).$$

En general, el vector **no vuelve como salió**: vuelve girado dentro del plano tangente un ángulo de $2\pi\,\mathrm{sen}\,u_{10}$, medido como giro continuo respecto de la base $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2/c\}$, orientada por el normal interior de esta carta. El giro final queda definido módulo 2π.

Conviene no confundir ese giro con el ángulo geométrico entre los dos vectores, que por definición está entre 0 y π. Lo que la igualdad de cosenos determina es el giro salvo signo y salvo vueltas completas; el giro efectivo lo da la solución del sistema, que es continua en u_2 y arranca en cero.

El ecuador es el único paralelo geodésico. Si el paralelo fuese una geodésica, su campo velocidad sería paralelo, y como ese campo es precisamente $\mathbf{X}_2$, el transportado de $\mathbf{X}_2(p)$ tendría que ser $\mathbf{X}_2$ en todo punto, es decir $f_1 \equiv 0$. Pero

$$f_1(u_2) = -\cos u_{10}\,\mathrm{sen}\bigl(u_2\,\mathrm{sen}\,u_{10}\bigr),$$

y $\cos u_{10} \neq 0$ porque u_{10} no es un polo, de modo que $f_1 \equiv 0$ obliga a $\mathrm{sen}\,u_{10} = 0$, es decir $u_{10} = 0$. Ese paralelo es el ecuador. ■

LA IDEA: EL ÁNGULO QUE SOBRA ES LA CURVATURA QUE HAY DENTRO

Este ejercicio contiene, en un caso concreto y calculable, el fenómeno más importante de toda la geometría diferencial. Conviene no pasarlo por alto.

Se ha paseado un vector alrededor de un camino cerrado, manteniéndolo todo lo rígido que la superficie permite, y ha vuelto girado un ángulo de $2\pi\,\mathrm{sen}\,u_{10}$. En el plano eso no pasaría nunca. Ese giro es la **holonomía**, y es la prueba de que un habitante de la esfera puede saber que su mundo está curvado sin asomarse fuera: le basta con dar una vuelta y comparar.

Y el número no es arbitrario. El casquete esférico que queda por encima del paralelo tiene área $2\pi(1-\mathrm{sen}\,u_{10})$, y en la esfera unidad la curvatura vale 1, de modo que la curvatura total encerrada es exactamente $2\pi(1-\mathrm{sen}\,u_{10})$. Con el normal interior usado en el cálculo, el recorrido u_2 creciente es negativo respecto de ese casquete. Por eso el giro obtenido es el *opuesto* de esa integral, módulo una vuelta completa: $2\pi\,\mathrm{sen}\,u_{10} \equiv -2\pi(1-\mathrm{sen}\,u_{10})$ (mód 2π). Con orientación y recorrido positivos, la relación se escribe:

$$\text{giro de holonomía} \;\equiv\; \text{curvatura encerrada} \quad (\text{mód } 2\pi).$$

Esa igualdad, escrita en general, es el teorema de Gauss-Bonnet. Aquí ha salido de resolver un oscilador armónico.

Los dos casos extremos ayudan a fijarlo. En el ecuador, $\mathrm{sen}\,u_{10} = 0$: no hay giro, y el paralelo es geodésica. Cerca del polo, el paralelo se encoge, el casquete tiende a cero y el giro vuelve a desaparecer. El efecto es máximo en medio.

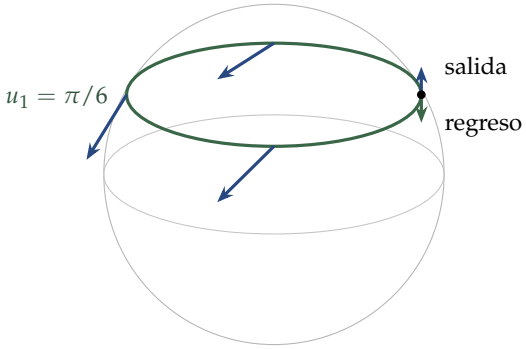


Figura 3.2: Proyección del transporte paralelo calculado a latitud $\pi/6$. Las flechas azules muestran la solución en cuatro instantes; la flecha de regreso se dibuja en el mismo punto que la de salida. Aquí el giro final es π. Las longitudes proyectadas pueden variar aunque el vector tenga módulo constante.

El mismo número por otro camino. El ejercicio anterior dijo que la tangente unitaria de una curva gira dentro del plano tangente con velocidad angular K_g por unidad de longitud. Un campo paralelo no gira, así que, visto desde la tangente, es el campo paralelo el que gira con velocidad $-K_g$. En el paralelo de latitud $u_{10} \geq 0$ la curvatura geodésica tiene módulo constante, $\tan u_{10}$ (se calcula en los ejercicios de la sección 3.3), y la longitud es $2\pi \cos u_{10}$. El giro total del transportado respecto de la tangente es entonces $\tan u_{10} \cdot 2\pi \cos u_{10} = 2\pi \operatorname{sen} u_{10}$, el mismo número que dio el oscilador. Y como la tangente del paralelo vuelve a ser la misma al cerrar la vuelta, ese giro relativo es el giro de holonomía. Hay, por tanto, dos maneras de obtenerlo: resolver el sistema del transporte, o integrar la curvatura geodésica del camino. La segunda es la que usa Gauss-Bonnet, y aquí se ve entera. Con la región encerrada a la izquierda, que es el casquete de arriba, la integral de K_g sobre el borde vale $2\pi \operatorname{sen} u_{10}$, la curvatura encerrada vale $2\pi(1 - \operatorname{sen} u_{10})$, y la suma es 2π, justo lo que el teorema de la asignatura siguiente asigna a una región con forma de disco.

Dónde se falla.

- *Medir el ángulo con las componentes sin normalizar.* La base $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$ es ortogonal pero no ortonormal: $|\mathbf{X}_2| = \cos u_{10}$. El ángulo de giro es $u_2 \operatorname{sen} u_{10}$ en la base $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2/c\}$; leído directamente de (f_1, f_2) sale otro. Con $u_{10} = \pi/3$, en el instante en que el giro es de 45°, las componentes son $(f_1, f_2) = \left(-\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{4}\right)$, y tomarlas como coordenadas cartesianas daría un ángulo de $\arctan \frac{1}{2} \approx 26{,}57°$.
- *Perder el signo de* $\Gamma^2_{12} = -\tan u_1$. La segunda ecuación cambia de signo, sale $f_1'' = \sigma^2 f_1$, con soluciones exponenciales, y el módulo deja de ser constante. Es el error que la comprobación del módulo delata en una línea.

CONEXIÓN: GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA DE SUPERFICIES

El cálculo anterior es la versión artesanal de lo que allí se hace con maquinaria. En GTS no se resuelve ningún sistema de ecuaciones diferenciales para obtener el ángulo de holonomía: se aplica el teorema de Gauss-Bonnet a la región encerrada y se lee el resultado.
Merece la pena haber hecho una vez el cálculo a mano, precisamente para saber qué está resumiendo ese teorema. Lo que aquí cuesta una página de Christoffel y un oscilador armónico, allí será una línea.

QUÉ DEJA. El procedimiento completo del transporte paralelo, que es siempre el mismo: coeficientes

métricos, símbolos de Christoffel, particularizar al camino, resolver el sistema lineal y comprobar que el módulo sale constante. Esa última comprobación es gratis y detecta la mayoría de los errores de signo.

Ejercicio 3.12. *Las reglas de derivación siguen valiendo* [H3.11]

Sean M una s.r., α una c.p.r. en M, V y W campos tangentes a lo largo de α, f una función diferenciable y $\lambda \in \mathbb{R}$. Probar:

$$\frac{D(V+W)}{dt} = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt},$$
$$\frac{D(fV)}{dt} = f'(t)\,V(t) + f(t)\frac{DV}{dt},$$
$$\frac{D(\lambda V)}{dt} = \lambda \frac{DV}{dt}.$$

Resolución. Escríbase P para la proyección ortogonal sobre el plano tangente, de modo que $\frac{DV}{dt} = P(V')$. Esa proyección es una aplicación lineal en cada punto.

Suma. $(V+W)' = V' + W'$ y P es lineal, luego $P\big((V+W)'\big) = P(V') + P(W')$.

Producto por una función. Por la regla del producto ordinaria, $(fV)' = f'V + fV'$. Al proyectar, el primer sumando *no cambia*, porque V es tangente y f' es un escalar, de modo que $f'V$ ya está en el plano tangente. El segundo da $fP(V')$. En total,

$$\frac{D(fV)}{dt} = f'V + f\frac{DV}{dt}.$$

Producto por una constante. Es el caso $f = \lambda$ del anterior, con $f' = 0$. ■

LA IDEA: POR QUÉ IMPORTA QUE ESTAS REGLAS VALGAN

El resultado parece rutinario y no lo es: es lo que justifica el nombre *derivada* covariante. Una operación merece llamarse derivada si es lineal y cumple la regla del producto. Estas dos propiedades son exactamente lo que se usa, sin mencionarlo, cada vez que se deriva una expresión como $V = f_1\mathbf{X}_1 + f_2\mathbf{X}_2$ y se reparten las derivadas entre los coeficientes y los campos coordenados. Todo el capítulo descansa en ellas.

Y merece la pena ver *por qué* funcionan: porque proyectar es lineal y porque un campo tangente multiplicado por un escalar sigue siendo tangente. Si la proyección no fuese lineal, o si el plano tangente no fuese un subespacio vectorial, nada de esto valdría.

Ejercicio 3.13. *Cambiar de parámetro en la derivada covariante* [H3.12]

Sea M una s.r. y $\alpha = \alpha(t)$ una c.p.r. en M. Si s denota el parámetro natural de α, probar que

$$\frac{D\alpha'}{dt} = \frac{D\dot{\alpha}}{ds}\,|\alpha'|^2 + \mathbf{t}(t)\,\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Resolución. Por la regla de la cadena, $\alpha'(t) = \dot{\alpha}(s)\dfrac{ds}{dt}$, y derivando otra vez,

$$\alpha''(t) = \ddot{\alpha}(s)\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^2 + \dot{\alpha}(s)\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Ahora se proyecta sobre el plano tangente. La proyección es lineal y $\dot{\alpha} = \mathbf{t}$ ya es tangente, de modo que el segundo sumando sobrevive intacto:

$$\frac{D\alpha'}{dt} = P\big(\alpha''\big) = P\big(\ddot{\alpha}\big)\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^2 + \mathbf{t}\,\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{D\dot{\alpha}}{ds}\,|\alpha'|^2 + \mathbf{t}\,\frac{d^2s}{dt^2},$$

usando $\dfrac{ds}{dt} = |\alpha'|$. ■

LA IDEA: DE AQUÍ SALE QUE LAS GEODÉSICAS SOLO ADMITEN PARÁMETROS AFINES

Esta fórmula es la que explica un hecho que en su momento pudo parecer arbitrario: que una reparametrización de una geodésica siga siendo geodésica solo si el cambio es afín.
Si α es geodésica con su parámetro natural, el primer sumando se anula y queda

$$\frac{D\alpha'}{dt} = \mathbf{t}\,\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Para que el nuevo parámetro también dé una geodésica hace falta que eso sea cero, es decir, $d^2s/dt^2 = 0$, o sea que s dependa de t de forma afín.
La lectura física es la de siempre: el término que sobra es una aceleración puramente tangencial, la de ir cambiando de marcha. La trayectoria es la misma, pero el caminante nota que acelera, y la derivada covariante lo registra.

Ejercicio 3.14. *Campos que forman ángulo constante con uno paralelo* [H3.14]

Sea M una s.r. orientada, $\alpha : [0, l] \to M$ una c.p.r. y $X(t)$ un campo tangente no nulo y paralelo a lo largo de α. Se pide:

1. Dar un ejemplo de campo tangente a lo largo de α que forme ángulo constante con $X(t)$ y no sea paralelo.
2. Dar una condición necesaria y suficiente para que un campo tangente que forme ángulo constante con $X(t)$ sea paralelo.
3. Si $Y(t)$ es otro campo tangente paralelo y linealmente independiente de $X(t)$ en cada punto, ¿es constante el volumen del paralelepípedo determinado por $\mathbf{N}(t)$, $X(t)$ e $Y(t)$?

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *El ángulo entre dos vectores solo depende de sus direcciones, no de sus módulos. Esa observación resuelve el primer apartado de un plumazo.*
2. *Para el segundo, escribe el campo en la base $\{X, \mathbf{N} \times X\}$ y usa la regla del producto del ejercicio anterior.*
3. *Para el tercero, recuerda qué conserva el transporte paralelo.*

Resolución. *1.* Basta estirar el propio X. Tómese

$$Z(t) = (1 + t)\, X(t).$$

Es tangente, forma ángulo cero con X en todo punto, lo que ciertamente es constante, y sin embargo, por la regla del producto,

$$\frac{DZ}{dt} = 1 \cdot X(t) + (1 + t) \underbrace{\frac{DX}{dt}}_{=0} = X(t) \neq 0.$$

No es paralelo. La clave es que el ángulo no ve el módulo.

2. La condición es que **el módulo sea constante**.

Es necesaria, porque todo campo paralelo tiene módulo constante. Y es suficiente: si X es paralelo puede suponerse unitario, y entonces $\{X, \mathbf{N} \times X\}$ es una base ortonormal del plano tangente en cada punto, con los dos campos paralelos: la derivada de $\mathbf{N} \times X$ es normal, pues $\mathbf{N}' \times X$ es normal y $\mathbf{N} \times X' = 0$. Un campo Z diferenciable no nulo que forme ángulo constante θ con X y tenga módulo constante c se escribe

$$Z = c \cos\theta\, X + \varepsilon c \operatorname{sen}\theta\, (\mathbf{N} \times X), \qquad \varepsilon \in \{1, -1\},$$

donde el signo es constante por continuidad en el intervalo (si $\operatorname{sen}\theta = 0$, el segundo coeficiente ya es cero). Con los dos coeficientes constantes, por linealidad y por ser paralelos los dos campos de la base, $DZ/dt = 0$.

3. Sí, es constante. El volumen es

$$\big|(\mathbf{N}, X, Y)\big| = \big|\mathbf{N} \cdot (X \times Y)\big| = |X|\,|Y|\,|\operatorname{sen}\theta|,$$

donde θ es el ángulo entre X e Y y se ha usado que ambos son tangentes, de modo que $X \times Y$ es paralelo a $\mathbf{N}$. Ahora bien, el transporte paralelo conserva módulos y ángulos, luego $|X|$, $|Y|$ y θ son constantes, y con ellos el volumen. ■

LA IDEA: QUÉ DISTINGUE «PARALELO» DE «QUE NO GIRA»

Los tres apartados giran alrededor de la misma confusión, que conviene deshacer.

Ser paralelo es **no cambiar**, ni de dirección ni de tamaño. Formar ángulo constante con algo es solo no cambiar de dirección *relativa*. El primer apartado explota exactamente ese hueco: un campo puede apuntar siempre igual y estirarse.

El segundo cierra el hueco: dirección relativa constante más módulo constante sí implica paralelo, y la demostración es escribirlo en una base de campos paralelos y ver que los coeficientes son números.

Y el tercero es la versión tridimensional del mismo hecho: el transporte paralelo es una isometría, así que no solo conserva longitudes y ángulos, sino todo lo que se construya con ellos, incluidas las áreas y los volúmenes.

3.5 Geodésicas

La pregunta

Sobre un globo, el camino más corto entre dos puntos puede curvarse mucho al dibujarlo en un mapa plano. Mantener un rumbo fijo tampoco suele dar ese camino. Las rectas del plano cumplen a la vez muchas cosas, ser lo más corto, no torcer, no acelerar, y sobre una esfera esas cosas dejan de coincidir. ¿Cuál de ellas se elige para definir "ir recto" sobre una superficie, y por qué esa y no la que parece más natural?

La idea: cinco definiciones de recta, y por qué se elige una

Se busca, sobre una superficie, el análogo de las rectas del plano. El problema es que las rectas tienen muchas propiedades características y no todas se generalizan igual de bien. Merece la pena ver la lista, porque explica por qué la definición que se adopta es la que es y no otra.

1. **Tienen curvatura nula.** No sirve tal cual: sobre una esfera no hay ninguna curva de curvatura nula, porque toda curva contenida en ella se dobla al menos tanto como la esfera.
2. **Dan la distancia más corta entre dos puntos.** Es una propiedad global y delicada. Además, como se verá, la implicación solo funciona en un sentido.
3. **Por dos puntos pasa una única recta.** Falso sobre la esfera: por dos puntos antipodales pasan infinitos círculos máximos.
4. **Por un punto y con una dirección dada pasa una única recta.** Esta sí se generaliza, y será un teorema.
5. **Sus vectores tangentes son paralelos.** Esta es la elegida.

La razón de elegir la quinta es que se puede *ejecutar* desde dentro de la superficie. Un observador que camina señalando la dirección en la que avanza está definiendo un campo tangente a lo largo de su recorrido. Si avanza sin girar y a velocidad constante, ese campo no cambia *para él*: es paralelo. En el plano, hacer eso produce exactamente una recta.

Sobre una esfera, hacer eso mismo produce un círculo máximo. El caminante tendrá la impresión de haber ido siempre recto; un observador externo verá que ha descrito una circunferencia y que su vector inicial y el final no son paralelos en el sentido euclídeo. Ese recorrido es lo que se llama geodésica.

Definición. Sea M una s.r. y α una curva diferenciable en M. Se dice que α es una **geodésica parametrizada** de M si su campo velocidad es paralelo a lo largo de ella, es decir, si

$$\frac{D\alpha'}{dt} = 0.$$

Observación (cinco consecuencias inmediatas)**.** Conviene tenerlas todas, porque cada una resuelve algún tipo de problema.

1. **La velocidad es constante en módulo.** Por la proposición (p. 203) aplicada a $V = W = \alpha'$. En consecuencia el parámetro natural es una función afín del parámetro, $s = c_1 t + c_2$.
2. **El recíproco es falso.** La circunferencia $\alpha(s) = (\cos s, \operatorname{sen} s, 0)$ en el plano $z = 0$ tiene $|\dot{\alpha}| = 1$, pero $\ddot{\alpha}$ no es nulo y, al estar la curva en un plano, la derivada covariante coincide

con la usual. No es geodésica. Ir a velocidad constante no es lo mismo que ir recto.
3. **Es un concepto intrínseco**, por serlo el paralelismo.
4. **No hay geodésicas con puntos singulares**, salvo las constantes. Si $\alpha'(t_0) = 0$ y $|\alpha'|$ es constante, entonces $\alpha' \equiv 0$ y la curva se reduce a un punto.
5. **Para una geodésica no constante, solo las reparametrizaciones afines conservan la propiedad.** Si $\beta = \alpha \circ f$, se comprueba que

$$\frac{D\beta'}{d\tilde{t}}(\tilde{t}) = f'(\tilde{t})^2 \, \frac{D\alpha'}{dt}\big(f(\tilde{t})\big) + f''(\tilde{t}) \, \alpha'\big(f(\tilde{t})\big),$$

y si α es geodésica el primer sumando se anula. Si no es constante, α' no se anula y β es geodésica si y solo si $f'' \equiv 0$, es decir, si f es afín. Una curva constante sigue siendo geodésica con cualquier parámetro.

LA IDEA: POR QUÉ SER GEODÉSICA DEPENDE DE CÓMO SE RECORRE

La quinta consecuencia es la más fácil de pasar por alto y la que más se pregunta. Ser geodésica **no** es una propiedad de la traza de la curva, sino de la parametrización. Un círculo máximo recorrido a velocidad constante es una geodésica parametrizada; el mismo círculo máximo recorrido acelerando no lo es, aunque el conjunto de puntos sea idéntico.

La razón es física y clarísima: la derivada covariante de la velocidad es la aceleración tal como la percibe el habitante. Si uno acelera, la nota, aunque vaya recto. Ser geodésica exige aceleración tangencial nula, incluida la componente que cambia la rapidez. Puede haber aceleración normal en el espacio ambiente.

De ahí que se distinga entre *geodésica parametrizada*, que es una curva con su parametrización, y *geodésica* a secas, que es un conjunto de puntos que admite localmente parametrizaciones geodésicas. Para una curva regular conexa basta comprobar $K_g = 0$ en cualquier parámetro regular; para que la parametrización dada sea geodésica se exige además rapidez constante.

Teorema. Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. en una s.r. orientada por $\mathbf{N}$. Son equivalentes:
1. α es geodésica parametrizada;
2. $K_g(s) = (\mathbf{N}(s), \dot{\alpha}(s), \ddot{\alpha}(s)) = 0$ para todo s;
3. en los puntos con $k(s) \neq 0$, los vectores $\mathbf{n}(s)$ y $\mathbf{N}(s)$ son paralelos, es decir, $\mathbf{n}(s) = \pm\mathbf{N}(s)$. La condición hay que escribirla así y no como «si α no es una recta»: una curva que no sea recta puede tener puntos aislados de curvatura nula, y en ellos el normal principal ni siquiera existe.

La idea, antes de la cuenta: las tres condiciones son la misma frase en tres idiomas. La frase es «la aceleración no tiene componente dentro del suelo». Dicha con la palabra *geodésica*, es (1); dicha con el nombre que se le dio a esa componente, K_g, es (2); y dicha señalando hacia dónde queda entonces la aceleración, es (3). No hay tres teoremas, hay un teorema y tres vocabularios, y la demostración consiste en escribir el mismo vector $\ddot{\alpha}$ en la base de Darboux y en la de Frenet.

La imagen: el coche que no toca el volante. Sobre la superficie, ir recto es ir sin girar el volante. Si el suelo se dobla, el coche se dobla con él, y esa aceleración es inevitable: sale perpendicular al suelo. Lo que el conductor controla es la otra componente, la que va *dentro* del suelo, y eso es K_g. Geodésica es, exactamente, $K_g = 0$: nadie ha tocado el volante.

(1) $\Leftrightarrow$ (2): leer $\ddot{\alpha}$ en la base de Darboux (el núcleo de la prueba). Ser geodésica significa que la parte tangencial de $\ddot{\alpha}$ es nula, es decir, que $\ddot{\alpha}$ apunta en la dirección normal a la superficie. Por la descomposición de Darboux (3.2), $\ddot{\alpha} = K_g\mathbf{S} + K_n\mathbf{N}$, y anular la parte tangencial es exactamente $K_g \equiv 0$.
(2) $\Leftrightarrow$ (3): leer el mismo vector en la base de Frenet. Si $k \neq 0$, entonces $\ddot{\alpha} = k\,\mathbf{n}$, de modo que $\ddot{\alpha}$ apunta en la dirección normal si y solo si $\mathbf{n} = \pm\mathbf{N}$, que es (3). Donde $k = 0$, $\ddot{\alpha} = 0$ y la condición (2) ya se cumple automáticamente. ■

Qué hizo cada hipótesis. La parametrización natural es imprescindible y no es un detalle técnico: solo con velocidad constante la aceleración $\ddot{\alpha}$ mide el giro y nada más (no es necesario que ese módulo sea uno). Si la velocidad cambiara, aparecería una componente tangencial debida a pisar el acelerador, no a girar el volante, y la caracterización sería falsa — de ahí que sea imposible reparametrizar libremente una geodésica y que siga siéndolo. La hipótesis $k \neq 0$ afecta solo a (3), y por la razón de siempre: sin curvatura no hay $\mathbf{n}$ con el que comparar. Y la orientación por $\mathbf{N}$ interviene en el signo de K_g, pero no en que se anule, así que ser geodésica no depende de la orientación elegida.

Corolario (ecuación de las geodésicas)**.** Una c.r.p.n. contenida en la imagen de una p.l. es geodésica parametrizada si y solo si

$$\ddot{u}_k(s) + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k}(s)\,\dot{u}_i(s)\,\dot{u}_j(s) = 0, \qquad k = 1, 2.$$

De dónde sale. La primera proposición de la sección 3.3 (p. 189) escribe $K_g\mathbf{S}$ en la base $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$, y sus dos coeficientes son exactamente los miembros izquierdos de estas ecuaciones. Como $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son linealmente independientes, $K_g\mathbf{S} = 0$ si y solo si los dos coeficientes se anulan; y $K_g \equiv 0$ es ser geodésica, por el teorema anterior.

LA IDEA: LAS TRES CARAS DE UNA GEODÉSICA, Y CUÁL USAR

El teorema anterior y su corolario dan tres criterios equivalentes, y elegir bien el criterio es la mitad de cualquier ejercicio.

- $K_g = 0$, o su forma con el producto mixto. Es el más cómodo cuando se tiene la curva explícita en el espacio: se calculan $\mathbf{N}$, α' y α'' y se comprueba si el determinante se anula. Esto decide la trayectoria; para la parametrización dada se comprueba también que la rapidez sea constante.
- **$\mathbf{n} = \pm\mathbf{N}$ donde $k > 0$.** Es el mejor para razonar sin calcular, y es el que hay que usar cuando el enunciado dice «justificar sin hacer ningún cálculo adicional». Su lectura es directa: la curva se dobla *solo* hacia dentro de la superficie, nunca de lado.
- **La ecuación diferencial del corolario.** Es la que se usa cuando hay que *encontrar* las geodésicas, no comprobar si una lo es, y cuando se dan los símbolos de Christoffel en el enunciado.

Dos consecuencias que salen gratis y conviene tener memorizadas: **toda recta contenida en una superficie es geodésica de ella**, porque recorrida a velocidad constante su aceleración es nula; en un plano las geodésicas no constantes son exactamente las rectas recorridas a velocidad constante.

Ejemplo (el plano en polares: la ecuación recupera las rectas)**.** Antes de usar la ecuación

en una superficie curvada conviene verla funcionar donde se conoce la respuesta. El plano $z = 0$ en polares, $x(r, \theta) = (r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 0)$ con $r > 0$, tiene $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$ y $g_{22} = r^2$, y dos símbolos no nulos, $\Gamma^1_{22} = -r$ y $\Gamma^2_{12} = 1/r$, que en la sección 3.1 se leyeron a mano en las derivadas segundas y se comprobaron con la fórmula del teorema de Gauss. Las ecuaciones de las geodésicas son

$$r'' - r\,\theta'^2 = 0, \qquad \theta'' + \frac{2}{r}\,r'\theta' = 0.$$

Ninguna dice $r'' = 0$ ni $\theta'' = 0$: en polares una recta no tiene coordenadas afines. Pero las rectas las cumplen. La recta $x = 1$ recorrida por su arco es el punto $(1, s)$, es decir, $r = \sqrt{1+s^2}$ y $\theta = \arctan s$. Derivando, $r'' = (1+s^2)^{-3/2}$ y $r\,\theta'^2 = \sqrt{1+s^2}\,(1+s^2)^{-2}$, que es lo mismo; y $\theta'' = -2s\,(1+s^2)^{-2}$, que es exactamente $-\frac{2}{r}\,r'\theta'$.

Qué se ha ganado. Tres cosas. La primera, anunciada al presentar las ecuaciones de Gauss y ahora en acción: los símbolos de Christoffel no son curvatura. El plano es plano y en polares tiene $\Gamma \neq 0$; los Γ miden cómo gira y se estira la retícula de coordenadas, y los términos que llevan son, en mecánica, la aceleración centrípeta $r\theta'^2$ y la de Coriolis $2r'\theta'$, que la caja «derivar una base móvil» de la sección 3.4 deduce derivando e_r y e_θ. La segunda: la ecuación angular es $(r^2\theta')'/r^2 = 0$, es decir, $r^2\theta'$ constante; es la conservación del momento angular de una partícula libre, que barre áreas iguales en tiempos iguales. La tercera es la que más se usa: en una superficie de revolución con el perfil parametrizado por su arco, $g_{11} = 1$ y $g_{22} = f^2$, la misma cuenta da $\Gamma^2_{12} = f'/f$, y la ecuación de v se escribe $(f^2 v')' = 0$. La cantidad $f^2 v'$ se conserva a lo largo de cada geodésica: es la relación de Clairaut, el momento angular respecto del eje.

Conexión: las geodésicas como ecuaciones de Euler–Lagrange

La métrica ya apareció en la energía cinética. Ahora se puede reconocer su ecuación de movimiento. Para una masa m sobre una superficie fija, con potencial $V(u_1, u_2)$, se toma

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\sum_{i,j} g_{ij}\,u_i'\,u_j' - V.$$

Las primas indican tiempo; el símbolo $\mathcal{L}$ denota aquí el lagrangiano. Las dos ecuaciones de Euler–Lagrange dan, para cada k,

$$m\sum_j g_{kj}\,u_j'' + m\sum_{i,j}\left(\partial_i g_{kj} - \frac{1}{2}\partial_k g_{ij}\right)u_i'\,u_j' = -\partial_k V.$$

Como $u_i'u_j'$ es simétrico en i, j, se puede sustituir $\partial_i g_{kj}$ por $(\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ki})/2$. Al multiplicar por G^{-1} se reconoce exactamente la fórmula de Christoffel:

$$u_\ell'' + \sum_{i,j}\Gamma^\ell_{ij}\,u_i'\,u_j' = -\frac{1}{m}\sum_k g^{\ell k}\partial_k V.$$

Si V es constante, el miembro derecho se anula: es la ecuación de las geodésicas. La abstracción geométrica reúne los términos que en mecánica aparecían al derivar una energía cinética con coeficientes variables.

La interpretación física requiere una ligadura ideal sin rozamiento. Con ninguna fuerza tangencial, Newton permite una reacción normal: $m\alpha'' = \lambda N$. Proyectar da $D\alpha'/dt = 0$, y $\frac{d}{dt}\|\alpha'\|^2 = 2\langle\alpha', \alpha''\rangle = 0$. La partícula conserva su rapidez y recorre una geodésica; puede tener aceleración normal. Por ejemplo, un movimiento uniforme sobre un círculo máximo de una esfera de radio R tiene aceleración centrípeta de módulo v^2/R. Se entiende aquí una partícula obligada a permanecer en la superficie, no un contacto que pueda perderse. Un péndulo esférico bajo gravedad tiene generalmente fuerza tangencial y no sigue estas geodésicas.

Ejemplo (las geodésicas de la esfera son los círculos máximos)**.** En la esfera unidad, el normal en un punto es el propio vector de posición salvo signo, $\mathbf{N}(s) = \pm\alpha(s)$. Antes de usar Frenet, derivar $\alpha\cdot\alpha = 1$ dos veces da $\alpha\cdot\ddot{\alpha} = -1$, luego $k = |\ddot{\alpha}| \geq 1$ y el triedro existe. Si α es geodésica, el teorema da $\mathbf{n}(s) = \pm\mathbf{N}(s) = \pm\alpha(s)$. Derivando esta identidad y usando las ecuaciones de Frenet-Serret,

$$-k(s)\,\mathbf{t}(s) + \tau(s)\,\mathbf{b}(s) = \pm\mathbf{t}(s),$$

e igualando componentes en la base del triedro se obtiene

$$k(s) = 1, \qquad \tau(s) = 0.$$

Curvatura constante igual a 1 y torsión nula caracterizan a una circunferencia de radio 1; en la esfera unidad, eso es un círculo máximo, el corte con un plano que pasa por el centro.

Recíprocamente, en un círculo máximo el normal principal apunta al centro de la esfera, luego $\mathbf{n} = \pm\mathbf{N}$ y la curva es geodésica.

EXPLÍCATE. *En el cálculo anterior se ha usado que el radio de la esfera es* 1 *para concluir* $k = 1$. *¿Qué saldría en una esfera de radio* r*, y por qué el resultado geométrico sigue siendo el mismo?*

Teorema (existencia y unicidad local)**.** Sean M una s.r., $p \in M$ y X un vector unitario tangente a M en p. Dado $s_0 \in \mathbb{R}$, existen $\varepsilon > 0$ y una única geodésica parametrizada naturalmente α definida en $(s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$ con $\alpha(s_0) = p$ y $\dot{\alpha}(s_0) = X$.

Este es el análogo de la cuarta propiedad de las rectas de la lista inicial: por un punto y con una dirección dada pasa una única geodésica. Obsérvese que el enunciado es **local**: las geodésicas no se pueden prolongar tanto como se quiera, salvo en las llamadas superficies completas.

Teorema (las curvas más cortas son geodésicas)**.** Sea α una c.r.p.n. en una s.r. M. Si α es la curva de longitud mínima entre $p = \alpha(a)$ y $q = \alpha(b)$ de entre todas las curvas diferenciables a trozos y regulares de M que unen p y q, entonces α es una geodésica parametrizada.

LA IDEA: EL RECÍPROCO ES FALSO, Y EL CONTRAEJEMPLO ESTÁ EN CUALQUIER GLOBO TERRÁQUEO

Este teorema recupera la segunda propiedad de las rectas, pero **solo en un sentido**, y la asimetría es importante.

Minimizar la distancia implica ser geodésica. Ser geodésica *no* implica minimizar la distancia. El contraejemplo cabe en un dibujo: dados dos puntos no antipodales de una esfera, el círculo máximo que pasa por ellos queda dividido en dos arcos, y los dos son geodésicas. Uno es el camino corto y el otro es el largo. El largo es una geodésica que no minimiza la longitud entre esos dos extremos.

La lectura correcta es esta: ser geodésica es una propiedad **local**, «no girar en ningún momento», mientras que minimizar la distancia es una propiedad **global**, «ser mejor que todas las alternativas». Cada geodésica sí minimiza entre puntos suficientemente próximos de ella; lo que puede fallar es la minimización entre extremos lejanos.

La formulación mecánica distingue también ambas cuestiones: anular la fuerza tangencial determina una ecuación de movimiento local; no compara su trayectoria con todas las curvas que unen dos extremos lejanos.

CONEXIÓN: GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA DE SUPERFICIES

Las geodésicas son la pieza de este capítulo que más se usa el cuatrimestre siguiente, y por una razón concreta: **son las curvas que hacen desaparecer un sumando entero del teorema de Gauss-Bonnet**.

Como $K_g \equiv 0$ sobre una geodésica, cualquier región limitada por geodésicas simplifica el teorema hasta dejarlo en una relación entre la curvatura encerrada y los ángulos de las esquinas. De ahí que en GTS aparezcan por todas partes los *triángulos geodésicos* y los polígonos geodésicos. Dos consecuencias que conviene anticipar, porque dan sentido a lo estudiado aquí:

- Para triángulos geodésicos simples que encierran una región disco, si la curvatura es positiva en el interior, como en la esfera, los ángulos suman más de π. En una de curvatura negativa, menos. El quinto postulado de Euclides deja de cumplirse, y las geometrías no euclídeas dejan de ser una construcción abstracta para convertirse en la geometría de una superficie concreta.
- El resultado de que las curvas minimizantes son geodésicas, pero no al revés, es el que obliga en GTS a distinguir con cuidado entre enunciados locales y globales. La esfera, donde el arco largo de un círculo máximo es geodésica sin minimizar entre sus extremos, es el contraejemplo que se cita allí una y otra vez.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ

La alternativa más tentadora de todo el curso: definir la geodésica como el camino más corto. Es lo que uno quiere decir, es lo que dice la palabra en el lenguaje corriente y es lo que motivó el concepto: el problema de la ruta más corta sobre la Tierra.

Lo que tenía a favor. Todo, salvo funcionar. Es la propiedad que interesa, la que tiene aplicaciones y la que cualquiera reconocería como la buena.

Lo que la hundió como definición. Tres cosas, y cada una sola bastaría.

Primera: el camino más corto puede **no existir**. Quítale un punto al plano y no hay camino más corto entre dos puntos que tengan al punto quitado en el interior del segmento que los une: sus longitudes se acercan tanto como se quiera a la distancia euclídea, pero ninguna la alcanza.

Segunda: puede **no ser único**. Entre dos puntos antípodas de la esfera hay infinitos arcos mínimos, todos los meridianos.

Tercera, y la decisiva: hay curvas que **todo el mundo quiere llamar geodésicas y no son las más cortas**. El arco largo de una circunferencia máxima, el que da casi la vuelta entera, no minimiza entre sus extremos, y sin embargo va todo recto y es indistinguible localmente del arco corto.

La solución que se adoptó. Cambiar una propiedad global por una local: $K_g \equiv 0$, la curva no se desvía dentro de la superficie. Esa condición es una ecuación diferencial, siempre tiene solución local y única dado un punto y una dirección, y no sufre ninguno de los tres problemas anteriores.

Qué pasó con la propiedad que se quería. Se convirtió en teorema en vez de definición. Lo más corto es geodésica siempre; geodésica es lo más corto solo localmente. Esa asimetría, que al principio parece un defecto, es en realidad el contenido geométrico del tema.

Ejercicios de esta sección

Ejercicio 3.15. *Una curva plana dentro de una superficie*

Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. contenida en una parametrización local de una s.r.. Supóngase que α está contenida en un plano Π y que $k(s) \neq 0$ para todo s. Se pide:

1. Probar que α es geodésica parametrizada si y solo si $\mathbf{N}(s)$ es paralelo al plano Π, para todo s.
2. Probar que α tiene curvatura normal idénticamente nula si y solo si $\mathbf{N}(s)$ es normal al plano Π, para todo s.
3. Dar ejemplos de las dos situaciones, y decidir si pueden darse a la vez.

Observación. Una curva con curvatura normal idénticamente nula se llama **línea asintótica** de la superficie. El nombre y su estudio pertenecen al capítulo siguiente, pero la condición $K_n \equiv 0$ ya está disponible aquí y es todo lo que hace falta.

Resolución. La idea, antes de la cuenta. $\mathbf{N}$ es ortogonal a $\mathbf{t}$, así que vive en el plano generado por $\mathbf{n}$ y $\mathbf{b}$; y en una curva plana $\mathbf{n}$ está dentro de Π y $\mathbf{b}$ es perpendicular a Π. Ser geodésica es $\mathbf{N} = \pm\mathbf{n}$, dentro de Π; tener curvatura normal nula es $\mathbf{N} = \pm\mathbf{b}$, perpendicular a Π. La caja que cierra el ejercicio lo lee como un reparto de la curvatura entre esos dos extremos.

Lo que da la hipótesis. Como α es plana con curvatura no nula, sus vectores $\mathbf{t}$ y $\mathbf{n}$ están en la dirección de Π, y su binormal $\mathbf{b}$ es constante e igual, salvo signo, al vector característico unitario a de Π. Además, $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ es una base ortonormal de la dirección de Π.

Lo que se cumple siempre. El vector $\mathbf{N}$ es normal a la superficie y $\mathbf{t}$ es tangente a ella, luego $\mathbf{N}\cdot\mathbf{t} = 0$ en todo punto, sin necesidad de hipótesis alguna.

Primer apartado. Por el teorema de caracterización de las geodésicas, y como $k \neq 0$, ser geodésica equivale a $\mathbf{n} = \pm\mathbf{N}$.

Si α es geodésica, entonces $\mathbf{N} = \pm\mathbf{n}$, y $\mathbf{n}$ está en la dirección de Π; luego $\mathbf{N}$ también.

Recíprocamente, supóngase que $\mathbf{N}$ es paralelo a Π. Entonces $\mathbf{N}$ pertenece a la dirección de Π, que está generada por $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$, y además es ortogonal a $\mathbf{t}$. El único vector unitario de ese plano ortogonal a $\mathbf{t}$ es $\pm\mathbf{n}$, luego $\mathbf{N} = \pm\mathbf{n}$ y α es geodésica. ■

Segundo apartado. Por el teorema de Meusnier, $K_n = k\cos\theta$ con θ el ángulo entre $\mathbf{n}$ y $\mathbf{N}$. Como $k \neq 0$,

$$K_n \equiv 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos\theta = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{N} \perp \mathbf{n}.$$

Ahora bien, $\mathbf{N}$ es ortogonal a $\mathbf{t}$ siempre. Si además es ortogonal a $\mathbf{n}$, entonces es ortogonal a los dos generadores de la dirección de Π, es decir, es normal al plano.

Recíprocamente, si $\mathbf{N}$ es normal a Π, en particular es ortogonal a $\mathbf{n}$, que vive en la dirección de Π, y por tanto $K_n = 0$. ■

Tercer apartado: ejemplos.

- **Plana y geodésica.** Un círculo máximo de la esfera. Su plano pasa por el centro, y el normal de la esfera en cada punto es radial, luego apunta al centro y está contenido en ese plano. En efecto es geodésica, como ya se vio.
- **Plana y no geodésica.** Un paralelo de la esfera distinto del ecuador. Su plano no pasa por el centro, de modo que el normal radial no es paralelo a él. Coincide con el cálculo de la derivada covariante de la sección anterior.

- **Plana y con curvatura normal nula.** Cualquier curva contenida en una superficie que sea un plano; por ejemplo, una circunferencia dibujada sobre un plano. Aquí el plano Π que contiene a la curva es la propia superficie, y el normal de la superficie es normal a ese plano por definición. Obsérvese que esa circunferencia *no* es geodésica: en un plano las geodésicas son las rectas.

¿Pueden darse a la vez? No. Ser geodésica exige que $\mathbf{N}$ sea paralelo a Π y tener curvatura normal nula exige que sea normal a Π. Un vector unitario no puede estar a la vez dentro de un plano y ser perpendicular a él. ■

LA IDEA: LOS DOS CASOS EXTREMOS DE UNA MISMA PREGUNTA

El ejercicio es más bonito de lo que parece si se ve como una sola pregunta con dos respuestas opuestas.

La pregunta es: dada una curva plana sobre una superficie, ¿hacia dónde apunta el normal de la superficie respecto del plano de la curva? Y como $\mathbf{N}$ siempre es perpendicular a $\mathbf{t}$, solo hay un grado de libertad: $\mathbf{N}$ gira en el plano perpendicular a $\mathbf{t}$, que está generado por $\mathbf{n}$ y por $\mathbf{b}$.

- Si $\mathbf{N}$ apunta enteramente hacia $\mathbf{n}$, la curva se dobla *solo* hacia dentro de la superficie. Toda la curvatura es normal, nada es geodésica: es una geodésica.
- Si $\mathbf{N}$ apunta enteramente hacia $\mathbf{b}$, es decir, es normal al plano, la curva se dobla *solo* de lado dentro de la superficie. Toda la curvatura es geodésica, nada es normal: es una línea asintótica.
- En cualquier posición intermedia, la curvatura se reparte entre las dos, según $k^2 = K_g^2 + K_n^2$.

Geodésica y línea asintótica son, por tanto, los dos extremos del mismo reparto. Y por eso no pueden coincidir salvo en el caso degenerado en que las dos curvaturas se anulan, que obliga a $k = 0$: una recta.

Dónde se falla.

- *Olvidar la hipótesis $k \neq 0$.* Sin ella el tercer apartado es falso. Una generatriz del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, como $\alpha(s) = (1, 0, s)$, es plana, es geodésica y tiene curvatura normal nula, las tres cosas a la vez; lo que falla es que no tiene normal principal, y el argumento entero se apoya en $\mathbf{n}$.
- *Confundir «paralelo a Π» con «normal a Π».* El normal de la superficie paralelo al plano de la curva da geodésica; perpendicular, asintótica. El círculo máximo y la circunferencia dibujada en un plano son los dos ejemplos que lo fijan.
- *Leer «para todo s» como «en un punto».* Las dos equivalencias son sobre funciones: que $\mathbf{N}$ sea paralelo a Π en un punto solo dice que ahí $K_g = 0$.

Ejercicio 3.16. *Una curva que corta a los meridianos bajo ángulo constante* [H3.3]

Demostrar que la imagen de la curva dada por $\bar{\alpha}(t) = (\ln t,\ 2\arctan t)$, $t > 0$, sobre la superficie parametrizada

$$x(u, v) = (\cos u \operatorname{sen} v,\ \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,\ \cos v),$$

corta a las curvas v-paramétricas bajo un ángulo constante igual a $\pi/4$.

Resolución. La idea, antes de la cuenta. El ángulo entre dos curvas de una superficie se calcula con la primera forma fundamental y nada más: hacen falta las componentes de las dos velocidades en la base $\{x_u, x_v\}$ y los tres coeficientes. Los meridianos tienen componentes $(0,1)$, la curva tiene (u', v'), y como aquí $g_{12} = 0$ la fórmula del coseno se reduce a $\sqrt{g_{22}}\, v' / |\alpha'|$. Todo consiste en ver que ese cociente no depende de t.

La superficie. Es la esfera unidad, con v midiendo el ángulo desde el polo norte y u la longitud. Derivando,

$$x_u = (-\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,\ \cos u \operatorname{sen} v,\ 0), \qquad x_v = (\cos u \cos v,\ \operatorname{sen} u \cos v,\ -\operatorname{sen} v),$$

de donde

$$g_{11} = \operatorname{sen}^2 v, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = 1.$$

(La parametrización es regular donde $\operatorname{sen} v \neq 0$, es decir, fuera de los polos; la curva vive en esa zona.)

Las dos direcciones. Escribimos $\alpha = x \circ \bar{\alpha}$ para la curva del espacio; $\bar{\alpha}'$ contiene sus componentes en la base $\{x_u, x_v\}$. Las curvas v-paramétricas son las de u constante, es decir los meridianos, con vector tangente x_v, cuya expresión en coordenadas es $(0,1)$. La curva del enunciado tiene $u(t) = \ln t$ y $v(t) = 2 \arctan t$, luego

$$\bar{\alpha}'(t) = \Big(u'(t),\ v'(t)\Big) = \Big(\frac{1}{t},\ \frac{2}{1+t^2}\Big).$$

El producto escalar. Usando la P.F.F.,

$$\langle \alpha',\ x_v \rangle = g_{11} u' \cdot 0 + g_{12}(\cdots) + g_{22} v' \cdot 1 = v' = \frac{2}{1+t^2}.$$

Las normas. Como $v = 2 \arctan t$,

$$\operatorname{sen} v = \operatorname{sen}(2 \arctan t) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \Longrightarrow \qquad g_{11} = \operatorname{sen}^2 v = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}.$$

Por tanto

$$|\alpha'|^2 = g_{11} u'^2 + g_{22} v'^2 = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{1}{t^2} + \frac{4}{(1+t^2)^2} = \frac{8}{(1+t^2)^2},$$

luego $|\alpha'| = \dfrac{2\sqrt{2}}{1+t^2}$, mientras que $|x_v| = \sqrt{g_{22}} = 1$.

El ángulo. Sustituyendo,

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha', x_v \rangle}{|\alpha'|\,|x_v|} = \frac{\dfrac{2}{1+t^2}}{\dfrac{2\sqrt{2}}{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

que no depende de t. Luego $\theta = \pi/4$ en todo punto. ■

Qué es esta curva, y qué hemos aprendido. Una curva que corta a todos los meridianos con el mismo ángulo es una *loxodromia*: la ruta de rumbo constante de un barco. Como $v = 2 \arctan t$, se tiene $t = \tan(v/2)$ y la curva es $u = \ln \tan(v/2)$. Cuando $t \to 0$, $v \to 0$ y $u \to -\infty$; cuando $t \to \infty$, $v \to \pi$ y $u \to +\infty$: la curva da infinitas vueltas alrededor de cada polo. Y sin embargo tiene longitud finita,

$$\int_0^\infty \frac{2\sqrt{2}}{1+t^2}\, dt = \sqrt{2}\,\pi = \frac{\pi}{\cos(\pi/4)},$$

que es la longitud del meridiano, π, dividida por el coseno del rumbo. Es la razón de ser de la proyección de Mercator, cuya coordenada vertical es $y = -\ln\tan(v/2)$: en ella esta curva es la recta $u = -y$, a 45°, y como la proyección conserva los ángulos, esos 45° son también los de la esfera.

Dónde se falla. Leer el ángulo en el plano de parámetros, como si $\{x_u, x_v\}$ fuese ortonormal. Con las componentes (u', v') tomadas como cartesianas, el ángulo con $(0, 1)$ sale 45° en $t = 1$ pero unos 51,34° en $t = 2$: no es constante, porque falta el factor $g_{11} = \operatorname{sen}^2 v$, que encoge las distancias cerca de los polos.

Ejercicio 3.17. *Las loxodromias del cilindro* [H3.4]

Dado el cilindro de eje OZ y radio $r > 0$, hallar la curva en dicha superficie que corta a todos los meridianos de este cilindro bajo un ángulo constante φ_0 (dicha curva se llama una *loxodromía* del cilindro). Estudiar los casos $\varphi_0 = 0$ y $\varphi_0 = \pi/2$.

Resolución. La idea, antes de la cuenta. La condición de ángulo constante, escrita con la P.F.F., es una ecuación para la pendiente dv/du de la curva en el plano de parámetros. En el cilindro los tres coeficientes son constantes, así que esa pendiente sale constante: la curva buscada es una recta del plano de parámetros, y la cuenta solo tiene que decir cuál.

Planteamiento. Con $x(u, v) = (r\cos u,\ r\operatorname{sen} u,\ v)$ se tiene

$$g_{11} = r^2, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = 1,$$

y los meridianos del cilindro son las generatrices, curvas $u = \text{cte}$, con dirección x_v.

Sea $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ la curva buscada. Su tangente es $\alpha' = u'x_u + v'x_v$, y la condición de ángulo constante es

$$\cos\varphi_0 = \frac{\langle \alpha', x_v\rangle}{|\alpha'||x_v|} = \frac{v'}{\sqrt{r^2u'^2 + v'^2}}.$$

Integración. Elevando al cuadrado y despejando,

$$v'^2 = \cos^2\varphi_0\,(r^2u'^2 + v'^2) \quad\Longrightarrow\quad v'^2\operatorname{sen}^2\varphi_0 = r^2u'^2\cos^2\varphi_0,$$

es decir, suponiendo $\varphi_0 \neq 0$ y tomando la rama con el signo adecuado,

$$\frac{dv}{du} = \pm r\cot\varphi_0 \qquad\Longrightarrow\qquad v = \pm r\cot(\varphi_0)\,u + c.$$

La curva. En el plano de parámetros es una **recta**, y sobre el cilindro,

$$\alpha(u) = \big(r\cos u,\ r\operatorname{sen} u,\ \pm r\cot(\varphi_0)\,u + c\big)\ :$$

una **hélice circular** de radio r y paso $b = \pm r\cot\varphi_0$. Las dos ramas describen trazas distintas; hay que elegir el sentido de recorrido para que $v'/|\alpha'| = \cos\varphi_0$, pues al elevar al cuadrado se pierde ese signo.

Los casos límite. Si $\varphi_0 = 0$ la curva es tangente al meridiano en todo punto, y la ecuación degenera: la solución es $u = \text{cte}$, es decir, **la propia generatriz**, que en el límite $\cot\varphi_0 \to \infty$ es la recta vertical. Si $\varphi_0 = \pi/2$ entonces $\cot\varphi_0 = 0$ y queda $v = c$: la curva es un **paralelo**, la circunferencia horizontal de radio r. ■

LA IDEA: EL CILINDRO DESENROLLADO LO EXPLICA TODO

El resultado se adivina sin calcular nada si se recuerda que el cilindro es localmente isométrico al plano: córtalo por una generatriz y extíendelo.
Bajo ese desarrollo, las generatrices se convierten en rectas verticales paralelas, y una curva que las corta siempre bajo el mismo ángulo tiene que ser, en el plano, una **recta**. Al volver a enrollar, esa recta se convierte en una hélice. Los dos casos límite son las rectas verticales (las propias generatrices) y las horizontales (los paralelos).
Y esto conecta con dos cosas ya vistas. Una: las hélices son las geodésicas del cilindro, junto con generatrices y paralelos, porque las geodésicas son las imágenes de las rectas del desarrollo. Otra: una loxodromia de la esfera, salvo los meridianos y el ecuador, *no* es una geodésica, y ahí está la diferencia entre navegar con rumbo fijo y navegar por el camino más corto.

Ejercicio 3.18. *Un triángulo curvilíneo: perímetro, ángulos y área* [H3.6]

Sea $x : U \to \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada con $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$ y $g_{22} = u^2 + a^2$, con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Sea T el triángulo curvilíneo en x definido por las curvas

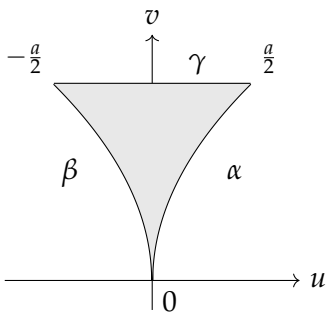
$$\alpha(v) = x\Big(\frac{av^2}{2}, v\Big), \qquad \beta(v) = x\Big(-\frac{av^2}{2}, v\Big), \qquad \gamma(u) = x(u, 1).$$

Se trabaja en el dominio $U = \mathbb{R}^2$ y se supone que x es inyectiva en la región considerada; si solo es una inmersión, las medidas siguientes cuentan multiplicidad. Se pide: representar $T^\star = x^{-1}(T)$; calcular el perímetro de T y sus ángulos; e indicar el valor del área de la región encerrada.

Resolución. La idea, antes de la cuenta. Todo se hace en el plano de parámetros, pero se mide con la regla de la superficie: longitudes con $\sqrt{g_{11}u'^2 + g_{22}v'^2}$, ángulos con la fórmula del coseno de la sección 3.2 y áreas con $\sqrt{g}$. El dibujo del plano de parámetros sirve para ver la región y sus vértices, no para medirla.

1. El triángulo en el plano de parámetros. Las dos primeras curvas son las parábolas $u = \pm av^2/2$, que se cortan en el origen, y la tercera es el segmento horizontal $v = 1$, que va de $u = -a/2$ a $u = a/2$. La región es

$$T^\star = \Big\{(u, v) :\ 0 \le v \le 1,\ -\tfrac{a}{2}v^2 \le u \le \tfrac{a}{2}v^2\Big\}.$$



Las dos parábolas son **tangentes entre sí en el origen**: ambas tienen allí tangente vertical. Eso ya anticipa que uno de los ángulos será nulo.

2. Perímetro. Sobre α se tiene $u = av^2/2$, luego $u' = av$ y $v' = 1$, y

$$|\alpha'|^2 = g_{11}u'^2 + g_{22}v'^2 = a^2v^2 + \Big(\frac{a^2v^4}{4} + a^2\Big) = a^2\Big(\frac{v^2}{2} + 1\Big)^2,$$

donde el último paso es reconocer el cuadrado perfecto $\frac{v^4}{4} + v^2 + 1 = \big(\frac{v^2}{2} + 1\big)^2$. Por tanto $|\alpha'| = a\big(1 + \frac{v^2}{2}\big)$ y

$$L(\alpha) = \int_0^1 a\Big(1 + \frac{v^2}{2}\Big)dv = a\Big[v + \frac{v^3}{6}\Big]_0^1 = \frac{7a}{6}.$$

Por simetría, $L(\beta) = \dfrac{7a}{6}$. Sobre γ se tiene $u' = 1$, $v' = 0$, luego $|\gamma'| = \sqrt{g_{11}} = 1$ y

$$L(\gamma) = \int_{-a/2}^{a/2} 1\,du = a.$$

El perímetro es

$$L(\alpha) + L(\beta) + L(\gamma) = \frac{7a}{6} + \frac{7a}{6} + a = \frac{10a}{3}.$$

3. Ángulos. En el **vértice del origen**, las direcciones entrantes son $\alpha'(0) = (0,1)$ y $\beta'(0) = (0,1)$: son la misma. El ángulo vale $\boxed{0}$.

En el vértice $(a/2, 1)$, el lado α sale con dirección $-(a,1)$ y el lado γ con dirección $(-1,0)$. Como $g_{12} = 0$,

$$\langle(-a,-1),(-1,0)\rangle = g_{11}\cdot a = a, \qquad |(-a,-1)| = a\Big(1 + \tfrac{1}{2}\Big) = \frac{3a}{2}, \qquad |(-1,0)| = 1,$$

luego

$$\cos\theta = \frac{a}{3a/2} = \frac{2}{3}, \qquad \theta = \arccos\frac{2}{3} \approx 48{,}19^\circ.$$

Por simetría, el ángulo en $(-a/2, 1)$ es el mismo.

4. Área. El elemento de área es $\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{u^2 + a^2}$, luego

$$A = \int_0^1 \int_{-av^2/2}^{av^2/2} \sqrt{u^2 + a^2}\,du\,dv.$$

La integral interior es elemental. Con $\int \sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\big(u + \sqrt{u^2+a^2}\big)$ y usando la paridad del integrando, al poner $w = av^2/2$ queda

$$\int_{-w}^{w} \sqrt{u^2+a^2}\,du = w\sqrt{w^2+a^2} + a^2\ln\frac{w + \sqrt{w^2+a^2}}{a} = a^2\left[\frac{v^2}{4}\sqrt{4+v^4} + \ln\frac{v^2 + \sqrt{4+v^4}}{2}\right].$$

Por tanto

$$A = a^2\int_0^1 \left[\frac{v^2}{4}\sqrt{4+v^4} + \ln\frac{v^2 + \sqrt{4+v^4}}{2}\right] dv.$$

Esta última integral **no tiene primitiva elemental**: el primer sumando es de tipo elíptico. Su valor numérico es

$$A \approx 0{,}3392\,a^2.$$

■

Qué hemos aprendido, y dónde se falla. El error típico es medir con la regla del plano de parámetros en vez de con la de la superficie. Los ángulos son el ejemplo más claro. En el

vértice $(a/2, 1)$, los vectores $(-a, -1)$ y $(-1, 0)$ forman en el plano de parámetros un ángulo de coseno $a/\sqrt{a^2+1}$, que para $a = 1$ son 45°; en la superficie, con $g_{22} = u^2 + a^2$, el coseno es $2/3$ para todo a, unos 48,19°. El ángulo nulo del origen, en cambio, sí se conserva: dos vectores proporcionales lo son para cualquier producto escalar. Lo mismo con las longitudes, que llevan $\sqrt{g_{11}u'^2 + g_{22}v'^2}$ y no la raíz euclídea, y con el área, cuyo integrando es $\sqrt{g} = \sqrt{u^2+a^2}$ y no 1.

Ejercicio 3.19. *El transporte paralelo conserva el producto escalar* [H3.15]

Sean M una s.r., $p, q \in M$ y una c.p.r. $\alpha : [0, l] \to M$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha(l) = q$. Se denota por $P_\alpha : T_p(M) \to T_q(M)$ la aplicación que a cada $w \in T_p(M)$ le asigna su transportado paralelo a lo largo de α en q. Probar que P_α es una isometría.

Resolución. La idea, en una línea. Que el producto escalar de dos campos paralelos es constante ya lo dice la proposición de la sección 3.4 (p. 203); lo nuevo aquí es ver que P_α es lineal y biyectiva, que es lo que falta para llamarla isometría. El argumento del producto escalar, que es corto, se reescribe entero.

Sean $v, w \in T_p(M)$ y sean $V(t)$, $W(t)$ los campos paralelos a lo largo de α con $V(0) = v$ y $W(0) = w$. La clave es derivar su producto escalar:

$$\frac{d}{dt} V(t)\cdot W(t) = V'(t)\cdot W(t) + V(t)\cdot W'(t),$$

donde V' y W' son las derivadas ordinarias en $\mathbb{R}^3$. Ahora bien, cada una de ellas se descompone en parte tangente y parte normal,

$$V' = \frac{DV}{dt} + \lambda\, \mathbf{N},$$

y por hipótesis $\dfrac{DV}{dt} = 0$, luego V' es **puramente normal**. Como W es tangente, $V'\cdot W = 0$. Por el mismo argumento $V\cdot W' = 0$. Por tanto

$$\frac{d}{dt} V(t)\cdot W(t) = 0,$$

y el producto escalar es constante a lo largo de α. Evaluando en los extremos,

$$v\cdot w = V(0)\cdot W(0) = V(l)\cdot W(l) = P_\alpha(v)\cdot P_\alpha(w).$$

Falta observar que P_α es **lineal**, lo que se sigue de que la ecuación del transporte paralelo es un sistema lineal de ecuaciones diferenciales y su solución depende linealmente del dato inicial; y que es **biyectiva**, porque su inversa es el transporte paralelo a lo largo de α recorrida al revés. Aplicación lineal biyectiva que conserva el producto escalar: isometría lineal. ■

QUÉ DEJA. De aquí salen tres consecuencias que se usan sin pensarlas y que conviene tener nombradas.

Conserva módulos: tomando $w = v$ resulta $|P_\alpha(v)| = |v|$. Un vector transportado no cambia de tamaño.

Conserva ángulos: el coseno del ángulo entre dos vectores solo depende de sus productos escalares y sus normas, y las tres cosas se conservan.

Cuándo es un giro: si M está orientada, el transporte conserva la orientación entre los planos tangentes. Para un lazo basado en p, P_α actúa entonces en un mismo plano y es un giro, posiblemente la identidad. Sin orientabilidad, un lazo puede invertir la orientación y dar una reflexión: la continuidad a lo largo del camino no identifica por sí sola las orientaciones al cerrar el lazo.

Observación (el transporte no depende de la rapidez del recorrido)**.** Si $t = f(r)$ es un cambio regular de parámetro y $\widetilde{V} = V \circ f$, la regla de la cadena y la proyección tangencial dan

$$\frac{D\widetilde{V}}{dr} = f'(r)\frac{DV}{dt}\big(f(r)\big).$$

Por tanto, un campo es paralelo en un parámetro si y solo si lo es en el otro. Invertir el recorrido intercambia los extremos y da la aplicación inversa.

Ejercicio 3.20. *La normal intrínseca es paralela exactamente sobre las geodésicas* [H3.17]

Sea M una s.r. orientada, α una c.p.r. en M y $\mathbf{S}$ la normal intrínseca de M a lo largo de α. Probar que $\mathbf{S}$ es paralelo a lo largo de α si y solo si α es geodésica como trayectoria (su parametrización será geodésica si además tiene rapidez constante).

Resolución. La idea, en una línea. En la base ortonormal $\{\mathbf{t}, \mathbf{S}\}$ del plano tangente, derivar $\mathbf{S}\cdot\mathbf{S} = 1$ y $\mathbf{S}\cdot\mathbf{t} = 0$ da las dos componentes de $D\mathbf{S}/ds$: la primera sale nula y la segunda es $-K_g$. Así que $\mathbf{S}$ es paralelo exactamente cuando K_g se anula.

Por la invariancia del paralelismo bajo reparametrización, podemos suponer α parametrizada naturalmente, de modo que $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{S}(s)\}$ es una base ortonormal de $T_{\alpha(s)}(M)$ en cada punto. Por definición de curvatura geodésica,

$$\frac{D\mathbf{t}}{ds} = K_g\,\mathbf{S}.$$

Se calculan ahora las dos componentes de $\dfrac{D\mathbf{S}}{ds}$ en esa base.

Derivando $\mathbf{S}\cdot\mathbf{S} = 1$ y usando que la derivada covariante es compatible con la métrica,

$$2\Big\langle \frac{D\mathbf{S}}{ds}, \mathbf{S}\Big\rangle = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Big\langle \frac{D\mathbf{S}}{ds}, \mathbf{S}\Big\rangle = 0.$$

Derivando $\mathbf{S}\cdot\mathbf{t} = 0$,

$$\Big\langle \frac{D\mathbf{S}}{ds}, \mathbf{t}\Big\rangle = -\Big\langle \mathbf{S}, \frac{D\mathbf{t}}{ds}\Big\rangle = -\mathbf{S}\cdot K_g\mathbf{S} = -K_g.$$

Por tanto

$$\frac{D\mathbf{S}}{ds} = -K_g\,\mathbf{t},$$

y en consecuencia

$$\mathbf{S} \text{ es paralelo } \iff \frac{D\mathbf{S}}{ds} = 0 \iff K_g \equiv 0 \iff \alpha \text{ es geodésica.}$$

■

LA IDEA: EL TRIEDRO INTRÍNSECO Y SU FRENET

Las dos fórmulas obtenidas,

$$\frac{D\mathbf{t}}{ds} = K_g\,\mathbf{S}, \qquad \frac{D\mathbf{S}}{ds} = -K_g\,\mathbf{t},$$

son las **ecuaciones de Frenet de la geometría intrínseca**, y su parecido con las del plano no es casual: tienen exactamente la misma forma que $\dot{\mathbf{t}} = k\mathbf{n}$, $\dot{\mathbf{n}} = -k\mathbf{t}$ para una

curva plana. La superficie, vista desde dentro, se describe el giro del triedro a lo largo de la curva con la misma forma de ecuaciones. Esto no elimina la curvatura de Gauss de la superficie ni los efectos de holonomía.
La lectura geométrica es que **el par $\{\mathbf{t}, \mathbf{S}\}$ gira, dentro del plano tangente, con velocidad angular** K_g. Si $K_g = 0$ no gira nada: los dos campos son paralelos y la curva va "todo recto" por la superficie. Si $K_g \neq 0$, gira, y K_g mide cuánto.
De ahí sale también la caracterización más útil de geodésica para resolver problemas: una curva es geodésica si y solo si su campo tangente es paralelo, y equivalentemente si y solo si su aceleración en $\mathbb{R}^3$, con rapidez constante, es puramente normal a la superficie. Esa última versión es la que conviene usar cuando la superficie viene dada explícitamente, porque evita los símbolos de Christoffel por completo.

Ejercicio 3.21. *Cuando un campo coordenado es paralelo* [H3.13]

Sea $x = x(u_1, u_2)$ una superficie simple. Probar que si $\mathbf{X}_1$ es paralelo a lo largo de las u_2-curvas, entonces $\mathbf{X}_2$ es paralelo a lo largo de las u_1-curvas y, además, localmente g_{11} es función sólo de u_1 y g_{22} es función sólo de u_2. La afirmación es global si el dominio es un rectángulo; en un dominio general se entiende en cada rectángulo coordenado.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Traduce la hipótesis a símbolos de Christoffel. "Paralelo a lo largo de las u_2-curvas" significa que $D\mathbf{X}_1/du_2 = 0$.*
2. *La primera parte es una sola línea si recuerdas qué simetría tienen los Γ^k_{ij} en sus índices de abajo.*
3. *Para la segunda, deriva $g_{11} = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_1$ y usa que la derivada covariante es compatible con la métrica.*

Resolución. La hipótesis, en símbolos. Por definición de derivada covariante,

$$\frac{D\mathbf{X}_1}{du_2} = \Gamma^1_{12}\mathbf{X}_1 + \Gamma^2_{12}\mathbf{X}_2,$$

de modo que la hipótesis equivale a

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{12} = 0.$$

Primera parte. La derivada covariante del otro campo coordenado a lo largo de las otras curvas es

$$\frac{D\mathbf{X}_2}{du_1} = \Gamma^1_{21}\mathbf{X}_1 + \Gamma^2_{21}\mathbf{X}_2.$$

Y los símbolos de Christoffel son **simétricos en los dos índices de abajo**, porque Γ^k_{ij} se obtiene de $x_{ij} = x_{ji}$. Luego $\Gamma^k_{21} = \Gamma^k_{12} = 0$ y

$$\frac{D\mathbf{X}_2}{du_1} = 0 :$$

$\mathbf{X}_2$ es paralelo a lo largo de las u_1-curvas.

Segunda parte. La derivada covariante es compatible con la métrica: para campos tangentes V y W a lo largo de una curva,

$$\frac{\partial}{\partial u} V \cdot W = \left\langle \frac{DV}{du}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{du} \right\rangle,$$

porque las partes normales de V' y W' no contribuyen al ser V y W tangentes. Aplicando esto,

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2}\mathbf{X}_1\cdot\mathbf{X}_1 = 2\Big\langle \frac{D\mathbf{X}_1}{du_2}, \mathbf{X}_1\Big\rangle = 0,$$

luego, en cada rectángulo coordenado, g_{11} no depende de u_2: es función sólo de u_1. Con los dos índices intercambiados la cuenta es la misma, y lo único que cambia es de dónde sale el cero: ahora es la primera parte del ejercicio, que acaba de dar que $\mathbf{X}_2$ es paralelo a lo largo de las u_1-curvas. Queda

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} = 2\Big\langle \frac{D\mathbf{X}_2}{du_1}, \mathbf{X}_2\Big\rangle = 0,$$

luego, en ese rectángulo, g_{22} es función sólo de u_2. Una derivada parcial nula no identifica los valores entre componentes distintas de una misma fibra coordenada. ■

Qué hemos aprendido, y dónde se falla. La hipótesis se reduce a $\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{12} = 0$, es decir, a que X_{12} sea normal a la superficie, y hay una familia entera que la cumple de oficio: las *superficies de traslación* $x(u_1, u_2) = \alpha(u_1) + \beta(u_2)$, que tienen $X_{12} = 0$. El paraboloide $z = x^2 + y^2$ es una de ellas, con $\alpha(u_1) = (u_1, 0, u_1^2)$ y $\beta(u_2) = (0, u_2, u_2^2)$. A lo largo de cada u_2-curva, con u_1 fijo, el campo $\mathbf{X}_1 = (1, 0, 2u_1)$ es un vector *constante* de $\mathbb{R}^3$: su derivada es nula, con más razón su parte tangente, y es paralelo. Y en efecto $g_{11} = 1 + 4u_1^2$ solo depende de u_1 y $g_{22} = 1 + 4u_2^2$ solo de u_2.

Lo que eso dice en palabras: dos curvas de una familia cortan trozos de la misma longitud sobre todas las curvas de la otra, y al revés. Es el ejercicio «Cuando el primer parámetro mide longitud» en las dos direcciones a la vez. Reparametrizando cada coordenada por su cuenta, $\tilde{u}_1 = \int \sqrt{g_{11}}\, du_1$ y $\tilde{u}_2 = \int \sqrt{g_{22}}\, du_2$, queda $\tilde{g}_{11} = \tilde{g}_{22} = 1$, y cada celda $[a, a+h] \times [c, c+h]$ tiene sus cuatro lados de longitud h. Es la geometría de una red de pesca, o de una tela ajustada a una superficie, cuyos hilos no se estiran aunque el ángulo en los nudos cambie; estas retículas se llaman redes de Chebyshev. Dos conclusiones que el ejercicio *no* da y que es fácil añadir sin razón: que g_{12} sea constante (en el paraboloide, $g_{12} = 4u_1u_2$) y que la superficie sea plana (el paraboloide no lo es, como se verá en el capítulo siguiente).

Ejercicio 3.22. *Toda curva es geodésica de su desarrollable rectificante* [H3.21]

Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n., con $k > 0$ y $\tau(s) \neq 0$ en todos los puntos. Probar que α es geodésica en la superficie parametrizada

$$x(s, v) = \alpha(s) + v\,\mathbf{t}(s) + v\,\frac{k(s)}{\tau(s)}\,\mathbf{b}(s).$$

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *La curva es la línea $v = 0$. Calcula el plano tangente ahí, y solo ahí: no hace falta en ningún otro punto.*
2. *El criterio más barato de geodésica es que la aceleración en $\mathbb{R}^3$ sea puramente normal a la superficie. Y la aceleración de una c.r.p.n. la da Frenet.*

Resolución. *La curva vive en la superficie.* En efecto, $x(s, 0) = \alpha(s)$.

El plano tangente sobre la curva. Derivando,

$$x_v = \mathbf{t}(s) + \frac{k(s)}{\tau(s)}\,\mathbf{b}(s),$$

y como todos los términos de x salvo α llevan factor v,

$$x_s\big|_{v=0} = \alpha'(s) = \mathbf{t}(s).$$

Luego, sobre la curva,

$$T_{x(s,0)} = \operatorname{span}\Big\{\mathbf{t},\ \mathbf{t} + \frac{k}{\tau}\mathbf{b}\Big\} = \operatorname{span}\{\mathbf{t},\ \mathbf{b}\},$$

donde el último paso vale porque $k/\tau \neq 0$, ya que α es regular con $k > 0$ y $\tau \neq 0$ por hipótesis (la regularidad de la curva sola no daría $k > 0$). Es decir: **el plano tangente a la superficie a lo largo de la curva es el plano rectificante de** α.

Regularidad sobre la curva. Además

$$x_s \times x_v\big|_{v=0} = \mathbf{t} \times \Big(\mathbf{t} + \frac{k}{\tau}\mathbf{b}\Big) = \frac{k}{\tau}\,(\mathbf{t} \times \mathbf{b}) = -\frac{k}{\tau}\,\mathbf{n} \ \neq\ 0,$$

de modo que alrededor de cada $(s, 0)$ se puede restringir a una parametrización local regular. Su normal unitaria sobre la curva es $\mathbf{N} = \pm\mathbf{n}$.

Conclusión. Por Frenet, la aceleración de α es

$$\ddot{\alpha}(s) = k(s)\,\mathbf{n}(s),$$

que es proporcional a $\mathbf{n} = \pm\mathbf{N}$: **puramente normal a la superficie**. Por tanto su parte tangente es nula,

$$\frac{D\dot{\alpha}}{ds} = 0,$$

y α es geodésica de x. ■

LA IDEA: DE DÓNDE VIENE EL NOMBRE «RECTIFICANTE»

La superficie del enunciado se llama la **desarrollable rectificante** de α, y el ejercicio explica el nombre.

Es reglada, con directriz la propia α y generatrices en la dirección $\mathbf{t} + \frac{k}{\tau}\mathbf{b}$, que es el llamado *eje instantáneo de rotación* del triedro de Frenet: la dirección alrededor de la cual gira el triedro en cada instante. Con esa elección la superficie resulta ser desarrollable en su parte regular, es decir, localmente aplanable sin estirar ni encoger. En efecto, si $w = \mathbf{t} + (k/\tau)\mathbf{b}$, Frenet da $w' = (k/\tau)'\mathbf{b}$ y $(\mathbf{t}, w, w') = 0$, el criterio de desarrollabilidad que se estudiará en el capítulo siguiente.

Y aquí está la gracia: como α es geodésica en ella, y como el desarrollo sobre el plano es una isometría que lleva geodésicas en geodésicas, **al desplegar esa superficie la curva α se convierte en una recta**. Eso es literalmente "rectificar" la curva. El plano rectificante, que en el capítulo de curvas se presentó como el que contiene a $\mathbf{t}$ y $\mathbf{b}$ y quedó sin motivar, era exactamente esto: el plano tangente a la superficie que endereza la curva.

Compárese con la desarrollable tangencial, generada por $\mathbf{t}$ sola. Allí las geodésicas distinguidas eran las generatrices y las involutas, mientras que la propia α era la directriz donde la parametrización tangencial se hacía singular. Cambiar la dirección de las reglas cambia por completo quién es geodésica.

Qué pasa si falla la hipótesis $\tau \neq 0$. Si α es plana, $\tau \equiv 0$ y la generatriz $\mathbf{t} + \frac{k}{\tau}\mathbf{b}$ no existe. Pero su dirección normalizada tiende a $\pm\mathbf{b}$ cuando $\tau \to 0$, y la superficie límite, $\alpha + v\,\mathbf{b}$, es el

cilindro recto levantado sobre la curva: sus generatrices son perpendiculares al plano de α. La curva sigue siendo geodésica de ese cilindro, y por la misma razón, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{b} = 0$; al desenrollarlo, también se convierte en una recta. Las dos superficies son filas de la tabla de la directriz de una reglada, que va tras el ejercicio siguiente: la rectificante y el cilindro con $a = \mathbf{b}$.

Ejercicio 3.23. *Superficies tangentes comparten geodésicas* [H3.22]

Si dos superficies parametrizadas son tangentes a lo largo de una curva, probar que si dicha curva es geodésica parametrizada en una de ellas, lo es en la otra.

Resolución. Sean x e y las dos superficies y α la curva contenida en ambas. Que sean tangentes a lo largo de α significa que en cada punto $\alpha(t)$ los planos tangentes coinciden:

$$T_{\alpha(t)}(x) = T_{\alpha(t)}(y),$$

y por tanto sus campos normales coinciden salvo signo, $\mathbf{N}^x = \pm\mathbf{N}^y$ a lo largo de α.

Ahora se usa la caracterización de geodésica que no menciona a la superficie más que a través de su normal: α **es geodésica parametrizada de una superficie si y solo si su aceleración** $\alpha''(t)$ **es normal a esa superficie en cada punto.** En efecto, la parte tangente de α'' es precisamente $D\alpha'/dt$, y ser geodésica es que se anule.

Si α es geodésica de x, entonces $\alpha''(t)$ es proporcional a $\mathbf{N}^x(t)$. Pero $\mathbf{N}^x = \pm\mathbf{N}^y$, luego $\alpha''(t)$ es también proporcional a $\mathbf{N}^y(t)$, es decir, normal a y. Por tanto su parte tangente respecto de y es nula y α es geodésica de y.

(La condición adicional de que la parametrización sea la de una geodésica *parametrizada*, esto es, que $|\alpha'|$ sea constante, es una propiedad de la curva sola y no depende de en qué superficie se la mire, así que se traslada sin decir nada.) ■

QUÉ DEJA. La frase que hay que retener es que **ser geodésica solo depende del plano tangente a lo largo de la curva**, no del resto de la superficie. Dos superficies pueden ser completamente distintas y compartir una geodésica si contienen esa curva y son tangentes en *todos* sus puntos. Tocarse tangencialmente en un solo punto no basta.

Esto da un método de resolución muy barato: para probar que una curva es geodésica de una superficie complicada, basta con encontrar *otra* superficie sencilla que sea tangente a la primera a lo largo de la curva y en la que el resultado sea evidente. Por ejemplo, puede servir un plano o una esfera, siempre que la tangencia se verifique a lo largo de toda la curva considerada.

Y conviene ponerlo junto al ejercicio de la hélice sobre el cilindro y sobre el helicoide, que dice lo contrario complementario: allí la misma curva tenía curvaturas geodésicas distintas en las dos superficies, y la razón es exactamente que esas dos superficies *no* son tangentes a lo largo de la hélice.

La directriz de una reglada: cuándo es geodésica y cuándo asintótica. El caso en que más se usa lo anterior es una superficie reglada construida sobre una curva, $y(s,v) = \alpha(s) + v\,w(s)$, con α una c.r.p.n. de curvatura $k > 0$ (las regladas y sus dos derivadas están en la sección 2.3). La pregunta «¿es α geodésica de la reglada?» parece exigir la superficie entera, y no: solo hace falta su plano tangente a lo largo de α, y ese se lee sin calcular nada. Sobre la directriz, $v = 0$, las derivadas son $y_s = \alpha' = \mathbf{t}$ e $y_v = w$. Si w no es paralelo a $\mathbf{t}$, la reglada es regular ahí, su plano tangente es el generado por $\mathbf{t}$ y w, y su normal es $\mathbf{N} = (\mathbf{t}\times w)/|\mathbf{t}\times w|$.

Con $\ddot{\alpha} = k\mathbf{n}$, las igualdades $\mathbf{b} = \mathbf{t}\times\mathbf{n}$ y $\mathbf{n} = -\mathbf{t}\times\mathbf{b}$, y la identidad de Lagrange $(\mathbf{t}\times w)\cdot(\mathbf{t}\times z) = w\cdot z$, válida para todo z ortogonal al unitario $\mathbf{t}$, las dos curvaturas de la directriz

salen en una línea:

$$K_g = (\mathbf{N}, \mathbf{t}, k\mathbf{n}) = \frac{k\,\mathbf{n}\cdot w}{|\mathbf{t}\times w|}, \qquad K_n = k\mathbf{n}\cdot\mathbf{N} = -\frac{k\,\mathbf{b}\cdot w}{|\mathbf{t}\times w|}.$$

Dicho en palabras: **la directriz es geodésica de la reglada exactamente cuando la generatriz es perpendicular a la normal principal, y es línea asintótica exactamente cuando la generatriz es perpendicular a la binormal**, es decir, cuando está en el plano osculador. Las dos cosas a la vez obligarían a w a ser paralelo a $\mathbf{t}$, que es justo el caso excluido. Con las generatrices que salen una y otra vez, la tabla se rellena de cabeza:

generatriz w	$\mathbf{n}\cdot w$	$\mathbf{b}\cdot w$	la directriz α es…
$\mathbf{t}$ (tangentes)	—	—	arista singular: no hay plano tangente con el que comparar
$\mathbf{n}$ (normales principales)	1	0	asintótica, y no geodésica
$\mathbf{b}$ (binormales)	0	1	geodésica, y no asintótica
$\mathbf{t} + \frac{k}{\tau}\mathbf{b}$ (rectificante)	0	k/τ	geodésica
$\mathbf{S}$ (normales intrínsecas en M)	K_g^M/k	$-K_n^M/k$	geodésica (o asintótica) de la reglada si y solo si lo es de M
a constante (cilindro)	$\mathbf{n}\cdot a$	$\mathbf{b}\cdot a$	geodésica si y solo si es hélice de eje a

Dos filas merecen una frase. La de las normales intrínsecas es el ejercicio anterior: la reglada y M tienen el mismo plano tangente a lo largo de α, así que comparten geodésicas y asintóticas. La del cilindro devuelve al capítulo 1: como $\frac{d}{ds}\mathbf{t}\cdot a = k\mathbf{n}\cdot a$, anular $\mathbf{n}\cdot a$ es pedir que la tangente forme ángulo constante con a, que es la definición de hélice de eje a. Por eso la hélice circular es geodésica del cilindro que la contiene (primer ejercicio de la sección 3.3), y toda curva plana lo es del cilindro recto levantado sobre ella.

Dónde se falla.

- *Sin comprobar la regularidad sobre la directriz.* Todo lo anterior supone $\mathbf{t}\times w \neq 0$. La reglada de las tangentes es singular a lo largo de toda α, y la rectificante necesita $\tau \neq 0$ para existir.
- *En los puntos con $k = 0$.* No hay $\mathbf{n}$ y la tabla no se aplica, pero tampoco hace falta: ahí $\ddot{\alpha} = 0$ y $K_g = K_n = 0$.
- *Extender la conclusión a las demás curvas $v = cte$.* El criterio habla de la directriz y de nada más. Fuera de $v = 0$ el plano tangente depende también de w', y las otras curvas de la reglada no heredan nada.
- *Con los signos.* K_g y K_n cambian de signo si se orienta la reglada con $w\times\mathbf{t}$ en lugar de $\mathbf{t}\times w$; ser geodésica o asintótica, no.

Observación (la misma proyección da más [L3, ej. finales 6 y 8])**.** Para dos superficies tangentes a lo largo de α, las proyecciones sobre sus planos tangentes coinciden. Por tanto, cualquier campo tangente a ambas tiene la misma derivada covariante en las dos, y su transporte paralelo con un dato inicial fijado también coincide. Además, $|K_g| = |D\mathbf{t}/ds|$ es el mismo en ambas superficies.

Ejercicio 3.24. *La misma curvatura geodésica, ¿la misma curva?* [H3.10]

Sean $\alpha(s)$ y $\beta(s)$ dos curvas regulares, siendo s el p.n. de ambas, sobre una misma superficie parametrizada y tales que $K_g(\alpha(s)) \equiv K_g(\beta(s))$ para cada s.

1. Si la superficie es un plano, probar que las dos curvas coinciden salvo movimientos

rígidos.

2. Si la superficie es un cilindro, mostrar con ejemplos que las dos curvas no son necesariamente la misma salvo movimientos rígidos.
3. Si la superficie es una superficie esférica de radio R y además las torsiones de las dos curvas son no nulas y del mismo signo, entonces α y β son la misma curva salvo movimientos rígidos. Para ello, probar previamente que para cualquier c.r.p.n. $\alpha = \alpha(s)$ en la superficie esférica de radio R, con curvatura $k = k(s)$ y torsión no nula $\tau = \tau(s)$, se verifica que

$$R^2 = \frac{1}{k^2(s)} + \frac{1}{\tau^2(s)} \left(\left(\frac{1}{k(s)} \right)' \right)^2 .$$

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Para el primer apartado, ¿quién es K_g cuando la superficie es un plano?*
2. *Para el segundo, busca dos curvas con $K_g \equiv 0$ que salte a la vista que no son congruentes. El cilindro tiene geodésicas de tres tipos distintos.*
3. *Para la identidad esférica, escribe $a(s) = \alpha(s) - c$ con c el centro, y ve derivando $a \cdot a = R^2$ una y otra vez. En cada derivada aparece una componente nueva de a en el triedro de Frenet.*

Resolución. 1. En el plano. Si la superficie es un plano, la normal es constante y la curvatura geodésica de una curva coincide con su **curvatura como curva plana**, con signo. La hipótesis dice entonces que α y β tienen la misma función curvatura respecto del mismo parámetro arco. Por el teorema fundamental de la teoría de curvas planas, dos curvas con la misma curvatura difieren en un movimiento rígido directo. Luego coinciden salvo movimientos rígidos.

2. En el cilindro. La conclusión falla, y basta el caso $K_g \equiv 0$, es decir, las geodésicas. En el cilindro circular hay tres tipos:

- las **generatrices**, que son rectas;
- los **paralelos**, que son circunferencias de radio r;
- las **hélices** de cualquier paso.

Las tres tienen $K_g \equiv 0$, y una recta, una circunferencia y una hélice no son congruentes entre sí: sus curvaturas como curvas del espacio valen 0, $1/r$ y $a/(a^2+b^2)$ respectivamente, y ninguna es la otra. Basta pues tomar α una generatriz y β un paralelo.

3. En la esfera.

La identidad. Sea c el centro de la esfera y $a(s) = \alpha(s) - c$, de modo que $a \cdot a = R^2$. Derivando sucesivamente y usando Frenet:

$$a \cdot \mathbf{t} = 0;$$

derivando esto, $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} + a \cdot k\mathbf{n} = 0$, es decir $1 + ka \cdot \mathbf{n} = 0$, luego, escribiendo $\rho = 1/k$,

$$a \cdot \mathbf{n} = -\rho;$$

derivando esto último y usando $\dot{\mathbf{n}} = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$,

$$\underbrace{\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}}_{=0} + a \cdot \big(-k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}\big) = -\rho' \quad \Longrightarrow \quad \tau\, a \cdot \mathbf{b} = -\rho' \quad \Longrightarrow \quad a \cdot \mathbf{b} = -\frac{\rho'}{\tau}.$$

Como $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ es base ortonormal,

$$a = -\rho\,\mathbf{n} - \frac{\rho'}{\tau}\,\mathbf{b} \qquad \Longrightarrow \qquad R^2 = |a|^2 = \rho^2 + \left(\frac{\rho'}{\tau}\right)^2,$$

que es la identidad pedida.

La consecuencia. Descomponiendo la aceleración de una c.r.p.n. en sus partes tangente y normal a la superficie se obtiene, para cualquier superficie,

$$k^2 = K_g^2 + K_n^2.$$

Sobre la esfera de radio R la curvatura normal es constante, $K_n = \pm 1/R$, luego

$$k^2 = K_g^2 + \frac{1}{R^2}.$$

De la hipótesis $K_g(\alpha) \equiv K_g(\beta)$ se sigue $k_\alpha^2 = k_\beta^2$, y como en una esfera $k \geq 1/R > 0$, $k_\alpha \equiv k_\beta$. Por tanto también $\rho_\alpha \equiv \rho_\beta$ y $\rho'_\alpha \equiv \rho'_\beta$.

Sustituyendo en la identidad,

$$\tau^2 = \frac{\rho'^2}{R^2 - \rho^2},$$

válida en los puntos donde $\rho < R$, es decir, donde $K_g \neq 0$. Como el conjunto donde K_g se anula no puede contener ningún intervalo (allí la curva sería un arco de circunferencia máxima y tendría torsión nula, contra la hipótesis $\tau \neq 0$), la igualdad $\tau_\alpha^2 = \tau_\beta^2$ vale en un conjunto denso y, por continuidad, en todos los puntos. Con la hipótesis adicional de que las dos torsiones tienen el mismo signo,

$$\tau_\alpha \equiv \tau_\beta.$$

Curvatura y torsión iguales como funciones del arco: por el teorema fundamental de la teoría de curvas, α y β coinciden salvo un movimiento rígido. ■

LA IDEA: CUÁNTA INFORMACIÓN LLEVA LA CURVATURA GEODÉSICA

Los tres apartados son el mismo experimento con tres superficies, y juntos miden exactamente cuánto determina K_g.
En el **plano**, lo determina todo: K_g *es* la curvatura de la curva, y la curvatura determina la curva. Un dato, una curva.
En el **cilindro**, no determina casi nada: hay una familia infinita de curvas con $K_g \equiv 0$, porque el cilindro es plano intrínsecamente pero está curvado en el espacio de muchas maneras a la vez. K_g solo ve la geometría *intrínseca*, y la del cilindro es la del plano.
En la **esfera**, K_n es constante, de modo que K_g recupera k. La identidad esférica recupera $|\tau|$ donde su denominador no se anula, y la continuidad completa la prueba bajo las hipótesis del ejercicio.
La identidad $R^2 = \rho^2 + (\rho'/\tau)^2$ es una **condición necesaria** para una curva esférica con $\tau \neq 0$, pero no un criterio suficiente por sí sola. Por ejemplo, $\rho = R$ constante la satisface con cualquier torsión constante no nula: el teorema fundamental produce una hélice, no una circunferencia esférica. Las circunferencias máximas tienen $\tau = 0$, y ni siquiera entran en la fórmula con τ en el denominador. No hay que usar una condición necesaria como si fuera una equivalencia.

Ejercicio 3.25. *Cambiar de escala: qué ve el habitante* [H3.19]

Sea $x : U \to \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada. Se considera la homotecia de centro el origen

de $\mathbb{R}^3$ y razón $\lambda > 0$, que envía cada punto de la superficie $x(u,v)$ en $y(u,v) = \lambda\, x(u,v)$. Se pide:

1. Probar que $y(u,v)$ es también una superficie parametrizada.
2. Dada una curva α en x, calcular la longitud de su imagen homotética en función de la de α.
3. Dada una región $\mathcal{R}$ de x, calcular el área de su imagen homotética en función de la de $\mathcal{R}$.
4. Si α es una geodésica parametrizada de x, ¿es su imagen homotética una geodésica parametrizada de y?

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Los tres primeros apartados salen de una sola igualdad entre los coeficientes métricos de y y los de x. Escríbela antes de hacer nada más.*
2. *Para el cuarto, no calcules la curva: mira qué le pasa a los símbolos de Christoffel. En la fórmula del teorema de Gauss aparecen dos veces los g_{ij}, una arriba derivados y otra abajo invertidos.*
3. *Y si prefieres no salir de $\mathbb{R}^3$: la imagen homotética de α es $\lambda\alpha$, cuya aceleración es λ veces la de α. Compara los dos campos normales.*

Resolución. La igualdad de la que sale todo. Como λ es una constante, $Y_1 = \lambda \mathbf{X}_1$ e $Y_2 = \lambda \mathbf{X}_2$, y por tanto

$$g^y_{ij} = Y_i \cdot Y_j = \lambda^2\, g_{ij}, \qquad i,j = 1,2. \tag{3.4}$$

Toda la geometría intrínseca de y está metida ahí: la P.F.F. entera queda multiplicada por la constante λ^2, y nada más cambia.

1. Es superficie parametrizada. Es diferenciable por serlo x, y $Y_1 \times Y_2 = \lambda^2(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2)$, que no se anula porque $\lambda \neq 0$ y x cumple la C.R.. Luego y la cumple también.

2. Longitud. Obsérvese primero quién es la imagen homotética: si $\alpha(t) = x\big(u_1(t), u_2(t)\big)$, entonces $\lambda\alpha(t) = y\big(u_1(t), u_2(t)\big)$, *con las mismas funciones coordenadas*. Lo único que ha cambiado en la fórmula de la longitud son los g_{ij}, y por (3.4) salen de la raíz como un factor λ:

$$L_a^b(\lambda\alpha) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j} g^y_{ij}\, u_i' u_j'}\, dt = \int_a^b \lambda \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}\, u_i' u_j'}\, dt = \lambda\, L_a^b(\alpha).$$

3. Área. El dominio de parámetros es el mismo, así que solo cambia el integrando. Como $g^y = \det(\lambda^2 g_{ij}) = \lambda^4 g$, se tiene $\sqrt{g^y} = \lambda^2 \sqrt{g}$ y

$$A(\lambda\mathcal{R}) = \iint_{x^{-1}(\mathcal{R})} \sqrt{g^y}\, du_1 du_2 = \lambda^2 \iint_{x^{-1}(\mathcal{R})} \sqrt{g}\, du_1 du_2 = \lambda^2 A(\mathcal{R}).$$

4. Geodésicas: sí, y esta es la parte que hay que entender.

Paso 1: los símbolos de Christoffel no cambian (el núcleo del ejercicio). En la fórmula del teorema de Gauss (p. 172) los coeficientes métricos aparecen dos veces y de dos maneras distintas: derivados en el paréntesis, e invertidos en el factor g^{hk}. Multiplicar todos los g_{ij} por λ^2 multiplica el paréntesis por λ^2 y el factor por λ^{-2}, porque la inversa de $\lambda^2 G$ es $\lambda^{-2} G^{-1}$. Los dos factores se cancelan:

$$\big(\Gamma^k_{ij}\big)_y = \frac{1}{2} \sum_h \lambda^2 \left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_h} \right) \lambda^{-2} g^{hk} = \big(\Gamma^k_{ij}\big)_x.$$

Paso 2: leer la ecuación de las geodésicas. La ecuación del corolario (p. 215) es una condición sobre las funciones coordenadas u_k y sobre los Γ_{ij}^k, y nada más. La imagen homotética tiene las mismas funciones coordenadas, y acabamos de ver que tiene los mismos símbolos: es **la misma ecuación**. Si α la cumplía, $\lambda\alpha$ la cumple. La respuesta es que sí.

Paso 3: el detalle del adjetivo «parametrizada». Ser geodésica *parametrizada* exige además velocidad constante en módulo, y aquí el módulo pasa de c a λc: sigue siendo constante, luego la propiedad se conserva. Lo que **no** se conserva es estar parametrizada por el arco: si α iba a velocidad uno, $\lambda\alpha$ va a velocidad λ. Son dos cosas distintas y aquí se separan limpiamente. ■

Otra vía (sin salir de $\mathbb{R}^3$, con la aceleración). Los normales de las dos superficies coinciden, porque $Y_1 \times Y_2 = \lambda^2(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2)$ y $\lambda^2 > 0$: al normalizar, el factor desaparece y $\mathbf{N}_y = \mathbf{N}_x$. Por otra parte, la imagen homotética de α es $\lambda\alpha$, cuya aceleración es $(\lambda\alpha)'' = \lambda\,\alpha''$.

Ahora se aplica la caracterización que ya se usó en el ejercicio de las superficies tangentes: una curva es geodésica parametrizada si y solo si su aceleración en $\mathbb{R}^3$ es normal a la superficie. Si α'' es paralelo a $\mathbf{N}_x$, entonces $\lambda\alpha''$ también lo es, y $\mathbf{N}_x = \mathbf{N}_y$. Luego $\lambda\alpha$ es geodésica parametrizada de y. Dos líneas, sin tocar un solo símbolo de Christoffel.

La idea: por qué escalar conserva los caminos rectos

Conviene desmontar antes la intuición falsa, porque es la que casi todo el mundo trae: si la primera forma fundamental ha cambiado, y todo lo intrínseco se calcula con ella, *todo* lo intrínseco debería cambiar. Pues no. Ha cambiado la P.F.F. y las geodésicas son las mismas.

La razón cabe en una frase: **los símbolos de Christoffel no ven cuánto vale la métrica, solo cómo varía.** En su fórmula la métrica entra derivada y dividida por sí misma; es, en esencia, una derivada logarítmica, y una constante multiplicativa es invisible para una derivada logarítmica igual que lo es para $(\ln f)'$. Cambiar de escala es cambiar de unidades, y las unidades no deciden qué camino es recto.

La imagen es un globo terráqueo y otro globo el doble de grande. Las rutas más cortas son las mismas circunferencias máximas, dibujadas en el mismo sitio; lo único que cambia es cuántos kilómetros mide cada una. Ir recto no depende del tamaño del planeta.

Y merece la pena ver dónde está el límite del argumento, porque es donde se rompe: todo esto usa que λ es **constante**. Si se cambiara la métrica a $\widetilde{g}_{ij} = \lambda(u,v)^2 g_{ij}$ con factor positivo variable — un cambio conforme de la métrica — al derivar aparecerían las derivadas de λ, los símbolos cambiarían y las geodésicas, en general, también. La homotecia es el caso más simple de esa familia, y lo es precisamente porque la derivada de una constante es cero. No debe confundirse ese cambio de métrica con la aplicación $y(u,v) = \lambda(u,v)x(u,v)$: al derivar esta última aparecen términos con x, y la métrica inducida no es, en general, $\lambda(u,v)^2 g$.

Conexión: Geometría y topología de superficies

Los tres exponentes de este ejercicio no son independientes, y su relación es la que hace posible el teorema central de la asignatura siguiente.

Al escalar por λ, la longitud se multiplica por λ y el área por λ^2. La curvatura de Gauss, que se verá en el capítulo 4, va en sentido contrario: queda dividida por λ^2, como se comprueba con

la esfera, donde $K = 1/R^2$ y el radio pasa a ser λR. Por tanto el producto

$$K\,dA$$

no cambia: el λ^2 del elemento de área cancela exactamente el λ^{-2} de la curvatura. Y lo mismo le pasa al otro integrando de Gauss-Bonnet, $K_g\,ds$, donde la curvatura geodésica se divide por λ y el elemento de longitud se multiplica por λ.
Esto comprueba la coherencia de escalas en el teorema de Gauss-Bonnet

$$\sum_i \int_{C_i} K_g\,ds + \iint_R K\,dA + \sum_e \varphi_e = 2\pi\,\mathcal{X}(R)$$

(con región y orientaciones compatibles): los tres sumandos de la izquierda son *adimensionales*. Es una comprobación necesaria, pero no demuestra que su suma sea topológica ni que sea un múltiplo entero de 2π; eso es lo que afirma el teorema. Un teorema que relacionara una longitud con una característica de Euler sería falso solo con cambiar de metros a centímetros.

Repaso del capítulo

REPASO INTERCALADO: GEOMETRÍA INTRÍNSECA, PRIMERA RONDA

A libro cerrado. Dos tercios de las preguntas vienen de los capítulos anteriores.

Primera ronda: reconstruir.

1. Define la primera forma fundamental y di qué mide cada uno de sus tres coeficientes.
2. Escribe las ecuaciones de Gauss. ¿Qué parte de la derivada segunda recoge cada familia de coeficientes, y a qué lección pertenece cada una?
3. Enuncia el teorema de Gauss sobre los símbolos de Christoffel y di por qué su conclusión no era evidente.
4. *Del capítulo 1:* ¿qué mide la curvatura de una curva y por qué hay que derivar respecto del parámetro natural?
5. Define curvatura geodésica y curvatura normal, y di cuál de las dos percibe un habitante de la superficie.
6. *Del capítulo 2:* ¿qué son las tres condiciones de la definición de superficie regular y contra qué protege cada una?
7. Define derivada covariante y campo paralelo. ¿Por qué la derivada covariante es intrínseca si en su definición aparece el vector normal?
8. Da las tres caracterizaciones equivalentes de geodésica y di cuándo conviene usar cada una.

REPASO INTERCALADO: GEOMETRÍA INTRÍNSECA, SEGUNDA RONDA

Segunda ronda: distinguir y aplicar.

1. ¿Por qué no existe para superficies un análogo del parámetro natural? Da la razón profunda, no la superficial.
2. Un paralelo de la esfera, ¿es geodésica? Contesta razonando sobre el volante de

quien camina, no con fórmulas.
3. *Del capítulo 1:* una curva tiene τ/k constante. ¿Qué es, y cuál es la dirección de su eje?
4. Dos campos paralelos a lo largo de una curva forman ángulo constante. ¿Vale el recíproco? Justifica con un ejemplo.
5. Ser geodésica, ¿es una propiedad de la traza de la curva o de su parametrización? Da el argumento físico.
6. *Del capítulo 2:* explica por qué toda superficie de nivel regular es orientable en dos frases.
7. Una curva minimiza la distancia entre dos puntos de una superficie. ¿Es geodésica? ¿Y al revés? Da el contraejemplo.
8. Si una curva plana con $k > 0$ sobre una superficie tiene curvatura normal nula, ¿dónde apunta el normal de la superficie? ¿Y si es geodésica?

REPASO INTERCALADO: GEOMETRÍA INTRÍNSECA, TERCERA RONDA, CON MATERIAL ANTERIOR

Tercera ronda: mezclando los tres capítulos.

1. Enumera todo lo que has demostrado que es intrínseco en este capítulo y todo lo que es extrínseco. Para cada uno, di qué argumento lo decide.
2. Se transporta paralelamente un vector a lo largo de un paralelo de la esfera. ¿Vuelve como salió? Si no, ¿de qué depende el ángulo, y qué cantidad geométrica es ese ángulo?
3. *Del capítulo 1:* para una curva con $k > 0$, demuestra que es plana si y solo si su torsión es idénticamente nula, y di qué papel juega ahí el producto mixto.
4. Sea V un campo unitario y tangente a lo largo de una curva. Prueba que su derivada covariante es siempre múltiplo de $\mathbf{N} \times V$, y di qué mide ese coeficiente.
5. *Del capítulo 2:* da una parametrización de la superficie reglada de las normales principales de una curva y di cuál es el plano tangente sobre la propia curva.
6. Tres teoremas de este libro se demuestran montando un sistema lineal de ecuaciones diferenciales y citando existencia y unicidad. ¿Cuáles son, y qué papel juega en cada uno que el sistema sea lineal y no cualquier otra cosa?
7. Los símbolos de Christoffel se definen con el vector normal y sin embargo son intrínsecos. Explica esa aparente contradicción y di qué diferencia hay entre que un concepto sea intrínseco y que una expresión lo sea.
8. De los cuatro ingredientes del teorema de Gauss-Bonnet, tres se construyen en este libro. ¿Cuáles son, en qué capítulo aparece cada uno y cuál es el que falta?

CAPÍTULO 4

Geometría extrínseca

ANTES DE LEER

1. Un plano y un cilindro, ¿son iguales o distintos? Contesta dos veces: una para un habitante de la superficie y otra para alguien que los mira desde fuera.
2. ¿Cómo medirías «cuánto se dobla» una superficie en un punto, sabiendo que puede doblarse de forma distinta en cada dirección?
3. En un punto de una superficie hay infinitas direcciones tangentes. ¿Por qué bastan dos números para describir cómo se curva en todas ellas?
4. La curvatura de una superficie se define mirando desde fuera. ¿Puede un habitante de la superficie averiguar algo de ella?

Las respuestas están, por orden, en la introducción de este capítulo, en la sección 4.2, en la sección 4.4 y en el teorema egregio, también de la sección 4.4.

LA IDEA: LA PREGUNTA DEL CAPÍTULO, PLANTEADA PRIMERO EN CURVAS

La lección anterior era la geometría del habitante. Esta es la del observador externo, y la mejor forma de entender qué añade es bajar una dimensión y preguntarse lo mismo sobre curvas planas.

¿Puede un ser que vive *en* una curva plana distinguir una recta de una circunferencia, midiendo desde dentro? Localmente, no: con el parámetro arco, todos los tramos regulares tienen la misma métrica. Globalmente sí puede distinguirlos, por ejemplo, comprobando si al avanzar regresa al punto de partida. Y sin embargo son objetos distintos, y lo sabemos porque las vemos desde el plano que las contiene. Lo que codifica esa diferencia es la curvatura: se mira cómo varía el vector tangente y se resume ese cambio en una función.

Con superficies pasa lo mismo, un piso más arriba. Un plano y un cilindro son *localmente isométricos*: una hoja de papel se enrolla sin estirar, y las medidas locales se conservan. El cilindro completo y el plano sí son distintos globalmente: el primero

tiene lazos que no pueden contraerse a un punto. Y sin embargo, vistos desde el espacio, son objetos distintos: su *forma de estar* en $\mathbb{R}^3$ es otra.
El plan de este capítulo es, entonces, el mismo que el del capítulo 1, subido de dimensión: en lugar de estudiar cómo varía el vector tangente, se estudia cómo varía **el vector normal**, o equivalentemente el plano tangente. Con una diferencia importante de tamaño. En una curva solo se puede avanzar en una dirección, así que basta una derivada y sale un número. En una superficie hay un grado más de libertad, así que hace falta una diferencial y sale una matriz 2×2. Esa matriz representa el operador forma; la segunda forma fundamental se obtiene combinándola con la métrica del plano tangente.

4.1 Algunos preliminares sobre aplicaciones diferenciables entre superficies regulares

LA PREGUNTA

Hasta aquí, derivar ha querido decir siempre derivar una aplicación definida en un abierto del plano. Pero para comparar dos superficies hace falta derivar aplicaciones que van *de una superficie a otra*, y en una superficie no hay coordenadas privilegiadas: solo hay cartas, y hay muchas. ¿Qué significa derivar cuando el dominio y la imagen son superficies, y cómo se consigue que la respuesta no dependa de las cartas elegidas?

Los resultados de esta sección se enuncian **sin demostración**; las pruebas están en el libro de M. A. Hernández Cifre y J. A. Pastor González, *Un curso de geometría diferencial*, páginas 73 a 84.

Definición. Sean M_1 y M_2 dos superficies regulares y $p \in M_1$. Una aplicación $f : M_1 \to M_2$ se dice **diferenciable en** p si existen una p.l. $x : U \to M_1$ en p y una p.l. $y : V \to M_2$ en $f(p)$ tales que $y^{-1} \circ f \circ x$ es definida y diferenciable en un entorno de $x^{-1}(p)$; se restringe la carta x para que su imagen por f quede dentro de $y(V)$. Se dice que f es **diferenciable** si lo es en todos los puntos. Si f es biyectiva, diferenciable y su inversa también lo es, se dice que f es un **difeomorfismo** y que M_1 y M_2 son **difeomorfas**.

LA IDEA: BAJAR AL PLANO, DERIVAR ALLÍ, Y VOLVER A SUBIR

La definición parece aparatosa y en realidad dice algo muy simple. En una superficie no se sabe derivar, porque derivar necesita coordenadas. Pero en un abierto del plano sí.
Partiendo de unas coordenadas $u \in U$, se sube a la primera superficie con x, se aplica f y se expresa la llegada en coordenadas con y^{-1}. El resultado,

$$y^{-1} \circ f \circ x \ : \ U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^2,$$

es una aplicación entre abiertos del plano, donde derivar es lo de siempre. Se le llama la *expresión en coordenadas* de f, y es el único objeto de toda la sección que se puede derivar directamente.

El precio es que hay que elegir dos cartas, y las cartas son muchas. De ahí la primera de las notas que siguen, que es la que salva la definición: el resultado **no depende de las cartas elegidas**, porque dos cartas cualesquiera se relacionan por un cambio de parámetros que es un difeomorfismo, y componer con un difeomorfismo no estropea la diferenciabilidad. Este patrón, definir con una carta y comprobar que no depende de ella, es el que se repite en todo el curso.

Observación. Tres consecuencias que se usan sin citarlas:
1. La noción de diferenciabilidad **no depende de las parametrizaciones locales** elegidas en M_1 y M_2.
2. Toda aplicación diferenciable entre superficies regulares es **continua**.
3. La **composición** de aplicaciones diferenciables es diferenciable.

Proposición. Sea $f : M_1 \to M_2$ una aplicación entre dos s.r.. Entonces f es diferenciable si y solo si $i \circ f : M_1 \to \mathbb{R}^3$ lo es, donde $i : M_2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ es la inclusión.

LA IDEA: POR QUÉ ESTA PROPOSICIÓN AHORRA TANTO TRABAJO

Dice que para comprobar que una aplicación entre superficies es diferenciable **no hace falta mirar la superficie de llegada**: basta con verla como una aplicación con valores en $\mathbb{R}^3$ y comprobar que sus tres componentes lo son.
Eso reduce a la mitad el trabajo, porque quita una de las dos cartas. Y es lo que permite decir sin pensarlo que la aplicación de Gauss es diferenciable, o que una restricción de una aplicación diferenciable del espacio a una superficie lo es.

Definición. Sea $f : M_1 \to M_2$ una aplicación diferenciable entre dos s.r. y sea $p \in M_1$. La aplicación

$$df_p : T_p(M_1) \longrightarrow T_{f(p)}(M_2), \qquad df_p(v) = (f \circ \alpha)'(t_0),$$

donde α es cualquier curva diferenciable en M_1 con $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = v$, se llama la **diferencial de f en p**.

Proposición. Sea $f : M_1 \to M_2$ una aplicación diferenciable entre dos s.r. y sea $p \in M_1$. Entonces:
1. La diferencial de f en p **no depende de la curva α elegida**.
2. La diferencial de f en p es una **aplicación lineal**.
3. Si la diferencial de f en un punto p es un **isomorfismo**, entonces f es un difeomorfismo local en torno de p.

LA IDEA: LA DIFERENCIAL SE DEFINE CON CURVAS, NO CON COORDENADAS

Merece la pena notar el truco de la definición, porque es el que se usará otra vez enseguida con la aplicación de Gauss.
Un vector tangente a una superficie no es una lista de números: es la velocidad de una curva que pasa por el punto. Por eso, para saber qué le hace f a ese vector, lo natural es mirar qué le hace a la curva. Se transporta la curva con f y se deriva la curva transportada. Así la definición no menciona ninguna carta, y el apartado 1 dice que tampoco depende de la curva concreta, que era el único peligro.

El apartado 3 es el teorema de la función inversa en versión superficie, y es el que se usa para obtener una correspondencia local diferenciable con inversa diferenciable. Eso no implica que se conserven longitudes o ángulos: un difeomorfismo no tiene por qué ser una isometría.

Ejemplo (dos diferenciales calculadas con la definición)**. Una homotecia.** Sea $F(P) = A + \lambda(P - A)$, con $\lambda \neq 0$, y sea f su restricción a una superficie M_1, con imagen $M_2 = F(M_1)$. Si α es una curva de M_1 con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$, entonces $f \circ \alpha = A + \lambda(\alpha - A)$, y derivando en 0,

$$df_p(v) = (f \circ \alpha)'(0) = \lambda\, v.$$

La diferencial consiste en multiplicar por λ. Eso dice, sin más cuentas, que $T_{f(p)}(M_2) = \lambda\, T_p(M_1) = T_p(M_1)$ como subespacios: los planos tangentes en puntos correspondientes son paralelos. Es el segundo apartado del ejercicio «qué le hace una homotecia a una superficie» (sección 4.5), obtenido aquí en una línea.

La aplicación de Gauss de una esfera. En la esfera de radio r centrada en el origen, con el normal exterior, $\mathbf{N}(p) = p/r$. Con la misma curva, $\mathbf{N} \circ \alpha = \alpha/r$, y

$$d\mathbf{N}_p(v) = \tfrac{1}{r}\, v.$$

La normal cambia al mismo ritmo en todas las direcciones. Es el primer indicio de que la esfera se curva igual hacia todos lados, y en la sección 4.3 se leerá como $L_p = -\frac{1}{r}\,\mathrm{Id}$.

CONEXIÓN

El apartado 2, que la diferencial es lineal, es el que permite todo lo que viene. En la sección siguiente se define la aplicación de Gauss $N : M \to S^2$, que va de una superficie a otra, y su diferencial dN_p será, por este resultado, una aplicación lineal entre planos tangentes. Y como el plano tangente a la esfera en $N(p)$ es paralelo al plano tangente a M en p, esa aplicación lineal puede leerse como un **endomorfismo** del plano tangente a M. Ese endomorfismo, cambiado de signo, es el de Weingarten, y de él sale la geometría entera de la lección.
Es decir: sin la linealidad de la diferencial no habría autovalores, ni curvaturas principales, ni direcciones principales, ni segunda forma fundamental. Todo el capítulo cuelga de este enunciado, que aquí se admite sin demostración.

4.2 La aplicación de Gauss

LA PREGUNTA

La luz que refleja una superficie depende, entre otras cosas, de hacia dónde apunta su normal. Al recorrer una esfera, esa dirección cambia continuamente; en un plano permanece fija. ¿Cuánta información sobre la forma de una superficie cabe en la dirección hacia la que mira en cada punto, y cómo se mide lo deprisa que esa dirección cambia?

En todo el capítulo, $x : U \to \mathbb{R}^3$ denota una p.l. de una s.r..

Definición. Se llama **aplicación de Gauss** de x al campo normal, visto como aplicación

$$\mathbf{N} : x(U) \longrightarrow S^2, \qquad p \longmapsto \mathbf{N}(p) = \frac{\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|}(p).$$

Su imagen $\mathbf{N}(x(U)) \subseteq S^2$ se llama **imagen esférica** de $x(U)$.

Como el normal es unitario, la aplicación toma valores en la esfera unidad, y eso es justamente lo que la hace útil. Obsérvese que en realidad hay dos aplicaciones de Gauss, una opuesta de la otra en cada carta conexa; aquí se toma la dada por $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$. Si M es orientable, una elección global de normal permite definir $\mathbf{N} : M \to S^2$; en general solo se dispone de estas aplicaciones locales.

LA IDEA: QUÉ ES LA IMAGEN ESFÉRICA

Es la misma idea de la indicatriz esférica del capítulo 1, subida de dimensión. Allí se tomaban los vectores tangentes de una curva y se trasladaban al origen; su punta recorría un trozo de esfera, y la velocidad con que lo hacía era la curvatura.
Aquí se hace lo mismo con los normales de una superficie. Cada punto de la superficie tiene un normal; trasladándolo al origen, su punta queda sobre un punto de la esfera unidad. La imagen esférica es el conjunto de direcciones normales que la superficie llega a tomar.
La curvatura mide la rapidez con que cambia la normal al recorrer una distancia sobre la superficie. No basta con mirar el tamaño de la imagen esférica entera: dos esferas de radios distintos tienen la misma imagen S^2 y curvaturas distintas. La relación precisa compara *áreas locales correspondientes*; se estudiará al final del capítulo. Un cilindro muestra además que la normal puede cambiar mucho en una dirección y nada en la otra.

Ejemplo (el catálogo de imágenes esféricas)**.** ▪ **Plano.** El normal es constante, luego la imagen esférica es un único punto: el vector característico del plano. Menos no se puede.

- **Esfera** de radio r centrada en el origen. Aquí $\mathbf{N}(p) = \pm p/r$, de modo que la imagen de la esfera completa es **toda** S^2; la de una carta es solo la región correspondiente. Más no se puede.
- **Carta de Monge** $x(u,v) = (u,v,f(u,v))$. Se tiene

$$\mathbf{N}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\,(-f_u,\,-f_v,\,1),$$

  cuya tercera componente es siempre positiva: la imagen esférica está contenida en el hemisferio superior.
- **Cilindro** $x(u,v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$. Su normal es $\mathbf{N}(u,v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0)$, que no depende de v: la imagen esférica es el **ecuador** para el cilindro completo, o un arco de él en una carta angular.

EXPLÍCATE. *El cilindro tiene imagen esférica de área nula, porque es una curva. Antes de seguir, aventura qué significará eso para su curvatura, y compruébalo al llegar al final del capítulo. La respuesta explica por qué una hoja de papel se enrolla y una pelota no se envuelve.*

4.2.1 La diferencial de la aplicación de Gauss

Lo interesante no es la aplicación de Gauss, sino *cómo varía*. Esa variación es su diferencial,

$$d\mathbf{N}_p : T_p(M) \longrightarrow T_{\mathbf{N}(p)}(S^2), \qquad v \longmapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\mathbf{N}\circ\alpha)(t),$$

donde α es cualquier curva en la superficie con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$.

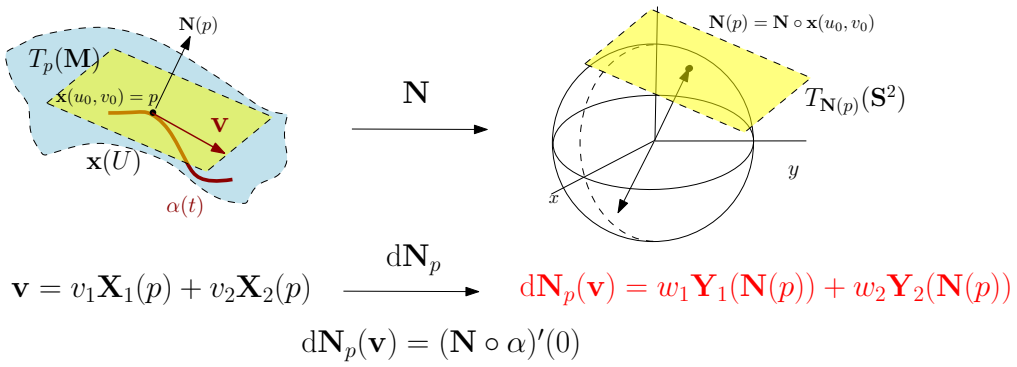


Figura 4.1: La aplicación de Gauss lleva la curva α a una curva de normales sobre la esfera unidad. Su diferencial lleva la velocidad v a $(N \circ \alpha)'(0)$. Los planos dibujados en puntos distintos son paralelos y sus espacios de direcciones coinciden. Figura del material oficial, lección 4.

LA IDEA: EL TRUCO QUE HACE QUE TODO FUNCIONE

Tal como está escrita, esa diferencial va de un plano tangente a otro distinto, lo que sería incómodo. Pero los dos planos coinciden, y verlo es el paso decisivo del capítulo. En la esfera unidad el normal en un punto q es el propio q, salvo signo. Por tanto

$$T_q(S^2) = \{v \in \mathbb{R}^3 : q\cdot v = 0\},$$

y tomando $q = \mathbf{N}(p)$,

$$T_{\mathbf{N}(p)}(S^2) = \{v \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{N}(p)\cdot v = 0\} = T_p(x).$$

Los dos planos tangentes son el mismo subespacio de $\mathbb{R}^3$: el ortogonal a $\mathbf{N}(p)$.
La consecuencia es enorme. La diferencial de la aplicación de Gauss puede verse como un **endomorfismo del plano tangente**, es decir, como una aplicación lineal de un espacio de dimensión dos en sí mismo. Y a un endomorfismo se le pueden calcular autovalores, autovectores, traza y determinante. Todo el capítulo consiste en interpretar geométricamente esos cuatro objetos.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ

La definición original de Gauss, que era otra. En las *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de 1827, Gauss no define la curvatura como un determinante ni como un producto de autovalores. La define así: se toma una región pequeña de la superficie, se mira su imagen por la aplicación de Gauss sobre la esfera unidad, se comparan sus áreas y se hace tender la región al punto, incorporando un signo según se conserve o se invierta la orientación.

Lo que tenía a favor. Es manifiestamente geométrica y explica el nombre: mide cuánto se abre el abanico de normales alrededor del punto. Donde la superficie es plana todas las normales son la misma y la imagen esférica tiene área nula; donde se cierra en una punta, las normales barren un casquete entero.
Cómo se calcula hoy. El determinante del endomorfismo de Weingarten expresa ese factor local mediante derivadas parciales, sin tener que calcular áreas de regiones finitas y después pasar al límite.
Quién ganó. Nadie, porque son la misma cosa: el determinante de una aplicación lineal *es* el factor por el que multiplica las áreas orientadas (su valor absoluto es el factor para las áreas ordinarias), y la aplicación de Gauss tiene por diferencial, salvo signo, al endomorfismo de Weingarten. La definición de Gauss sigue siendo la que hay que tener en la cabeza para entender qué se está midiendo, y explica de un plumazo por qué la curvatura de Gauss es negativa en los puntos de silla: allí la aplicación de Gauss invierte la orientación.

4.3 El endomorfismo de Weingarten

LA PREGUNTA

Al pasar la mano por el borde de una mesa se nota una dirección en la que la superficie se dobla y otra en la que no, y las dos son perpendiculares. En una silla de montar ocurre algo más raro: en una dirección se curva hacia arriba y en la perpendicular hacia abajo. La variación de la normal es una aplicación entre planos, no un número, y parece que debería poder decir cualquier cosa. ¿Por qué siempre hay dos direcciones perpendiculares privilegiadas, y qué estructura oculta las produce?

Definición. Se llama **operador forma** o **endomorfismo de Weingarten** en p a la aplicación lineal

$$L_p = -d\mathbf{N}_p : T_p(x) \longrightarrow T_p(x), \qquad L_p(v) = -d\mathbf{N}_p(v).$$

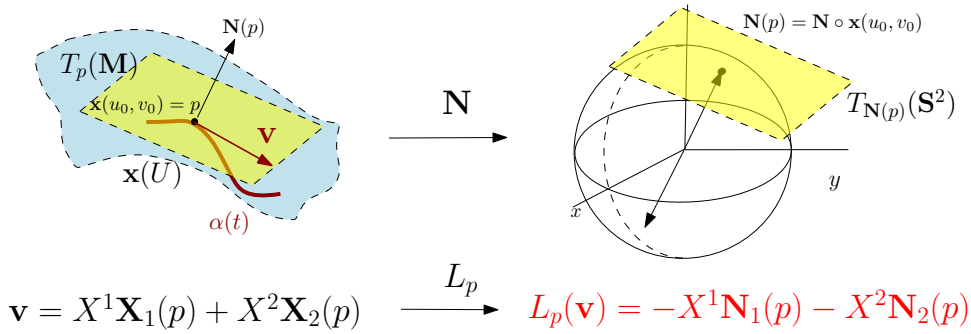


Figura 4.2: El operador de Weingarten usa el signo opuesto a la variación de la normal: $L_p(v) = -dN_p(v)$. En la figura, N_i denota la derivada parcial de $N \circ x$; no una componente escalar de N. Figura del material oficial, lección 4.

El signo menos es una convención, elegida para que los signos de las curvaturas salgan de acuerdo con $II(v,w) = -d\mathbf{N}(v)\cdot w$. Con normal exterior, una esfera tiene curvaturas principales negativas; con el interior, positivas. Hay que fijar ambas convenciones.

Proposición. Se verifica $L_p(\mathbf{X}_i(p)) = -N_i(p)$, con $N_i = \partial\mathbf{N}/\partial u_i$, para $i = 1, 2$. Además, si $\alpha(t_0) = p$ y $v = \alpha'(t_0)$, entonces $L_p(v) = -\mathbf{N}'(t_0)$.

La idea, en una línea. Para saber cómo cambia el normal al moverse en la dirección de un campo coordenado, basta recorrer la curva paramétrica correspondiente: por definición, esa curva es la que se mueve justo en esa dirección, así que la diferencial aplicada al campo es la derivada parcial del normal, sin más.

Basta aplicar la definición de diferencial con la curva paramétrica adecuada. Para $i = 1$, se toma $\alpha(u_1) = x(u_1, u_{20})$, que cumple $\alpha(u_{10}) = p$ y $\alpha'(u_{10}) = \mathbf{X}_1(p)$; entonces

$$d\mathbf{N}_p(\mathbf{X}_1(p)) = \frac{d}{du_1}\Big|_{u_{10}} \mathbf{N}(u_1, u_{20}) = N_1(p).$$

Para $i = 2$ cambia solo la curva que se toma: $\alpha(u_2) = x(u_{10}, u_2)$, cuya velocidad en u_{20} es $\mathbf{X}_2(p)$, y el mismo cálculo da $d\mathbf{N}_p(\mathbf{X}_2(p)) = N_2(p)$. La segunda afirmación sale de la linealidad: si $v = u_1'(t_0)\mathbf{X}_1 + u_2'(t_0)\mathbf{X}_2$, entonces $L_p(v) = -u_1'(t_0)N_1 - u_2'(t_0)N_2 = -\mathbf{N}'(t_0)$. ■

Ejemplo (los tres casos que hay que tener memorizados)**.** ▪ **Plano.** El normal es constante, luego $L_p = 0$ en todo punto.

- **Esfera** de radio r. Como $\mathbf{N}_p = \pm p/r$, se tiene $L_p = \mp\frac{1}{r}\,\mathrm{Id}$. El operador es un múltiplo de la identidad: la esfera se curva igual en todas las direcciones.
- **Cilindro** $x(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$, con $\mathbf{N} = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0)$. Entonces $N_1 = \mathbf{X}_1$ y $N_2 = 0$, de donde

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Un autovalor es -1 y el otro es 0: el cilindro se curva en la dirección que da la vuelta y no se curva nada a lo largo de las generatrices, que son rectas.

Proposición (el operador forma es autoadjunto)**.** Para cada p y cualesquiera $v, w \in T_p(x)$,

$$L_p v \cdot w = v \cdot L_p w.$$

La idea, antes de la cuenta. Hay que probar una simetría, y las simetrías en geometría diferencial salen casi siempre del mismo sitio: de que las derivadas parciales cruzadas coinciden. La cuenta consiste en escribir dos veces la misma frase — «el normal es perpendicular a los campos coordenados» — y derivar cada una en la dirección de la *otra* variable. Los dos resultados comparten un término, que es $\mathbf{N}\cdot X_{12}$, y al restarlos ese término desaparece y queda la simetría buscada.

El corazón: la simetría del operador forma es el teorema de Schwarz. Vale la pena retenerlo así, porque es la misma razón por la que $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ y por la que funcionaba el teorema de Gauss del capítulo anterior.

Por linealidad basta comprobarlo en la base $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$. Como $\mathbf{N}\cdot\mathbf{X}_1 = 0$ en todo $x(U)$, derivando respecto de u_2,

$$N_2\cdot\mathbf{X}_1 + \mathbf{N}\cdot X_{12} = 0.$$

Y como $\mathbf{N}\cdot\mathbf{X}_2 = 0$, derivando respecto de u_1,

$$N_1\cdot\mathbf{X}_2 + \mathbf{N}\cdot X_{21} = 0.$$

Los segundos sumandos coinciden, porque $X_{12} = X_{21}$. Restando, $N_2\cdot\mathbf{X}_1 = N_1\cdot\mathbf{X}_2$, y cambiando de signo,

$$L_p\mathbf{X}_1\cdot\mathbf{X}_2 = -N_1\cdot\mathbf{X}_2 = -\mathbf{X}_1\cdot N_2 = \mathbf{X}_1\cdot L_p\mathbf{X}_2.\blacksquare$$

CONEXIÓN: ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Esta proposición es, con diferencia, el resultado más rentable del capítulo, y no porque su demostración sea difícil, que no lo es, sino por lo que desencadena.
Un endomorfismo autoadjunto de un espacio euclídeo cae de lleno bajo el **teorema espectral**, que se demostró en Álgebra Lineal y Geometría y que aquí regala tres cosas de golpe:

1. **Los dos autovalores son reales.** Se llamarán k_1 y k_2, las *curvaturas principales*. Que sean reales no se puede dar por hecho: un endomorfismo cualquiera de un plano puede tener autovalores complejos, como los tiene una rotación.
2. **Existe una base ortonormal de autovectores.** Sus direcciones se llaman *direcciones principales*, y son perpendiculares entre sí.
3. **En esa base, la matriz es diagonal**, con k_1 y k_2 en la diagonal.

En otras palabras: en cada punto de cualquier superficie hay **dos direcciones principales perpendiculares**, y, una vez elegidas esas direcciones, conociendo cómo se curva la superficie en ellas se sabe cómo se curva en todas las demás. Eso es lo que contesta la tercera pregunta del bloque inicial. Si los autovalores coinciden, toda dirección es principal y no hay un par privilegiado; cualquier base ortonormal sirve.
Merece la pena guardar también el patrón general. Cada vez que en geometría diferencial aparezca una forma bilineal simétrica o un operador autoadjunto, detrás hay una base ortogonal esperando y unos autovalores con significado geométrico.

Definición. Los autovalores $k_1(p)$ y $k_2(p)$ de L_p se llaman **curvaturas principales** en p, y sus autovectores unitarios $X_{(1)}(p)$ y $X_{(2)}(p)$, **direcciones principales**.

Observación (ecuaciones de Weingarten)**.** Se usa la convención del curso: la fila i contiene los coeficientes de $L(\mathbf{X}_i)$, es decir, los vectores de componentes actúan como filas. Escribiendo $L = (L_i^j)$, de $L(\mathbf{X}_i) = -N_i$ se obtiene

$$N_i = -\sum_{j=1}^{2} L_i^j\,\mathbf{X}_j, \qquad i = 1, 2,$$

que se conocen como **ecuaciones de Weingarten**.

LA IDEA: GAUSS Y WEINGARTEN JUNTAS SON LAS ECUACIONES DE FRENET

Conviene poner las dos familias de ecuaciones una al lado de la otra, porque juntas cierran el paralelismo con el capítulo 1.
En cada punto de la superficie hay una referencia móvil de $\mathbb{R}^3$, la formada por $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{N}\}$. Las derivadas de sus tres vectores se escriben en ella misma:

- las **ecuaciones de Gauss** dan las derivadas de $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$, con coeficientes Γ_{ij}^k para la parte tangencial y L_{ij} para la normal;

▪ las **ecuaciones de Weingarten** dan las derivadas de $\mathbf{N}$, con coeficientes L_i^j.
Eso es exactamente lo que hacían las ecuaciones de Frenet-Serret: expresar las derivadas de una referencia móvil en términos de ella misma. Allí la referencia era $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ y hacían falta dos funciones; aquí la referencia es $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{N}\}$ y hacen falta los Γ y los L. Si se retiene una sola frase de todo el libro, que sea esta: *la geometría diferencial clásica consiste en montar una referencia adaptada al objeto y estudiar cómo gira*.

Proposición. Las curvaturas principales son las soluciones de

$$k^2 - \text{Traza}(L)\, k + \det(L) = 0.$$

Los autovalores satisfacen $\det(L - k\text{Id}) = 0$. Desarrollando el determinante 2×2 se obtiene $(L_1^1 - k)(L_2^2 - k) - L_1^2 L_2^1 = k^2 - \text{Traza}(L)k + \det(L)$. ■

DE DÓNDE VIENE: EULER, MEUSNIER Y EL ORDEN REAL DE LOS DESCUBRIMIENTOS

Conviene saber que casi todo lo de este capítulo es anterior a Gauss, y que lo que Gauss añadió fue de otra naturaleza.
Leonhard Euler publicó en 1767 sus investigaciones sobre la curvatura de las superficies, donde aparecen ya las curvaturas principales y el resultado que hoy lleva su nombre: que la curvatura en una dirección cualquiera se obtiene de las dos principales mediante un coseno y un seno al cuadrado. Jean-Baptiste Meusnier presentó en 1776 su memoria sobre la curvatura de superficies, que contiene el teorema sobre curvatura normal del capítulo anterior.
Gauss llegó medio siglo después, en 1827, y su aportación no fue una fórmula más sino un cambio de punto de vista: preguntarse qué parte de todo eso puede conocer alguien que no pueda salir de la superficie. La respuesta, el teorema egregio, cierra este capítulo.
El operador y las ecuaciones para las derivadas de la normal reciben el nombre de Weingarten; son la formulación con la que se trabaja en este curso.

4.4 La segunda forma fundamental

LA PREGUNTA

La primera forma fundamental mide dentro de la superficie y no ve absolutamente nada de cómo está colocada en el espacio: localmente, no distingue el plano del cilindro. ¿Qué hay que añadirle para distinguirlos, y por qué ese objeto nuevo vuelve a ser una forma cuadrática y no otra clase de cosa?

Como el operador forma es autoadjunto, tiene asociada de modo único una forma bilineal simétrica, igual que un producto escalar tiene asociada su matriz.

Definición. La **segunda forma fundamental** de x es

$$II_p : T_p(x) \times T_p(x) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad II_p(v, w) = L_p v \cdot w.$$

Su matriz en la base $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$ tiene por elementos

$$II_p(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = L_p \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{X}_j = -N_i \cdot \mathbf{X}_j = \mathbf{N} \cdot X_{ij} = L_{ij},$$

donde la tercera igualdad sale de derivar $\mathbf{N}\cdot\mathbf{X}_j = 0$. Es decir, los coeficientes de la segunda forma fundamental son exactamente los L_{ij} que aparecieron en las ecuaciones de Gauss del capítulo anterior, lo que cierra el círculo. Matricialmente,

$$L = II \cdot G^{-1}.$$

Para ver por qué, en la convención de filas,

$$L_{ij} = L\mathbf{X}_i\cdot\mathbf{X}_j = \sum_k L_i^k g_{kj}, \qquad II = LG, \qquad L_i^j = \sum_k L_{ik} g^{kj}.$$

Si se usan vectores columna, la matriz del operador es la traspuesta, $G^{-1}II$. No son dos operadores distintos: es el mismo escrito con dos convenciones. Aunque L sea autoadjunto, su matriz en una base coordenada no ortonormal no tiene por qué ser simétrica; la matriz simétrica es II.

Ejemplo (el caso más sencillo, a mano: $z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$ en el origen)**.** Sea la carta de Monge $x(u,v) = \big(u,\ v,\ \frac{1}{2}(au^2 + bv^2)\big)$, con $a, b \in \mathbb{R}$, y sea $p = x(0,0)$ el origen. Las derivadas son

$$\mathbf{X}_1 = (1,0,au), \qquad \mathbf{X}_2 = (0,1,bv), \qquad X_{11} = (0,0,a), \qquad X_{12} = 0, \qquad X_{22} = (0,0,b).$$

En el origen, $\mathbf{X}_1 = (1,0,0)$ y $\mathbf{X}_2 = (0,1,0)$. Así que $G = \mathrm{Id}$, el plano tangente es el plano $z = 0$ y $\mathbf{N}_p = (0,0,1)$. Los coeficientes $L_{ij} = X_{ij}\cdot\mathbf{N}$ son las terceras componentes de las derivadas segundas:

$$II = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad L = II\,G^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Cada número se lee en la superficie. La altura sobre el plano tangente es exactamente $z = \frac{1}{2}(au^2 + bv^2) = \frac{1}{2}\,II_p(w,w)$, con $w = u\mathbf{X}_1 + v\mathbf{X}_2$: la segunda forma es el doble de esa altura, sin resto. Los autovalores de L, las curvaturas principales, son a y b, con los ejes como direcciones principales. Y a es la curvatura en el vértice de la sección por el plano $v = 0$, que es la parábola $z = \frac{1}{2}au^2$; b es la de la sección por $u = 0$.

Conviene tener dibujados tres casos. Con $a = b = 1$ sale una copa: las dos secciones suben igual. Con $a = 1$ y $b = -1$ sale una silla: una sección sube y la otra baja. Con $a = 1$ y $b = 0$ sale un canalón: una sección sube y la otra no se separa del plano tangente hasta segundo orden.

Qué se ha ganado. El ejemplo es más que un ejemplo. En cualquier superficie, la altura sobre el plano tangente, escrita en función del desplazamiento tangente con ejes en las direcciones principales, es $\frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2)$ más un resto de orden mayor que dos. Es la cuenta del paso 2 del teorema sobre la posición respecto del plano tangente (p. 258). Por eso lo que se lea en este modelo (la fórmula de Euler, los umbílicos, los tipos de punto) vale en general.

LA IDEA: POR QUÉ HAY DOS FORMAS FUNDAMENTALES Y QUÉ HACE CADA UNA

Llegados aquí conviene poner las dos juntas, porque el nombre común despista y los papeles son muy distintos.

- La **primera** forma fundamental es el producto escalar restringido al plano tangente. Sirve para **medir**: longitudes, ángulos, áreas. Es intrínseca. Su matriz es $G = (g_{ij})$.
- La **segunda** forma fundamental mide cuánto se separa la superficie de su plano tangente. Sirve para saber cómo se **dobla**. Es extrínseca. Su matriz es $II = (L_{ij})$.

Y la relación entre ambas es la que produce todo lo demás. El operador forma es $L = II \cdot G^{-1}$, de modo que las curvaturas principales, que son sus autovalores, no salen de la segunda forma fundamental sola sino de *compararla con la primera*. Eso tiene sentido: doblarse mucho o poco es una noción que solo existe en relación con las distancias, y las distancias las pone la primera forma.
Es el mismo fenómeno que en el capítulo 1 obligaba a derivar respecto del parámetro natural para que la curvatura no dependiera de lo deprisa que uno recorriera la curva.

Teorema. Sea α una c.p.r. sobre x. Entonces:
1. si s es el parámetro natural, $K_n(\alpha(s)) = II\big(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)\big)$;
2. con parámetro arbitrario, $K_n(\alpha(t)) = \dfrac{II(\alpha'(t), \alpha'(t))}{I(\alpha'(t), \alpha'(t))}$;
3. K_n no depende de la curva, sino únicamente de su dirección tangente.

La idea, antes de la cuenta. Los tres apartados dicen lo mismo con precisión creciente: que la curvatura normal es un cociente entre las dos formas fundamentales evaluadas en el vector velocidad. Y como numerador y denominador son ambos cuadráticos en ese vector, cualquier factor que se le meta — por cambiar de parámetro o por elegir otra curva con la misma tangente — aparece al cuadrado arriba y abajo y se cancela. **Esa cancelación es el contenido entero del tercer apartado, y es lo que permite hablar de la curvatura normal de una *dirección* en vez de la de una curva.**

El primer apartado es la proposición del capítulo anterior que daba $K_n = \sum_{i,j} L_{ij}\dot{u}_i\dot{u}_j$, leída al revés: esa suma es exactamente $II(\dot\alpha, \dot\alpha)$.
Para el segundo, con $u_i'(t) = \dot u_i(s)\frac{ds}{dt}$ se obtiene

$$K_n(\alpha(t)) = \sum_{i,j} L_{ij}u_i'u_j'\Big(\frac{dt}{ds}\Big)^2 = \frac{II(\alpha', \alpha')}{|\alpha'|^2} = \frac{II(\alpha', \alpha')}{I(\alpha', \alpha')}.$$

El tercero sale del segundo. Si dos curvas pasan por el mismo punto con vectores tangentes proporcionales, $\alpha'(t_0) = \lambda\beta'(\tau_0)$ con $\lambda \neq 0$, entonces el factor λ^2 aparece en el numerador y en el denominador y se cancela. ■

Por eso tiene sentido escribir, para cada vector tangente $X \neq 0$,

$$K_n(X) = \frac{II_p(X, X)}{|X|^2} = \frac{\sum_{i,j} L_{ij}\lambda_i\lambda_j}{\sum_{i,j} g_{ij}\lambda_i\lambda_j}, \tag{4.1}$$

y de ahí sale en una línea que $K_n(X_{(i)}) = k_i$: si $X_{(i)}$ es una dirección principal se tiene $L_pX_{(i)} = k_i\,X_{(i)}$, luego $II_p(X_{(i)}, X_{(i)}) = L_pX_{(i)}\cdot X_{(i)} = k_i|X_{(i)}|^2$, y al dividir por $|X_{(i)}|^2$ queda k_i. Es decir, **las curvaturas principales son las curvaturas normales en las direcciones principales**.

CONEXIÓN: DIRECCIONES PRINCIPALES Y EJES DE INERCIA

Al estudiar un sólido rígido se escribe su energía de rotación como $T = \frac{1}{2}\langle J\omega, \omega\rangle$, donde J es el operador de inercia. Sus ejes principales son direcciones en las que $J\omega$ es paralelo a ω. En una base ortonormal de esos ejes, la forma cuadrática pierde los términos cruzados.

Aquí se busca lo mismo para L_p: las direcciones en las que la variación de la normal, con el signo elegido, es paralela a la dirección recorrida. El cociente

$$\frac{\langle J\omega, \omega\rangle}{\langle \omega, \omega\rangle} \quad \text{y el cociente} \quad \frac{II_p(v,v)}{I_p(v,v)}$$

tienen la misma estructura algebraica. El primero da el momento de inercia en una dirección; el segundo, su curvatura normal. Sus extremos se alcanzan en direcciones principales. La segunda forma fundamental puede tener signos distintos: doblarse en sentidos opuestos en una silla no tiene el significado de una energía negativa.
Hay una precaución práctica que ya aparece al expresar tensores en bases oblicuas. El libro representa el operador por filas: $L = II\, G^{-1}$. La autoadjunción se escribe

$$LG = GL^t = II,$$

y no exige que L sea una matriz simétrica en cualquier base. Si c es la columna de componentes de una dirección principal, la ecuación equivalente es

$$II\, c = kG\, c.$$

Por eso hay que diagonalizar la segunda forma *respecto de la primera*. Es el mismo tipo de problema que aparece en los modos normales de un sistema mecánico, $Kc = \omega^2 Mc$, donde la matriz de masas M determina cómo medir las amplitudes.
Un ejemplo mínimo hace visible el peligro. Si

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad II = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

las curvaturas principales son 2 y 3, no 8 y 3. El primer vector coordenado mide 2; al hacerlo unitario, el valor de la forma cuadrática se divide por 2^2. La primera forma corrige exactamente esa escala de la base.

Proposición. Si X es una dirección principal en p y $Y \neq 0$ es ortogonal a X, entonces Y también es principal. En consecuencia, en cada punto hay dos direcciones principales ortogonales.

La idea, en una línea. En un plano, ser autoadjunto significa que el ortogonal de un autovector vuelve a ser invariante; y en dimensión dos el ortogonal de una recta es otra recta, así que ese invariante no puede ser otra cosa que el segundo autovector.

Si X es principal, LX es paralelo a X, y como $Y \perp X$ resulta $LX \cdot Y = 0$. Por ser L autoadjunto, $X \cdot LY = 0$, es decir, LY es ortogonal a X y por tanto paralelo a Y, que genera el ortogonal de X en un plano. ■

Teorema (de Euler)**.** Sea $X \in T_p(x)$ unitario y sea θ el ángulo que forma con la dirección principal $X_{(1)}$. Entonces

$$K_n(X) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \operatorname{sen}^2\theta.$$

La idea, en una línea. En la base de las direcciones principales el operador forma es diagonal, así que aplicarlo a un vector es *multiplicar cada coordenada por su curvatura principal*; escribir el vector unitario como $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ en esa base y calcular el producto escalar ya da la fórmula, sin ningún otro ingrediente. Todo el mérito del teorema de Euler está en el paso

anterior, el teorema espectral, que garantizó que esa base existe y es ortonormal.

Elegimos una base principal ortonormal y tomamos θ orientado en ella. Así, $X = \cos\theta\, X_{(1)} + \operatorname{sen}\theta\, X_{(2)}$; si se toma el ángulo no orientado, solo puede cambiar el signo del seno, que luego se eleva al cuadrado. Usando $LX_{(i)} = k_i X_{(i)}$,

$$K_n(X) = II(X,X) = LX\cdot X = k_1 \cos\theta\, X_{(1)} + k_2 \operatorname{sen}\theta\, X_{(2)} \cdot \cos\theta\, X_{(1)} + \operatorname{sen}\theta\, X_{(2)},$$

y por ortonormalidad de las direcciones principales queda $k_1 \cos^2\theta + k_2 \operatorname{sen}^2\theta$. ■

LA IDEA: EL TEOREMA DE EULER CONTESTA LA PREGUNTA DEL CAPÍTULO

En cada punto de una superficie hay infinitas direcciones tangentes, y la superficie puede curvarse de forma distinta en cada una. Una vez elegida una base principal ortonormal, el teorema de Euler dice que las dos curvaturas principales determinan todas las demás.
La fórmula es una media ponderada, con pesos $\cos^2\theta$ y $\operatorname{sen}^2\theta$ que suman uno. Así que $K_n(\theta)$ recorre, al girar θ, todos los valores intermedios entre k_1 y k_2, y **esos dos son el máximo y el mínimo**. En efecto, derivando,

$$K_n'(\theta) = -2(k_1 - k_2)\operatorname{sen}\theta\cos\theta,$$

Si $k_1 \neq k_2$, se anula precisamente en $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ (módulo 2π): las dos rectas principales. Si $k_1 = k_2$, la derivada es nula en toda dirección.
De ahí el nombre. Las direcciones principales son aquellas en las que la superficie se dobla lo más y lo menos posible, y son perpendiculares entre sí. Piensa en una silla de montar: hacia delante baja, hacia los lados sube, y esas dos direcciones forman ángulo recto. O en un cilindro: da la vuelta en una dirección y es recto en la otra.
Si $k_1 = k_2$, la fórmula da $K_n(X) = k_1$ para toda dirección: la superficie se curva igual hacia todos lados. Esos puntos tienen nombre propio.

En el modelo, con números. En la superficie $z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$ del ejemplo anterior, con $a = 2$ y $b = 1$, la dirección que forma 60° con el eje x tiene $K_n = 2\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{3}{4} = \frac{5}{4}$. Se comprueba sin la fórmula: al avanzar una distancia r en esa dirección, la superficie sube $\frac{1}{2}\big(2\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\big)r^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\,r^2$, y la sección normal es la parábola $z = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\,r^2$, cuya curvatura en el vértice es $\frac{5}{4}$. En la silla, $a = 1$ y $b = -1$, la fórmula da $K_n = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta$, que se anula a 45° de los ejes: son las dos direcciones en las que la silla ni sube ni baja, y reaparecerán como direcciones asintóticas en la sección 4.5.

4.4.1 Puntos umbílicos

Definición. Un punto es **umbílico** si $k_1 = k_2$ en él. Si todos los puntos lo son, la superficie se dice **totalmente umbilical**.

Proposición. Un punto es umbílico si y solo si en él $L_{ij} = c\, g_{ij}$ para cierto $c \in \mathbb{R}$ y todo i, j. En un punto umbílico, toda dirección es principal.

Por el teorema espectral, $k_1 = k_2 = c$ equivale a $L_p = c\,\mathrm{Id}$. Esto equivale a $II_p(v,w) = c\,I_p(v,w)$ para todos v, w; basta comprobarlo en los pares de vectores de la base coordenada, donde es precisamente $L_{ij} = c\,g_{ij}$. Si $L_p = c\,\mathrm{Id}$, todo vector no nulo es autovector. ■

Teorema. Si $x(U)$ es conexa y totalmente umbilical, entonces es un trozo de plano o un trozo de esfera.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: SI SE CURVA IGUAL EN TODAS DIRECCIONES, NO LE QUEDA LIBERTAD NINGUNA

El enunciado suena a clasificación difícil y es, en realidad, un teorema de rigidez: se impone una condición tan fuerte que la superficie se queda sin margen de maniobra.
Primero hay que desmontar una intuición falsa. Ser totalmente umbilical parece decir solo «en cada punto se curva igual en todas las direcciones», y uno imagina que eso deja libertad para curvarse mucho aquí y poco allá: una especie de huevo, más apretado en las puntas. Pues no: el teorema dice que ni eso se puede. La curvatura no solo es la misma en todas las direcciones, sino también la misma en todos los puntos.
Y ese es el paso que hay que demostrar; lo demás viene solo.
Por qué no queda libertad. La igualdad de curvaturas en cada punto no basta, por sí sola, para explicar que no varíen de un punto a otro. Hay que usar que provienen de una misma superficie: las dos maneras de derivar la normal deben ser compatibles. Al derivar $N_i = -H\mathbf{X}_i$ y hacer coincidir las derivadas cruzadas aparece $H_{u_2}\mathbf{X}_1 = H_{u_1}\mathbf{X}_2$. Como las dos direcciones coordenadas son independientes, ambos coeficientes tienen que ser cero. Esa compatibilidad es lo que impide variar H.
Y una vez que H es constante, la conclusión es la del círculo osculador del capítulo 1. Si $H = 0$, el normal no se mueve y eso es un plano. Si $H = c \neq 0$, se avanza desde cada punto el vector $(1/c)\mathbf{N}$, de longitud $1/|c|$, igual que allí se avanzaba $1/k$ hacia el centro de curvatura, y se comprueba que el punto al que se llega es siempre el mismo. Ese punto es el centro de la esfera.

Paso 1: preparar la ecuación que gobierna H. Si todo punto es umbílico, $L_p = H(p)\,\mathrm{Id}$ con $H = \frac{1}{2}\,\mathrm{Traza}(L)$ diferenciable. De $L\mathbf{X}_i = -N_i$ se sigue $N_i = -H\,\mathbf{X}_i$ para $i = 1, 2$. Derivando la primera respecto de u_2 y la segunda respecto de u_1,

$$N_{12} = -\frac{\partial H}{\partial u_2}\mathbf{X}_1 - H\,X_{12}, \qquad N_{21} = -\frac{\partial H}{\partial u_1}\mathbf{X}_2 - H\,X_{21}.$$

Paso 2: la simetría de las derivadas cruzadas obliga a que H sea constante (el núcleo de la prueba). Como $X_{12} = X_{21}$ y $N_{12} = N_{21}$, restando queda

$$\frac{\partial H}{\partial u_2}\mathbf{X}_1 = \frac{\partial H}{\partial u_1}\mathbf{X}_2,$$

y siendo $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ linealmente independientes, ambas parciales se anulan. Al ser $x(U)$ conexa, H es constante.
Paso 3, caso $H \equiv 0$: el normal no se mueve, luego es un plano. Entonces $L \equiv 0$, luego $d\mathbf{N}_p = 0$ y $\mathbf{N}$ es constante. Una superficie conexa con normal constante es un trozo de plano: las parciales de $x \cdot \mathbf{N}$ son $\mathbf{X}_i \cdot \mathbf{N} = 0$, de modo que $x \cdot \mathbf{N}$ es constante.

Paso 4, caso $H \equiv c \neq 0$: el centro candidato no se mueve, luego es una esfera. Se considera

$$\phi : x(U) \to \mathbb{R}^3, \qquad \phi(p) = p + \frac{1}{c}\mathbf{N}(p),$$

y se calcula su diferencial. Para v tangente,

$$d\phi_p(v) = v + \frac{1}{c}\, d\mathbf{N}_p(v) = v - \frac{1}{c} L_p(v) = v - \frac{1}{c}\, c\, v = 0.$$

Luego ϕ es constante, digamos igual a a, y de $a = p + \frac{1}{c}\mathbf{N}(p)$ se obtiene

$$|p - a| = \frac{1}{|c|}$$

para todo p: la superficie está contenida en la esfera de centro a y radio $1/|c|$. El recíproco también es cierto: en un plano $L = 0$ y en una esfera de radio r, $L = \pm \mathrm{Id}/r$, por lo que ambos son totalmente umbilicales. ■

Qué hizo cada hipótesis. La conexión de $x(U)$ es la que convierte «las dos derivadas parciales de H se anulan» en «H es constante», y no es prescindible: sobre un dominio con dos trozos separados, H podría valer una constante en uno y otra en el otro, y la conclusión sería «un trozo de plano *o* de esfera *en cada componente*», con centros y radios distintos. La independencia lineal de $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$, que es la condición de regularidad, es lo que hace funcionar el paso 2. Y la simetría $X_{12} = X_{21}$ es el teorema de Schwarz otra vez: como en el teorema de Gauss del capítulo anterior, es la igualdad de las derivadas cruzadas la que carga con el peso.

LA IDEA: POR QUÉ LA DEMOSTRACIÓN CONSTRUYE ESE PUNTO *a*

El movimiento del segundo caso parece sacado de la manga y no lo es: es exactamente el mismo que el del círculo osculador del capítulo 1.

Allí, el centro de curvatura de una curva se obtenía avanzando desde el punto una distancia $1/k$ en la dirección del normal principal. Aquí, el candidato a centro de la esfera se obtiene sumando al punto el vector $(1/c)\mathbf{N}$. Su longitud es $1/|c|$; el signo de c decide si se avanza a favor o en contra del normal elegido. Y lo que se demuestra es que ese candidato no se mueve, igual que allí se demostraba que el centro de curvatura de una circunferencia era siempre el mismo punto.

La moraleja es que solo hay dos superficies que se curven igual en todas las direcciones y en todos los puntos: el plano, que no se curva nada, y la esfera, que se curva lo mismo en todas partes. Una superficie conexa que no sea un trozo de plano o esfera tiene algún punto no umbílico; eso no excluye que contenga regiones enteras de puntos umbílicos, como una zona plana.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ

Una decisión que no se puede evitar: la segunda forma depende de qué lado se elija. Al cambiar $\mathbf{N}$ por $-\mathbf{N}$, todos los L_{ij} cambian de signo. Con ellos cambian de signo las curvaturas principales, la curvatura normal y la curvatura media. La curvatura de Gauss, que es un producto de dos de ellas, no cambia.

La alternativa que se podría haber tomado. Definir la segunda forma con un valor absoluto, o

exigiendo que la curvatura normal sea siempre positiva, para librarse de la ambigüedad de una vez.
Lo que tenía a favor. Que K_n sería siempre no negativa y que no habría que fijar orientación para hablar de ella.
Lo que se perdería. El signo indica hacia qué lado del plano tangente se dobla la superficie en cada dirección. Tomar valores absolutos borra esa información y, cuando la forma es indefinida, $|II(v,v)|$ deja de ser una forma cuadrática. Se rompe así la relación bilineal con el operador de Weingarten. No se borran todas las diferencias: un punto de silla conserva direcciones con $|K_n| = 0$, mientras que una cúpula estrictamente convexa no las tiene.
Cómo se convive con ello. Aceptando la ambigüedad y sabiendo exactamente qué la sufre. La regla es corta y hay que tenerla: **cambiar de orientación cambia el signo de K_n, de K_g, de H y de las curvaturas principales, y deja igual K y τ_g**, porque estas dos son cuadráticas en **N**. Es la fuente de la mitad de los signos discrepantes al comparar resultados.

4.4.2 Curvatura media, curvatura de Gauss y el teorema egregio de Gauss

LA PREGUNTA

El endomorfismo de Weingarten deja en cada punto dos números, sus autovalores. Y hay muchas maneras de combinar dos números en uno: la suma, el producto, el mayor, la diferencia. ¿Por qué de todas ellas han sobrevivido con nombre propio justamente el producto y la semisuma, y por qué cada una por un motivo distinto?

Un endomorfismo de un plano tiene dos invariantes elementales, su traza y su determinante, y los dos tienen aquí nombre y significado.

Definición. Se llama **curvatura media** a $H = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$ y **curvatura de Gauss** a $K = k_1 k_2$. En términos de las dos formas fundamentales,

$$k_1 + k_2 = \operatorname{Traza}(L) = \frac{g_{11}L_{22} + g_{22}L_{11} - 2g_{12}L_{12}}{g}, \qquad k_1 k_2 = \det(L) = \frac{\det(II)}{g}.$$

Una superficie con $H \equiv 0$ se llama **mínima**.

Las dos fórmulas salen de $L = II\, G^{-1}$ con $G^{-1} = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}$. La diagonal de $II\, G^{-1}$ tiene los términos $(L_{11}g_{22} - L_{12}g_{12})/g$ y $(L_{22}g_{11} - L_{12}g_{12})/g$, y su suma es la traza del enunciado. El determinante es el de un producto, $\det(II)\det(G^{-1}) = \det(II)/g$. En coordenadas ortogonales, con $g_{12} = 0$, se leen mejor:

$$k_1 + k_2 = \frac{L_{11}}{g_{11}} + \frac{L_{22}}{g_{22}}, \qquad k_1 k_2 = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g_{11}\, g_{22}}.$$

La suma de las curvaturas principales es la suma de las curvaturas normales en las dos direcciones coordenadas, aunque estas no sean principales (el ejercicio «dos direcciones ortogonales suman el doble de la media», más adelante, lo explica). El producto, en cambio, necesita el término cruzado L_{12}.

Proposición. Las curvaturas principales son las raíces de

$$\det(II - \lambda G) = 0, \qquad \text{equivalentemente} \qquad \lambda^2 - 2H\lambda + K = 0.$$

Como $II = LG$, se tiene $II - \lambda G = (L - \lambda \mathrm{Id})G$ y $\det G = g > 0$. Por tanto, el primer determinante se anula exactamente en los autovalores de L; el polinomio característico ya calculado da la segunda ecuación. ■

Teorema (interpretación geométrica de la curvatura de Gauss)**.** Si $K(p) \neq 0$, entonces

$$|K(p)| = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A\big(\mathbf{N}(V_\varepsilon)\big)}{A(V_\varepsilon)},$$

donde V_ε es la imagen por x de la bola de radio ε alrededor de $x^{-1}(p)$.

La idea, antes de la cuenta: K es el jacobiano de la aplicación de Gauss. El enunciado tiene aspecto analítico — un límite de cociente de áreas — y dice algo muy simple. La aplicación de Gauss lleva un trocito de superficie a un trocito de esfera; como toda aplicación diferenciable, deforma áreas por un factor, y ese factor es el determinante de su diferencial. Su diferencial es $-L$, cuyo determinante es K. **Fin: el teorema no dice más que «el determinante del operador forma es el factor de área», que es lo que significa un determinante desde siempre.**

Una vez restringidos a un entorno donde la aplicación de Gauss sea un difeomorfismo, **quedan dos pasos técnicos**: primero, escribir esa afirmación como la identidad $N_1 \times N_2 = K\,(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2)$, que es la versión con productos vectoriales de «el determinante vale K»; y segundo, pasar del cociente de dos integrales al cociente de dos valores puntuales, para lo cual sirve el teorema del valor medio.

Como $K(p) = \det(d\mathbf{N}_p) \neq 0$, el teorema de la función inversa permite restringirnos a un entorno donde $\mathbf{N}$ es un difeomorfismo sobre su imagen. Para ε pequeño, esto permite calcular el área de $\mathbf{N}(V_\varepsilon)$ sin contar puntos repetidos.
Paso 1: la identidad que traduce el determinante a productos vectoriales (el núcleo de la prueba). La pieza clave es la identidad $N_1 \times N_2 = K\,(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2)$, que se obtiene directamente de las ecuaciones de Weingarten. Con ella,

$$A(V_\varepsilon) = \iint_{B_\varepsilon} |\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|\, du_1 du_2,$$

$$A\big(\mathbf{N}(V_\varepsilon)\big) = \iint_{B_\varepsilon} |N_1 \times N_2|\, du_1 du_2 = \iint_{B_\varepsilon} |K|\, |\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|\, du_1 du_2.$$

Paso 2: encoger el entorno para pasar de la media al valor puntual. Aplicando el teorema del valor medio para integrales dobles a numerador y denominador y haciendo $\varepsilon \to 0$, los dos puntos intermedios tienden a $x^{-1}(p)$ y queda $|K(p)|$. ■

Qué hizo la hipótesis, y por qué hay un valor absoluto. La condición $K(p) \neq 0$ garantiza la invertibilidad local utilizada en la prueba. Si $K(p) = 0$, la diferencial es singular en ese punto; eso no obliga a que toda la imagen de un entorno sea una curva. En el cilindro sí ocurre: la imagen esférica es una circunferencia de área cero. El valor absoluto está porque un área nunca es negativa: el cociente no puede distinguir $K > 0$ de $K < 0$. Esa información no se pierde, pero hay que leerla en otro sitio: en si la aplicación de Gauss conserva o invierte la orientación del trocito, que es justamente el signo del determinante.

La idea: la curvatura de Gauss mide cuánta esfera se gasta

Este teorema es la formalización exacta de la observación que se hizo al presentar la imagen esférica, y conviene tenerla como definición mental de K:

La curvatura de Gauss en un punto es el factor por el que la aplicación de Gauss amplifica o encoge las áreas orientadas; $|K|$ es el factor para las áreas ordinarias.

Es exactamente el papel que juega un jacobiano en un cambio de variables, y de hecho eso es lo que es: $K = \det(L)$ y L es, salvo signo, la diferencial de la aplicación de Gauss. Los ejemplos del principio del capítulo se leen ahora solos:

- En el **plano** la imagen esférica es un punto, de área cero para cualquier región de partida: $K = 0$.
- En el **cilindro** la imagen esférica es una curva, también de área cero: $K = 0$. Este es el caso interesante, porque el cilindro sí parece curvado.
- En la **esfera** de radio r las dos curvaturas principales valen $-1/r$ con normal exterior y $1/r$ con normal interior. En ambos casos, $K = 1/r^2$: cuanto más pequeña, más curvatura.

Que el cilindro tenga curvatura de Gauss nula pese a estar visiblemente curvado es el hecho que hay que digerir antes de leer el teorema siguiente. Y explica de paso por qué una hoja de papel se enrolla en un cilindro sin arrugarse y no se puede envolver con ella una pelota sin estirar ni encoger el papel: al deformarlo isométricamente, su $K = 0$ se conserva.

Teorema (egregio, de Gauss)**.** La curvatura de Gauss es una cantidad intrínseca.

La idea: por qué este teorema es notable, que es lo que significa «egregio»

Merece la pena detenerse, porque es el resultado que cierra la asignatura y el que le da sentido a las dos últimas lecciones juntas.

Todo lo de este capítulo es descaradamente extrínseco. La aplicación de Gauss necesita un vector normal, que solo existe porque la superficie está metida en $\mathbb{R}^3$. Las curvaturas principales k_1 y k_2 son autovalores de un operador construido con él, y cada una de ellas es, en efecto, extrínseca: un habitante de la superficie no puede medirlas.

Y sin embargo **su producto sí**. La curvatura de Gauss se puede calcular usando únicamente los coeficientes métricos y sus derivadas, es decir, con la sola información que da la primera forma fundamental. El habitante no puede saber cuánto se dobla su mundo en cada dirección, pero sí puede averiguar el producto de las dos curvaturas extremas, midiendo longitudes.

Esa es la parte «notable»: dos cantidades extrínsecas cuyo producto resulta ser intrínseco. Nada en las definiciones lo hacía esperar.

Las consecuencias son grandes y conviene enunciarlas:

- **Dos superficies isométricas tienen la misma curvatura de Gauss.** Si se puede deformar una en otra sin estirar ni encoger, K no cambia.
- **El plano y el cilindro son localmente isométricos**, y en efecto los dos tienen $K \equiv 0$. Conviene ser cuidadoso con la dirección de la implicación: lo que los identifica localmente es que enrollar un trozo de hoja sin solaparlo *es* una isometría, y el teorema

lo que hace es confirmarlo, no demostrarlo. **Tener la misma curvatura de Gauss no basta para ser isométricas**. Cuando ambas tienen la misma curvatura constante, un teorema aparte, de Minding, garantiza isometrías *locales*, no necesariamente globales.

- **La esfera y el plano no lo son**, y aquí el teorema sí decide, porque se usa en la dirección buena: si lo fueran tendrían la misma K, y es $1/r^2$ frente a 0. De ahí sale, sin más, que *no existe ningún mapa plano de la Tierra que conserve las distancias*. Toda proyección cartográfica deforma algo, necesariamente. No es un problema técnico de los cartógrafos: es un teorema.

Y esa asimetría es la manera de usar el egregio en la práctica: sirve para probar que dos superficies **no** son isométricas, comparando sus curvaturas; nunca para probar que lo son.

Y este es también el punto donde la lección 3 y la 4 se dan la mano. En la 3 se probó que la curvatura geodésica es intrínseca; aquí, que la de Gauss también lo es. El teorema de Gauss-Bonnet, que las junta a las dos en un solo enunciado, es por eso un resultado enteramente intrínseco, aunque sus ingredientes parezcan no serlo.

Esquema de la prueba, en tres movimientos. Saber *qué* dice el teorema no es lo mismo que ver *por qué* puede ser verdad, y el porqué es más sencillo de lo que su fama sugiere. Lo notable es que el motor es el mismo que ya ha movido otros dos resultados de estos dos capítulos.

Movimiento 1: reducir la curvatura de Gauss a un determinante. Por definición, $K = \det(II)/g$. El denominador g es intrínseco de oficio, porque es el determinante de la primera forma fundamental. Así que todo el problema se concentra en una sola pregunta: ¿es calculable $\det(II) = L_{11}L_{22} - L_{12}^2$ a partir de la métrica en esta carta? Obsérvese la trampa que esto ya deshace: no hay que probar que los L_{ij} sean intrínsecos — y no lo son —, sino solo esa combinación suya.

Movimiento 2: derivar las ecuaciones de Gauss una vez más e imponer la simetría de las derivadas terceras (el núcleo de la prueba). Las ecuaciones de Gauss del capítulo anterior descomponen X_{ij} en su parte tangente, con los Γ_{ij}^k, y su parte normal, con los L_{ij}. Si se deriva esa igualdad otra vez y se impone que las derivadas terceras no dependen del orden, $X_{ijk} = X_{ikj}$, se obtiene una identidad entre vectores. Su componente normal es un resultado por su cuenta; **su componente tangencial es la que interesa, porque en ella el lado izquierdo contiene únicamente símbolos de Christoffel y derivadas suyas, y el lado derecho contiene exactamente la combinación $L_{11}L_{22} - L_{12}^2$.**

Movimiento 3: leer la igualdad. A la izquierda, algo que el habitante de la superficie sabe calcular, porque los Γ son intrínsecos por el teorema de Gauss del capítulo anterior. A la derecha, $\det(II)$. Así, esa combinación puede calcularse a partir de la métrica. Los determinantes $\det(II)$ y g dependen de las coordenadas; su cociente K es el escalar que no depende de ellas. Aquí se indica el mecanismo, sin desarrollar la cuenta completa, que es el punto de partida del teorema fundamental de superficies. En las superficies de revolución (sección 4.5.4) se verá un caso en que la cancelación ocurre ante los ojos.

Y ahí está la moraleja que une los tres resultados grandes de estas dos lecciones: **la intrinsequedad de los símbolos de Christoffel, la simetría del operador forma y el teorema egregio salen los tres de lo mismo, de que las derivadas parciales cruzadas coinciden.**

El teorema de Schwarz, que en su momento pareció un tecnicismo del cálculo de varias variables, es el que sostiene la geometría diferencial clásica entera.

CONEXIÓN: GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA DE SUPERFICIES

El teorema egregio es la puerta de entrada a la asignatura siguiente, y conviene llegar sabiéndolo.
En GTS, la curvatura de Gauss es el integrando del término de área en el teorema de Gauss-Bonnet. Que ese teorema tenga sentido y diga algo profundo depende enteramente de que K sea intrínseca: lo que afirma es que una integral de curvatura, que parece depender de cómo esté colocada la superficie en el espacio, resulta valer siempre 2π por un número puramente topológico.
Para una superficie compacta, orientable y sin borde, con $\mathcal{X}$ su característica de Euler,

$$\iint_M K\,dA = 2\pi\,\mathcal{X}(M).$$

Es decir: se puede abollar una esfera todo lo que se quiera, hacerle bultos y hundirle valles, y la integral de su curvatura seguirá valiendo 4π. Lo que se gana en un sitio se pierde en otro. Esa rigidez es la que hace de Gauss-Bonnet, con razón, el teorema más profundo de la geometría diferencial clásica.

4.4.2.1 *Clasificación de los puntos de una superficie*

Definición. Un punto p se dice **elíptico** si $K(p) > 0$; **hiperbólico** si $K(p) < 0$; **parabólico** si $K(p) = 0$ pero alguna curvatura principal no se anula; y **plano** si $k_1(p) = k_2(p) = 0$.

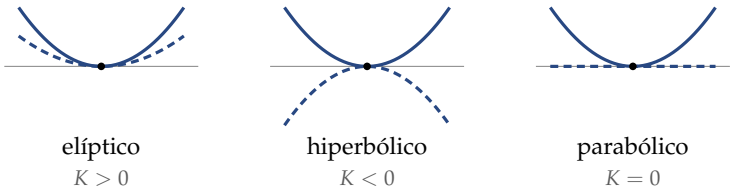


Figura 4.3: Aproximaciones cuadráticas de las secciones principales, con el plano tangente en gris. En un punto elíptico se doblan hacia el mismo lado; en uno hiperbólico, hacia lados opuestos. En uno parabólico una tiene curvatura nula en el punto: la sección real no tiene por qué ser una recta.

Teorema. Todo punto elíptico tiene un entorno contenido enteramente en uno de los dos semiespacios cerrados que determina el plano tangente en él. En cambio, en todo entorno de un punto hiperbólico hay puntos a ambos lados del plano tangente.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: LA SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL ES LA ALTURA SOBRE EL PLANO TANGENTE

Este es el teorema que convierte la clasificación algebraica de puntos — signos de k_1 y k_2 — en una afirmación que se ve. Merece la pena entenderlo bien, porque es el que da sentido a todos los nombres.
La imagen. Apóyese el plano tangente contra la superficie en p, como una tabla, y mírese cuánto se separa la superficie de la tabla al alejarse del punto de apoyo. Esa

separación es una función de dos variables que vale cero en p y cuya derivada primera también vale cero en p — porque la tabla es tangente, esa es toda la definición de tangente. El siguiente término que hay que mirar es el de segundo orden (que también podría anularse). **Ese término es la mitad de la segunda forma fundamental evaluada en el desplazamiento tangente.**

Y ahora la imagen predice el enunciado, sin ninguna cuenta. Una forma cuadrática de dos variables o mantiene el signo o no lo mantiene, y eso lo deciden los signos de sus dos autovalores en una base ortonormal del plano tangente, que son k_1 y k_2:

- si los dos tienen el mismo signo, la altura tiene signo fijo y la superficie se queda entera a un lado de la tabla: la cúpula, el punto elíptico;
- si tienen signos opuestos, la altura sube en unas direcciones y baja en otras, luego la superficie cruza la tabla: la silla de montar, el punto hiperbólico.

Y la imagen explica también la limitación, que es la parte honesta del asunto. Si alguno de los dos autovalores es cero, en esa dirección la altura de segundo orden se anula y quien decide el signo es el resto, del que no se sabe nada. Por eso en los puntos parabólicos y planos el teorema calla. No es que la demostración sea perezosa: es que el enunciado es realmente falso en general. Un cilindro tiene todos sus puntos parabólicos y se queda a un lado de cada plano tangente; una superficie con un punto plano puede cruzarlo. La segunda forma fundamental sencillamente no ve tan lejos.

Paso 1: escribir la altura sobre el plano tangente. Tómese una p.l. centrada en p, de modo que $x(0,0) = p$. La distancia con signo de un punto de la superficie al plano tangente es $d(u_1,u_2) = \big(x(u_1,u_2) - x(0,0)\big)\cdot\mathbf{N}_p$. Desarrollando por Taylor,

$$x(u_1,u_2) - x(0,0) = \mathbf{X}_1u_1 + \mathbf{X}_2u_2 + \tfrac{1}{2}\big(X_{11}u_1^2 + 2X_{12}u_1u_2 + X_{22}u_2^2\big) + R(u_1,u_2),$$

Paso 2: los términos de primer orden mueren por tangencia, y aflora la segunda forma fundamental (el núcleo de la prueba). El resto satisface $R(u_1,u_2) = o(u_1^2+u_2^2)$. Al proyectar sobre $\mathbf{N}_p$, los términos de primer orden desaparecen, porque $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son tangentes, y queda

$$d(u_1,u_2) = \tfrac{1}{2}\,II_p(w,w) + R(u_1,u_2)\cdot\mathbf{N}_p, \qquad w = u_1\mathbf{X}_1 + u_2\mathbf{X}_2.$$

Paso 3: leer el signo de una forma cuadrática por sus autovalores. Si p es elíptico, k_1 y k_2 tienen el mismo signo, luego K_n y por tanto $II_p(w,w)$ tienen signo fijo para todo $w \neq 0$. Además, $|II_p(w,w)| \geq \min(|k_1|,|k_2|)\,|w|^2$, y $|w|^2$ es comparable a $u_1^2+u_2^2$ por ser la base fija e independiente. Por eso el resto es menor que el término cuadrático, uniformemente en todas las direcciones, cerca del origen. El signo de d es entonces fijo fuera del origen. Si p es hiperbólico, basta seguir las dos direcciones principales: sus términos cuadráticos tienen signos opuestos y dominan al resto sobre cada recta, dando puntos a ambos lados en todo entorno. ■

Qué hizo cada hipótesis. Que p sea elíptico o hiperbólico se usa únicamente en el paso 3, y se usa para lo mismo: para garantizar que la forma cuadrática *no degenera*, es decir, que ninguno de los dos autovalores es cero. Esa es la condición real del teorema, y por eso los otros dos tipos de punto quedan fuera. Obsérvese además que la conclusión es estrictamente

local: se ha comparado un término de segundo orden con un resto de orden mayor, y eso solo dice algo en un entorno pequeño del punto. Una superficie puede tener todos sus puntos elípticos y aun así cortar a alguno de sus planos tangentes lejos del punto de contacto.

Observación. En los puntos parabólicos y planos no se puede afirmar nada: el término de segundo orden se anula en alguna dirección y el comportamiento lo decide el resto.

LA IDEA: CÓMO RECONOCER EL TIPO DE UN PUNTO SIN CALCULAR

Clasificar puntos es la operación más frecuente del capítulo, y con esta imagen se acierta casi siempre antes de hacer la cuenta.

- **Elíptico:** la superficie se aleja del plano tangente hacia el mismo lado en todas las direcciones. Es la forma de una cúpula. Toda la esfera es elíptica.
- **Hiperbólico:** la superficie cruza su propio plano tangente. Es la forma de una silla de montar, o de un puerto de montaña. El paraboloide hiperbólico lo es en todos sus puntos.
- **Parabólico:** una curvatura principal es nula y la otra no. El cilindro y el cono fuera del vértice son modelos; en general, curvatura nula en un punto no significa que la sección entera sea recta.
- **Plano:** no se dobla en ninguna dirección a segundo orden. Un plano entero, o puntos aislados de otras superficies.

Estas imágenes son consecuencias o modelos, no criterios recíprocos: por ejemplo, $z = x^4 + y^4$ queda a un lado del plano tangente en el origen y allí el punto es plano.
Y el atajo de cálculo: el signo de K es el signo de $\det(II)$, porque $K = \det(II)/g$ y $g > 0$ siempre. Así que basta con calcular $L_{11}L_{22} - L_{12}^2$ y mirarle el signo, sin necesidad de obtener las curvaturas principales.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ

Por qué el producto y la semisuma, y no otra combinación. Una vez conocidas las curvaturas principales, se pueden formar muchas cantidades: $|k_1 - k_2|$ mide cuánto se aparta el punto de ser umbílico; también se pueden tomar el máximo o la suma de cuadrados. El producto y la semisuma destacan por las propiedades siguientes.
Por qué ganó el producto. Por una razón que nadie podía prever: es **intrínseco**. $K = k_1k_2$ se calcula desde dentro de la superficie, sin salir de ella, mientras que k_1 y k_2 por separado no. Eso es el Theorema Egregium. Naturalmente, cualquier función de K, como K^2, también es intrínseca; el producto es la cantidad básica que explica esas otras. El producto no ganó por elegante, ganó porque resultó ser otra cosa distinta de lo que parecía.
Por qué ganó también la semisuma, por un motivo completamente distinto. H no es intrínseca y no sirve para nada de lo anterior. Sobrevive porque es la que aparece en el problema variacional: $H \equiv 0$ expresa que la primera variación del área se anula para variaciones que fijan el borde. Es una condición necesaria para minimizar el área, pero por sí sola no garantiza un mínimo. Lagrange planteó ese problema en la década de 1760 y Meusnier reconoció la condición en 1776, medio siglo antes de que Gauss escribiera las *Disquisitiones*. Es decir: las dos curvaturas vienen de problemas distintos y se encontraron después.
Y la diferencia $k_1 - k_2$, ¿se perdió? No del todo. Aparece disfrazada: la torsión geodésica es proporcional a $(k_2 - k_1)\operatorname{sen} 2\varphi$, con el signo fijado por la convención de la referencia. Su anulación *en todas las direcciones* caracteriza los puntos umbílicos; en una sola dirección caracteriza que esta sea principal. No llegó a tener nombre propio, pero está ahí.

4.5 Líneas de curvatura y líneas asintóticas

LA PREGUNTA

En una superficie hay direcciones en las que la curvatura normal es extrema y otras, si existen, en las que es nula. ¿Qué curvas se obtienen al seguir esas direcciones de punto en punto, y qué nos permiten ver de la forma de la superficie?

Las direcciones principales y las direcciones en las que la curvatura normal se anula son, en cada punto, direcciones privilegiadas. Esta sección estudia las curvas que las siguen.

4.5.1 Líneas de curvatura

Definición. Una curva regular $\alpha(t) = x(u_1(t), u_2(t))$ es una **línea de curvatura** si su vector tangente es una dirección principal en cada punto.

Proposición. En un punto no umbílico, las direcciones principales $X = \lambda \mathbf{X}_1 + \mu \mathbf{X}_2$ son las soluciones no nulas (λ, μ), consideradas salvo factores no nulos, de

$$\begin{vmatrix} \mu^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ L_{11} & L_{12} & L_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

En consecuencia, por cada punto no umbílico pasan dos líneas de curvatura, que se obtienen integrando la ecuación diferencial que resulta de sustituir λ y μ por u_1' y u_2'.

La idea, antes de la cuenta: eliminar el autovalor para quedarse con la dirección. Una dirección principal es un autovector del endomorfismo de Weingarten. El problema práctico es que la definición de autovector arrastra el autovalor k, que es un dato que no interesa: lo que se busca es *por dónde* va la dirección, no cuánto se curva la superficie en ella. Así que se escriben las dos ecuaciones del sistema de autovectores y se elimina k entre ellas, exactamente como se elimina un parámetro entre dos ecuaciones. Lo que queda es una sola ecuación en λ y μ, homogénea y de segundo grado, y el determinante del enunciado no es más que la forma compacta de escribirla.

De dónde sale el «dos». En un punto no umbílico, el discriminante es positivo y la ecuación determina dos rectas distintas. En un punto umbílico no se funden en una sola: la ecuación se anula idénticamente y *todas* las direcciones son principales. Esa degeneración explica por qué se separan ambos casos.

Paso 1: escribir la condición de autovector. Que X sea principal significa $LX = kX$ para cierto k, es decir,

$$\lambda L_1^1 + \mu L_2^1 = k\lambda, \qquad \lambda L_1^2 + \mu L_2^2 = k\mu.$$

Paso 2: eliminar el autovalor (el núcleo de la prueba). Se multiplica la primera ecuación por μ, la segunda por λ, y se restan: los dos segundos miembros valen $k\lambda\mu$ y se cancelan, así que el autovalor desaparece. Cambiando el signo de lo que queda,

$$\lambda^2 L_1^2 + \lambda\mu\left(L_2^2 - L_1^1\right) - \mu^2 L_2^1 = 0,$$

Paso 3: bajar los índices y reconocer el determinante. La ecuación anterior está escrita con la matriz del operador, L_i^j, y hay que pasarla a los coeficientes de las dos formas fundamentales, que son los que se calculan. La relación entre unos y otros es la de las ecuaciones de Weingarten, es decir, subir un índice con la métrica inversa:

$$L_i^j = \sum_{k=1}^{2} L_{ik}\, g^{kj}.$$

Sustituyendo cada uno de los tres coeficientes por esta expresión, y multiplicando por g para quitar los denominadores que aporta G^{-1}, se obtiene

$$\lambda^2\big(L_{12}g_{11} - L_{11}g_{12}\big) + \lambda\mu\big(L_{22}g_{11} - L_{11}g_{22}\big) + \mu^2\big(L_{22}g_{12} - L_{12}g_{22}\big) = 0,$$

que es el desarrollo del determinante del enunciado.
Paso 4: contar las soluciones con el discriminante. Llamando A, B y C a los tres paréntesis del paso anterior, el discriminante $B^2 - 4AC$ vale

$$B^2 - 4AC = 4g^2\big(H^2 - K\big).$$

La cuenta es corta si se abrevia $P = g_{11}L_{22}$, $Q = g_{22}L_{11}$ y $R = g_{12}L_{12}$. Por un lado, $B = P - Q$ y $4AC = 4R(P+Q) - 4g_{11}g_{22}L_{12}^2 - 4g_{12}^2 L_{11}L_{22}$. Por otro, $2gH = P + Q - 2R$ y $gK = L_{11}L_{22} - L_{12}^2$. Desarrollando los cuadrados, los dos miembros quedan iguales a

$$(P-Q)^2 - 4R(P+Q) + 4g_{11}g_{22}L_{12}^2 + 4g_{12}^2 L_{11}L_{22}.$$

El factor g^2 es siempre positivo, así que el signo lo decide el paréntesis; y ese paréntesis se lee de inmediato en las curvaturas principales:

$$H^2 - K = \Big(\frac{k_1+k_2}{2}\Big)^2 - k_1k_2 = \frac{1}{4}(k_1-k_2)^2,$$

que es estrictamente positivo en un punto no umbílico. Luego hay dos soluciones reales distintas como rectas de direcciones, aunque alguna no pueda escribirse con una pendiente finita. El discriminante $g^2(k_1-k_2)^2$ decide que son distintas; no mide su ángulo, que siempre es recto. Cerca de un punto no umbílico las dos direcciones forman campos suaves de rectas; sus curvas integrales dan las dos líneas de curvatura locales. ■

Qué hizo la hipótesis. «No umbílico» se usa solo en el paso 4, y se usa para que el discriminante sea estrictamente positivo. Quitada, la ecuación no se vuelve falsa: se vuelve *trivial*, porque las dos últimas filas del determinante pasan a ser proporcionales y la igualdad se cumple para todo (λ, μ). Es la traducción algebraica exacta de que en un punto umbílico todas las direcciones son principales, y la observación que sigue lo recoge.

Observación. En un punto umbílico la ecuación se convierte en una identidad trivial, porque $L_{ij} = c\, g_{ij}$ hace proporcionales las dos últimas filas del determinante. Es coherente: en un punto umbílico todas las direcciones son principales.

Corolario. Suponiendo que no hay puntos umbílicos, las curvas paramétricas de una p.l. son líneas de curvatura si y solo si $g_{12} = L_{12} = 0$.

Si $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ son principales y el punto no es umbílico, sus autovalores son distintos, luego son ortogonales: $g_{12} = 0$. También $L_{12} = L\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = k_1 g_{12} = 0$. Recíprocamente, si ambas matrices son diagonales, también lo es $L = IIG^{-1}$; por tanto, las dos direcciones coordenadas son principales. Esta implicación vale incluso en puntos umbílicos. ■

LA IDEA: LA CONDICIÓN $g_{12} = L_{12} = 0$ ES LA QUE HAY QUE BUSCAR SIEMPRE

Este corolario es, en la práctica, el resultado más útil de la sección, porque explica una táctica que se usa constantemente.
Las dos condiciones dicen cosas distintas y las dos hacen falta:

- $g_{12} = 0$ dice que las curvas paramétricas se cortan perpendicularmente. Es necesario, porque las direcciones principales lo son.
- $L_{12} = 0$ dice que, además, esas direcciones perpendiculares son precisamente las principales y no otras dos cualesquiera.

Cuando las dos se cumplen, las dos matrices son diagonales a la vez y todo se simplifica: las curvaturas principales salen directamente como $k_1 = L_{11}/g_{11}$ y $k_2 = L_{22}/g_{22}$, sin resolver ninguna ecuación de segundo grado, y la curvatura de Gauss es su producto. Por eso, ante una superficie concreta, la primera pregunta práctica es siempre si la parametrización cumple $g_{12} = L_{12} = 0$. En las superficies de revolución la respuesta es que sí: meridianos y paralelos son sus líneas de curvatura. Eso ahorra la mitad del trabajo en cualquier ejercicio sobre ellas.

Teorema (de Olinde Rodrigues)**.** Una curva $\alpha = \alpha(t)$ es línea de curvatura si y solo si

$$\mathbf{N}'(t) + K_n(t)\,\alpha'(t) = 0.$$

La idea, en una línea. Recorrer una línea de curvatura es ir en una dirección en la que el vector normal, al moverse, se limita a inclinarse *hacia atrás o hacia delante sobre la propia trayectoria*, sin desviarse hacia los lados; el teorema es esa frase escrita con vectores, y el factor de proporcionalidad no puede ser otra cosa que la curvatura normal.

Paso 1: traducir «línea de curvatura» a una condición sobre $\mathbf{N}'$. Ser línea de curvatura significa que α' es autovector de L, es decir, que $L\alpha'$ es paralelo a α'. Y por la proposición (p. 245), $L\alpha'(t) = -\mathbf{N}'(t)$. Luego la condición equivale a que $\mathbf{N}'$ sea paralelo a α', que es media fórmula del enunciado; falta solo identificar la constante.
Paso 2: el factor de proporcionalidad es K_n y no otra cosa (el núcleo de la prueba). Sea k el autovalor, de modo que $L\alpha' = k\,\alpha'$. Multiplicando escalarmente por α' y usando que la segunda forma fundamental es $II(X, Y) = LX \cdot Y$,

$$II(\alpha', \alpha') = L\alpha' \cdot \alpha' = k\,\alpha' \cdot \alpha' = k\,I(\alpha', \alpha'),$$

y despejando, $k = II(\alpha', \alpha')/I(\alpha', \alpha')$, que es exactamente la definición de la curvatura normal en la dirección de α'. Obsérvese que el cociente no depende de la longitud de α', porque numerador y denominador son los dos cuadráticos: por eso el enunciado vale en un parámetro arbitrario y no hace falta suponer α parametrizada naturalmente. Sustituyendo $k = K_n$ en $\mathbf{N}' = -k\alpha'$ se obtiene la fórmula. ■

Ejemplo (las líneas de curvatura de la silla $z = xy$, a mano)**.** La silla $z = xy$ es el modelo $z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$ de la sección de la segunda forma fundamental, con $a = 1$ y $b = -1$, girado 45°: con $X = (x+y)/\sqrt{2}$ e $Y = (x-y)/\sqrt{2}$ se tiene $xy = \frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$. Así que en el origen la respuesta ya se sabe: curvaturas principales 1 y -1, y direcciones principales las bisectrices $y = \pm x$. Lo que añade la proposición es *seguir* esas direcciones de punto en punto.

Con la carta $x(u,v) = (u,v,uv)$ las derivadas son

$$\mathbf{X}_1 = (1,0,v), \qquad \mathbf{X}_2 = (0,1,u), \qquad X_{11} = X_{22} = 0, \qquad X_{12} = (0,0,1),$$

y de ellas, con $W = \sqrt{1+u^2+v^2}$,

$$g_{11} = 1+v^2, \qquad g_{12} = uv, \qquad g_{22} = 1+u^2, \qquad \mathbf{N} = \frac{(-v,-u,1)}{W},$$

y, como $L_{ij} = X_{ij}\cdot\mathbf{N}$,

$$L_{11} = L_{22} = 0, \qquad L_{12} = \frac{1}{W}.$$

Paso 1: la ecuación. Con $L_{11} = L_{22} = 0$, los tres paréntesis del paso 3 de la demostración se reducen a $L_{12}g_{11}$, 0 y $-L_{12}g_{22}$. Como L_{12} no se anula, se divide por él y queda

$$(1+v^2)\,\lambda^2 - (1+u^2)\,\mu^2 = 0, \qquad \text{es decir,} \qquad \frac{\lambda}{\mu} = \pm\sqrt{\frac{1+u^2}{1+v^2}}.$$

En el origen, $\lambda = \pm\mu$: las bisectrices, como se esperaba. Fuera del origen la pendiente depende del punto, y hay que integrar.

Paso 2: la ecuación diferencial, y separar variables. Se sustituye $\lambda = u'$ y $\mu = v'$, y se pasa cada raíz a su lado:

$$\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} = \pm\frac{v'}{\sqrt{1+v^2}}.$$

Cada miembro es la derivada de un argumento seno hiperbólico, porque $(\operatorname{argsh} s)' = 1/\sqrt{1+s^2}$. Integrando,

$$\operatorname{argsh} u - \operatorname{argsh} v = c \qquad \text{y} \qquad \operatorname{argsh} u + \operatorname{argsh} v = c,$$

que son las dos familias de líneas de curvatura, una curva por cada valor de c.

Paso 3: leerlas. Por el origen pasa $c = 0$ de cada familia: $u = v$ y $u = -v$. Son las curvas (t,t,t^2) y $(t,-t,-t^2)$, las secciones de la silla por los planos $y = x$ e $y = -x$: una parábola que sube y otra que baja, que son las dos secciones principales del modelo.

Qué hizo la hipótesis. La proposición pide puntos no umbílicos, y aquí no hay ninguno: $H = -uv/W^3$ y $K = -1/W^4$, así que $H^2 - K = u^2v^2/W^6 + 1/W^4 > 0$ en todo punto. Por eso en cada punto hay dos direcciones principales distintas, y por cada punto (u,v) pasa exactamente una curva de cada familia: la de $c = \operatorname{argsh} u \mp \operatorname{argsh} v$.

Qué se ha ganado. La proposición se ha vuelto un procedimiento: los coeficientes, la ecuación en (λ,μ), la ecuación diferencial y, si se deja, separar variables. Y el ejemplo enseña algo que la fórmula esconde: el valor de L_{12} no ha intervenido, solo que no se anula. La segunda forma es, en todos los puntos, un múltiplo de la misma matriz, y aun así las direcciones principales cambian de un punto a otro. Lo que las mueve es la métrica: es $L = II\,G^{-1}$, la comparación de las dos formas, y no la segunda forma sola, lo que decide hacia dónde se curva más la superficie.

4.5.2 Líneas asintóticas

Definición. Dos vectores tangentes no nulos X, Y son **direcciones conjugadas** si $II(X, Y) = 0$. Un vector $X \neq 0$ es una **dirección asintótica** si es conjugado consigo mismo, es decir, si $II(X, X) = 0$. Una curva regular cuyo vector tangente es asintótico en cada punto se llama **línea asintótica**.

Por el teorema (p. 249), una curva es línea asintótica si y solo si su curvatura normal es idénticamente nula, que es la definición operativa ya usada en el capítulo anterior.

Observación (cuántas hay, según el tipo de punto)**.** Una dirección es asintótica si $\sum_{i,j} L_{ij}\lambda_i\lambda_j = 0$, ecuación de segundo grado cuyo discriminante, salvo el factor positivo 4, es $L_{12}^2 - L_{11}L_{22}$, es decir, el opuesto del numerador de K. Por tanto:

- en un punto **elíptico** no hay ninguna dirección asintótica (el vector cero no define dirección);
- en un punto **hiperbólico** hay exactamente dos;
- en un punto **parabólico** hay una sola;
- en un punto **plano** todas las direcciones son asintóticas.

LA IDEA: QUÉ ES UNA DIRECCIÓN ASINTÓTICA

Es la dirección en la que la superficie y su plano tangente tienen **mayor contacto**, es decir, aquella en la que la superficie se separa del plano tangente más despacio.
Con esa lectura, el recuento anterior sale sin discriminantes, recordando la figura de la clasificación de puntos:

- en un punto elíptico la superficie se aleja del plano tangente hacia el mismo lado en todas las direcciones, así que no hay ninguna en la que se quede pegada;
- en un punto hiperbólico la superficie cruza su plano tangente, y lo cruza por dos direcciones: las asintóticas son justo las que separan la zona que sube de la que baja;
- en un punto parabólico hay una única dirección con curvatura normal nula;
- en un punto plano no hay curvatura de segundo orden en ninguna dirección.

En una silla de montar, las dos asintóticas son las que van por el borde entre la subida y la bajada. En un cilindro, la única es la de las generatrices, que son rectas.

Teorema. Cerca de un punto hiperbólico, por cada punto pasan dos líneas asintóticas locales, obtenidas integrando $\sum_{i,j} L_{ij}u_i'u_j' = 0$.

Por continuidad, $K < 0$ en un entorno. La ecuación cuadrática tiene allí dos raíces simples como direcciones, que varían suavemente. Integrando localmente esos dos campos de rectas se obtienen las dos familias de curvas. ■

Corolario. Las curvas paramétricas de una s.p. son líneas asintóticas si y solo si $L_{11} = L_{22} = 0$.

En la silla $z = xy$, con números. En la carta $x(u, v) = (u, v, uv)$ del ejemplo de las líneas de curvatura, $L_{11} = L_{22} = 0$ en todos los puntos, y la ecuación de las asintóticas se queda en $2L_{12}\lambda\mu = 0$: las paramétricas son asintóticas. Son las rectas $v \mapsto (u_0, v, u_0v)$ y $u \mapsto (u, v_0, uv_0)$. La silla está hecha de dos familias de rectas, y una recta contenida en una superficie es siempre asintótica: tiene curvatura nula, luego $K_n = 0$ por Meusnier. En el origen estas rectas son los

ejes, a 45° de las direcciones principales, como pide Euler con $k_1 = -k_2$ y θ medido desde una de ellas: $K_n = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta$ se anula a 45°. En otro punto el ángulo ω entre las dos asintóticas ya no es recto, porque $\cos\omega = g_{12}/\sqrt{g_{11}g_{22}} = uv/\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}$. Pero las direcciones principales siguen siendo sus bisectrices, porque la fórmula de Euler da el mismo valor en θ y en $-\theta$, y las dos asintóticas son $\pm\theta_0$.

Proposición. Una curva regular contenida en una superficie, con $k > 0$, es línea asintótica si y solo si $\mathbf{N}(t) = \pm\mathbf{b}(t)$ en cada punto.

La idea, en una línea. Curvatura normal nula significa que la curva se dobla *sin componente hacia fuera del suelo*, es decir, que su normal principal es perpendicular al normal de la superficie; y en el espacio solo hay una dirección unitaria perpendicular a la vez al tangente y al normal principal, que es la binormal.

Ser asintótica es $K_n \equiv 0$, y por el teorema de Meusnier $K_n = k\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{N}$. Como $k > 0$, eso equivale a que $\mathbf{n}$ y $\mathbf{N}$ sean perpendiculares. Pero $\mathbf{N}$ también es perpendicular a $\mathbf{t}$, por ser este tangente a la superficie. Un vector unitario perpendicular a $\mathbf{t}$ y a $\mathbf{n}$ solo puede ser $\pm\mathbf{b}$. ■

4.5.3 Superficies regladas y desarrollables

Las superficies regladas del capítulo 2 vuelven aquí, y con la maquinaria de este capítulo se puede decir mucho más de ellas. Merece la pena, porque son las que se construyen una y otra vez a partir de una curva.

Sea $x(t,v) = \alpha(t) + v\,\omega(t)$ una superficie reglada, con ω unitario.

Proposición (toda reglada tiene curvatura de Gauss no positiva)**.** En los puntos regulares de toda superficie reglada se verifica $K \le 0$. En consecuencia, sus puntos son hiperbólicos, parabólicos o planos, nunca elípticos.

La idea, en una línea. Una reglada es *lineal* en el parámetro v, y derivar dos veces algo lineal da cero; ese cero se instala en la esquina L_{22} del determinante de la segunda forma fundamental y lo deja convertido en $-L_{12}^2$, que no puede ser positivo. Toda la demostración es esa observación.

Paso 1: derivar la parametrización. Las derivadas parciales son

$$\mathbf{X}_1 = \alpha' + v\,\omega', \qquad \mathbf{X}_2 = \omega,$$

y las segundas

$$X_{11} = \alpha'' + v\,\omega'', \qquad X_{12} = \omega', \qquad X_{22} = 0.$$

Paso 2: la linealidad en v anula una esquina del determinante (el núcleo de la prueba). La última derivada es la clave: al derivar dos veces respecto de v se obtiene cero, porque la superficie es *lineal* en v. Por tanto

$$L_{22} = X_{22}\cdot\mathbf{N} = 0,$$

y la curvatura de Gauss vale

$$K = \frac{\det(II)}{g} = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g} = \frac{-L_{12}^2}{g} \leq 0,$$

ya que $g > 0$. ■

LA IDEA: EL RESULTADO QUE EVITA CLASIFICAR PUNTO POR PUNTO

Esta proposición merece memorizarse tal cual, porque el enunciado típico es «dar una parametrización de esta superficie reglada y clasificar sus puntos», y la mitad del trabajo está hecho antes de empezar: no puede haber puntos elípticos.
La razón geométrica es transparente. Por cada punto de una reglada pasa una recta contenida en la superficie. Una recta es una curva de curvatura nula, luego su curvatura normal es nula, luego su dirección es asintótica. Y ya se vio que en un punto elíptico no hay ninguna dirección asintótica. Así que ningún punto de una reglada puede ser elíptico.
Con eso, clasificar los puntos de una reglada se reduce a decidir dónde se anula L_{12}. Donde no se anula, $K < 0$ y el punto es hiperbólico. Donde sí se anula, $K = 0$, y entonces hay que mirar L_{11}: si no es nulo el punto es parabólico, y si también se anula es un punto plano, porque entonces la segunda forma fundamental es idénticamente nula.

Definición. Una superficie reglada se dice **desarrollable** si

$$(\alpha'(t), \omega(t), \omega'(t)) = 0 \qquad \text{para todo } t.$$

Teorema. Una superficie reglada es desarrollable si y solo si su curvatura de Gauss es idénticamente nula en su parte regular. En tal caso, el plano tangente es constante a lo largo de cada tramo regular conexo de generatriz.

La idea, antes de la cuenta: la condición del producto mixto *es* L_{12}. El enunciado empareja dos cosas que no se parecen: una condición con tres vectores de la curva directriz y una condición sobre la curvatura de Gauss. La demostración enseña que son la misma escrita de dos maneras, y el puente es corto. Por la proposición anterior, K ya es $-L_{12}^2/g$, así que anular K es anular L_{12}; y al calcular L_{12} aparece, literalmente, el producto mixto $(\alpha', \omega, \omega')$. No hay ningún salto.

La imagen para la segunda afirmación, que es la que de verdad explica el nombre. Si la reglada es desarrollable, el vector normal es el mismo en todos los puntos de una misma generatriz. Es decir, la superficie toca a un único plano a lo largo de toda una recta, no en un punto: es como una hoja de papel apoyada sobre una mesa, que la toca por una línea entera. Desplazando ese plano de tangencia a medida que uno avanza por las generatrices se reconstruye la superficie, y desenrollarla es deshacer ese movimiento. Esto describe cómo encajan sus planos tangentes a lo largo de las generatrices; la posibilidad de extenderla localmente sin alterar distancias se precisa a continuación.

Paso 1: reducir $K = 0$ a $L_{12} = 0$ y calcular ese coeficiente. Por la proposición anterior, $K = 0$ equivale a $L_{12} = 0$. Se calcula ese coeficiente:

$$L_{12} = X_{12}\cdot\mathbf{N} = \omega'\cdot\mathbf{N}, \qquad \mathbf{N} = \frac{\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|} = \frac{\alpha' \times \omega + v\,(\omega' \times \omega)}{|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|}.$$

Paso 2: la parte del normal que depende de v muere por tener un argumento repetido (el núcleo de la prueba). El segundo sumando no aporta nada, porque $\omega'\cdot\omega' \times \omega = 0$ al tener el producto mixto dos argumentos repetidos. Ahí está la razón de que la condición de desarrollable no dependa de v, es decir, de que sea una condición sobre la generatriz entera y no punto por punto. Queda

$$L_{12} = \frac{\omega'\cdot\alpha' \times \omega}{|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|} = \frac{(\alpha', \omega, \omega')}{|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|},$$

donde la última igualdad es una permutación cíclica del producto mixto. Luego $L_{12} = 0$ si y solo si $(\alpha', \omega, \omega') = 0$, que es la condición de desarrollable.
Paso 3: el plano tangente es constante sobre cada generatriz. Obsérvese que

$$L(\omega)\cdot\omega = L_{22} = 0, \qquad L(\omega)\cdot\mathbf{X}_1 = L_{12} = 0,$$

de modo que si la superficie es desarrollable, $L(\omega)$ es ortogonal a los dos vectores de una base del plano tangente y por tanto es nulo. Como $L = -d\mathbf{N}$, eso dice que $\mathbf{N}$ no varía al moverse en la dirección de ω, es decir, a lo largo de la generatriz. ■

Qué hizo cada hipótesis. La normalización de ω simplifica la notación, pero esta prueba no la necesita: $X_{22} = 0$ y la condición del producto mixto siguen siendo válidas para cualquier ω no nulo. Y la regularidad de la superficie, es decir, $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \neq 0$, es lo que permite dividir por $|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|$ y hablar de $\mathbf{N}$: en los puntos singulares de una reglada — que existen, y salen en los ejercicios — el teorema simplemente no dice nada.

LA IDEA: POR QUÉ SE LLAMAN «DESARROLLABLES»

El nombre viene de que estas superficies se pueden *desarrollar* sobre un plano, es decir, extender sobre él sin estirarlas ni romperlas.
Desarrollable significa $K \equiv 0$. El teorema egregio dice que esta es una condición necesaria para ser localmente isométrica al plano; la suficiencia usa el resultado de Minding para curvatura constante. La conclusión es local: para desplegar un cilindro o un cono completos hace falta hacer un corte, y se excluyen sus puntos singulares.
Las tres familias que hay que reconocer de vista:

- **Cilindros**, donde ω es constante y por tanto $\omega' = 0$;
- **Conos**, donde todas las generatrices pasan por un punto;
- **Superficies de las tangentes** de una curva, con $\omega = \mathbf{t}$, donde el producto mixto es $(\mathbf{t}, \mathbf{t}, \dot{\mathbf{t}}) = 0$ por repetir argumento.

En los tres casos la condición se comprueba en una línea, y conviene tenerlo visto para no calcular de más.
Y el contraejemplo que conviene tener a mano: la superficie de las **binormales** de una curva no es desarrollable si la torsión no se anula, porque $(\mathbf{t}, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}) = (\mathbf{t}, \mathbf{b}, -\tau\mathbf{n}) =$

$-\tau\,(\mathbf{t},\mathbf{b},\mathbf{n}) = \tau \neq 0$. Es decir, sus puntos son hiperbólicos, y de ahí que clasificarlos sea un ejercicio recurrente.

EXPLÍCATE. *Comprueba con la fórmula que la superficie de las* normales principales *de una curva es desarrollable si y solo si la torsión se anula. La cuenta es de dos líneas y usa una ecuación de Frenet-Serret.*

CONEXIÓN: GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA DE SUPERFICIES

Las desarrollables son el ejemplo más sencillo de superficie con curvatura de Gauss nula, y por tanto el caso en que el término de área del teorema de Gauss-Bonnet desaparece. Sobre una desarrollable, ese teorema se reduce a una relación entre la curvatura geodésica de la frontera y los ángulos de las esquinas, exactamente igual que en el plano.
Tiene sentido: cerca de cada punto regular una desarrollable es isométrica a un trozo de plano. La afirmación no identifica la geometría global del cilindro completo con la del plano.

4.5.4 Las superficies de revolución, de una vez por todas

Merece la pena hacer este cálculo entero y guardarlo, porque las superficies de revolución aparecen en casi todos los ejercicios y sus curvaturas se necesitan una y otra vez.

Sea la generatriz $\alpha(u) = \big(f(u), 0, h(u)\big)$ con $f > 0$, girada alrededor del eje OZ:

$$x(u,v) = \big(f(u)\cos v,\ f(u)\operatorname{sen} v,\ h(u)\big).$$

Se supone la generatriz parametrizada por su arco, es decir, $f'^2 + h'^2 = 1$. No es pérdida de generalidad y simplifica todo.

El plan es el de siempre: las dos formas fundamentales, y después leer en ellas las curvaturas. Lo que hace este caso agradable es que casi todas las cuentas terminan en la identidad $\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v = 1$, que es la que borra la variable v y deja expresiones que solo dependen de u. Conviene ir viéndolo aparecer.

Primera forma fundamental. Derivando respecto de u y respecto de v,

$$\mathbf{X}_1 = \big(f'\cos v,\ f'\operatorname{sen} v,\ h'\big), \qquad \mathbf{X}_2 = \big(-f\operatorname{sen} v,\ f\cos v,\ 0\big),$$

$$g_{11} = f'^2 + h'^2 = 1, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = f^2.$$

Cada uno de los tres coeficientes dice algo. Que $g_{11} = 1$ es exactamente la hipótesis de que la generatriz va a velocidad uno: el parámetro u mide longitud sobre el meridiano. Que $g_{22} = f^2$ dice que el paralelo de parámetro u es una circunferencia de radio $f(u)$, que es la distancia al eje: por eso f tiene que ser positiva. Y que $g_{12} = 0$ es la ortogonalidad entre meridianos y paralelos, que se ve sin cuentas —el meridiano sube y el paralelo gira— pero que aquí sale sola porque el término en $\cos v \operatorname{sen} v$ aparece dos veces con signos opuestos.

Vector normal. Un cálculo directo da $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = \big(-fh'\cos v,\ -fh'\operatorname{sen} v,\ ff'\big)$, de norma f, luego

$$\mathbf{N} = \big(-h'\cos v,\ -h'\operatorname{sen} v,\ f'\big).$$

La norma sale sin esfuerzo: al elevar al cuadrado y sumar, las dos primeras componentes dan $f^2h'^2$ y la tercera $f^2f'^2$, cuya suma es $f^2(f'^2 + h'^2) = f^2$ por la condición de arco. Por eso $\sqrt{g} = f$, un dato que se usará a cada paso. Y obsérvese que $\mathbf{N}$ es el vector $(-h', f')$ del plano

del perfil, que es el normal de la curva generatriz, girado alrededor del eje: el normal de la superficie es el normal del perfil llevado de paseo.

Segunda forma fundamental. Ahora hacen falta las tres derivadas segundas, y los coeficientes son sus productos escalares contra el normal, $L_{ij} = X_{ij}\cdot\mathbf{N}$. Con $X_{11} = (f''\cos v, f''\operatorname{sen} v, h'')$, $X_{12} = (-f'\operatorname{sen} v, f'\cos v, 0)$ y $X_{22} = (-f\cos v, -f\operatorname{sen} v, 0)$,

$$L_{11} = f'h'' - f''h', \qquad L_{12} = 0, \qquad L_{22} = f\,h'.$$

Las tres cuentas son la misma. En L_{11}, los productos de las dos primeras componentes dan $-f''h'\cos^2 v - f''h'\operatorname{sen}^2 v = -f''h'$, y la tercera añade $f'h''$. En L_{22} ocurre igual: queda $fh'(\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) = fh'$. Y en L_{12} los dos términos son $f'h'\operatorname{sen} v\cos v$ y $-f'h'\cos v\operatorname{sen} v$, que se cancelan: el mismo mecanismo que anuló g_{12}, y no es casualidad, porque las dos cosas expresan la simetría de revolución.

LA IDEA: LO PRIMERO QUE HAY QUE MIRAR

Obsérvese que $g_{12} = 0$ y $L_{12} = 0$. Por el corolario (p. 262), eso significa que **en toda superficie de revolución los meridianos y los paralelos son líneas de curvatura**.
Y no es solo una curiosidad: es lo que permite leer las curvaturas principales directamente de las diagonales, sin resolver ninguna ecuación de segundo grado,

$$k_1 = \frac{L_{11}}{g_{11}} = f'h'' - f''h', \qquad k_2 = \frac{L_{22}}{g_{22}} = \frac{h'}{f}.$$

La primera es la curvatura *con signo* del perfil respecto del normal $(-h', f')$; la segunda es la curvatura normal en la dirección del paralelo. La dirección de máxima y la de mínima curvatura son, en una superficie de revolución, la del meridiano y la del paralelo. Es lo que uno esperaría al mirar un jarrón.

Proposición (curvatura de Gauss de una superficie de revolución)**.** Con la generatriz parametrizada por su arco,

$$K = -\frac{f''}{f}.$$

La idea, en una línea. La única pieza que no es cálculo directo es esta: como la generatriz está parametrizada por su arco, su velocidad tiene módulo constante, y derivar esa condición da una relación entre $f'f''$ y $h'h''$ que permite eliminar h por completo de la fórmula. Todo lo demás es sustituir.

Paso 1: usar que el perfil va a velocidad uno (el núcleo de la prueba). Derivando la condición $f'^2 + h'^2 = 1$ se obtiene $f'f'' + h'h'' = 0$, es decir, $h'h'' = -f'f''$. Entonces

$$k_1 h' = \big(f'h'' - f''h'\big)h' = f'\,(h'h'') - f''h'^2 = -f'^2 f'' - f''h'^2 = -f''\big(f'^2 + h'^2\big) = -f''.$$

Paso 2: multiplicar las dos curvaturas principales. Por tanto

$$K = k_1 k_2 = k_1\,\frac{h'}{f} = \frac{-f''}{f}.\blacksquare$$

LA IDEA: UNA FÓRMULA QUE SE LEE SOLA

La expresión $K = -f''/f$ es de las más útiles del libro y conviene entenderla, no memorizarla.

El denominador f es la distancia al eje, siempre positivo. Así que **el signo de la curvatura de Gauss es el opuesto al signo de** f'', es decir, al de la concavidad del perfil:

- Perfil **cóncavo hacia el eje**, con $f'' < 0$: curvatura positiva, puntos elípticos. Es lo que pasa en una esfera o en la parte exterior de un toro.
- Perfil **recto**, con $f'' = 0$: curvatura nula. Cilindros y conos.
- Perfil **convexo**, con $f'' > 0$: curvatura negativa, puntos hiperbólicos. Es la parte interior de un toro, o la garganta de un catenoide.

Comprobaciones que conviene hacer una vez y no olvidar:

Superficie	$f(u)$	f''	K
Esfera unidad	$\cos u$	$-\cos u$	1
Cilindro de radio r	r	0	0
Cono	$u \operatorname{sen} a$	0	0

Y la fórmula tiene una lectura más: es el teorema egregio en miniatura. En la cuenta se usaron el normal y la segunda forma, y $k_2 = h'/f$ depende de h, es decir, de cómo está colocado el perfil en el espacio. En el producto, h ha desaparecido, y $K = -f''/f$ solo contiene f, que se lee en la primera forma: $g_{22} = f^2$, y $2\pi f(u)$ es la longitud del paralelo que está a distancia u del paralelo $u = 0$, medida a lo largo de un meridiano. Un habitante que mida esas longitudes conoce K sin salir de la superficie. No es una demostración del egregio, porque la cuenta sí salió de la superficie. Es el egregio visto en un caso en que la cancelación ocurre delante de los ojos.

Ejercicio 4.1. *Las superficies de revolución llanas* [H4.7]

Probar que las únicas superficies de revolución con curvatura de Gauss idénticamente nula son aquellas cuyos meridianos son rectas.

Resolución. Por la proposición anterior, $K \equiv 0$ equivale a $f'' \equiv 0$, ya que $f > 0$. Luego

$$f(u) = au + b, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo en la condición de arco, $h'^2 = 1 - f'^2 = 1 - a^2$, que es constante; en particular $|a| \leq 1$ y, por continuidad en el intervalo, h' es constante, de modo que h también es una función afín de u.

Por tanto la generatriz $\alpha(u) = \big(f(u), 0, h(u)\big)$ tiene las dos coordenadas afines en u: es una recta. Y al girar, esos meridianos son rectas. Recíprocamente, un perfil rectilíneo parametrizado por arco tiene $f'' = 0$, luego $K = 0$. ■

Observación. Según el valor de a se obtienen los tres casos posibles, que conviene saber distinguir: $a = 0$ da un cilindro, $|a| = 1$ da un plano, y los valores intermedios dan un cono. Son exactamente las superficies desarrollables de revolución, cosa coherente con la sección

anterior: desarrollable equivale a curvatura de Gauss nula.

QUÉ DEJA. La fórmula $K = -f''/f$ y la lectura de su signo por la concavidad del perfil, que clasifica los puntos de cualquier superficie de revolución de un vistazo. Y el hecho de que en ellas meridianos y paralelos son siempre líneas de curvatura, que permite leer las dos curvaturas principales sin resolver ninguna ecuación.

4.5.5 Las tres condiciones, juntas

La pregunta que reaparece una y otra vez es, dada una curva sobre una superficie, si es geodésica, línea de curvatura o línea asintótica. Conviene tener las tres caracterizaciones en el mismo sitio. En la tabla se supone parámetro natural (o velocidad constante) para la geodésica; con parámetro arbitrario, $K_g = 0$ caracteriza su traza. La fila que usa $\mathbf{n}$ y $\mathbf{b}$ requiere $k > 0$.

	Geodésica	**Línea asintótica**	**Línea de curvatura**
Condición	$K_g \equiv 0$	$K_n \equiv 0$	α' principal
Con el triedro	$\mathbf{n} = \pm\mathbf{N}$	$\mathbf{b} = \pm\mathbf{N}$	$\mathbf{N}' \parallel \alpha'$
Naturaleza	intrínseca	extrínseca	extrínseca

LA IDEA: CÓMO USAR LA TABLA, Y DÓNDE ESTÁN LAS TRAMPAS

La segunda fila es la que resuelve los apartados de «justificar sin calcular», y conviene leerla como una sola idea. El vector $\mathbf{N}$ siempre es perpendicular a $\mathbf{t}$, así que vive en el plano generado por $\mathbf{n}$ y $\mathbf{b}$. Entonces:

- si $\mathbf{N}$ apunta hacia $\mathbf{n}$, la curva es **geodésica**;
- si apunta hacia $\mathbf{b}$, es **línea asintótica**;
- en cualquier posición intermedia, no es ninguna de las dos.

Es exactamente el reparto que apareció al final del capítulo anterior con la curva plana. Y ahora se ve por qué geodésica y asintótica son incompatibles salvo en un caso: si una curva fuera las dos y tuviera $k > 0$, $\mathbf{N}$ tendría que ser paralelo a dos vectores ortogonales. Sin usar Frenet, $K_g = K_n = 0$ implica directamente $\dot{\mathbf{t}} = 0$: la traza es recta. De ahí el caso excepcional que conviene memorizar:

Toda recta contenida en una superficie, recorrida a velocidad constante, es a la vez geodésica y línea asintótica de ella.

Ser línea de curvatura es independiente de las otras dos y se comprueba de otro modo: no mira el triedro de Frenet, mira cómo varía el normal de la superficie. Una curva puede ser las tres cosas, dos, una o ninguna.

Dos avisos que conviene tener presentes:

- Ser geodésica es lo único intrínseco de la tabla. Por eso dos superficies tangentes a lo largo de una curva tienen la misma proyección tangente de su aceleración: esa curva es geodésica en una si y solo si lo es en la otra. Esto no afirma que compartan otras geodésicas fuera de la curva de contacto.

- La curvatura geodésica y la normal cambian de signo al invertir la orientación, pero anularse o no es independiente de ella. Las tres propiedades de la tabla están, por tanto, bien definidas.

CONEXIÓN: GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA DE SUPERFICIES

Allí estas curvas siguen apareciendo, pero el foco se desplaza. Lo que más se hereda de esta sección es la clasificación de puntos por el signo de la curvatura de Gauss, porque es la que decide el comportamiento de los triángulos geodésicos.
Para un triángulo geodésico simple que encierra una región disco, si $K > 0$ en ella la integral de Gauss-Bonnet es positiva y hay exceso angular; si $K < 0$, hay defecto. La geometría hiperbólica corresponde al modelo de curvatura negativa constante; no todo punto hiperbólico implica que la curvatura sea constante cerca de él.

DE DÓNDE VIENE: OLINDE RODRIGUES, UN MATEMÁTICO CON OTRA VIDA

El teorema de las líneas de curvatura lleva el nombre de Benjamin Olinde Rodrigues, que lo obtuvo hacia 1815, en su tesis, con poco más de veinte años.
Su actividad se extendió también a la banca y a la difusión de las ideas sociales del sansimonismo. Eso no supuso abandonar por completo las matemáticas: además de la fórmula que lleva su nombre para los polinomios de Legendre, publicó en 1840 una memoria sobre los movimientos de los cuerpos rígidos y las rotaciones del espacio.
Es un buen recordatorio de que varios de los resultados que aquí aparecen con nombre propio fueron obtenidos por gente que estaba haciendo otra cosa.

Ejercicios de esta sección

Ejercicio 4.2. *La torsión geodésica y las ecuaciones de Darboux* [H4.14]

Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. sobre una superficie parametrizada. Se define la **torsión geodésica** de α como $\tau_g(s) = (\mathbf{N}(s), \dot{\mathbf{N}}(s), \mathbf{t}(s))$. Se pide:

1. Probar que en todo punto
$$\dot{\mathbf{N}} = -K_n\,\mathbf{t} - \tau_g\,\mathbf{S}, \qquad \dot{\mathbf{S}} = -K_g\,\mathbf{t} + \tau_g\,\mathbf{N}.$$
2. Suponiendo $k > 0$ para que exista el triedro de Frenet, probar que si α es geodésica entonces $\tau = \tau_g$, y que lo mismo ocurre si es línea asintótica.
3. Probar que en todo punto
$$\dot{\mathbf{N}}\cdot\dot{\mathbf{N}} + 2H\,\dot{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{t} + K = 0,$$
y deducir que si α es línea asintótica, entonces $\tau_g^2 = -K$.

Resolución. La idea, en una línea. Es la cuenta de Frenet-Serret repetida con otro triedro. La derivada de un vector unitario es ortogonal a él, así que se escribe con los otros dos, y cada coeficiente sale de derivar uno de los productos escalares nulos del triedro. Dos coeficientes ya tienen nombre, K_g y K_n; el único que queda sin nombre es τ_g.

Primer apartado. Como $\mathbf{S}$ es unitario, $\dot{\mathbf{S}}$ es ortogonal a $\mathbf{S}$, luego se escribe en la base $\{\mathbf{t}, \mathbf{N}\}$.

Sus coeficientes salen de derivar las identidades correspondientes:

$$\dot{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{t} = -\mathbf{S}\cdot\dot{\mathbf{t}} = -\mathbf{S}\cdot\big(K_g\mathbf{S} + K_n\mathbf{N}\big) = -K_g,$$

usando la descomposición de Darboux (3.2) de $\dot{\mathbf{t}} = \ddot{\alpha}$. Llamando $c = \dot{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{N}$, queda $\dot{\mathbf{S}} = -K_g\,\mathbf{t} + c\,\mathbf{N}$.

Con $\mathbf{N}$ en el papel de $\mathbf{S}$ el argumento se repite palabra por palabra, y lo único que cambia es qué queda al otro lado del producto escalar: $\mathbf{N}$ también es unitario, luego $\dot{\mathbf{N}}$ es ortogonal a $\mathbf{N}$ y se escribe en la base $\{\mathbf{t}, \mathbf{S}\}$, con

$$\dot{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{t} = -\mathbf{N}\cdot\dot{\mathbf{t}} = -K_n, \qquad \dot{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{S} = -\mathbf{N}\cdot\dot{\mathbf{S}} = -c,$$

donde la segunda igualdad reutiliza el $\dot{\mathbf{S}}$ recién calculado, de donde $\dot{\mathbf{N}} = -K_n\,\mathbf{t} - c\,\mathbf{S}$.

Falta ver que c es la torsión geodésica del enunciado. Calculando,

$$\mathbf{N}\times\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{N}\times\big(-K_n\mathbf{t} - c\,\mathbf{S}\big) = -K_n\,\mathbf{S} + c\,\mathbf{t},$$

usando $\mathbf{N}\times\mathbf{t} = \mathbf{S}$ y $\mathbf{N}\times\mathbf{S} = -\mathbf{t}$. Multiplicando escalarmente por $\mathbf{t}$ queda $(\mathbf{N}, \dot{\mathbf{N}}, \mathbf{t}) = c$, es decir, $c = \tau_g$. ■

LA IDEA: LAS ECUACIONES DE DARBOUX SON LAS DE FRENET-SERRET OTRA VEZ

Juntando lo anterior con la descomposición de Darboux, las tres derivadas del triedro $\{\mathbf{t}, \mathbf{S}, \mathbf{N}\}$ quedan

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{S}\\ \mathbf{N}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & K_g & K_n\\ -K_g & 0 & \tau_g\\ -K_n & -\tau_g & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{S}\\ \mathbf{N}\end{pmatrix}.$$

La matriz vuelve a ser **antisimétrica**, por la misma razón que en el capítulo 1: es la condición necesaria y suficiente para que el triedro siga siendo ortonormal al avanzar. Y vuelve a haber exactamente tres coeficientes independientes, que son las tres funciones que describen la curva sobre la superficie:

$$K_g, \qquad K_n, \qquad \tau_g.$$

Estas son las *ecuaciones de Darboux*, y son a una curva sobre una superficie lo que las de Frenet-Serret eran a una curva en el espacio.
Lo mejor es que las tres condiciones de la tabla de la sección anterior se leen ahora en la matriz, una por coeficiente:

$K_g = 0$	la curva es **geodésica**
$K_n = 0$	la curva es **línea asintótica**
$\tau_g = 0$	la curva es **línea de curvatura**

La última equivalencia sale del teorema de Olinde Rodrigues: ser línea de curvatura es que $\dot{\mathbf{N}}$ sea paralelo a $\mathbf{t}$, y en $\dot{\mathbf{N}} = -K_n\mathbf{t} - \tau_g\mathbf{S}$ eso ocurre justo cuando $\tau_g = 0$.
Esa correspondencia entre los tres coeficientes y las tres propiedades es, con diferencia, lo más útil de todo el capítulo. Merece la pena escribir la matriz en el folio antes de empezar cualquier problema de este tipo.

Segundo apartado. **La idea es que los dos triedros solo se diferencian en un giro.** Frenet y Darboux comparten el vector $\mathbf{t}$ y ambos son ortonormales directos, así que uno es el otro girado un ángulo φ alrededor de $\mathbf{t}$:

$$\mathbf{n} = \cos\varphi\,\mathbf{S} + \operatorname{sen}\varphi\,\mathbf{N}, \qquad \mathbf{b} = -\operatorname{sen}\varphi\,\mathbf{S} + \cos\varphi\,\mathbf{N}.$$

Si el ángulo fuera constante, los dos triedros girarían al unísono y las dos torsiones coincidirían; toda la diferencia entre τ y τ_g tiene que ser, por tanto, $\dot\varphi$. Eso es lo que confirma la cuenta.

Derivando la segunda igualdad y sustituyendo $\dot{\mathbf{S}}$ y $\dot{\mathbf{N}}$ por las ecuaciones de Darboux,

$$\dot{\mathbf{b}} = -\dot\varphi\,\mathbf{n} - \tau_g\,\mathbf{n} + \big(K_g \operatorname{sen}\varphi - K_n\cos\varphi\big)\,\mathbf{t},$$

donde los dos primeros sumandos salen de reagrupar $\cos\varphi\,\mathbf{S} + \operatorname{sen}\varphi\,\mathbf{N} = \mathbf{n}$. El tercer sumando se anula, y esa es la única cuenta que hay que hacer: al comparar $\ddot\alpha = k\,\mathbf{n}$ con la descomposición de Darboux $\ddot\alpha = K_g\mathbf{S} + K_n\mathbf{N}$ y usar la primera igualdad de arriba se lee $K_g = k\cos\varphi$ y $K_n = k\operatorname{sen}\varphi$, con lo que $K_g\operatorname{sen}\varphi - K_n\cos\varphi = 0$. Queda

$$\dot{\mathbf{b}} = -\big(\dot\varphi + \tau_g\big)\,\mathbf{n},$$

y como por definición $\dot{\mathbf{b}} = -\tau\,\mathbf{n}$, resulta la relación general

$$\tau = \tau_g + \dot\varphi. \tag{4.2}$$

Ahora los dos casos. Si α es geodésica, $\mathbf{n} = \pm\mathbf{N}$, lo que obliga a $\cos\varphi = 0$ y por tanto a que φ sea constante. Si α es línea asintótica, $\mathbf{b} = \pm\mathbf{N}$, lo que obliga a $\operatorname{sen}\varphi = 0$ y de nuevo a que φ sea constante. En los dos casos $\dot\varphi = 0$ y (4.2) da $\tau = \tau_g$. ■

Tercer apartado. **La idea: la identidad que se pide no es de geometría, es la ecuación característica del operador forma escrita con vectores.** Un endomorfismo de un plano satisface un polinomio de grado dos cuyos dos coeficientes son la traza y el determinante; y en este caso la traza es $2H$ y el determinante es K, que son justo los dos números que aparecen en el enunciado. Todo el apartado consiste en aplicar esa identidad al vector $\mathbf{t}$ y traducir cada término al lenguaje de $\dot{\mathbf{N}}$.

Por la proposición (p. 245), $\dot{\mathbf{N}} = -L\mathbf{t}$. El operador forma es un endomorfismo de un plano, así que cumple su ecuación característica, que es el teorema de Cayley-Hamilton:

$$L^2 - \operatorname{Traza}(L)\,L + \det(L)\,\mathrm{Id} = 0, \qquad \text{es decir} \qquad L^2 - 2H\,L + K\,\mathrm{Id} = 0.$$

Aplicando esta identidad al vector $\mathbf{t}$ y multiplicando escalarmente por $\mathbf{t}$,

$$L^2\mathbf{t}\cdot\mathbf{t} - 2HL\mathbf{t}\cdot\mathbf{t} + K = 0.$$

Ahora se traduce cada término. Como L es autoadjunto, $L^2\mathbf{t}\cdot\mathbf{t} = L\mathbf{t}\cdot L\mathbf{t} = \dot{\mathbf{N}}\cdot\dot{\mathbf{N}}$. Y $L\mathbf{t}\cdot\mathbf{t} = -\dot{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{t}$. Sustituyendo,

$$\dot{\mathbf{N}}\cdot\dot{\mathbf{N}} + 2H\dot{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{t} + K = 0.$$

Para la consecuencia, si α es línea asintótica entonces $K_n = 0$ y el primer apartado da $\dot{\mathbf{N}} = -\tau_g\mathbf{S}$, de donde $\dot{\mathbf{N}}\cdot\dot{\mathbf{N}} = \tau_g^2$ y $\dot{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{t} = 0$. La identidad se reduce a

$$\tau_g^2 + K = 0, \qquad \text{es decir} \qquad \tau_g^2 = -K. \blacksquare$$

LA IDEA: DOS CONSECUENCIAS QUE CONVIENE GUARDAR

La identidad $\tau_g^2 = -K$ del final es más informativa de lo que parece.
Primero, como el miembro izquierdo es un cuadrado, obliga a $K \leq 0$: **por un punto elíptico no pasa ninguna línea asintótica**. Eso ya se sabía por el recuento de direcciones asintóticas, y ahora sale por otra vía completamente distinta.
Segundo, da un método para calcular la curvatura de Gauss sin tocar la segunda forma fundamental: si se encuentra una línea asintótica sobre la superficie, basta calcular su torsión geodésica y cambiar el signo del cuadrado. En superficies regladas, donde las generatrices son rectas y por tanto asintóticas, esto resuelve varios problemas de golpe.
Y merece la pena notar de dónde ha salido todo el tercer apartado: de Cayley-Hamilton. La geometría se ha limitado a traducir; el contenido es álgebra lineal.

La torsión geodésica en las direcciones principales. Las ecuaciones de Darboux admiten una lectura más, que hace de τ_g un objeto tan concreto como K_n. Como $\dot{\mathbf{N}} = -L\mathbf{t}$, los coeficientes de la fila de $\mathbf{N}$ son valores de la segunda forma en la base ortonormal $\{\mathbf{t}, \mathbf{S}\}$ del plano tangente:

$$II(\mathbf{t},\mathbf{t}) = L\mathbf{t}\cdot\mathbf{t} = -\dot{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{t} = K_n, \qquad II(\mathbf{t},\mathbf{S}) = L\mathbf{t}\cdot\mathbf{S} = -\dot{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{S} = \tau_g.$$

El tercer valor, $II(\mathbf{S},\mathbf{S})$, es $2H - K_n$, porque en una base ortonormal la traza es la suma de la diagonal. Así que, en la base $\{\mathbf{t}, \mathbf{S}\}$, la matriz del operador forma es

$$\begin{pmatrix} K_n & \tau_g \\ \tau_g & 2H - K_n \end{pmatrix}.$$

Dicho en palabras: **la curvatura normal es la entrada de la diagonal, y la torsión geodésica, la de fuera**. Que la curva sea línea de curvatura, $\tau_g = 0$, es que esta matriz sea diagonal, es decir, que $\mathbf{t}$ sea autovector. Es el teorema de Rodrigues, leído ahora en una matriz.

Para escribirla con las curvaturas principales, sea φ el ángulo orientado de la primera dirección principal $X_{(1)}$ a $\mathbf{t}$, con $\{X_{(1)}, X_{(2)}, \mathbf{N}\}$ directa. Entonces $\mathbf{t} = \cos\varphi\, X_{(1)} + \operatorname{sen}\varphi\, X_{(2)}$ y $\mathbf{S} = \mathbf{N} \times \mathbf{t} = -\operatorname{sen}\varphi\, X_{(1)} + \cos\varphi\, X_{(2)}$. Como $LX_{(i)} = k_i X_{(i)}$, las dos entradas de la primera fila quedan

$$K_n = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \operatorname{sen}^2\varphi, \qquad \tau_g = (k_2 - k_1)\cos\varphi \operatorname{sen}\varphi = \tfrac{1}{2}(k_2 - k_1)\operatorname{sen} 2\varphi.$$

La primera es el teorema de Euler, y la segunda es su compañera. Dice que la torsión geodésica solo se anula en las direcciones principales, o en todas si el punto es umbílico, y que en valor absoluto es máxima a 45° de ellas, donde vale $|k_1 - k_2|/2$. Al girar $\mathbf{t}$, el par (K_n, τ_g) recorre la circunferencia de centro $(H, 0)$ y radio $|k_1 - k_2|/2$. Quien haya estudiado elasticidad reconocerá el círculo de Mohr: las tensiones normal y tangencial en un plano que gira se reparten exactamente igual.

Un caso con números. En el origen de la silla $z = xy$, las curvaturas principales son 1 y -1, y las direcciones principales son las bisectrices $y = \pm x$. El eje OX forma 45° con ellas. Por eso tiene $K_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, que lo hace asintótico, y la torsión geodésica más grande posible, $|\tau_g| = 1$.

Y el determinante es K. El determinante de la matriz es $K_n(2H - K_n) - \tau_g^2 = K$, y eso es el tercer apartado en una línea: en una línea asintótica $K_n = 0$ y queda $-\tau_g^2 = K$.

QUÉ DEJA. Las ecuaciones de Darboux enteras, con su matriz antisimétrica, y la lectura de sus tres coeficientes como las tres propiedades de la tabla. Y la relación $\tau = \tau_g + \dot{\varphi}$, que traduce entre el triedro de Frenet y el de Darboux y resuelve por sí sola el ejercicio siguiente.

4.5.6 Superficies tangentes a lo largo de una curva

Definición. Dos superficies regulares se dicen **tangentes a lo largo de una curva** α contenida en ambas si en cada punto de α tienen el mismo plano tangente o, lo que es lo mismo, si sus vectores normales coinciden salvo signo.

Teorema. Si dos superficies son tangentes a lo largo de una curva α, entonces, con orientaciones compatibles, coinciden a lo largo de α su curvatura geodésica, su curvatura normal y su torsión geodésica. En consecuencia, α es geodésica de una si y solo si lo es de la otra, y lo mismo ocurre con ser línea asintótica y con ser línea de curvatura.

> El argumento cabe en dos líneas y conviene verlo entero, porque es la clase de razonamiento que ahorra páginas.
> El vector $\mathbf{t}$ es de la curva y no sabe en qué superficie está. Por hipótesis, el vector $\mathbf{N}$ también coincide en las dos. Y entonces $\mathbf{S} = \mathbf{N} \times \mathbf{t}$ coincide: **el triedro de Darboux entero es el mismo para las dos superficies a lo largo de** α.
> Como las tres funciones K_g, K_n y τ_g se obtienen derivando ese triedro, por las ecuaciones de Darboux, también coinciden. Y las tres propiedades del enunciado son exactamente la anulación de cada una de ellas. ■

Observación. Si las orientaciones elegidas son opuestas, $\mathbf{N}$ cambia de signo, y con él cambia de signo $\mathbf{S} = \mathbf{N} \times \mathbf{t}$. En la descomposición $\ddot{\alpha} = K_g\mathbf{S} + K_n\mathbf{N}$ eso obliga a que cambien de signo **tanto** K_g **como** K_n. La torsión geodésica, en cambio, no cambia: es cuadrática en el normal, porque $(-\mathbf{N}, -\dot{\mathbf{N}}, \mathbf{t}) = (\mathbf{N}, \dot{\mathbf{N}}, \mathbf{t})$. Por eso el enunciado que suele darse habla del *valor absoluto* de la curvatura geodésica. Anularse o no, que es lo que decide las tres propiedades, es independiente de la orientación.

LA IDEA: POR QUÉ ESTO CONVIERTE TRES EJERCICIOS EN UNO

La lectura es que **todo lo que se puede saber de una curva mirando solo su triedro de Darboux es compartido por dos superficies tangentes a lo largo de ella**. Las superficies pueden ser muy distintas lejos de la curva; sobre ella, se comportan igual. De ahí sale la respuesta a los apartados que piden *dar ejemplos de dos superficies tangentes a lo largo de una geodésica, de una línea de curvatura o de una línea asintótica*. Son fáciles de construir precisamente porque la propiedad se hereda: basta tomar una superficie donde la curva tenga la propiedad y otra cualquiera que la toque con el mismo plano tangente a lo largo de ella. Por ejemplo, con parámetro natural se puede tomar $x(s, v) = \alpha(s) + v\mathbf{S}(s)$: sobre $v = 0$, $x_s = \mathbf{t}$ y $x_v = \mathbf{S}$ son independientes y generan el plano tangente deseado. Restringiendo a un entorno pequeño se obtiene una superficie regular.
Y de ahí sale también el resultado recíproco, que es el que suele preguntarse con más malicia y que se resuelve en el ejercicio siguiente.

Ejercicio 4.3. *Compartir una asintótica sin ser tangentes*

Probar que si dos superficies comparten una línea asintótica regular y sus planos tangentes son distintos en *cada punto* de ella, entonces su traza es una recta. Dar un ejemplo en que esto ocurra.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Ya tienes una caracterización de las líneas asintóticas que habla del triedro de Frenet. Úsala en las dos superficies a la vez.*
2. *Si la misma curva cumple esa caracterización en dos superficies, ¿qué relación hay entre los dos normales? Compárala con la hipótesis de que no son tangentes.*
3. *La contradicción solo se evita si cierto vector del triedro no existe. ¿Cuándo pasa eso?*

Resolución. Trabajamos punto a punto. Si $k(s) > 0$ en un punto, existe la binormal allí y, por la proposición (p. 266), los dos normales satisfacen $\mathbf{N}_1(s) = \pm\mathbf{b}(s)$ y $\mathbf{N}_2(s) = \pm\mathbf{b}(s)$. Los planos tangentes coincidirían, contra la hipótesis. Luego $k(s) = 0$ en cada punto; parametrizando por arco, $\dot{\mathbf{t}} = 0$ y la traza es una recta. ■

La hipótesis es puntual: si los planos son distintos solo en algunos puntos, solo podemos concluir que la curvatura se anula allí. No basta con negar que sean tangentes a lo largo de *toda* la curva para concluir que esta sea recta entera.

Ejemplo. Los planos $M_1 : \ z = 0$ y $M_2 : \ z = y$ contienen el eje OX. Este es asintótico en ambos por ser una recta contenida en ellos. Sus normales son proporcionales a $(0, 0, 1)$ y $(0, -1, 1)$, que no son paralelos en ningún punto.

LA IDEA: LA MORALEJA, Y POR QUÉ CON GEODÉSICAS ES DISTINTO

El resultado dice que **en cada punto de curvatura no nula de una línea asintótica, su plano osculador es el plano tangente de la superficie**. Allí no hay libertad, porque el normal está obligado a ser la binormal. En puntos con $k = 0$, el argumento de Frenet no se puede usar.

Merece la pena contrastarlo con lo que ocurre con las otras dos propiedades de la tabla, porque la diferencia es fina y da mucho juego:

- Ser **geodésica** obliga a $\mathbf{N} = \pm\mathbf{n}$, luego también fija el plano tangente: dos superficies que compartan una geodésica tienen el mismo plano tangente donde $k > 0$. Si sus planos son distintos en cada punto de la curva común, esta tiene curvatura nula en todo punto y es una recta.
- Ser **línea de curvatura** no fija nada: la condición $\tau_g = 0$ no dice hacia dónde apunta $\mathbf{N}$, solo cómo varía. Por eso sí es fácil dar dos superficies que compartan una línea de curvatura sin ser tangentes.

Esa asimetría entre las tres es, en el fondo, todo lo que hay que entender de este bloque de ejercicios.

Ejercicio 4.4. *La superficie de las binormales, hasta el final*

Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. alabeada con $k(s) > 0$, y sea $X(s, t) = \alpha(s) + t\,\mathbf{b}(s)$ la superficie reglada de sus binormales. Se pide:

1. Calcular las dos formas fundamentales.
2. Calcular la curvatura de Gauss y clasificar los puntos de la superficie.
3. Estudiar si α es geodésica, línea asintótica o línea de curvatura.
4. Hallar las direcciones asintóticas en cada punto.

Resolución. La idea, antes de la cuenta. Casi nada de este ejercicio hay que calcularlo de nuevo. Las derivadas $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ y su producto vectorial salen del método de las regladas del capítulo 2, y con ellos la primera forma y el normal. De la segunda forma, $L_{22} = 0$ viene gratis, porque la superficie es lineal en t; entonces $K = -L_{12}^2/g$ solo pide L_{12}, que es el producto mixto $(\mathbf{t}, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}) = \tau$ dividido por $|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|$. Las preguntas sobre la directriz solo necesitan el normal en $t = 0$. La única cuenta larga es la de L_{11}, y solo decide algo en los puntos donde τ se anula.

Primer apartado. Del capítulo 2 se tiene, usando $\dot{\mathbf{b}} = -\tau\,\mathbf{n}$,

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{t} - t\tau\,\mathbf{n}, \qquad \mathbf{X}_2 = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = -\mathbf{n} - t\tau\,\mathbf{t}, \qquad |\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2| = \sqrt{1 + t^2\tau^2}.$$

De ahí los coeficientes métricos:

$$g_{11} = 1 + t^2\tau^2, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = 1, \qquad g = 1 + t^2\tau^2.$$

Para la segunda forma fundamental hacen falta las derivadas segundas. Usando Frenet-Serret,

$$X_{11} = t\tau k\,\mathbf{t} + \big(k - t\dot{\tau}\big)\mathbf{n} - t\tau^2\,\mathbf{b}, \qquad X_{12} = -\tau\,\mathbf{n}, \qquad X_{22} = 0.$$

Con $\mathbf{N} = \dfrac{-\mathbf{n} - t\tau\,\mathbf{t}}{\sqrt{1 + t^2\tau^2}}$ se obtiene

$$L_{11} = \frac{t\dot{\tau} - k\big(1 + t^2\tau^2\big)}{\sqrt{1 + t^2\tau^2}}, \qquad L_{12} = \frac{\tau}{\sqrt{1 + t^2\tau^2}}, \qquad L_{22} = 0.$$

El $L_{22} = 0$ no ha habido que calcularlo: es automático en toda reglada, porque $X_{22} = 0$ al ser la parametrización lineal en t.

Segundo apartado. Como $L_{22} = 0$,

$$K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g} = \frac{-L_{12}^2}{g} = -\frac{\tau^2}{\big(1 + t^2\tau^2\big)^2}.$$

Por tanto:

- si $\tau(s) \neq 0$, entonces $K < 0$ y el punto es **hiperbólico**;
- si $\tau(s) = 0$, entonces $K = 0$ y $L_{11} = t\dot{\tau} - k$: el punto es plano si $t\dot{\tau} = k$, y parabólico en otro caso.

Para una curva alabeada con torsión no nula en todo punto, **toda la superficie es hiperbólica**.

Obsérvese que esto concuerda con lo visto sobre desarrollables: la superficie de las binormales tiene $(\mathbf{t}, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}) = \tau$, luego es desarrollable exactamente cuando la torsión se anula, que es justo cuando $K = 0$.

Tercer apartado. Sobre la propia curva, es decir en $t = 0$,

$$\mathbf{N}(s, 0) = -\mathbf{n}(s).$$

Con eso, y sin ninguna cuenta más, se leen las tres respuestas en la tabla de las tres condiciones:

- **Es geodésica**, porque $\mathbf{N} = \pm\mathbf{n}$.
- **No es línea asintótica**, porque para serlo haría falta $\mathbf{N} = \pm\mathbf{b}$, y $\mathbf{n}$ y $\mathbf{b}$ son ortogonales.
- **No es línea de curvatura** si $\tau \neq 0$. En efecto, las curvas paramétricas son líneas de curvatura si y solo si $g_{12} = L_{12} = 0$; aquí $g_{12} = 0$ pero $L_{12} = \tau/\sqrt{1+t^2\tau^2} \neq 0$.

■

Cuarto apartado. Una dirección $X = \lambda\mathbf{X}_1 + \mu\mathbf{X}_2$ es asintótica si $II(X, X) = 0$, es decir,

$$L_{11}\lambda^2 + 2L_{12}\lambda\mu + L_{22}\mu^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda\big(L_{11}\lambda + 2L_{12}\mu\big) = 0.$$

Si $\tau(s) \neq 0$, hay dos direcciones, como corresponde a un punto hiperbólico:

- $\lambda = 0$, que da la dirección $\mathbf{X}_2 = \mathbf{b}$: son las **generatrices**, y era esperable, porque son rectas contenidas en la superficie;
- $\dfrac{\mu}{\lambda} = -\dfrac{L_{11}}{2L_{12}}$, que da la segunda familia de líneas asintóticas.

Si $\tau(s) = 0$, la ecuación es $L_{11}\lambda^2 = 0$: en un punto parabólico solo queda la dirección de la generatriz; en un punto plano, todas las direcciones. ■

Dónde se falla. Hay cuatro sitios. El primero está en $\mathbf{X}_1$: si se olvida el sumando $-t\tau\,\mathbf{n}$, se pierde el hecho de que la binormal gira al avanzar. La directriz se deriva, pero la generatriz también. Sin ese sumando saldría $g_{11} = 1$, como si la superficie no se abriera al alejarse de la curva, y toda la dependencia en t desaparecería. El segundo está en la segunda forma: si se proyecta sobre $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ sin dividir por su norma, los tres L_{ij} salen multiplicados por $\sqrt{1+t^2\tau^2}$, y K por $1+t^2\tau^2$. El signo sale bien y el valor, mal. El tercero está en la clasificación: en un punto con $\tau = 0$ no puede darse el tipo sin mirar $L_{11} = t\dot{\tau} - k$. Allí $K = 0$, y es L_{11} quien separa el punto parabólico del plano. El cuarto consiste en trasladar lo que ocurre en la superficie de las tangentes. Aquí $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = -\mathbf{n} - t\tau\,\mathbf{t}$ tiene la componente $-\mathbf{n}$, que no se anula nunca, así que la superficie de las binormales no tiene ningún punto singular.

LA IDEA: LA COMPROBACIÓN QUE CIERRA EL EJERCICIO

Hay una consistencia que merece la pena verificar, porque es la clase de comprobación que detecta errores de signo y ademas conecta dos partes distintas del libro.
Se ha visto que α es geodésica de esta superficie. Por el ejercicio de la torsión geodésica, en una geodésica se cumple $\tau = \tau_g$. Calculemos τ_g directamente sobre la curva, con $\mathbf{N} = -\mathbf{n}$ y por tanto $\dot{\mathbf{N}} = -\dot{\mathbf{n}} = k\,\mathbf{t} - \tau\,\mathbf{b}$:

$$\tau_g = (\mathbf{N}, \dot{\mathbf{N}}, \mathbf{t}) = (-\mathbf{n}, k\,\mathbf{t} - \tau\,\mathbf{b}, \mathbf{t}) = \tau\,(\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t}) = \tau,$$

porque el término en k tiene dos argumentos repetidos y $(\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t}) = 1$ por permutación cíclica. Sale exactamente lo que tenía que salir.
Y de paso queda explicado el tercer apartado desde otro ángulo: $\tau_g = \tau$, y ya se vio que ser línea de curvatura equivale a $\tau_g = 0$.

LA IDEA: EL MÉTODO QUE SIRVE PARA CUALQUIER REGLADA

Este ejercicio es el patrón completo. Conviene extraer los pasos, porque con ellos se ataca cualquier variante: regladas construidas con las normales principales, con las rectas polares, con las normales intrínsecas o con rectas que unen dos curvas.

1. Escribir $\mathbf{X}_1 = \alpha' + t\,\omega'$ y $\mathbf{X}_2 = \omega$, y sustituir las derivadas del triedro por Frenet-Serret.

2. Calcular $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ y su norma. De ahí salen $\mathbf{N}$ y los g_{ij}.
3. Anotar que $L_{22} = 0$ sin calcular nada, y por tanto que $K = -L_{12}^2/g \leq 0$: no hay puntos elípticos.
4. Calcular L_{12}, que basta para K; donde se anule, calcular también L_{11} para distinguir puntos parabólicos y planos. Recordar que L_{12} es, salvo el factor de normalización, el producto mixto $(\alpha', \omega, \omega')$ que decide si la superficie es desarrollable.
5. Para las preguntas sobre la directriz, evaluar $\mathbf{N}$ en $t = 0$ y leer la tabla de las tres condiciones. Casi nunca hace falta calcular nada más.

El paso tres y el cinco son los que ahorran tiempo de verdad, y son los que se olvidan.

Ejemplo (las tres regladas de la hélice, clasificadas)**.** En la sección 2.3 se construyeron las tres regladas de Frenet de la hélice circular parametrizada por el arco, con $a > 0$, $b \neq 0$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $k = a/c^2$ y $\tau = b/c^2$. Allí se vio dónde son regulares, y quedó abierta la pregunta de cómo se curvan. Con el método, cada una se clasifica en dos líneas, porque el paso 4 solo pide dos datos: el producto mixto $(\mathbf{t}, w, \dot{w})$ y la norma $|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|$, que ya estaba calculada. Entonces $K = -L_{12}^2/g = -(\mathbf{t}, w, \dot{w})^2/|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|^4$.

- **Tangentes**, $w = \mathbf{t}$. El producto mixto es $(\mathbf{t}, \mathbf{t}, k\mathbf{n}) = 0$, luego la superficie es desarrollable y $K \equiv 0$. Sus puntos regulares ($v \neq 0$) son parabólicos, porque $L_{11} = -|v|k\tau \neq 0$; la cuenta está en el ejercicio de la desarrollable tangencial, más adelante.
- **Normales principales**, $w = \mathbf{n}$. Ahora $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) = \tau$, y del capítulo 2 se tiene $|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|^2 = (1 - vk)^2 + v^2\tau^2 = \big((a - v)^2 + b^2\big)/c^2$. Por tanto

$$K = -\frac{\tau^2}{\big((1 - vk)^2 + v^2\tau^2\big)^2} = -\frac{b^2}{\big((a - v)^2 + b^2\big)^2} < 0.$$

  Todos los puntos son hiperbólicos. Es el helicoide, y con $\rho = a - v$ (su valor absoluto es la distancia al eje) la fórmula es la del ejercicio del helicoide que viene después.
- **Binormales**, $w = \mathbf{b}$. El producto mixto vuelve a valer τ, y ahora $|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|^2 = 1 + v^2\tau^2$:

$$K = -\frac{\tau^2}{(1 + v^2\tau^2)^2} < 0.$$

  También todos los puntos son hiperbólicos.

Con $a = b = 1$ se tiene $k = \tau = \frac{1}{2}$, y la tabla dice cómo varía K al alejarse de la hélice por la generatriz:

reglada	$(\mathbf{t}, w, \dot{w})$	$v = 0$	$v = 1$	$v = 2$	la directriz es…
tangentes	0	arista singular	0	0	la arista de retroceso
normales	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$	asintótica, no geodésica
binormales	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{4}{25}$	$-\frac{1}{16}$	geodésica, no asintótica

La última columna es la tabla de la directriz del capítulo 3. Ninguna de las dos directrices regulares es línea de curvatura, porque en las dos $\tau_g = \tau \neq 0$ (ejercicio de la torsión geodésica, más arriba).

Qué se lee en la tabla. Primero, sobre la directriz, normales y binormales dan el mismo valor, $K = -\tau^2 = -\frac{1}{4}$. No es casualidad: allí $g = 1$ en las dos, y los dos productos mixtos valen τ. Lejos de la curva, cada una va a su manera. La de las normales se curva más donde la generatriz cruza el eje ($v = a$, donde $K = -1/b^2$), y la de las binormales, justo sobre la hélice.

Las dos se aplanan al alejarse, con $K \to 0$: lejos del eje, el helicoide se parece a un plano que gira despacio. Segundo, la única desarrollable es también la única con puntos singulares. Las dos cosas salen del mismo producto mixto: si no se anula, impide los puntos singulares de la generatriz (capítulo 2) y obliga a $K < 0$ en ella; si se anula, permite las dos cosas.

Qué se ha ganado. Queda contestada la pregunta que el capítulo 2 dejó abierta. El determinante que allí decidía dónde es regular una reglada es el mismo que aquí decide el signo de su curvatura.

Ejercicio 4.5. *Leer una figura: tres curvas sobre un cilindro*

Sobre el cilindro circular de la figura se han dibujado tres curvas. Para cada una, indicar si es geodésica, línea de curvatura o línea asintótica, o ninguna de las tres, razonando la respuesta.

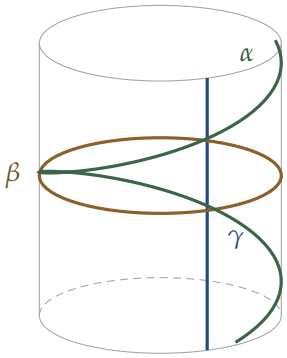


Figura 4.4: Sobre un cilindro circular: una hélice α, un paralelo β y una generatriz γ.

Resolución. *Primero, la superficie.* En el cilindro de radio r, con la parametrización $x(u,v) = (r\cos u,\ r\,\mathrm{sen}\,u,\ v)$, el normal es $\mathbf{N} = (\cos u, \mathrm{sen}\,u, 0)$, horizontal y apuntando hacia fuera del eje. De la sección sobre superficies de revolución, con perfil recto se obtiene

$$k_1 = 0 \quad (\text{dirección de la generatriz}), \qquad k_2 = -\frac{1}{r} \quad (\text{dirección del paralelo}), \qquad K = 0.$$

El signo de k_2 depende de qué normal induzca la parametrización, y conviene no alarmarse al comparar con otras secciones. Con la que se acaba de escribir, el normal sale *exterior* y da $-1/r$; con la parametrización como superficie de revolución de la sección 4.5.4, que intercambia los papeles de las dos variables, el normal sale *interior* y da $+1/r$. La curvatura de Gauss, que es el producto, vale cero en los dos casos, y las respuestas del ejercicio no dependen del signo. Todos los puntos son parabólicos. Dos consecuencias inmediatas, válidas para cualquier curva del cilindro:

- Las **direcciones principales** son la de la generatriz y la del paralelo. Solo son líneas de curvatura las curvas que van en una de esas dos direcciones.
- Como el punto es parabólico, hay **una sola dirección asintótica**, la de curvatura normal nula, que es la de la generatriz.

Segundo, las geodésicas, sin calcular nada. El cilindro es desarrollable, luego $K \equiv 0$ y es localmente isométrico al plano: se puede desplegar una banda cortada por una generatriz sin estirarla. Ser geodésica es una propiedad intrínseca, así que **las geodésicas del cilindro son**

exactamente las imágenes de las rectas del plano al enrollarlo. Y al enrollar una hoja, las rectas van a parar a tres familias:

- las rectas paralelas al eje del enrollado dan las **generatrices**;
- las perpendiculares dan los **paralelos**;
- las oblicuas dan las **hélices**.

Las tres curvas de la figura son geodésicas, y no ha hecho falta ninguna cuenta.

Tercero, curva por curva.

	Geodésica	Línea de curvatura	Línea asintótica
γ, la generatriz	sí	sí	sí
β, el paralelo	sí	sí	no
α, la hélice	sí	no	no

Las razones, una a una:

- **La generatriz** es una recta contenida en la superficie, y ya se vio que toda recta contenida en una superficie es a la vez geodésica y línea asintótica. Y además su dirección es principal, luego también es línea de curvatura. Es de las pocas curvas que cumplen las tres.
- **El paralelo** lleva la otra dirección principal, luego es línea de curvatura. Su curvatura normal es $k_2 = -1/r \neq 0$, luego no es asintótica. Y es geodésica, cosa que también se ve directamente: su normal principal apunta hacia el eje, es decir, $\mathbf{n} = -\mathbf{N}$.
- **La hélice** lleva una dirección intermedia, que no es ninguna de las dos principales; por tanto no es línea de curvatura ni tiene curvatura normal nula. Pero es geodésica, y eso se comprueba también sin el argumento del desarrollo: su normal principal es horizontal y apunta al eje, luego $\mathbf{n} = -\mathbf{N}$.

■

LA IDEA: EL ERROR QUE ESTAS FIGURAS BUSCAN PROVOCAR

Hay una trampa concreta en este tipo de pregunta y conviene tenerla identificada.
El paralelo del cilindro **sí** es geodésica. El paralelo de la esfera **no** lo es, salvo el ecuador. Son dos figuras que se parecen mucho y dan respuestas opuestas, y el motivo es que en el cilindro la normal principal del paralelo apunta exactamente hacia el eje, que es la dirección del normal de la superficie, mientras que en la esfera el normal de la superficie apunta al centro y el paralelo se dobla hacia el eje. No son la misma dirección salvo en el ecuador.
De ahí la regla práctica para cualquier figura de este tipo: **miras hacia dónde se dobla la curva y hacia dónde apunta el normal de la superficie**. Si coinciden, es geodésica. Si son perpendiculares, es asintótica. Y para la línea de curvatura no miras la curva, miras si su dirección es una de las dos principales de la superficie.
Con esas tres comprobaciones visuales se contesta cualquiera de estos ejercicios sin escribir una fórmula, que es exactamente lo que el enunciado pide cuando dice «razona tu respuesta» sobre un dibujo.

Ejercicio 4.6. *Qué le hace una homotecia a una superficie*

Dados un punto $A \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se define la homotecia $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por $H(P) = A + \lambda(P - A)$. Sea $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada. Se pide:

1. Demostrar que $Y = H \circ X$ es una superficie parametrizada.
2. Demostrar que los planos tangentes de X y de Y son paralelos en puntos correspondientes.
3. Demostrar que si la recta normal a X en $X(P)$ pasa por Q, entonces la recta normal a Y en $Y(P)$ pasa por $H(Q)$.
4. Demostrar que si $X(U)$ está contenida en una esfera, también lo está $Y(U)$, y dar la relación entre los radios.
5. Demostrar que $X(P)$ es umbílico si y solo si $Y(P)$ lo es.
6. Dar la clasificación de los puntos de Y en función de la de los puntos de X.

Resolución. *Las dos cuentas de las que sale todo.* Como $Y(u,v) = A + \lambda\big(X(u,v) - A\big)$ y A es constante,

$$Y_1 = \lambda\, \mathbf{X}_1, \qquad Y_2 = \lambda\, \mathbf{X}_2, \qquad Y_1 \times Y_2 = \lambda^2 \left(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2\right).$$

1. Y es diferenciable por serlo X, y como $\lambda \neq 0$ se tiene $Y_1 \times Y_2 \neq 0$: se cumple la condición de regularidad y Y es una s.p..

2. El factor λ^2 es positivo, luego

$$\mathbf{N}_Y = \frac{Y_1 \times Y_2}{|Y_1 \times Y_2|} = \frac{\lambda^2\big(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2\big)}{\lambda^2 |\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|} = \mathbf{N}_X.$$

El vector normal **no cambia**, ni siquiera de signo. Los planos tangentes, que son los ortogonales a él, son paralelos.

3. La recta normal a X en $X(P)$ pasa por Q si $Q = X(P) + t\,\mathbf{N}_X$ para cierto t. Aplicando la homotecia,

$$H(Q) = A + \lambda\big(X(P) + t\mathbf{N}_X - A\big) = Y(P) + \lambda t\,\mathbf{N}_X = Y(P) + \lambda t\,\mathbf{N}_Y,$$

que es un punto de la recta normal a Y en $Y(P)$.

4. Si $|X(u,v) - C| = R$ para todo (u,v), entonces

$$|Y(u,v) - H(C)| = |\lambda\big(X(u,v) - C\big)| = |\lambda|\, R.$$

Luego $Y(U)$ está en la esfera de centro $H(C)$ y radio $|\lambda|R$: los radios están en la razón $|\lambda|$.

5 y 6. Con $Y_i = \lambda \mathbf{X}_i$ y $Y_{ij} = \lambda X_{ij}$, y usando que el normal no cambia,

$$g_{ij}^Y = Y_i \cdot Y_j = \lambda^2 g_{ij}, \qquad L_{ij}^Y = Y_{ij} \cdot \mathbf{N}_Y = \lambda\, L_{ij}.$$

Como el operador forma es $L = II \cdot G^{-1}$,

$$L_Y = \big(\lambda\, II\big)\big(\lambda^2 G\big)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\, L_X.$$

Es decir, el operador forma se divide por λ, y con él las curvaturas principales:

$$k_i^Y = \frac{k_i^X}{\lambda}, \qquad H_Y = \frac{H_X}{\lambda}, \qquad K_Y = \frac{K_X}{\lambda^2}.$$

De aquí salen los dos últimos apartados. Un punto es umbílico cuando las dos curvaturas principales coinciden, y dividir ambas por el mismo número no altera esa igualdad: la umbilicidad se conserva. Y como $\lambda^2 > 0$, la curvatura de Gauss **conserva el signo**, de modo que la clasificación se conserva punto por punto: elíptico sigue siendo elíptico, hiperbólico sigue siendo hiperbólico, parabólico sigue siendo parabólico y plano sigue siendo plano. ■

LA IDEA: QUÉ CONSERVA Y QUÉ NO UNA HOMOTECIA

El resultado tiene una lectura física muy simple: una homotecia es un cambio de escala, y cambiar de escala no cambia la *forma*, solo el *tamaño*.

- **Se conserva** todo lo cualitativo: las direcciones de los planos tangentes, la umbilicidad, el tipo de cada punto, y quiénes son las líneas de curvatura y las asintóticas.
- **Se reescala** todo lo cuantitativo: las curvaturas se dividen por λ y la de Gauss por λ^2.

Los exponentes son los que tienen que ser y merece la pena comprobarlo con la esfera. Una esfera de radio R con normal interior tiene $k_i = 1/R$ y $K = 1/R^2$. Una homotecia produce una esfera de radio $|\lambda|R$. Con el normal inducido por las coordenadas, $k_i = 1/(\lambda R)$: si $\lambda < 0$, ese normal pasa a ser exterior. En ambos casos $K = 1/(\lambda^2 R^2)$, como predice la fórmula.

Conviene precisar una cosa sobre el signo de λ, porque se presta a confusión. Lo que se ha probado es que **el vector normal de la superficie no cambia**, ni siquiera de signo, porque λ aparece al cuadrado. Eso es lo que hace que la clasificación de los puntos se conserve.

No debe confundirse con la orientación *del espacio*: una homotecia de razón negativa tiene diferencial $\lambda\,\mathrm{Id}$, cuyo determinante es $\lambda^3 < 0$, de modo que sí invierte la orientación de $\mathbb{R}^3$. Son dos cosas distintas, y el apartado 6 pregunta por la primera.

QUÉ DEJA. El cálculo entero, que se resume en tres fórmulas: el normal no cambia, la primera forma se multiplica por λ^2 y la segunda por λ. Con ellas se contesta cualquier pregunta sobre homotecias sin volver a derivar. Y el principio, enunciado con cuidado: *una semejanza*, es decir, una homotecia compuesta con un movimiento rígido, conserva el tipo de cada punto y solo reescala las curvaturas. No conviene generalizarlo a «toda transformación que conserve ángulos»: en $\mathbb{R}^3$ hay transformaciones conformes que no son semejanzas, y con ellas el resultado falla.

Ejercicio 4.7. *Segunda forma nula quiere decir plano* [H4.1]

Probar que si $L_{ij} = 0$ para todo i, j en todos los puntos de una superficie parametrizada conexa, entonces dicha superficie es una porción de plano. Sin conexión, la conclusión se aplica por componentes.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Escribe L_{ij} en la forma que involucra a las derivadas del campo normal, no en la que involucra a las segundas derivadas de x.*
2. *Un vector de $\mathbb{R}^3$ ortogonal a tres vectores independientes es el nulo. ¿Quiénes son aquí esos tres?*

Resolución. Por la propia definición de los coeficientes de la S.F.F.,

$$L_{ij} = -N_i \cdot \mathbf{X}_j,$$

de modo que la hipótesis dice exactamente que

$$N_i \cdot \mathbf{X}_j = 0 \qquad \text{para todo } i, j.$$

Por otro lado, derivando $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$ respecto de u_i se obtiene $2N_i \cdot \mathbf{N} = 0$, luego también

$$N_i \cdot \mathbf{N} = 0.$$

Reuniendo las dos cosas: cada N_i es ortogonal a $\mathbf{X}_1$, a $\mathbf{X}_2$ y a $\mathbf{N}$, que forman una base de $\mathbb{R}^3$ en cada punto. Un vector ortogonal a una base es el vector nulo, así que

$$N_1 = N_2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{N} \text{ es constante.}$$

Y ya se probó que una superficie conexa con campo normal constante está contenida en un plano: basta derivar $\alpha(t) \cdot \mathbf{N}$ a lo largo de curvas de la superficie. Luego la superficie es una porción de plano. ■

LA IDEA: QUÉ MIDE DE VERDAD LA SEGUNDA FORMA

Este ejercicio es la lectura más limpia de qué significa la S.F.F.: **mide la variación del plano tangente**. Si vale cero en todas partes, el plano tangente no varía; y si no varía, la superficie no puede ser otra cosa que ese plano.
Merece la pena ponerlo junto a su hermano de curvas. Allí, curvatura idénticamente nula obligaba a la curva a ser una recta, y la demostración era la misma: $\dot{\mathbf{t}} = 0$ implica $\mathbf{t}$ constante implica α recta. Aquí, $L_{ij} \equiv 0$ implica $\mathbf{N}$ constante implica M plana. La curvatura mide separación de la recta tangente; la S.F.F., separación del plano tangente.
Y hay un aviso importante, porque es error frecuente: **no basta con** $K \equiv 0$. El cilindro tiene curvatura de Gauss nula y no es un plano. Lo que fuerza el plano es que se anule la S.F.F. entera, es decir que *todos* los puntos sean planos, no solo que el determinante lo sea.

Ejercicio 4.8. *Cilindros y conos son llanos* [H4.4]

Probar que todos los cilindros y todos los conos tienen curvatura de Gauss nula en sus

puntos regulares.

Resolución. Los dos son regladas y en los dos el cálculo se hace de golpe observando qué derivadas se anulan. En una reglada genérica $x(u,v) = \alpha(u) + v\,w(u)$ se tiene siempre

$$x_{vv} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad L_{22} = \mathbf{N}\cdot x_{vv} = 0,$$

de modo que

$$K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{-L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \;\leq\; 0,$$

y la curvatura se anula exactamente cuando $L_{12} = 0$. Basta pues comprobar esa condición en cada caso.

Cilindro generalizado. Es $x(u,v) = \alpha(u) + v\,a$ con a un vector **constante**. Entonces

$$x_{uv} = \frac{\partial}{\partial v}\,\alpha'(u) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad L_{12} = \mathbf{N}\cdot x_{uv} = 0,$$

luego $K \equiv 0$.

Cono generalizado. Es $x(u,v) = p + v\,w(u)$ con p el vértice fijo, w una curva con $w \times w' \neq 0$ y $v \neq 0$, para que esta parametrización sea regular. Entonces

$$x_u = v\,w'(u), \qquad x_{uv} = w'(u) = \frac{1}{v}\,x_u,$$

es decir, x_{uv} es **tangente** a la superficie, por ser múltiplo de x_u. Y un vector tangente tiene producto escalar nulo con $\mathbf{N}$:

$$L_{12} = \mathbf{N}\cdot x_{uv} = \frac{1}{v}\mathbf{N}\cdot x_u = 0,$$

luego también $K \equiv 0$. ■

Otra vía. Hay una segunda ruta, y es la que conviene tener presente porque explica *por qué* pasa esto. El Theorema Egregium dice que K es intrínseca. Y tanto el cilindro como el cono **se pueden desenrollar sobre el plano sin estirar ni encoger**: recorta un cilindro de cartón por una generatriz y se aplana; haz lo mismo con un cono y sale un sector circular.

Esa operación es una isometría local, el plano tiene $K = 0$, y K se conserva por isometrías. Luego cilindro y cono tienen $K = 0$ sin necesidad de calcular ni un solo L_{ij}.

Los cilindros, los conos y las superficies tangenciales son los modelos clásicos de **desarrollables**. La cuenta comprueba dos de esos modelos; no prueba una clasificación global de toda desarrollable, que puede tener regiones de distintos tipos.

Ejercicio 4.9. *El helicoide: curvatura media y curvatura de Gauss* [H4.6]

Calcular la curvatura media y la curvatura de Gauss del helicoide dado por las parametrizaciones locales $x(u,v) = (u\cos v,\ u\,\mathrm{sen}\,v,\ bv)$ y probar que la curvatura de Gauss es constante a lo largo de una hélice. Se supone $b \neq 0$ para el helicoide; si $b = 0$, se obtiene un plano parametrizado regularmente donde $u \neq 0$.

Resolución. La idea, en una línea. Es el método de siempre (primera forma, normal, segunda forma, y después K y H), y el helicoide lo pone fácil por dos razones: es una reglada cuyas rectas son las curvas u, así que $x_{uu} = 0$ y $L_{11} = 0$; y sus curvas coordenadas se cortan en ángulo recto, $g_{12} = 0$.

Primera forma. Derivando,

$$x_u = (\cos v,\ \operatorname{sen} v,\ 0), \qquad x_v = (-u \operatorname{sen} v,\ u \cos v,\ b),$$

de donde

$$g_{11} = 1, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = u^2 + b^2, \qquad g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = u^2 + b^2.$$

Normal. El producto vectorial vale

$$x_u \times x_v = (b \operatorname{sen} v,\ -b \cos v,\ u), \qquad |x_u \times x_v| = \sqrt{u^2 + b^2},$$

luego $\mathbf{N} = \dfrac{1}{\sqrt{u^2 + b^2}}\,(b \operatorname{sen} v,\ -b \cos v,\ u)$.

Segunda forma. Las segundas derivadas son

$$x_{uu} = 0, \qquad x_{uv} = (-\operatorname{sen} v,\ \cos v,\ 0), \qquad x_{vv} = (-u \cos v,\ -u \operatorname{sen} v,\ 0),$$

y por tanto

$$L_{11} = 0, \qquad L_{12} = \frac{-b \operatorname{sen}^2 v - b \cos^2 v}{\sqrt{u^2 + b^2}} = \frac{-b}{\sqrt{u^2 + b^2}},$$

$$L_{22} = \frac{-ub \operatorname{sen} v \cos v + ub \operatorname{sen} v \cos v}{\sqrt{u^2 + b^2}} = 0.$$

Las dos curvaturas. Sustituyendo,

$$K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g} = \frac{-\dfrac{b^2}{\sqrt{u^2 + b^2}}}{u^2 + b^2} = \frac{-b^2}{(u^2 + b^2)^2},$$

$$H = \frac{g_{11}L_{22} - 2g_{12}L_{12} + g_{22}L_{11}}{2g} = \frac{1 \cdot 0 - 0 + (u^2 + b^2) \cdot 0}{2(u^2 + b^2)} = 0.$$

El helicoide es, pues, una **superficie minimal**, y todos sus puntos son hiperbólicos si $b \neq 0$.

Constancia a lo largo de una hélice. Las hélices contenidas en el helicoide son las curvas de u constante, $v \mapsto x(u_0, v) = (u_0 \cos v,\ u_0 \operatorname{sen} v,\ bv)$, que, si $u_0 \neq 0$, es una hélice circular de radio $|u_0|$ y avance vertical $2\pi b$ por vuelta; si $u_0 = 0$, es el eje. Sobre ella,

$$K = \frac{-b^2}{(u_0^2 + b^2)^2},$$

que no depende de v: la curvatura de Gauss es constante a lo largo de cada hélice. ■

Qué hemos aprendido, y dónde se falla. Que K solo dependa de u tiene una razón anterior a la cuenta. El movimiento helicoidal que gira un ángulo θ alrededor de OZ y sube $b\theta$ lleva $x(u, v)$ a $x(u, v + \theta)$. Es decir, lleva el helicoide en sí mismo y cada hélice $u = u_0$ en sí misma, y un movimiento rígido no cambia la curvatura. El valor más negativo, $-1/b^2$, está en el eje. Lejos de él, $K \to 0$: la tercera componente del normal, $u/\sqrt{u^2 + b^2}$, se acerca a ± 1, y la superficie se parece a un plano horizontal. Es la misma fórmula que la de la superficie de las normales principales de la hélice, en el ejemplo de las tres regladas, como tenía que ser. El fallo típico está en leer $H = 0$ como «el helicoide es plano». Curvatura media nula dice $k_1 = -k_2$, no $k_1 = k_2 = 0$. Aquí $K = -k_1^2 < 0$, y cada punto es una silla simétrica, que sube en una dirección lo mismo que baja en la perpendicular.

Ejercicio 4.10. *Dos direcciones ortogonales suman el doble de la media* [H4.8]

Sea x una superficie parametrizada y p un punto suyo. Probar que si $X, Y \in T_p(x)$ son unitarios y ortogonales, entonces $K_n(X) + K_n(Y) = 2H(p)$.

Resolución. Sea L_p el operador de Weingarten en p. Como X e Y son unitarios,

$$K_n(X) = II_p(X, X) = L_pX \cdot X, \qquad K_n(Y) = L_pY \cdot Y.$$

Ahora bien, $\{X, Y\}$ es una **base ortonormal** de $T_p(x)$, y en una base ortonormal la traza de un endomorfismo es la suma de los productos escalares de las imágenes por los propios vectores de la base:

$$\operatorname{tr}(L_p) = L_pX \cdot X + L_pY \cdot Y = K_n(X) + K_n(Y).$$

Y por definición $H(p) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(L_p)$. Luego

$$K_n(X) + K_n(Y) = 2H(p).$$

■

Otra vía. Se puede hacer sin hablar de traza, usando la **fórmula de Euler**. Si k_1 y k_2 son las curvaturas principales y θ es el ángulo de X con la primera dirección principal,

$$K_n(X) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \operatorname{sen}^2\theta.$$

Como Y es ortogonal a X, su ángulo es $\theta + \frac{\pi}{2}$, y entonces

$$K_n(Y) = k_1 \cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + k_2 \operatorname{sen}^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = k_1 \operatorname{sen}^2\theta + k_2 \cos^2\theta.$$

Sumando, los cuadrados se completan y queda

$$K_n(X) + K_n(Y) = k_1 + k_2 = 2H(p).$$

En un punto umbilical no hace falta la fórmula de Euler, porque allí $k_1 = k_2$ y la curvatura normal vale lo mismo en todas las direcciones: la suma de dos cualesquiera es $2k_1 = 2H(p)$. La identidad se cumple también ahí, y por tanto en todo punto.

LA IDEA: LA CURVATURA MEDIA ES UN PROMEDIO DE VERDAD

El resultado dice algo más fuerte de lo que parece: **la suma $K_n(X) + K_n(Y)$ no depende de qué par ortonormal se elija**. Se puede girar el par entero dentro del plano tangente y la suma no se mueve. Eso es lo que hace de H un invariante y no un accidente de la parametrización.

De ahí el nombre: H es literalmente el **promedio** de K_n sobre todas las direcciones. Si se integra $K_n(\theta) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \operatorname{sen}^2\theta$ sobre $\theta \in [0, 2\pi]$ y se divide por 2π, sale exactamente $\frac{k_1+k_2}{2} = H$, porque el valor medio de $\cos^2$ y el de sen^2 valen ambos $\frac{1}{2}$.

Y así se entiende qué es una superficie minimal: aquella en la que ese promedio es nulo en todo punto. La superficie se curva hacia un lado exactamente lo mismo que hacia el otro. Es la forma que adopta una película de jabón tendida sobre un alambre.

Ejercicio 4.11. *Cuándo una asintótica es además principal* [H4.13]

Probar que una dirección asintótica es dirección principal en un punto si y solo si el punto es parabólico o plano.

Resolución. La idea, en una línea. Una dirección asintótica tiene curvatura normal nula; si además es principal, su autovalor es esa curvatura normal, es decir, cero, y un autovalor nulo es un determinante nulo.

(⇒) Sea $X \neq 0$ una dirección que es a la vez asintótica y principal. Ser principal significa que X es autovector de L_p, digamos $L_pX = \lambda X$, y entonces el autovalor se recupera como

$$\lambda = \frac{L_pX \cdot X}{X \cdot X} = \frac{II_p(X,X)}{I_p(X,X)} = K_n(X) = 0,$$

donde el último paso es justamente la condición de ser asintótica. Luego $L_pX = 0$ con $X \neq 0$: el operador de Weingarten tiene núcleo no trivial y por tanto

$$K(p) = \det(L_p) = 0.$$

Y $K(p) = 0$ quiere decir exactamente que el punto es parabólico (si $L_p \neq 0$) o plano (si $L_p = 0$).

(⇐) Si el punto es **plano**, entonces $L_p = 0$: toda dirección es principal, con autovalor cero, y toda dirección es asintótica. En particular hay direcciones que son ambas cosas.

Si el punto es **parabólico**, las curvaturas principales son $k_1 = 0$ y $k_2 \neq 0$. En una base principal ortonormal, $II(aX_{(1)} + bX_{(2)}, aX_{(1)} + bX_{(2)}) = k_2 b^2$. Toda dirección asintótica tiene entonces $b = 0$, luego es precisamente la principal asociada a $k_1 = 0$. ■

Ejercicio 4.12. *Girar un perfil con raíz cuadrada* [H4.2]

La curva $\alpha(t) = (t,\, 0,\, c\sqrt{t})$ gira alrededor del eje OZ. Calcular la curvatura de Gauss de la superficie regular resultante, tomando $t > 0$. ¿De qué superficie se trata si $K = 0$?

Resolución. *La fórmula general.* Conviene resolverlo con la fórmula general de las superficies de revolución, y no con este perfil concreto, porque así queda guardada para otros ejercicios. Girando un perfil $(f(u), 0, g(u))$ con $f > 0$ alrededor del eje OZ se obtiene

$$x(u,v) = \big(f(u)\cos v,\ f(u)\operatorname{sen} v,\ g(u)\big),$$

y aquí, a diferencia de la subsección 4.5.4, no se supone el perfil parametrizado por su arco, con lo que g_{11} ya no vale 1 y aparecen raíces por todas partes. Un cálculo directo da

$$g_{11} = f'^2 + g'^2, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = f^2,$$

$$L_{11} = \frac{f'g'' - f''g'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}}, \qquad L_{12} = 0, \qquad L_{22} = \frac{f\,g'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}},$$

y por tanto

$$K = \frac{L_{11}L_{22}}{g_{11}g_{22}} = \frac{g'\,(f'g'' - f''g')}{f\,(f'^2 + g'^2)^2}.$$

Nuestro caso. Aquí el perfil es $f(t) = t$ y $g(t) = c\sqrt{t}$, con $t > 0$, luego

$$f' = 1, \qquad f'' = 0, \qquad g' = \frac{c}{2}\, t^{-1/2}, \qquad g'' = -\frac{c}{4}\, t^{-3/2}.$$

El numerador vale

$$g'\,(f'g'' - f''g') = \frac{c}{2}t^{-1/2} \cdot \left(-\frac{c}{4}t^{-3/2}\right) = -\frac{c^2}{8}\, t^{-2},$$

y el denominador,

$$f\,(f'^2 + g'^2)^2 = t\left(1 + \frac{c^2}{4t}\right)^2 = t \cdot \frac{(4t + c^2)^2}{16t^2} = \frac{(4t + c^2)^2}{16t}.$$

Dividiendo,

$$\boxed{K = \frac{-2c^2}{t\,(4t + c^2)^2}}, \qquad t > 0.$$

El caso $K = 0$. Como $t > 0$, la curvatura se anula si y solo si $c = 0$. Y entonces el perfil es $\alpha(t) = (t, 0, 0)$, un trozo del eje OX, cuya superficie de revolución alrededor de OZ es el **plano $z = 0$ menos el origen**. ■

Qué hemos aprendido, y dónde se falla. El signo de K se podía prever. La superficie es $r = z^2/c^2$, con r la distancia al eje. El perfil, visto como función de la altura, es una parábola que se abre hacia fuera del eje. Con el perfil escrito así, $r = \varphi(z)$, la fórmula general (con φ en el papel de f y $g(z) = z$) da

$$K = -\frac{\varphi''}{\varphi\,(1 + \varphi'^2)^2},$$

cuyo signo es el opuesto al de φ'', igual que en la subsección de las superficies de revolución. Aquí $\varphi(z) = z^2/c^2$ y $\varphi'' = 2/c^2 > 0$: el perfil es convexo y los puntos son hiperbólicos. Sustituyendo $z^2 = c^2 t$ se recupera exactamente el valor recuadrado. El fallo típico es aplicar $K = -f''/f$ a este perfil, que no está parametrizado por el arco. Con $f(t) = t$ daría $K = 0$ aunque $c \neq 0$, que es falso: esa fórmula exige $f'^2 + g'^2 = 1$.

Ejercicio 4.13. *Los conoides rectos minimales* [H4.5]

Obtener los conoides rectos $x(u, v) = (u\cos v,\ u\,\mathrm{sen}\, v,\ f(v))$ que sean minimales.

Resolución. La idea, en una línea. Como en el helicoide, $x_{uu} = 0$ y $g_{12} = 0$, así que $L_{11} = 0$ y la fórmula de la curvatura media se queda con un solo término, $H = L_{22}/(2g_{22})$: ser minimal es $L_{22} = 0$, y todo el ejercicio consiste en ver qué dice eso de f.

Los coeficientes. Derivando,

$$x_u = (\cos v,\ \mathrm{sen}\, v,\ 0), \qquad x_v = (-u\,\mathrm{sen}\, v,\ u\cos v,\ f'(v)),$$

de donde

$$g_{11} = 1, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = u^2 + f'^2, \qquad g = u^2 + f'^2.$$

El producto vectorial es $x_u \times x_v = (f'\,\mathrm{sen}\, v,\ -f'\cos v,\ u)$, de norma $\sqrt{g}$, y las segundas derivadas,

$$x_{uu} = 0, \qquad x_{uv} = (-\,\mathrm{sen}\, v,\ \cos v,\ 0), \qquad x_{vv} = (-u\cos v,\ -u\,\mathrm{sen}\, v,\ f''),$$

dan

$$L_{11} = 0, \qquad L_{12} = \frac{-f'}{\sqrt{g}}, \qquad L_{22} = \frac{u\,f''}{\sqrt{g}}.$$

La condición de minimalidad. Sustituyendo en la fórmula de la curvatura media,

$$H = \frac{g_{11}L_{22} - 2g_{12}L_{12} + g_{22}L_{11}}{2g} = \frac{u\,f''}{2g\sqrt{g}}.$$

Luego $H \equiv 0$ si y solo si $u\,f''(v) = 0$ para todo (u, v) del dominio. Como u recorre un intervalo y no puede ser idénticamente nulo, la condición es

$$f''(v) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(v) = av + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Los conoides rectos minimales son exactamente

$$x(u, v) = (u\cos v,\ u\,\mathrm{sen}\,v,\ av + b),$$

es decir, el **helicoide** de paso a, trasladado b en vertical. Si $a = 0$ se degenera en el plano $z = b$. ■

DE DÓNDE VIENE

Esta cuenta es, en miniatura, el **teorema de Catalan** de 1842: la única superficie minimal reglada, aparte del plano, es el helicoide. Eugène Catalan lo probó en general, sin suponer que la reglada fuera un conoide recto. La cuenta anterior solo cubre esta familia: en una reglada general puede haber términos métricos cruzados y $H = 0$ no se reduce sin más a anular otro coeficiente de la segunda forma.
Conviene tener el mapa: la **catenoide** fue la primera minimal no trivial, hallada por Euler en 1744 al resolver el problema de la superficie de revolución de área mínima. El **helicoide** fue la segunda, descrita por Meusnier en 1776, y es además localmente isométrica a la catenoide: se puede deformar una en otra sin estirar, pasando por minimales en cada paso. Esa familia de deformación es uno de los objetos más bonitos del tema.

Ejercicio 4.14. *Donde la curvatura de Gauss se anula* [H4.11]

Sea la superficie de ecuación $z = (y^2 - x)^2$. Probar que el conjunto de los puntos de dicha superficie donde se anula la curvatura de Gauss constituyen una curva que es línea asintótica de dicha superficie.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Es una carta de Monge: usa las fórmulas de K y de la S.F.F. para $z = h(x, y)$, que solo necesitan las derivadas segundas de h y no obligan a normalizar nada hasta el final.*
2. *Para el denominador ni te molestes: es positivo siempre, así que el signo de K es el del numerador.*

Resolución. *Las derivadas.* Con $h(x, y) = (y^2 - x)^2$ y abreviando $w = y^2 - x$,

$$h_x = -2w, \qquad h_y = 4wy,$$

$$h_{xx} = 2, \qquad h_{xy} = -4y, \qquad h_{yy} = 4(2y^2 + w) = 4(3y^2 - x).$$

La curvatura de Gauss. Para una carta de Monge,

$$K = \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{\left(1 + h_x^2 + h_y^2\right)^2}.$$

El numerador vale

$$2 \cdot 4(3y^2 - x) - 16y^2 = 24y^2 - 8x - 16y^2 = 8(y^2 - x) = 8w,$$

y el denominador es siempre estrictamente positivo. Luego

$$K = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y^2 - x = 0.$$

Es una curva. Sobre $x = y^2$ se tiene $z = w^2 = 0$, de modo que el conjunto buscado es

$$c(y) = (y^2,\ y,\ 0), \qquad y \in \mathbb{R},$$

con $c'(y) = (2y, 1, 0) \neq 0$ para todo y: es una curva regular, la **parábola** $x = y^2$ del plano $z = 0$.

Es línea asintótica. Hay que ver que $K_n = 0$ sobre ella, es decir que la S.F.F. se anula en su dirección tangente. En coordenadas (x, y) la curva es $y \mapsto (y^2, y)$, cuyo vector tangente en el plano de parámetros es $(a, b) = (2y, 1)$. Sobre la curva $w = 0$, luego

$$h_{xx} = 2, \qquad h_{xy} = -4y, \qquad h_{yy} = 4(3y^2 - y^2) = 8y^2,$$

y la S.F.F. aplicada a esa dirección es proporcional a

$$h_{xx}a^2 + 2h_{xy}ab + h_{yy}b^2 = 2(2y)^2 + 2(-4y)(2y) + 8y^2 = 8y^2 - 16y^2 + 8y^2 = 0.$$

Luego $K_n = 0$ a lo largo de c: es línea asintótica. ■

LA IDEA: POR QUÉ TENÍA QUE SALIR ASÍ

El resultado no es casual, y verlo ahorra la cuenta final en problemas parecidos.
Sobre la curva, $K = 0$: los puntos son parabólicos o planos. En un punto parabólico hay **exactamente una** dirección asintótica, la del núcleo del operador de Weingarten. Así que sobre esa curva hay, en cada punto, una única dirección candidata, y el ejercicio consiste en comprobar que es la de la propia curva.
Y hay una razón geométrica para que lo sea: la curva está contenida en el plano $z = 0$, que es tangente a la superficie a lo largo de ella, porque allí $h = h_x = h_y = 0$. Una curva que vive dentro de su propio plano tangente no se separa de él, de modo que su curvatura normal es nula. Ese es exactamente el contenido del ejercicio siguiente.

Ejercicio 4.15. *Normal constante a lo largo de una curva* [H4.12]

Probar que si una curva regular, con curvatura no nula y contenida en una parametrización local de una superficie regular, es tal que a lo largo de ella la normal a la superficie es constante, entonces dicha curva es línea de curvatura y línea asintótica de la superficie, es plana, y el plano que la contiene es el plano tangente a la superficie a lo largo de ella.

Deducir que si una curva contenida en una p.l. de una s.r. tiene todos sus puntos planos, entonces es una curva plana.

Resolución. Sea $\alpha = \alpha(s)$ la curva, parametrizada naturalmente, y sea $\mathbf{N}(s) = \mathbf{N}(\alpha(s)) \equiv \mathbf{N}_0$ constante.

Línea de curvatura. El criterio de Olinde Rodrigues dice que α es línea de curvatura si y solo si $\dot{\mathbf{N}}(s) = \lambda(s)\,\mathbf{t}(s)$ para alguna función λ. Aquí $\dot{\mathbf{N}} = 0 = 0 \cdot \mathbf{t}$, luego lo es, y además la curvatura principal correspondiente es $\lambda = 0$.

Línea asintótica. La curvatura normal se calcula como

$$K_n(s) = -\dot{\mathbf{N}}(s)\cdot\mathbf{t}(s) = 0,$$

luego α es asintótica. (Obsérvese que esto ya es coherente con el ejercicio anterior: ser línea de curvatura y asintótica a la vez obliga a $K = 0$, y en efecto la curvatura principal en la dirección de α es nula.)

Es plana. Se considera $h(s) = \alpha(s)\cdot\mathbf{N}_0$. Su derivada es

$$h'(s) = \mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{N}_0 = 0,$$

porque $\mathbf{t}$ es tangente a la superficie y $\mathbf{N}_0$ es normal. Luego h es constante, digamos $h \equiv c$, y todos los puntos de α satisfacen $X\cdot\mathbf{N}_0 = c$: la curva está contenida en un plano afín ortogonal a $\mathbf{N}_0$.

Ese plano es el plano tangente. El plano tangente a la superficie en $\alpha(s)$ es el que pasa por $\alpha(s)$ y es ortogonal a $\mathbf{N}(\alpha(s)) = \mathbf{N}_0$: es decir, $X\cdot\mathbf{N}_0 = \alpha(s)\cdot\mathbf{N}_0 = c$. El mismo plano para todo s, y el mismo que contiene a la curva.

La deducción. Supóngase ahora que todos los puntos de α son **puntos planos** de la superficie, es decir, que en cada uno de ellos el operador de Weingarten es nulo. Entonces, a lo largo de la curva,

$$\dot{\mathbf{N}}(s) = -L_{\alpha(s)}\big(\mathbf{t}(s)\big) = 0,$$

luego $\mathbf{N}$ es constante a lo largo de α y, por lo ya probado, α es plana. ■

Otra vía. La parte de "es plana" admite una demostración con el triedro de Frenet, y conviene verla porque es donde entra la hipótesis $k \neq 0$, que en la ruta de arriba no se ha usado.

Como la curva vive en un plano ortogonal a $\mathbf{N}_0$, tanto $\mathbf{t}$ como su derivada $\dot{\mathbf{t}} = k\,\mathbf{n}$ son paralelos a ese plano. Al ser $k \neq 0$, el vector $\mathbf{n}$ está bien definido y es ortogonal a $\mathbf{N}_0$, igual que $\mathbf{t}$. Por tanto

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \pm\,\mathbf{N}_0$$

es constante, y derivando las ecuaciones de Frenet, $\dot{\mathbf{b}} = -\tau\,\mathbf{n} = 0$ da $\tau \equiv 0$: la curva es plana en el sentido de Frenet.

Merece la pena quedarse con esta equivalencia: **la binormal de la curva coincide, salvo signo, con la normal de la superficie**. Y eso es la manera geométrica de decir que la curva está "pegada" a su plano tangente, sin despegarse hacia ningún lado.

Ejercicio 4.16. *La desarrollable tangencial, de arriba abajo* [H4.3]

Clasificar los puntos y calcular las curvaturas principales, direcciones principales, líneas

de curvatura, direcciones asintóticas y líneas asintóticas de una superficie desarrollable tangencial.

Resolución. La idea, antes de la cuenta. Es la reglada con $w = \mathbf{t}$, y el método de las regladas dice qué esperar antes de derivar. El producto mixto $(\mathbf{t}, \mathbf{t}, \dot{\mathbf{t}})$ es nulo por repetir un argumento, así que $L_{12} = L_{22} = 0$, $K \equiv 0$, y toda la información de la segunda forma está en L_{11}. La imagen es la de las desarrollables: a lo largo de una generatriz, el plano tangente es el plano osculador de α, generado por $\mathbf{t}$ y $\mathbf{n}$, y es el mismo en toda la recta. Lo único nuevo respecto de las otras regladas es que $g_{12} = (\mathbf{t} + vk\mathbf{n})\cdot\mathbf{t} = 1$ no se anula. Las curvas paramétricas no son ortogonales, y por eso, para las direcciones principales, hay que usar la matriz entera del operador.

Sea $\alpha = \alpha(u)$ una c.r.p.n. con $k(u) > 0$ y sea

$$x(u, v) = \alpha(u) + v\,\mathbf{t}(u), \qquad v \neq 0.$$

Primera forma. Usando Frenet,

$$x_u = \mathbf{t} + vk\,\mathbf{n}, \qquad x_v = \mathbf{t},$$

$$g_{11} = 1 + v^2k^2, \qquad g_{12} = 1, \qquad g_{22} = 1, \qquad g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = v^2k^2 > 0.$$

Normal. El producto vectorial es

$$x_u \times x_v = (\mathbf{t} + vk\,\mathbf{n}) \times \mathbf{t} = vk\,(\mathbf{n} \times \mathbf{t}) = -vk\,\mathbf{b},$$

de norma $|v|k$. Haremos primero toda la cuenta en el lado $v > 0$, donde $\mathbf{N} = -\mathbf{b}$; al final se indica el cambio para $v < 0$. Es decir: **el plano tangente a la superficie a lo largo de una generatriz es el plano osculador de α en el punto correspondiente**, y es el mismo para toda la generatriz.

Segunda forma. Derivando otra vez y usando Frenet,

$$x_{uu} = -vk^2\,\mathbf{t} + (k + vk')\,\mathbf{n} + vk\tau\,\mathbf{b}, \qquad x_{uv} = k\,\mathbf{n}, \qquad x_{vv} = 0,$$

de donde, al proyectar sobre $\mathbf{N} = -\mathbf{b}$,

$$L_{11} = -vk\tau, \qquad L_{12} = 0, \qquad L_{22} = 0.$$

Curvaturas.

$$K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g} = 0, \qquad H = \frac{g_{11}L_{22} - 2g_{12}L_{12} + g_{22}L_{11}}{2g} = \frac{-vk\tau}{2v^2k^2} = \frac{-\tau}{2vk}.$$

Luego las **curvaturas principales** son

$$k_1 = 0, \qquad k_2 = 2H = \frac{-\tau}{v\,k}.$$

Clasificación de los puntos. Como $K \equiv 0$, no hay puntos elípticos ni hiperbólicos. Los puntos son **parabólicos** donde $\tau \neq 0$ y **planos** donde $\tau = 0$. Si α es una curva plana, la superficie tangencial degenera en un trozo del propio plano de α y todos sus puntos son planos.

Direcciones principales. La matriz del operador de Weingarten en la base $\{x_u, x_v\}$, usando ahora vectores columna, es $A = G^{-1}II$ con $G = \begin{pmatrix} 1+v^2k^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $II = \begin{pmatrix} -vk\tau & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, y sale

$$A = \frac{\tau}{vk}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\tau \neq 0$, su autovector de autovalor 0 cumple $a = 0$, es decir, es la dirección de $x_v = \mathbf{t}$: la **generatriz**. Su autovector de autovalor k_2 cumple $a = -b$, es decir, es la dirección de

$$x_u - x_v = vk\,\mathbf{n},$$

la de la **normal principal de** α. Las dos son ortogonales entre sí, como tenía que ocurrir.

Líneas de curvatura. Una familia son las **generatrices**, curvas $u = \text{cte}$. La otra son las curvas cuyo vector tangente en el plano de parámetros es proporcional a $(1, -1)$, es decir, las de ecuación $v = c - u$:

$$\beta_c(u) = \alpha(u) + (c-u)\,\mathbf{t}(u).$$

Se reconoce de inmediato: son las **involutas de** α, restringidas a $c - u \neq 0$. Estas son las dos familias en las regiones donde $\tau \neq 0$. Si $\tau = 0$ en un punto, toda dirección es principal allí; si se anula en una región, toda curva regular de esa región es línea de curvatura.

Direcciones y líneas asintóticas. La S.F.F. en una dirección (a, b) vale

$$II = L_{11}a^2 + 2L_{12}ab + L_{22}b^2 = -vk\tau\,a^2,$$

que se anula, si $\tau \neq 0$, exactamente cuando $a = 0$: la única dirección asintótica es de nuevo la de la generatriz. Las **líneas asintóticas son, pues, las generatrices**. Donde $\tau = 0$ el punto es plano y todas las direcciones son asintóticas.

Para $v < 0$ el normal inducido es $\mathbf{N} = \mathbf{b}$. Con ambos signos de v, las fórmulas unificadas son $L_{11} = -|v|k\tau$ y $k_2 = -\tau/(|v|k)$; las direcciones, las familias de curvas y la clasificación anteriores se conservan. ■

Qué hemos aprendido, y dónde se falla. Las dos familias de líneas de curvatura son dos objetos del capítulo 1. Una la forman las rectas tangentes de α. La otra, sus involutas, las curvas que dibuja la punta de un hilo tenso al desenrollarlo de α (ejercicio H1.21). Allí se vio que la velocidad de una involuta es $(c-s)k\,\mathbf{n}$, ecuación (1.11), es decir, que va en la dirección de la normal principal: la misma que ha salido aquí como segunda dirección principal. Que una involuta corte en ángulo recto a las tangentes era allí la definición. Aquí es la perpendicularidad de las dos direcciones principales. Los fallos típicos son tres. El primero consiste en ver $L_{12} = 0$ y concluir que las curvas paramétricas son líneas de curvatura. El corolario pide además $g_{12} = 0$, y aquí $g_{12} = 1$; por eso la segunda familia no es $u = \text{cte}$ ni $v = \text{cte}$, sino $v = c - u$. El segundo es olvidar el signo de v. Si se copia $k_2 = -\tau/(vk)$ en el lado $v < 0$, donde el normal inducido es $\mathbf{b}$, el signo sale cambiado; la fórmula que vale en los dos lados lleva $|v|$. El tercero es tratar la curva $v = 0$ como una curva más de la superficie. Allí la parametrización deja de ser regular (es la arista de retroceso), y nada de lo anterior vale en ella.

Ejercicio 4.17. *Una chapa ondulada* [H4.9]

Sea $x(u,v) = (u,v,0)$ la parametrización usual del plano OXY de $\mathbb{R}^3$ e $y(u,v)$ la superficie parametrizada obtenida por deformación de $x(u,v)$, dada por $y(u,v) = x(u,v) + (\operatorname{sen} u)\mathbf{N}(u,v)$, donde $\mathbf{N}(u,v)$ es el vector unitario normal a x. Estudiar si $y(u,v)$ posee puntos umbílicos y clasificar sus puntos. La elección de x importa: el desplazamiento $\operatorname{sen} u$ depende de las coordenadas, no solo del plano como conjunto.

Resolución. *Quién es y.* Con $x(u,v) = (u,v,0)$ se tiene $\mathbf{N} = (0,0,1)$ constante, luego

$$y(u,v) = (u,\ v,\ \operatorname{sen} u),$$

que es la carta de Monge $z = \operatorname{sen} x$: una **chapa ondulada**, cilindro generalizado cuyas generatrices son las rectas paralelas al eje OY.

Las derivadas. Con $h(u,v) = \operatorname{sen} u$,

$$h_u = \cos u, \qquad h_v = 0, \qquad h_{uu} = -\operatorname{sen} u, \qquad h_{uv} = 0, \qquad h_{vv} = 0.$$

Las curvaturas. Aplicando las fórmulas de Monge,

$$K = \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{(1+h_u^2+h_v^2)^2} = 0,$$

$$H = \frac{(1+h_v^2)h_{uu} - 2h_uh_vh_{uv} + (1+h_u^2)h_{vv}}{2(1+h_u^2+h_v^2)^{3/2}} = \frac{-\operatorname{sen} u}{2(1+\cos^2 u)^{3/2}}.$$

De $k_1k_2 = K = 0$ y $k_1 + k_2 = 2H$ se sigue que las curvaturas principales son

$$k_1 = 0, \qquad k_2 = \frac{-\operatorname{sen} u}{(1+\cos^2 u)^{3/2}}.$$

Puntos umbílicos. Hay umbilicidad si y solo si $k_1 = k_2$, es decir, si y solo si $k_2 = 0$, es decir, si y solo si $\operatorname{sen} u = 0$:

$$u = m\pi, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Sí hay puntos umbílicos, y son los de las rectas $u = m\pi$. Geométricamente son los **puntos de inflexión** del perfil sinusoidal, aquellos en los que la onda cruza el plano $z = 0$, y no las crestas ni los valles: estos últimos están en $u = \pi/2 + m\pi$, que es donde $|k_2|$ alcanza su máximo y la superficie se curva más.

Clasificación. Como $K \equiv 0$, no hay puntos elípticos ni hiperbólicos. Y además:

- si $\operatorname{sen} u \neq 0$, entonces $k_2 \neq 0$ y el punto es **parabólico**;
- si $\operatorname{sen} u = 0$, entonces $k_1 = k_2 = 0$, el operador de Weingarten es nulo y el punto es **plano**.

Los puntos umbílicos son, pues, exactamente los puntos planos. ■

LA IDEA: UMBÍLICO NO QUIERE DECIR REDONDO

Es tentador leer "punto umbílico" como "punto donde la superficie se parece a una esfera", y este ejemplo lo desmiente. Aquí los umbílicos son planos, no esféricos: la superficie no se parece localmente a una esfera, sino a un plano hasta segundo orden. La definición dice solo que **la curvatura normal no depende de la dirección**. Eso

admite dos casos: que el valor común sea no nulo, y entonces el punto se parece a una esfera de radio $1/|k|$, o que sea nulo, y entonces es un punto plano. Ambos son umbilicales.
En la chapa ondulada pasa lo segundo, y por una razón que se ve: en los puntos de inflexión del perfil la curva $z = \operatorname{sen} x$ tiene curvatura nula, y en la dirección perpendicular la superficie es recta por ser cilindro. Cero en las dos direcciones, luego cero en todas.

Ejercicio 4.18. *Nueve casos que hay que saber decidir* [H4.10]

Dadas las siguientes curvas, justificar adecuadamente si son o no son líneas de curvatura o líneas asintóticas en la superficie que se considera.

1. La circunferencia $v = \pi/2$ en el toro $x(u,v) = ((R + r\cos v)\cos u,\ (R + r\cos v)\operatorname{sen} u,\ r\operatorname{sen} v)$.
2. El ecuador $v = 0$ en el toro anterior.
3. El eje OX en la superficie $z = xy$.
4. Una hélice circular en el helicoide.
5. Una hélice circular en el cilindro circular.
6. Un paralelo de una esfera.
7. Una hélice enrollada en un cono.
8. Una hélice esférica.
9. Una circunferencia en el plano.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Ten a mano tres criterios y no calcules nada más: en una superficie de revolución meridianos y paralelos son líneas de curvatura; toda recta contenida en una superficie es línea asintótica; y en un punto umbilical toda dirección es principal.*
2. *El ejercicio anterior sobre asintóticas y principales decide varios casos de un plumazo: si $K > 0$ no hay asintóticas, y si $K < 0$ ninguna asintótica es principal.*

Resolución. Se toman $R > r > 0$ en el toro, radios positivos y hélices con paso no nulo; en el cono se excluye el vértice. Conviene tener antes las curvaturas principales del toro. Es de revolución con perfil $f(v) = R + r\cos v$, $g(v) = r\operatorname{sen} v$. Elegimos normal interior, opuesta a la inducida por el orden (u,v) del enunciado. Así sale

$$k_{\text{meridiano}} = \frac{1}{r}, \qquad k_{\text{paralelo}} = \frac{\cos v}{R + r\cos v}, \qquad K = \frac{\cos v}{r\,(R + r\cos v)}.$$

	Curva y superficie	Línea de curvatura	Línea asintótica
1	Circunferencia $v = \pi/2$ del toro	Sí	Sí
2	Ecuador $v = 0$ del toro	Sí	No
3	Eje OX en $z = xy$	No	Sí
4	Hélice circular en el helicoide	No	Sí
5	Hélice circular en el cilindro	No	No
6	Paralelo de una esfera	Sí	No
7	Hélice enrollada en un cono	No	No
8	Hélice esférica	Sí	No
9	Circunferencia en el plano	Sí	Sí

1. Es un paralelo del toro, y en toda superficie de revolución los paralelos son líneas de curvatura, porque $g_{12} = L_{12} = 0$ en la parametrización de revolución. Además, en $v = \pi/2$ se tiene $k_{\text{paralelo}} = \cos(\pi/2)/(R+0) = 0$, luego la curvatura normal en la dirección del paralelo es nula y también es asintótica. Coherente: allí $K = 0$ y los puntos son parabólicos, que es justo donde una asintótica puede ser principal.

2. Es también un paralelo, luego línea de curvatura por la misma razón. Pero ahora $k_{\text{paralelo}} = 1/(R+r) \neq 0$, luego no es asintótica. De hecho $K = 1/(r(R+r)) > 0$: los puntos son elípticos y *no existe* ninguna dirección asintótica en ellos.

3. La superficie es la carta de Monge $h(x,y) = xy$, con $h_{xx} = h_{yy} = 0$ y $h_{xy} = 1$. El eje OX es la curva $(x, 0, 0)$, cuya dirección en parámetros es $(1, 0)$, y

$$II \propto h_{xx} \cdot 1 + 2h_{xy} \cdot 0 + h_{yy} \cdot 0 = 0 :$$

es asintótica. No es línea de curvatura: como $K = (h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2)/(\cdots)^2 = -1/(1+x^2+y^2)^2 < 0$, los puntos son hiperbólicos y ninguna asintótica puede ser principal. Es además una recta contenida en la superficie, lo que da la asintoticidad sin cuentas.

4. En el helicoide se obtuvo $L_{11} = L_{22} = 0$ y $L_{12} \neq 0$, con $g_{12} = 0$. Las hélices son las curvas $u = \text{cte}$, y sobre ellas $K_n = L_{22}/g_{22} = 0$: son asintóticas. No son líneas de curvatura, porque para que las líneas paramétricas lo fueran haría falta $L_{12} = 0$, y aquí $L_{12} = -b/\sqrt{u^2+b^2} \neq 0$. Otra vez coherente: $K < 0$.

5. En el cilindro $x(u,v) = (a\cos u,\ a\,\mathrm{sen}\,u,\ v)$ con $\mathbf{N}$ exterior se tiene $L_{11} = -a$, $L_{12} = L_{22} = 0$, $g_{11} = a^2$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = 1$. La hélice corresponde a la dirección $(u', v') = (1, b)$, luego

$$II = L_{11} \cdot 1 + 2L_{12}b + L_{22}b^2 = -a \neq 0 :$$

no es asintótica. Tampoco es línea de curvatura: las direcciones principales del cilindro son la del paralelo ($k = -1/a$) y la de la generatriz ($k = 0$), y la hélice con $b \neq 0$ no es ninguna de las dos. Comprobación directa por Rodrigues: sobre la hélice $\alpha(t) = (a\cos t,\ a\,\mathrm{sen}\,t,\ bt)$ el normal es $\mathbf{N}(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\,t, 0)$, luego $\dot{\mathbf{N}} = (-\mathrm{sen}\,t, \cos t, 0)$, que no es proporcional a $\alpha'(t) = (-a\,\mathrm{sen}\,t,\ a\cos t,\ b)$ salvo si $b = 0$: la tercera componente de uno se anula y la del otro no.

6. La esfera tiene todos sus puntos umbilicales, luego el operador de Weingarten es $\pm\frac{1}{R}\,\mathrm{Id}$ y *toda* dirección es principal: cualquier curva de la esfera es línea de curvatura, en particular un paralelo. Y ninguna es asintótica, porque $K_n = \pm 1/R \neq 0$ en toda dirección.

7. Entendiendo por hélice cónica una curva que corta a las generatrices bajo ángulo constante distinto de 0 y de $\pi/2$: el cono es de revolución, luego sus líneas de curvatura son los meridianos (las generatrices) y los paralelos (las circunferencias), y esa hélice no es

ninguno de los dos. No es línea de curvatura. Y no es asintótica porque el cono tiene $K = 0$ con puntos parabólicos, de modo que en cada punto hay **una sola** dirección asintótica, la de la generatriz, que tampoco es la de la hélice.

8. Una hélice esférica está contenida en una esfera, y ahí vale lo dicho en el caso 6: es línea de curvatura por ser todos los puntos umbilicales, y no es asintótica porque en una esfera no hay direcciones asintóticas.

9. En el plano $L_{ij} \equiv 0$, luego todos los puntos son planos, el operador de Weingarten es nulo y *toda* dirección es a la vez principal (autovector de autovalor cero) y asintótica ($K_n = 0$). La circunferencia es, por tanto, las dos cosas. ■

QUÉ DEJA. Este ejercicio es un tema entero disfrazado de lista, y por eso conviene extraer el procedimiento en vez de memorizar los nueve resultados.

Para línea de curvatura, por orden de coste: ¿la superficie es de revolución y la curva es meridiano o paralelo? Entonces sí. ¿Los puntos son umbilicales? Entonces sí, sea cual sea la curva. ¿Las líneas paramétricas cumplen $g_{12} = L_{12} = 0$ y la curva es una de ellas? Entonces sí. Si nada de eso sirve, Rodrigues: comprobar si $\dot{\mathbf{N}}$ es proporcional a $\mathbf{t}$.

Para línea asintótica: ¿es una recta contenida en la superficie? Entonces sí, sin más. ¿El punto es elíptico? Entonces no, y ni se busca. Si no, calcular II en la dirección tangente y ver si se anula.

Y el filtro que ahorra tiempo: mirar primero el signo de K. Si $K > 0$ la respuesta a asintótica es no en todos los casos. Si $K < 0$, las dos respuestas no pueden ser ambas sí. Si $K = 0$ y el punto no es plano, hay una única dirección asintótica y además es principal.

Ejercicio 4.19. *Tres comprobaciones de la lección 4*

1. Hallar cómo cambian los coeficientes de II al cambiar de coordenadas.
2. Decidir si una superficie mínima puede tener puntos umbílicos.
3. Probar $H^2 \geq K$ y caracterizar el caso de igualdad.

Resolución. 1. Sean $y(v) = x(u(v))$ y $J = (\partial u_i / \partial v_a)$. Con el mismo normal elegido, la bilinealidad da

$$\widetilde{L}_{ab} = \sum_{i,j} L_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial v_a} \frac{\partial u_j}{\partial v_b}, \qquad \widetilde{II} = J^{\mathsf{T}} II J.$$

Si cada carta usa su normal inducido por el producto vectorial, entonces $N_y = \operatorname{sgn}(\det J) N_x$ y aparece además ese factor en $\widetilde{II}$. Es la misma regla de cambio de base que para I, con la precaución del signo del normal.

2. El ejercicio 3 de la lección original afirma que una mínima no tiene puntos umbílicos; tal como está escrito es falso: el plano es mínimo y todos sus puntos son umbílicos. La afirmación correcta es que en una mínima todo punto umbílico es plano: $k_1 = k_2$ y $k_1 + k_2 = 2H = 0$ obligan a $k_1 = k_2 = 0$.

3. La identidad ya usada al estudiar las direcciones principales es

$$H^2 - K = \frac{(k_1 - k_2)^2}{4} \geq 0.$$

La igualdad se da exactamente cuando $k_1 = k_2$, es decir, en los puntos umbílicos. ■

Repaso del capítulo

REPASO INTERCALADO: GEOMETRÍA EXTRÍNSECA, PRIMERA RONDA

A libro cerrado. Dos tercios de las preguntas vienen de los capítulos anteriores.

Primera ronda: reconstruir.

1. Define la aplicación de Gauss y su imagen esférica. ¿Cuánto vale la imagen esférica de un plano, de un cilindro y de una esfera?
2. ¿Por qué la diferencial de la aplicación de Gauss puede verse como un endomorfismo del plano tangente? Es el paso que hace posible todo el capítulo.
3. El operador forma es autoadjunto. ¿Qué tres cosas regala eso, y qué teorema de otra asignatura las da?
4. *Del capítulo 3:* enuncia el teorema de Gauss sobre los símbolos de Christoffel y di por qué su conclusión no era evidente.
5. Define curvatura media y curvatura de Gauss en términos del operador forma.
6. *Del capítulo 1:* escribe las ecuaciones de Frenet-Serret y las de Darboux una al lado de la otra. ¿Qué tienen en común sus matrices y por qué?
7. Enuncia el teorema egregio y di exactamente qué tiene de notable.
8. Clasifica los cuatro tipos de punto y di cuántas direcciones asintóticas hay en cada uno.

REPASO INTERCALADO: GEOMETRÍA EXTRÍNSECA, SEGUNDA RONDA

Segunda ronda: distinguir y aplicar.

1. Un cilindro está visiblemente curvado y su curvatura de Gauss es nula. Explica la aparente contradicción y deduce por qué una hoja de papel se enrolla pero no envuelve una pelota.
2. ¿Por qué ninguna superficie reglada tiene puntos elípticos? Da el argumento geométrico, no el del determinante.
3. *Del capítulo 2:* ¿por qué no existe una parametrización global de la esfera?
4. Una superficie de revolución tiene $f'' > 0$, con el perfil parametrizado por arco y $f > 0$. ¿De qué tipo son sus puntos?
5. Ante una curva sobre una superficie, ¿cómo decides si es geodésica, línea de curvatura o asintótica mirando solo hacia dónde apunta el normal?
6. *Del capítulo 3:* un vector transportado paralelamente por un paralelo de la esfera vuelve girado. ¿De qué depende ese ángulo y qué cantidad geométrica es?
7. ¿Qué superficies son totalmente umbilicales, y en qué se parece la demostración al círculo osculador del capítulo 1?
8. Dos superficies son tangentes a lo largo de una curva. ¿Qué propiedades de la curva comparten y por qué?

REPASO INTERCALADO: GEOMETRÍA EXTRÍNSECA, TERCERA RONDA, CON TODO LO ANTERIOR

Tercera ronda: con los cuatro capítulos mezclados.

1. Se da una curva y se construye la superficie reglada de sus normales principales. Clasifica sus puntos y di si la directriz es geodésica, línea de curvatura o asintótica.

Sigue los cinco pasos del método.

2. Dos superficies comparten una línea asintótica y sus planos tangentes son distintos en cada punto de ella. Demuestra que esa línea es una recta, y explica por qué el mismo enunciado con «geodésica» tiene la misma respuesta y con «línea de curvatura» no.
3. *Del capítulo 1:* demuestra el criterio de Lancret en las dos direcciones y úsalo para probar que la indicatriz de las binormales de una hélice es una circunferencia.
4. Escribe las ecuaciones de Darboux y explica qué propiedad de la curva corresponde a la anulación de cada uno de sus tres coeficientes.
5. Demuestra que la curvatura de Gauss de una superficie de revolución vale menos la segunda derivada del perfil dividida por el perfil, y deduce cuáles son las llanas.
6. *De los capítulos 1 y 3:* tres teoremas del libro se demuestran montando un sistema lineal de ecuaciones diferenciales. ¿Cuáles son y qué papel juega la linealidad en cada uno?
7. Una homotecia de razón negativa se aplica a una superficie. ¿Cambia la orientación? ¿Cambia la clasificación de los puntos? Justifica con la fórmula del vector normal.
8. De los cuatro ingredientes del teorema de Gauss-Bonnet, tres están construidos en este libro. Nómbralos, di en qué capítulo aparece cada uno y explica qué papel juega en el teorema el que la curvatura de Gauss sea intrínseca.

Conexión: qué queda hecho y qué viene ahora

Con este capítulo el temario está completo, y merece la pena mirar atrás un momento.

El libro ha recorrido cuatro veces la misma idea. Se monta una referencia adaptada al objeto y se estudia cómo gira al avanzar. En curvas fue el triedro de Frenet, y los coeficientes de su giro resultaron ser la curvatura y la torsión. En superficies fue la referencia $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{N}\}$, y sus coeficientes de giro son los símbolos de Christoffel, que gobiernan lo intrínseco, y los de la segunda forma fundamental, que gobiernan lo extrínseco. Y para una curva sobre una superficie fue el triedro de Darboux, cuyos tres coeficientes son exactamente las tres propiedades de la tabla.

Lo que queda pendiente para la asignatura siguiente es juntar las dos últimas cosas. La curvatura geodésica del capítulo 3 y la curvatura de Gauss de este aparecen sumadas en un único enunciado, el teorema de Gauss-Bonnet, que iguala esa suma a una cantidad puramente topológica. De sus cuatro ingredientes, tres están construidos aquí.

Y el resultado que hace que ese teorema no sea una curiosidad sino algo profundo es el egregio: que la curvatura de Gauss, definida mirando la superficie desde fuera, se pueda calcular desde dentro.

APÉNDICE A

Ideas intuitivas de las demostraciones

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: QUÉ ES ESTO Y QUÉ NO

Este apéndice no contiene ningún resultado que no esté ya en los capítulos: es una reescritura de demostraciones que ya están ahí, contadas por su idea en vez de por sus pasos. Reconstruir una demostración de memoria es mucho más barato si se recuerda el *movimiento* que si se intenta recordar la cadena de igualdades. Si el tiempo aprieta, se salta entero sin perder materia.

Este apéndice no repite ninguna demostración. Para cada resultado importante recoge cinco cosas: qué se quiere probar en una frase, la imagen mental que lo sostiene, el movimiento decisivo que permite empezar, dónde se usa cada hipótesis y la trampa más probable.

Para practicar recuperación, se consulta **después** de intentar reconstruir la prueba de memoria. Si aún no se entiende el argumento, también puede servir como guía antes de volver a la demostración detallada.

A.1 Curvas

Toda curva parametrizada regular es un homeomorfismo local

Objetivo. Que la condición de regularidad garantice que, de cerca, la curva no se pisa a sí misma.
Imagen. Si el vector velocidad no se anula, alguna coordenada avanza estrictamente, y esa coordenada sirve para etiquetar los puntos sin ambigüedad.
Movimiento decisivo. Elegir la componente cuya derivada no se anula y aplicarle el teorema de la función inversa en dimensión uno.
Hipótesis. La regularidad da la derivada no nula; la diferenciabilidad, la continuidad que el teorema necesita.
Trampa. Creer que se prueba la inyectividad global. Es estrictamente local, y hay curvas inyectivas que no son homeomorfismos sobre su imagen.

La longitud de arco es invariante

Objetivo. Que cambiar el parámetro no cambie la longitud del recorrido. Recorrer dos veces el mismo trazo sí duplica su longitud.
Imagen. Recorrer más deprisa acorta el tiempo pero no el camino.
Movimiento decisivo. Cambiar de variable en la integral y separar los dos casos según el signo de la derivada del cambio.
Hipótesis. Que la derivada del cambio no se anule es lo que le da signo constante; sin eso no se puede separar en dos casos.
Trampa. Olvidar el valor absoluto. En el caso decreciente aparecen dos signos negativos, uno del módulo y otro de los límites invertidos, y se cancelan.

Existencia de la parametrización natural

Objetivo. Que toda curva regular admita el parámetro arco.
Imagen. La función que mide lo recorrido es estrictamente creciente, luego se puede invertir y usar como reloj.
Movimiento decisivo. Derivar la integral con el primer teorema fundamental del cálculo.
Hipótesis. Aquí la regularidad se usa para obtener una *desigualdad estricta*: $s'(t) = |\alpha'(t)| > 0$, que permite invertir s diferenciablemente.
Trampa. Creer que el parámetro natural se puede calcular en la práctica. Casi nunca: la integral rara vez tiene primitiva elemental. Se demuestra con él y se calcula con otro.

El plano osculador es el plano límite

Objetivo. Que el plano osculador sea el que mejor se adapta a la curva.
Imagen. Se toman planos que contienen la tangente y pasan por un punto próximo, y se ve hacia dónde tienden al acercar ese punto.
Movimiento decisivo. Restar al vector que une los dos puntos su parte tangencial y *dividir por el orden exacto de lo que queda*, que es el cuadrado. Es amplificar el residuo hasta que tenga tamaño finito.
Hipótesis. La curvatura no nula asegura que los dos directores son independientes y que el plano existe.
Trampa. Intentar tomar el límite sin amplificar. El vector tiende a cero y no dice nada.

Torsión nula si y solo si la curva es plana

Objetivo. Caracterizar las curvas planas con un solo número.
Imagen. Si el plano osculador no se mueve, la curva no puede salirse de él.
Movimiento decisivo. En la vuelta, reconocer que el producto escalar de la curva por la binormal constante tiene derivada nula, e integrar para obtener la ecuación de un plano.
Hipótesis. Que la binormal sea constante es lo que permite sacarla de la derivada.
Trampa. Olvidar que todo esto exige curvatura no nula, porque si no la binormal ni siquiera existe.

Ecuaciones de Frenet-Serret

Objetivo. Escribir las derivadas del triedro en el propio triedro.
Imagen. Una referencia ortonormal que viaja con la curva solo puede girar, y girar en el espacio se describe con una matriz antisimétrica.
Movimiento decisivo. La primera y la tercera ecuación son definiciones despejadas; solo la segunda se demuestra, derivando el producto vectorial que define el normal principal.
Hipótesis. Que el triedro sea ortonormal y directo, que es lo que fija los signos de los productos vectoriales.
Trampa. Perder un signo en $\mathbf{n} \times \mathbf{t} = -\mathbf{b}$ o en $\mathbf{b} \times \mathbf{n} = -\mathbf{t}$. Conviene escribirlos aparte antes de empezar.

Forma canónica local

Objetivo. Saber cómo se ve una curva desde su propio triedro.
Imagen. Recta en la dirección tangente, parábola en la del normal principal, cúbica en la de la binormal.
Movimiento decisivo. Desarrollar por Taylor hasta orden tres y sustituir cada derivada por su expresión en el triedro mediante Frenet-Serret.
Hipótesis. Clase tres para que exista el término cúbico; curvatura y torsión no nulas para que los tres términos sean efectivos.
Trampa. Confundir el orden de los términos. El que decide si la curva atraviesa un plano es el de menor grado con coeficiente no nulo, y lo decide por su *paridad*.

Teorema fundamental de las curvas alabeadas

Objetivo. Que la curvatura y la torsión determinen la curva salvo movimiento rígido.
Imagen. Dar la curvatura y la torsión es dar las instrucciones de giro del triedro; fijando dónde se empieza y cómo se está orientado, el recorrido queda determinado.
Movimiento decisivo. No es geometría: es el teorema de existencia y unicidad para sistemas lineales de ecuaciones diferenciales, aplicado a las nueve componentes del triedro.
Hipótesis. La continuidad de los coeficientes permite resolver el sistema lineal en todo el intervalo. La curvatura positiva sirve después para identificar el triedro con el de Frenet de la curva construida.
Trampa. Pensar que se demuestra construyendo la curva. Se construye el triedro, y la curva se recupera después integrando.

A.2 Superficies

Toda superficie parametrizada es un homeomorfismo local

Objetivo. Que el problema del cilindro sobre el folium sea solo global.
Imagen. Se engorda la superficie con una tercera coordenada que se mueve en perpendicular, hasta que la aplicación va de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$.
Movimiento decisivo. Añadir esa dimensión artificial para poder aplicar el teorema de la función inversa, que exige dimensiones iguales, y restringir después a la rebanada inicial.
Hipótesis. El rango dos de la jacobiana es lo que hace no nulo el determinante de la aplicación engordada.

Trampa. Creer que basta con la inyectividad para tener superficie regular. No basta: falta la continuidad de la inversa.

Toda superficie regular es localmente un grafo

Objetivo. Reducir el caso general al más sencillo.
Imagen. Se proyecta sobre el plano coordenado adecuado y se comprueba que la proyección es invertible cerca del punto.
Movimiento decisivo. Componer la parametrización con la inversa de la proyección. Las dos primeras coordenadas se simplifican solas.
Hipótesis. El menor no nulo decide sobre qué plano proyectar; por eso hay tres formas posibles y no una.
Trampa. Olvidar que hacen falta las tres formas. Una esfera cerca del ecuador no se puede escribir con la altura como función de las otras dos.

Teorema del valor regular

Objetivo. Reconocer superficies a partir de una ecuación.
Imagen. Si el gradiente no se anula, la ecuación se puede despejar localmente y el nivel es un grafo.
Movimiento decisivo. Aplicar el teorema de la función implícita a la coordenada cuya parcial no se anula.
Hipótesis. Valor regular significa que *ningún* punto del nivel es crítico. Basta un punto crítico para que no se pueda aplicar este criterio a todo el nivel.
Trampa. La grande de todo el capítulo: creer que si el valor es crítico el nivel no es superficie. No se deduce nada. Para probar que algo no es superficie regular hace falta un argumento adicional, por ejemplo topológico o sobre los planos tangentes.

El plano tangente es el conjunto de velocidades

Objetivo. Que la definición geométrica y la operativa coincidan.
Imagen. Las direcciones en las que uno puede moverse sin salirse de la superficie, a primer orden.
Movimiento decisivo. La regla de la cadena en un sentido, y construir explícitamente una curva con la velocidad pedida en el otro.
Hipótesis. Que el dominio sea abierto, para poder meter la curva construida dentro de él; de ahí la elección cuidadosa del intervalo.
Trampa. Dar por hecha la vuelta. Que toda combinación sea tangente hay que probarlo exhibiendo una curva.

Orientable si y solo si existe un campo normal unitario global

Objetivo. Sustituir una condición sobre todos los pares de cartas por una sobre un solo campo.
Imagen. Tener dos caras es poder pintar una de un color sin que los colores se encuentren.
Movimiento decisivo. En la vuelta, considerar el producto escalar del campo global con el normal de cada carta: solo puede valer más uno o menos uno, y por conexión es constante en cada carta.
Hipótesis. La conexión de cada entorno coordenado, sin la cual el signo podría cambiar dentro de una misma carta.
Trampa. Olvidar que la orientabilidad es global. Cualquier trozo pequeño de la banda de Möbius es orientable.

A.3 Geometría intrínseca

Los símbolos de Christoffel son intrínsecos

Objetivo. Probar que se calculan sin salir de la superficie, pese a estar definidos con el vector normal.
Imagen. Al derivar los coeficientes métricos aparecen productos escalares de derivadas segundas por derivadas primeras, que son justo lo que define los símbolos.
Movimiento decisivo. Escribir las tres derivadas $\partial g_{ih}/\partial u_j$ y sus permutaciones, sumarlas con los signos adecuados y ver que los términos cruzados se cancelan dos a dos.
Hipótesis. La simetría de las derivadas segundas cruzadas.
Trampa. Confundir intrínseco con independiente de las coordenadas: los símbolos se calculan con la métrica, pero sus valores cambian al cambiar de carta.

La curvatura geodésica es intrínseca y la normal no

Objetivo. Separar lo que percibe un habitante de la superficie de lo que no.
Imagen. El caminante nota su propio giro y no nota la curvatura del suelo.
Movimiento decisivo. Derivar dos veces la curva en coordenadas y sustituir las derivadas segundas de la parametrización por las ecuaciones de Gauss. La parte tangencial lleva los símbolos de Christoffel y la normal lleva los coeficientes de la segunda forma.
Hipótesis. Ninguna especial; es un cálculo directo.
Trampa. Olvidar que ambas cambian de signo con la orientación. Lo que no depende de ella es que se anulen o no.

Existencia y unicidad del transporte paralelo

Objetivo. Poder trasladar un vector a lo largo de una curva de forma canónica.
Imagen. Se pide que el campo no cambie *para el habitante*, es decir, que su derivada covariante se anule.
Movimiento decisivo. Escribir esa condición en coordenadas: sale un sistema lineal de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, y se cita existencia y unicidad.
Hipótesis. La continuidad de los símbolos de Christoffel a lo largo de la curva. La linealidad da que la solución cubre todo el intervalo.
Trampa. Pensar que el transporte paralelo devuelve el vector igual tras un camino cerrado.

Puede volver distinto. Para un lazo simple que bordea un disco orientado, el giro se relaciona, módulo 2π y con signo según la convención, con la integral de K; no todo lazo encierra un disco.

Caracterización de las geodésicas

Objetivo. Tres formas equivalentes de decir lo mismo.
Imagen. La curva se dobla solo hacia dentro de la superficie, nunca de lado.
Movimiento decisivo. Todo sale de la descomposición de Darboux: anular la parte tangencial de la aceleración es anular la curvatura geodésica, y eso es que la aceleración apunte en la dirección del normal.
Hipótesis. Se usa parámetro natural o velocidad constante. Para la tercera forma hace falta curvatura no nula, porque si no el normal principal no existe.
Trampa. Escribir la hipótesis como «la curva no es una recta». No es lo mismo: una curva que no sea recta puede tener puntos aislados de curvatura nula.

A.4 Geometría extrínseca

El operador forma es autoadjunto

Objetivo. Poder aplicarle el teorema espectral.
Imagen. La simetría procede, en el fondo, de la igualdad de las derivadas segundas cruzadas.
Movimiento decisivo. Derivar las dos identidades que dicen que el normal es ortogonal a cada campo coordenado, y restar.
Hipótesis. La simetría de las derivadas cruzadas, otra vez.
Trampa. Subestimarlo por lo corto que es. Es el resultado que da las curvaturas principales, las direcciones ortogonales y la diagonalización, todo de golpe.

Teorema de Euler

Objetivo. Que, fijada una base principal, dos números describan la curvatura normal en todas las direcciones.
Imagen. La curvatura normal es una media ponderada de las dos principales, con pesos que suman uno.
Movimiento decisivo. Escribir la dirección en la base de direcciones principales y desarrollar la segunda forma fundamental.
Hipótesis. Que las direcciones principales sean ortonormales, que es lo que da el teorema espectral.
Trampa. Olvidar que de aquí sale también que las curvaturas principales son el máximo y el mínimo. Basta derivar respecto del ángulo.

Totalmente umbilical implica plano o esfera

Objetivo. Clasificar las superficies que se curvan igual en todas las direcciones.
Imagen. Es el mismo argumento que el centro de curvatura de una curva: se construye un punto candidato a centro y se prueba que no se mueve.
Movimiento decisivo. Dos pasos. Primero, ver que la función que da la curvatura común es constante, usando la simetría de las derivadas cruzadas. Segundo, definir el punto desplazado en la dirección normal y comprobar que su diferencial es nula.
Hipótesis. La conexión, dos veces: para que la función constante lo sea y para que el punto candidato lo sea.
Trampa. Saltarse el primer paso. Que cada punto sea umbílico no da, de entrada, que la curvatura sea la misma en todos.

Interpretación geométrica de la curvatura de Gauss

Objetivo. Darle a K un significado medible.
Imagen. $|K|$ es el factor para las áreas ordinarias; K incluye el signo para las orientadas, como un jacobiano.
Movimiento decisivo. La identidad que expresa el producto vectorial de las derivadas del normal como K por el producto vectorial de los campos coordenados, que sale de las ecuaciones de Weingarten.
Hipótesis. Curvatura no nula, para que la aplicación de Gauss sea difeomorfismo local y la integral de área no cuente imágenes repetidas.
Trampa. Creer que una superficie visiblemente curvada tiene K no nula. El cilindro tiene imagen esférica de área cero.

Toda superficie reglada tiene curvatura de Gauss no positiva

Objetivo. Descartar los puntos elípticos de un plumazo.
Imagen. Por cada punto pasa una recta contenida en la superficie, y una recta es siempre dirección asintótica; en un punto elíptico no hay ninguna.
Movimiento decisivo. La parametrización es lineal en el segundo parámetro, luego su derivada segunda respecto de él es nula y uno de los coeficientes de la segunda forma se anula sin calcular nada.
Hipótesis. La forma reglada de la parametrización y su regularidad en el punto.
Trampa. Calcular los tres coeficientes cuando solo hace falta uno.

Desarrollable si y solo si la curvatura de Gauss es nula

Objetivo. Traducir una condición de taller en una geométrica.
Imagen. Desarrollable es que se pueda extender sobre un plano sin estirar; el teorema egregio dice que eso exige la misma curvatura de Gauss que el plano.
Movimiento decisivo. Calcular el coeficiente mixto L_{12}, que decide K, y reconocer en él el producto mixto de la definición.
Hipótesis. Ninguna sobre el módulo del campo de direcciones: la unitariedad no se usa en ningún paso. Lo que sí se usa es que la parametrización sea lineal en el segundo parámetro, que es lo que anula un coeficiente de la segunda forma, y que un producto mixto con un argumento repetido se anule.

Trampa. Confundir «reglada» con «desarrollable». Toda desarrollable es reglada; el recíproco es falso: la superficie de las binormales de una curva con torsión no nula es un contraejemplo.

Superficies tangentes a lo largo de una curva

Objetivo. Ver qué propiedades comparten.
Imagen. Si el normal coincide, el triedro de Darboux entero coincide, y con él todo lo que se deriva de él.
Movimiento decisivo. Observar que el tangente es de la curva, el normal es común por hipótesis, y la normal intrínseca es el producto vectorial de los dos.
Hipótesis. Orientaciones compatibles, si se quiere que coincidan los signos y no solo los valores absolutos.
Trampa. Extenderlo a superficies que solo comparten la curva sin ser tangentes. Ahí las tres propiedades pueden diferir, y de esa diferencia salen varios ejercicios.

APÉNDICE B

Añadidos y omisiones

Qué de este libro no está en los apuntes del profesor

Para poder recortar con criterio si el tiempo aprieta, esta lista distingue las principales ampliaciones explicativas del temario. Su presentación es propia del libro, aunque parte de sus ideas y resultados también aparece en el material oficial.

- **Las cajas.** *La idea*, *De dónde viene*, *Conexión*, *La pregunta* y *El camino que no se tomó*. Son andamiaje: explican, sitúan históricamente y cuentan qué alternativas se descartaron. Algunas desarrollan aplicaciones adicionales, identificadas como conexiones.
- **Las pistas y los apartados «otra vía»** de los ejercicios. Los enunciados son del profesor; las pistas escalonadas y las resoluciones alternativas, nuestras.
- **Los casos resueltos a mano y los cierres de los ejercicios.** Los ejemplos con números que acompañan a la teoría (la hélice y la catenaria en parámetro arco, la cúbica alabeada en parámetro arbitrario, el plano en polares, el paraboloide $z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$, la silla $z = xy$, las tres regladas de la hélice clasificadas, entre otros), *la idea* delante de muchas resoluciones y *qué hemos aprendido* y *dónde se falla* detrás son rampa explicativa: no añaden temario. Tres fórmulas de apoyo que aparecen en ellos no están en las lecciones, y se obtienen donde se usan a partir de lo ya demostrado: los símbolos de Christoffel en coordenadas ortogonales (capítulo 3), la torsión geodésica en las direcciones principales, $\tau_g = (k_2 - k_1)\cos\varphi \operatorname{sen}\varphi$, y la curvatura de Gauss de una superficie de revolución con el perfil escrito como $r = \varphi(z)$ (capítulo 4).
- **El apéndice de ideas intuitivas**.
- **Este apéndice** y el de cómo usar el libro.
- **Los mecanismos de dos demostraciones que no se desarrollan en las lecciones.** El teorema fundamental de las curvas alabeadas y el teorema egregio se enuncian en las lecciones sin demostrarlos. El material complementario sobre el teorema fundamental de superficies sí desarrolla la prueba del egregio. Aquí no se ha escrito la demostración completa de ninguno de los dos, pero sí el esqueleto del argumento, como esquema explicativo; no debe confundirse con una prueba completa.

- **La demostración del teorema del cambio de cartas** está escrita aquí con sus cuatro pasos, y la extensión local de x^{-1} a un abierto del espacio, que es su núcleo, se apoya en la proposición de los grafos tal como quedó demostrada unas páginas antes.
- **Los símbolos de Christoffel de la pseudoesfera** llevan detrás el cálculo de su curvatura de Gauss, $K = -1/a^2$, que se hace con la fórmula de las superficies de revolución del capítulo 4. El enunciado del problema pide solo los símbolos.
- **Los nombres propios históricos** (Lancret, Bertrand, Huygens, Meusnier, Catalan, Levi-Civita, Joachimsthal y demás). Algunos ya aparecen en el material del profesor; otros son atribuciones añadidas. La historia no amplía los resultados exigidos.

Y al revés, para que conste: **no hay ninguna sección del profesor que falte en este libro**. Los cuatro capítulos siguen sus cuatro lecciones, sección a sección y con sus nombres, y las cuatro hojas de problemas están cubiertas enteras, problema a problema y cotejadas contra los enunciados originales.

Precisiones del texto de origen

En el capítulo 1, el teorema de la función inversa se formula con una restricción $f|_U : U \to V$ entre abiertos para distinguir la inversa local de una inversa global. Es el mismo resultado; se explicitan su dominio y su imagen.

En el plano osculador como límite se explicita por qué los planos cercanos existen: los productos vectoriales de sus directores convergen a un vector no nulo. En los puntos de curvatura nula se distingue entre no estar definido el triedro por su fórmula y poder, en algunos casos, prolongarlo por continuidad.

En los ejercicios de contacto se distingue el orden exacto del orden mínimo asegurado: el círculo osculador tiene contacto de orden al menos 2; puede ser mayor. Se explicitan también las hipótesis de curvatura no nula y regularidad necesarias para usar el triedro y las derivadas correspondientes.

En H1.12, el cociente de torsión y curvatura se usa en intervalos de curvatura positiva y se justifica la separación de casos. En H1.14 se distingue entre movimientos directos e inversos: sin esa precisión el signo del paso no queda fijado.

H1.19 conserva los apartados desarrollados y añade el recíproco necesario para cubrir el «si y solo si» de la hoja original.

En el capítulo 2 se precisa la restricción del dominio en el teorema de la inversa local. Se recuperan la demostración del criterio práctico de carta y las definiciones de diferenciabilidad desde y hacia una superficie, con sus consecuencias, que figuran en la lección original.

En el capítulo 3 se distingue integrar el área (que no exige orientación) de integrar una forma orientada. Las regiones de una carta se toman con las condiciones necesarias para aplicar el cambio de variables; las propiedades elementales del área, por sí solas, no prueban su unicidad. En el capítulo 4 se explicita la convención de matrices por filas del profesor y se separa de la convención por columnas cuando aparece en los ejercicios.

El ejercicio final de la lección 4 que afirma que una superficie mínima no tiene puntos umbílicos es falso tal como está escrito: el plano es un contraejemplo. Se conserva la pregunta indicando la corrección: en una superficie mínima, todo punto umbílico es plano. Las salvedades de regularidad y curvatura nula también se señalan en las convocatorias, y la figura de julio de 2024 se reconstruye con las tres curvas del original.

Los complementos del profesor se usan para cotejar las curvas clásicas y las explicaciones

relacionadas. No se reproducen íntegramente sus desarrollos sobre singularidades de orden superior, sistemas de curvas ni el teorema fundamental de superficies: la cobertura indicada arriba se refiere a las cuatro lecciones y sus hojas. El bloque final de la lección 2 se completa con el cambio estereográfico, los niveles fuera de puntos críticos y las transformaciones de vectores tangentes.

Figuras y conexiones con física y probabilidad

Las figuras de las lecciones oficiales se reproducen junto a los conceptos que explican: curvas, parametrización natural, triedro de Frenet y plano osculador; parametrizaciones y atlas de superficies, superficies de revolución, plano tangente, orientación y aplicación de Gauss. Los recortes conservan el dibujo y sus rótulos; su procedencia figura en cada pie. Se mantienen los esquemas complementarios que aportan otra lectura.

Las conexiones añadidas desarrollan conocimientos de mecánica y probabilidad sin convertirlos en requisitos del temario. Los puntos de partida se encuentran en los *Apuntes de sólido rígido* (ángulos de Euler, §2.3; bases móviles, §4.6; formas y operadores, §§5.7 y 5.9; mecánica lagrangiana), los *Apuntes de relatividad* (métrica de la esfera y energía cinética; intervalo y tiempo propio), los *Apuntes de ondas* (frentes de fase) y los *Apuntes de probabilidad* (Gram, covarianza y proyección, §3.12). Se explicita en el propio texto qué construcción se comparte y qué hipótesis cambian.

APÉNDICE C

Qué cae en el examen

Este apéndice recoge el formato y los contenidos de los exámenes de la Universidad de Sevilla. Las convocatorias resueltas están en el apéndice D; estas orientaciones pueden omitirse si se estudia la materia en otro contexto.

C.1 Cómo se examina

El sistema de 2026-27. Según los proyectos docentes de 2026-27, el examen de cada convocatoria consta de varios ejercicios teórico-prácticos sobre 10 puntos, y se aprueba con 5. Es el examen que describe el resto de este apéndice. Antes de la primera convocatoria hay además una vía previa, voluntaria, que cambia de un grupo a otro:

Grupo	Vía previa (voluntaria)
1 y 3	Una prueba en la última semana de clase, con el mismo diseño que el examen de convocatoria.
2	Cuatro pruebas, una al terminar cada lección, de 2,5 puntos cada una; hay que sumar 5 y sacar al menos 1 en la cuarta.

El reparto. Es frecuente un ejercicio de curvas en $\mathbb{R}^3$, pero no hay un reparto fijo: en enero de 2024 el primer ejercicio, de seis puntos, combina una curva con la reglada que genera; en julio de 2025 el primero, de cuatro puntos, hace lo mismo. Conviene preparar tanto curvas aisladas como curvas dentro de superficies y superficies construidas a partir de curvas.
La combinación directriz-generatriz. De las nueve convocatorias revisadas, en **siete** aparece una superficie reglada construida sobre una curva, y en varias de ellas aparece además una curva construida sobre otra curva. Las generatrices son casi siempre vectores del triedro de Frenet: superficie de las tangentes ($w = \mathbf{t}$), de las normales principales ($w = \mathbf{n}$), de las binormales ($w = \mathbf{b}$) y, con la lección 3, de las normales intrínsecas. La proposición de que ninguna reglada tiene puntos elípticos deja hecha la mitad del apartado «clasificar sus puntos» antes de empezar (sección 4.5.3).

Formulaciones que se repiten.

- «Dar una superficie parametrizada cuya imagen esté contenida en…»: es la manera de pedir un ladrillo local sin comprometerse con la superficie entera.
- «Justificar sin hacer ningún cálculo adicional»: pide la mitad cualitativa del teorema fundamental, o el criterio de que $\ddot{\alpha}$ sea normal a la superficie.
- Clasificar puntos de una reglada, y decidir si una curva sobre una superficie es geodésica, línea de curvatura o línea asintótica. La tabla de las tres condiciones y las ecuaciones de Darboux son lo que resuelve estos apartados.
- En la primera convocatoria de 2025 se dieron los símbolos de Christoffel en el enunciado, para calcular transporte paralelo y derivadas covariantes. También se pide reconocer geométricamente que la superficie es plana.
- La superficie de las binormales de una curva con torsión no nula (puntos hiperbólicos) se pidió clasificar en 2022; el resto de aquel ejercicio se apoya entero en saber qué plano tangente hay a lo largo de la directriz.
- En la segunda convocatoria de 2026 se pide probar que, con k y τ constantes, la condición $k = a(k^2 + \tau^2)$ obliga a que cierta curva construida sea una recta: esa condición dice que a es el radio del cilindro sobre el que se enrolla la hélice.

Notación. El profesor escribe la curvatura κ en algunos enunciados; en este libro es siempre k, y es la misma función.

C.2 Por capítulos

Cada entrada dice a qué ejercicio o sección del libro se refiere.

Curvas regulares (capítulo 1)

- *La hélice circular, de principio a fin.* hoja de problemas, y como pieza de la primera convocatoria de 2026 y de la segunda de 2026.
- *El círculo osculador y el lugar de los centros de curvatura.* primera y segunda convocatorias de 2025, en las dos como apartado de un ejercicio mayor. En la segunda aparece disfrazado de recta polar, que es la que pasa por el centro del círculo osculador y es perpendicular al plano osculador.
- *Hélices: el criterio de Lancret.* primera convocatoria de 2026, donde se pide la equivalencia entre ser hélice y que las curvas de dirección principal sean planas.
- *La curva paralela a distancia a.* segunda convocatoria de 2026, ejercicio 1 completo.
- *La indicatriz esférica de las binormales de una hélice.* primera convocatoria de 2025, ejercicio 1.2.

Superficies regulares (capítulo 2)

- *La superficie reglada de las binormales.* primera convocatoria de 2022, ejercicio 2, cuyos apartados restantes se completan en el capítulo 4.

Geometría intrínseca (capítulo 3)

- *La derivada covariante gira dentro del plano tangente.* segunda convocatoria de 2025, ejercicio 2.
- *Transporte paralelo a lo largo de un paralelo de la esfera.* primera convocatoria de 2025, donde el mismo cálculo se plantea sobre otra superficie y con los símbolos de Christoffel dados en el enunciado.
- *Una curva plana dentro de una superficie.* primera convocatoria de 2026, ejercicio 3, donde la segunda condición se enuncia como «α es línea asintótica».

Geometría extrínseca (capítulo 4)

- *La torsión geodésica y las ecuaciones de Darboux.* primera convocatoria de 2024, ejercicio 2: expresión en direcciones principales y ejemplos; es otra formulación del mismo concepto.
- *Compartir una asintótica sin ser tangentes.* segunda convocatoria de 2025, ejercicio 3.
- *La superficie de las binormales, hasta el final.* primera convocatoria de 2022, ejercicio 2. Es el patrón más repetido del examen: construir una reglada sobre una curva y clasificar sus puntos.
- *Lectura de figuras sobre un cilindro.* Julio de 2024, ejercicio 3: paralelo, hélice y elipse oblicua. Julio de 2025, ejercicio 4: paralelo compartido por cilindro y plano. Las figuras son distintas; ambas están reproducidas y resueltas en el apéndice de exámenes.
- *Qué le hace una homotecia a una superficie.* primera convocatoria de 2026, ejercicio 2 completo.

APÉNDICE D

Exámenes resueltos

Este apéndice es la pieza que hace utilizable el final del estudio de cada bloque. Cada examen aparece dos veces: primero el enunciado solo, para hacerlo, y después la resolución completa, para corregirlo.

Cómo se usa.

1. El examen se hace **entero, cronometrado y a libro cerrado**. Nada de mirar un apartado y pasar al siguiente.
2. Solo después se lee la resolución, y se corrige cada apartado contra ella.
3. Cada fallo recibe su entrada en el registro de errores: qué se intentó, por qué no podía funcionar y cuál era la llave.

Los exámenes van de más reciente a más antiguo, porque así se permite empezar por los formatos más recientes; esto no garantiza el formato del próximo examen.

D.1 Primera convocatoria de 2026

Ficha. Convocatoria de enero, 16 de enero de 2026. Tres ejercicios. El enunciado advierte, como siempre, que no se valorará ninguna respuesta que no esté debidamente justificada, aunque sea correcta.

Enunciado

Ejercicio 1. [0,5 + 0,75 + 0,75 + 1,5 *puntos*]

Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. con $k(s) \neq 0$ para todo s, y sea $V = V(s)$ un campo vectorial diferenciable y unitario de $\mathbb{R}^3$.

Una c.p.r. $\beta = \beta(s)$ se dice **curva integral** de V si $\beta'(s) = V(s)$ para todo s. Una curva integral de V se dice **curva de dirección principal** de α si $V(s) = \mathbf{n}(s)$, y se dice **curva donante principal** de α si para todo s

$$V(s) = \Big(\operatorname{sen}\int \tau(s)\,ds\Big)\mathbf{n}(s) + \Big(\cos\int \tau(s)\,ds\Big)\mathbf{b}(s).$$

Se pide:

1. Probar que las curvas integrales de V están parametrizadas naturalmente y que son únicas salvo traslaciones de $\mathbb{R}^3$.
2. Si α es una hélice circular no plana, calcular dos curvas de dirección principal de α y comprobar que se diferencian en una traslación.
3. Si β es una curva de dirección principal de α, probar que

$$k_\beta(s) = \sqrt{k^2(s) + \tau^2(s)}, \qquad \tau_\beta(s) = \frac{k^2(s)}{k^2(s) + \tau^2(s)}\,\frac{d}{ds}\Big(\frac{\tau(s)}{k(s)}\Big).$$

4. Probar que son equivalentes: (a) α es una hélice; (b) las curvas de dirección principal de α son planas; (c) α es donante principal de una curva plana.

Ejercicio 2. [0,5 *cada apartado salvo el 6, que vale 1 punto*]

Dado un punto $A \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se define la homotecia $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por $H(P) = A + \lambda(P - A)$. Sea $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada. Se pide:

1. Demostrar que $Y = H \circ X$ es una superficie parametrizada.
2. Demostrar que los planos tangentes de X e Y son paralelos en puntos correspondientes.
3. Demostrar que si la recta normal a X en $X(P)$ pasa por Q, entonces la recta normal a Y en $Y(P)$ pasa por $H(Q)$.
4. Demostrar que si $X(U)$ está contenida en una esfera, también lo está $Y(U)$, y dar la relación entre los radios.
5. Demostrar que $X(P)$ es umbílico si y solo si $Y(P)$ es umbílico.
6. Dar la clasificación de los puntos de Y en función de la de los puntos de X.

Ejercicio 3. [1 *punto cada apartado*]

Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. contenida en una parametrización local de una superficie regular. Supóngase que α está contenida en un plano y que $k(s) \neq 0$ para todo s.

1. Probar que α es geodésica parametrizada si y solo si $\mathbf{N}(s)$ está contenida en el mismo plano que α, para todo s.
2. Probar que α es línea asintótica si y solo si $\mathbf{N}(s)$ es normal al plano que contiene a α, para todo s.
3. Dar ejemplos de los apartados anteriores.

No sigas leyendo hasta haber hecho el examen entero, cronometrado y a libro cerrado.

Resolución del ejercicio 1

Apartado 1. Si β es curva integral de V, entonces $\beta' = V$ y, por ser V unitario, $|\beta'| = 1$. Por la caracterización del parámetro natural, β está parametrizada naturalmente.

Para la unicidad, sean β_1 y β_2 dos curvas integrales del mismo V. Entonces $(\beta_1 - \beta_2)' = V - V = 0$, luego $\beta_1 - \beta_2$ es un vector constante y las dos curvas se diferencian en una traslación de $\mathbb{R}^3$. ■

Apartado 2. Sea la hélice circular parametrizada naturalmente

$$\alpha(s) = \Big(a\cos\tfrac{s}{c},\ a\,\mathrm{sen}\,\tfrac{s}{c},\ \tfrac{bs}{c}\Big), \qquad c = \sqrt{a^2+b^2}, \quad a > 0,\ b \neq 0.$$

Un cálculo directo da $\dot\alpha = \frac{1}{c}\big(-a\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{c}, a\cos\frac{s}{c}, b\big)$ y $\ddot\alpha = -\frac{a}{c^2}\big(\cos\frac{s}{c}, \mathrm{sen}\,\frac{s}{c}, 0\big)$, de donde $k = a/c^2$ y

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\ddot\alpha}{k} = \Big(-\cos\tfrac{s}{c},\ -\mathrm{sen}\,\tfrac{s}{c},\ 0\Big).$$

El normal principal apunta siempre horizontalmente hacia el eje, como cabía esperar.

Una curva de dirección principal cumple $\beta' = \mathbf{n}$, luego se obtiene integrando:

$$\beta(s) = \Big(-c\,\mathrm{sen}\,\tfrac{s}{c},\ c\cos\tfrac{s}{c},\ 0\Big) + C, \qquad C \in \mathbb{R}^3 \text{ constante.}$$

Tomando $C = 0$ y $C = (0,0,1)$, por ejemplo, se obtienen dos curvas de dirección principal distintas, y por construcción se diferencian en la traslación de vector $(0,0,1)$, como anunciaba el apartado 1.

Obsérvese de paso que β es una circunferencia de radio c en un plano horizontal. ■

Apartado 3. Como $\beta' = \mathbf{n}$ es unitario, s es también el parámetro natural de β y se puede derivar directamente. Por Frenet-Serret,

$$\beta'' = \dot{\mathbf{n}} = -k\,\mathbf{t} + \tau\,\mathbf{b} \qquad \Longrightarrow \qquad k_\beta = |\beta''| = \sqrt{k^2+\tau^2},$$

usando que $\mathbf{t}$ y $\mathbf{b}$ son ortonormales. Esa es la primera fórmula.

Para la torsión se necesita la tercera derivada:

$$\beta''' = -\dot k\,\mathbf{t} - k\,\dot{\mathbf{t}} + \dot\tau\,\mathbf{b} + \tau\,\dot{\mathbf{b}} = -\dot k\,\mathbf{t} - \big(k^2+\tau^2\big)\mathbf{n} + \dot\tau\,\mathbf{b}.$$

Escribiendo las tres derivadas en coordenadas respecto de la base ortonormal directa $\{\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{b}\}$,

$$\beta' = (0,1,0), \qquad \beta'' = (-k,0,\tau), \qquad \beta''' = \big(-\dot k,\ -(k^2+\tau^2),\ \dot\tau\big),$$

el producto mixto es el determinante

$$(\beta',\beta'',\beta''') = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ -\dot k & -(k^2+\tau^2) & \dot\tau \end{vmatrix} = -\big(-k\dot\tau + \tau\dot k\big) = k\dot\tau - \tau\dot k,$$

desarrollando por la primera fila. Por tanto

$$\tau_\beta = \frac{(\beta',\beta'',\beta''')}{k_\beta^2} = \frac{k\dot\tau - \tau\dot k}{k^2+\tau^2}.$$

Y esta expresión es exactamente la del enunciado, porque

$$\frac{d}{ds}\Big(\frac{\tau}{k}\Big) = \frac{\dot\tau k - \tau\dot k}{k^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{k^2}{k^2+\tau^2}\,\frac{d}{ds}\Big(\frac{\tau}{k}\Big) = \frac{k\dot\tau - \tau\dot k}{k^2+\tau^2}.$$

■

Apartado 4. Se prueba el ciclo (a) ⇒ (b) ⇒ (c) ⇒ (a).

(a) ⇒ (b). Si α es una hélice, por el criterio de Lancret el cociente τ/k es constante, luego su derivada es nula y, por la fórmula del apartado 3, $\tau_\beta \equiv 0$. Una curva de torsión nula es plana.

(b) ⇒ (c). Supóngase que β, la curva de dirección principal, es plana. Entonces $\tau_\beta = 0$ y, por la misma fórmula, τ/k es constante; sea φ_0 el ángulo con $\operatorname{sen}\varphi_0 = -k/\sqrt{k^2+\tau^2}$ y $\cos\varphi_0 = \tau/\sqrt{k^2+\tau^2}$, que es constante por serlo el cociente.

Hay que comprobar que α es donante principal de β, es decir, que $\dot\alpha = \mathbf{t}$ se escribe con la fórmula del enunciado en el triedro de β. Del apartado 3 se tiene $\mathbf{t}_\beta = \mathbf{n}$ y

$$\mathbf{n}_\beta = \frac{-k\,\mathbf{t} + \tau\,\mathbf{b}}{\sqrt{k^2+\tau^2}}, \qquad \mathbf{b}_\beta = \mathbf{t}_\beta \times \mathbf{n}_\beta = \frac{\tau\,\mathbf{t} + k\,\mathbf{b}}{\sqrt{k^2+\tau^2}},$$

donde en la última se han usado $\mathbf{n}\times\mathbf{t} = -\mathbf{b}$ y $\mathbf{n}\times\mathbf{b} = \mathbf{t}$. Sustituyendo,

$$\operatorname{sen}\varphi_0\,\mathbf{n}_\beta + \cos\varphi_0\,\mathbf{b}_\beta = \frac{(k^2+\tau^2)\mathbf{t}}{k^2+\tau^2} = \mathbf{t},$$

porque los coeficientes de $\mathbf{b}$ se cancelan y los de $\mathbf{t}$ suman el denominador. Y como $\tau_\beta = 0$, la integral $\int \tau_\beta\,ds$ es constante, que es lo que la definición de donante principal exige. Luego α es donante principal de la curva plana β.

(c) ⇒ (a). Supóngase que α es donante principal de una curva plana γ. Como γ es plana, $\tau_\gamma \equiv 0$ y por tanto $\int \tau_\gamma\,ds$ es una constante φ_0. La definición da entonces

$$\mathbf{t} = \operatorname{sen}\varphi_0\,\mathbf{n}_\gamma + \cos\varphi_0\,\mathbf{b}_\gamma.$$

Ahora bien, γ es plana, luego su binormal $\mathbf{b}_\gamma$ es un vector constante. Multiplicando escalarmente por él,

$$\mathbf{t}\cdot\mathbf{b}_\gamma = \cos\varphi_0,$$

constante. Es decir, el vector tangente de α forma ángulo constante con una dirección fija: α es una hélice. ■

LA IDEA: QUÉ BUSCABA ESTE EJERCICIO

Los cuatro apartados son un mismo tema visto desde cuatro sitios, y el examen los ordena de menor a mayor.

El apartado 1 comprueba que se entiende qué es el parámetro natural. El 2 es un cálculo de rutina con la hélice circular, que hay que llevar memorizada. El 3 es el núcleo técnico: derivar tres veces en el triedro de Frenet y calcular un producto mixto en coordenadas. Y el 4 pregunta por el criterio de Lancret disfrazado.

El atajo que ahorra tiempo está en el apartado 4: en cuanto se ve que el enunciado del apartado 3 tiene un factor $\frac{d}{ds}(\tau/k)$, ya se sabe que la respuesta va a ser «hélice», porque ese cociente constante es exactamente el criterio de Lancret. Quien lo reconoce escribe la primera implicación en dos líneas.

El error más caro es intentar el apartado 4 sin haber hecho el 3, o sin darse cuenta de que el 3 es la herramienta del 4.

Resolución del ejercicio 2

Este ejercicio está resuelto en detalle en el capítulo 4, en el ejercicio sobre homotecias. Aquí va el hilo completo, para poder corregir sin saltar.

Todo sale de dos observaciones. Como $Y(u,v) = A + \lambda\big(X(u,v) - A\big)$ y A es constante,

$$Y_1 = \lambda\,\mathbf{X}_1, \qquad Y_2 = \lambda\,\mathbf{X}_2, \qquad Y_1 \times Y_2 = \lambda^2\big(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2\big).$$

1. Y es diferenciable por serlo X, y $Y_1 \times Y_2 \neq 0$ porque $\lambda \neq 0$: se cumple la condición de regularidad y Y es una s.p..

2. El factor λ^2 es positivo, luego al normalizar desaparece: $\mathbf{N}_Y = \mathbf{N}_X$. Los planos tangentes, ortogonales a ese vector común, son paralelos.

3. Si $Q = X(P) + t\,\mathbf{N}_X$, entonces

$$H(Q) = A + \lambda\big(X(P) + t\mathbf{N}_X - A\big) = Y(P) + \lambda t\,\mathbf{N}_Y,$$

que está en la recta normal a Y en $Y(P)$.

4. Si $|X - C| = R$, entonces $|Y - H(C)| = |\lambda|\,|X - C| = |\lambda|R$. Los radios están en la razón $|\lambda|$.

5 y 6. De $Y_i = \lambda\mathbf{X}_i$ y $Y_{ij} = \lambda X_{ij}$, junto con $\mathbf{N}_Y = \mathbf{N}_X$,

$$g^Y_{ij} = \lambda^2 g_{ij}, \qquad L^Y_{ij} = \lambda L_{ij} \qquad \Longrightarrow \qquad L_Y = \big(\lambda\, II\big)\big(\lambda^2 G\big)^{-1} = \frac{1}{\lambda} L_X.$$

Por tanto $k^Y_i = k^X_i/\lambda$, de donde $H_Y = H_X/\lambda$ y $K_Y = K_X/\lambda^2$.

Dividir las dos curvaturas principales por el mismo número no altera que sean iguales, luego la umbilicidad se conserva. Y como $\lambda^2 > 0$, la curvatura de Gauss conserva el signo: la clasificación de los puntos se mantiene punto por punto, elíptico con elíptico, hiperbólico con hiperbólico, parabólico con parabólico y plano con plano. ■

Resolución del ejercicio 3

También resuelto en el capítulo 3, en el ejercicio sobre curvas planas en una superficie. El hilo completo:

Lo que da la hipótesis. Como α es plana con curvatura no nula, sus vectores $\mathbf{t}$ y $\mathbf{n}$ generan la dirección del plano Π y su binormal $\mathbf{b}$ es constante e igual, salvo signo, al vector característico de Π.

Lo que se cumple siempre. $\mathbf{N}$ es normal a la superficie y $\mathbf{t}$ es tangente, luego $\mathbf{N}\cdot\mathbf{t} = 0$ en todo punto, sin hipótesis alguna. En consecuencia, $\mathbf{N}$ vive en el plano generado por $\mathbf{n}$ y $\mathbf{b}$: solo tiene un grado de libertad.

1. Por el teorema de caracterización de las geodésicas, y siendo $k \neq 0$, ser geodésica equivale a $\mathbf{n} = \pm\mathbf{N}$. Si lo es, $\mathbf{N}$ es paralelo a $\mathbf{n}$, que está en la dirección de Π. Recíprocamente, si $\mathbf{N}$ es paralelo a Π, entonces pertenece a la dirección de Π y es ortogonal a $\mathbf{t}$; el único vector unitario de ese plano ortogonal a $\mathbf{t}$ es $\pm\mathbf{n}$, luego $\mathbf{N} = \pm\mathbf{n}$ y α es geodésica.

2. Por el teorema de Meusnier, $K_n = k\cos\theta$ con θ el ángulo entre $\mathbf{n}$ y $\mathbf{N}$, y como $k \neq 0$, ser línea asintótica equivale a $\mathbf{N} \perp \mathbf{n}$. Junto con $\mathbf{N} \perp \mathbf{t}$, que se cumple siempre, eso dice que $\mathbf{N}$ es ortogonal a los dos generadores de la dirección de Π, es decir, normal al plano. El recíproco es inmediato.

3. Ejemplos.

- **Plana y geodésica:** un círculo máximo de la esfera. Su plano pasa por el centro y el normal de la esfera es radial, luego está contenido en él.

- **Plana y no geodésica:** un paralelo de la esfera distinto del ecuador. Su plano no pasa por el centro.
- **Plana y asintótica:** una circunferencia dibujada sobre un plano. Aquí el plano de la curva es la propia superficie, y el normal de la superficie es normal a ese plano por definición. Obsérvese que esa circunferencia no es geodésica, porque en un plano las geodésicas son las rectas.

¿Pueden darse las dos a la vez? No. Una exige que $\mathbf{N}$ esté dentro del plano y la otra que sea perpendicular a él, y un vector unitario no puede cumplir ambas. ■

LA IDEA: LA ESTRUCTURA DE ESTE EXAMEN

Merece la pena mirar el examen entero, porque su reparto es típico y conviene saber a qué atenerse.

- El **ejercicio 1** es de curvas puras y pesa 3,5 puntos. Es el más técnico y el que exige tener el triedro de Frenet completamente automatizado.
- El **ejercicio 2** es de superficies y pesa 3,5. No tiene ninguna dificultad conceptual: es un ejercicio de administración ordenada de dos cuentas.
- El **ejercicio 3** es de la frontera entre las dos últimas lecciones y pesa 3. Se contesta casi entero razonando sobre hacia dónde apunta un vector.

Dicho de otro modo: siete de los diez puntos se juegan en manejar bien los triedros, y solo tres en calcular formas fundamentales. Es la proporción que conviene tener en cuenta al repartir el tiempo de estudio.

D.2 Segunda convocatoria de 2026

Ficha. Convocatoria de junio, 24 de junio de 2026. Tres ejercicios.

Enunciado

Ejercicio 1. [0,7 *puntos cada apartado*]

Sean $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. tal que $k(s) \neq 0$ para todo s, y $a > 0$ una constante. Se define la **curva paralela** a α a distancia a como $\beta(s) = \alpha(s) + a\,\mathbf{n}(s)$.

1. Supóngase que α es plana.
   a) Estudiar la regularidad de β.
   b) Suponiendo β regular, obtener su curvatura en función de k y deducir que β no puede ser una recta.
   c) Si k es constante y $0 < a < 1/k$, interpretar geométricamente el apartado anterior. ¿Qué curva es β?
2. Supóngase que α tiene torsión constante no nula.
   a) Probar analíticamente que si α tiene curvatura constante y $k = a(k^2 + \tau^2)$, entonces β es una recta.
   b) Interpretar geométricamente el apartado anterior.

Ejercicio 2. [$1 + 0{,}75 + 1 + 0{,}75$ *puntos*]

Dada la c.p.r. $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ y $\beta(t)$ su proyección ortogonal sobre el plano $z = 0$, se considera la superficie M formada por la unión de las rectas que se apoyan en $\alpha(t)$ y tienen dirección $\alpha(t) - \beta(t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$. Responder justificadamente:

1. Dar una parametrización local $X(U)$ de dicha superficie M.
2. Comprobar que existe un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $Y(u,v) = \big(\cos(v/u), \operatorname{sen}(v/u), v\big) \in M$ para todo $(u,v) \in V$.
3. Estudiar la regularidad y la orientabilidad de M.
4. Describir las curvas geodésicas de $X(U)$ o bien de $Y(V)$.

Ejercicio 3. [1 *punto cada apartado*]

Estudiar la certeza o falsedad de los siguientes enunciados:

1. Toda línea de curvatura en una superficie, que sea además plana, es una geodésica en dicha superficie.
2. Toda geodésica en una superficie, que sea además plana, es una línea de curvatura de dicha superficie.
3. Toda geodésica en una superficie, que sea además línea de curvatura sobre la superficie, es plana.

No sigas leyendo hasta haber hecho el examen entero.

Resolución del ejercicio 1

Resuelto en detalle en el capítulo 1, en el ejercicio sobre la curva paralela. El hilo:

Derivando y usando Frenet-Serret, $\dot\beta = \big(1 - ak\big)\mathbf{t} + a\tau\,\mathbf{b}$. Con α plana, $\tau \equiv 0$ y queda $\dot\beta = (1-ak)\mathbf{t}$, de donde β es regular si y solo si $k \neq 1/a$. Su curvatura resulta ser $k_\beta = |k/(1-ak)|$, que nunca se anula porque $k \neq 0$: β no puede ser una recta. Si además k es constante, α es una circunferencia de radio $1/k$ y β es la circunferencia concéntrica de radio $1/k - a$; la condición $a < 1/k$ es la que impide pasarse del centro.

Con k y τ constantes, los coeficientes de $\dot\beta$ también lo son y $\ddot\beta = \big[(1-ak)k - a\tau^2\big]\mathbf{n}$, que se anula exactamente cuando $k = a(k^2+\tau^2)$; entonces $\dot\beta$ es constante y β es una recta. La interpretación: curvatura y torsión constantes hacen de α una hélice circular, y esa condición dice que a es el radio de su cilindro. Como el normal principal apunta horizontalmente hacia el eje, β es el propio eje de la hélice.

Resolución del ejercicio 2

La idea, antes de calcular nada. Todo el ejercicio depende de una observación de una línea, y quien la hace lo resuelve entero en media cara. La proyección ortogonal de $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ sobre $z = 0$ es $\beta(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, de modo que la dirección que manda el enunciado es

$$\alpha(t) - \beta(t) = (0,\ 0,\ t),$$

que para $t \neq 0$ es **vertical**. Las rectas que se apoyan en la hélice con esa dirección son, pues, las verticales que pasan por los puntos de la hélice; y como los puntos de la hélice recorren la circunferencia unidad entera al variar t, la superficie M es **el cilindro** $x^2 + y^2 = 1$. Sabido eso, los cuatro apartados son cuentas conocidas.

Apartado 1: una parametrización local. Escribiendo la recta que pasa por $\alpha(t)$ con dirección $\alpha(t) - \beta(t)$,

$$X(t,v) = \alpha(t) + v\big(\alpha(t) - \beta(t)\big) = \big(\cos t,\ \operatorname{sen} t,\ t(1+v)\big), \qquad (t,v) \in U.$$

Derivando,

$$X_t = (-\operatorname{sen} t,\ \cos t,\ 1+v), \qquad X_v = (0,\ 0,\ t), \qquad X_t \times X_v = (t\cos t,\ t\operatorname{sen} t,\ 0),$$

cuya norma es $|t|$. Luego X es regular **exactamente donde** $t \neq 0$, y eso era previsible sin derivar: en $t = 0$ el vector director $\alpha(0) - \beta(0)$ es el vector nulo y la «recta» del enunciado degenera en un punto. Tomando $U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$, la aplicación X es además inyectiva —el par $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ determina t en $(0, 2\pi)$, y de la tercera coordenada sale v porque $t \neq 0$— y homeomorfismo sobre su imagen, que es el cilindro menos una generatriz. Es, por tanto, una p.l. de M.

Apartado 2: el abierto V donde vive Y. Basta comprobar que Y toma valores en el cilindro y exhibir los parámetros que la producen. Lo primero es inmediato:

$$\cos^2\Big(\frac{v}{u}\Big) + \operatorname{sen}^2\Big(\frac{v}{u}\Big) = 1.$$

Lo segundo se resuelve igualando componentes con X: hay que tomar $t = v/u$, y entonces la tercera coordenada obliga a $t(1+v') = v$, es decir, $(v/u)(1+v') = v$, de donde $v' = u - 1$. En efecto,

$$X\Big(\frac{v}{u},\ u-1\Big) = \Big(\cos\frac{v}{u},\ \operatorname{sen}\frac{v}{u},\ \frac{v}{u}\cdot u\Big) = \big(\cos\tfrac{v}{u},\ \operatorname{sen}\tfrac{v}{u},\ v\big) = Y(u,v).$$

Sirve, por ejemplo, $V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 :\ u > 0,\ 0 < v < 2\pi u\}$, que es abierto y no vacío y que envía v/u dentro de $(0, 2\pi)$. Conviene notar de paso dónde es regular Y: un cálculo directo da

$$Y_u \times Y_v = -\frac{v}{u^2}\Big(\cos\frac{v}{u},\ \operatorname{sen}\frac{v}{u},\ 0\Big), \qquad |Y_u \times Y_v| = \frac{|v|}{u^2},$$

luego Y es regular donde $u \neq 0$ y $v \neq 0$.

Apartado 3: regularidad y orientabilidad de M. Aquí hay que separar dos cosas que se confunden con facilidad: que una *parametrización* falle en un punto no dice nada sobre la superficie. M es el nivel 1 de $f(x,y,z) = x^2 + y^2$, y

$$\nabla f = (2x,\ 2y,\ 0), \qquad |\nabla f| = 2\sqrt{x^2+y^2} = 2 \neq 0 \quad \text{sobre } M,$$

de modo que 1 es valor regular y M es una s.r.. En particular el punto $(1,0,0)$, donde X degeneraba, es un punto de M tan bueno como cualquier otro.

Y M es **orientable**, por la misma razón: toda superficie de nivel con valor regular lo es, porque

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = (x,\ y,\ 0)$$

es un campo normal unitario diferenciable definido sobre M entera. Es el normal radial horizontal del cilindro.

Apartado 4: las geodésicas. Con la parametrización natural del cilindro por ángulo y altura, $x(u,v) = (\cos u,\ \operatorname{sen} u,\ v)$, se tiene $x_u = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0)$ y $x_v = (0,0,1)$, luego

$$g_{11} = 1, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = 1 :$$

la primera forma fundamental es *exactamente* la del plano. Todos los símbolos de Christoffel se anulan, la ecuación de las geodésicas se reduce a $\ddot{u}_k = 0$ y sus soluciones son las funciones afines del parámetro. Es decir, **las geodésicas del cilindro son las imágenes de las rectas del plano de parámetros**, y hay tres tipos:

- $u =$ cte: las **generatrices**, que son rectas de $\mathbb{R}^3$;
- $v =$ cte: los **paralelos**, las circunferencias horizontales de radio 1;
- $v = au + b$ con $a \neq 0$: las **hélices circulares** de eje OZ y radio 1.

■

LA IDEA: POR QUÉ EL ENUNCIADO DISFRAZA EL CILINDRO

El examen no pregunta por el cilindro: lo esconde. Y lo esconde con una construcción que parece prometer una reglada complicada —rectas que se apoyan en una hélice— cuando la dirección que se les asigna resulta ser siempre la misma, la vertical.
El apartado 2 está puesto justo para eso. La aplicación Y no se parece en nada a X, y sin embargo describe la misma superficie: quien ya sabe que M es el cilindro lo comprueba con la identidad $\cos^2 + \operatorname{sen}^2 = 1$ y ha terminado; quien no lo sabe se pone a resolver un sistema.
Y el apartado 3 es la distinción de fondo del capítulo de superficies, escrita como pregunta de examen: la parametrización X deja de ser regular en $t = 0$ y aun así M es regular en todos sus puntos. Una superficie es regular si *alguna* parametrización funciona alrededor de cada punto, no si funciona la primera que a uno se le ocurra. El atajo del valor regular esquiva el problema entero.

Resolución del ejercicio 3

Este ejercicio se resuelve entero con la relación entre la torsión y la torsión geodésica del capítulo 4. Para curvas parametrizadas por arco con $k > 0$, las tres traducciones son:

$$\text{geodésica} \iff K_g = 0, \qquad \text{línea de curvatura} \iff \tau_g = 0, \qquad \text{plana} \iff \tau = 0,$$

junto con $\tau = \tau_g + \dot{\varphi}$, donde φ es el ángulo que gira el triedro de Darboux respecto del de Frenet alrededor de $\mathbf{t}$.

Enunciado 1: falso. Ser línea de curvatura da $\tau_g = 0$ y ser plana da $\tau = 0$, de donde $\dot{\varphi} = 0$. Pero eso no dice nada sobre K_g, que es lo que decidiría si es geodésica.

El contraejemplo más limpio es un **paralelo cualquiera de un toro**, distinto de los dos extremos. Es línea de curvatura, porque en toda superficie de revolución meridianos y paralelos lo son. Es plano, porque está en un plano perpendicular al eje. Y no es geodésica: su normal principal apunta hacia el eje del toro, mientras que el normal de la superficie apunta radialmente desde el alma del tubo, y las dos direcciones no coinciden.

Enunciado 2: falso tal como está, y cierto con una hipótesis más. Supóngase primero $k \neq 0$. Ser geodésica obliga a $\mathbf{n} = \pm\mathbf{N}$, lo que fija φ y por tanto $\dot{\varphi} = 0$; junto con $\tau = 0$ por ser plana, la relación da $\tau_g = 0$, es decir, línea de curvatura. Con esa hipótesis el enunciado es cierto.

Sin ella es falso, y el contraejemplo son las rectas. Una **generatriz del helicoide** $x(u,v) = (u\cos v,\ u\operatorname{sen} v,\ bv)$ es una recta contenida en la superficie, luego es geodésica, y es plana trivialmente. Pero no es línea de curvatura: para las curvas paramétricas eso exigiría $g_{12} = L_{12} = 0$, y un cálculo directo da $g_{12} = 0$ pero

$$L_{12} = \frac{-b}{\sqrt{b^2+u^2}} \neq 0 \qquad \text{si } b \neq 0.$$

Enunciado 3: cierto. Si $k \neq 0$, ser geodésica da $\dot\varphi = 0$ y ser línea de curvatura da $\tau_g = 0$; la relación $\tau = \tau_g + \dot\varphi$ da entonces $\tau = 0$ y la curva es plana. Y si $k \equiv 0$ la curva es una recta, que es plana de manera trivial.

Y el caso que esa doble vía se deja fuera. Los dos casos anteriores no agotan las posibilidades: una curva puede tener curvatura nula en algunos puntos y no nula en otros, y entonces ni φ ni τ están definidos en todas partes y la relación $\tau = \tau_g + \dot\varphi$ no se puede usar. Conviene por eso quedarse con una prueba que no mire nunca a k, y que sale directamente de la segunda ecuación de Darboux:

$$\dot{\mathbf{S}} = -K_g\,\mathbf{t} + \tau_g\,\mathbf{N}.$$

Ser geodésica es $K_g \equiv 0$ y ser línea de curvatura es $\tau_g \equiv 0$, luego $\dot{\mathbf{S}} \equiv 0$ y $\mathbf{S}$ es un **vector constante** del espacio. Como $\dot\alpha\cdot\mathbf{S} = \mathbf{t}\cdot\mathbf{S} = 0$ en todo punto, la función $s \mapsto \alpha(s)\cdot\mathbf{S}$ es constante y la curva vive entera en un plano afín ortogonal a $\mathbf{S}$. Sin ninguna hipótesis sobre k: el enunciado vale sin excepciones. ■

LA IDEA: QUÉ BUSCABA ESTE EJERCICIO

Los tres enunciados son permutaciones de las mismas tres propiedades, y el examen está comprobando si se sabe cuál de ellas es independiente de las otras dos.
La respuesta es que **ser geodésica y ser plana no se implican mutuamente con ser línea de curvatura de forma simétrica**. Con la relación $\tau = \tau_g + \dot\varphi$ las tres respuestas salen en tres líneas, porque cada propiedad anula un término distinto de esa igualdad.
Y hay una lección más general: dos de los tres enunciados son falsos, y en un examen que pide «estudiar la certeza o falsedad» eso significa que hace falta *construir contraejemplos*, no solo intentar demostraciones. Merece la pena tener preparado un repertorio corto de superficies para eso: el toro para lo que es línea de curvatura sin ser geodésica, el helicoide para las rectas que no son líneas de curvatura, y la esfera para los paralelos.

D.3 Primera convocatoria de 2025

Ficha. Convocatoria de enero, 16 de enero de 2025. Tres ejercicios.

Enunciado

Ejercicio 1. [1,5 *puntos cada apartado*]

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular parametrizada naturalmente con curvatura y torsión no nulas en todos sus puntos. Demostrar:

1. Si α tiene curvatura constante, el lugar geométrico de los centros de curvatura de α es otra curva regular β tal que
   a) los vectores normales principales de α y β son paralelos en puntos correspondientes;

b) β tiene la misma curvatura que α.

2. Si α es una hélice, entonces
   a) $(\dot{\mathbf{b}}, \ddot{\mathbf{b}}, \dddot{\mathbf{b}}) \equiv 0$;
   b) la indicatriz esférica de las binormales de α es una circunferencia.

Ejercicio 2. [$2 + 1{,}5$ *puntos*]

Sea $\alpha = \alpha(s)$ una circunferencia de radio 1 parametrizada naturalmente en el plano $z = 0$, y considérese la superficie reglada de sus normales principales $x(s, v) = \alpha(s) + v\,\mathbf{n}(s)$, con $v < 1$. Se pide:

1. Sea $w = \mathbf{n}(0) \in T_{\alpha(0)}(x)$. Calcular el transportado paralelo $W(s)$ de w a lo largo de α. Justificar, *sin hacer ningún cálculo adicional*, que $W(s)$ debe ser constante y, a continuación, probar que efectivamente lo es.
   Ayuda: los símbolos de Christoffel de esta superficie son $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{22} = 0$, $\Gamma^2_{11} = 1 - v$ y $\Gamma^1_{12} = -\dfrac{1}{1-v}$.
2. Se considera el campo de vectores tangentes $V(s, v) = s\,\mathbf{X}_1(s, v) + v\,\mathbf{X}_2(s, v)$. Calcular $\dfrac{DV}{ds}$ y $\dfrac{DV}{dv}$.

Ejercicio 3. [0,5 *puntos cada apartado*]

Dar ejemplos de las siguientes situaciones, justificándolos adecuadamente. Si alguna no pudiera darse, justificarlo también.

1. Dos superficies tangentes a lo largo de una geodésica.
2. Dos superficies tangentes a lo largo de una línea de curvatura.
3. Dos superficies tangentes a lo largo de una línea asintótica.
4. Dos superficies que compartan una geodésica sin ser tangentes.
5. Dos superficies que compartan una línea de curvatura sin ser tangentes.
6. Dos superficies que compartan una línea asintótica sin ser tangentes.

No sigas leyendo hasta haber hecho el examen entero.

Resolución del ejercicio 1

Los dos apartados están resueltos en el capítulo 1: el primero en el ejercicio del círculo osculador y el segundo en el de la indicatriz esférica. El hilo:

1. Derivando $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k}\mathbf{n}(s)$ con k constante, y usando Frenet-Serret, los términos en $\mathbf{t}$ se cancelan y queda $\dot\beta = \frac{\tau}{k}\mathbf{b}$, que no se anula porque $\tau \neq 0$: β es regular. Su tangente es $\mathbf{t}_\beta = \operatorname{sig}(\tau)\mathbf{b}$ y, derivando otra vez respecto del parámetro natural de β, se llega a $\frac{d\mathbf{t}_\beta}{d\sigma} = -k\mathbf{n}$. De ahí las dos afirmaciones de golpe: $k_\beta = k$ y $\mathbf{n}_\beta = -\mathbf{n}$, paralelo al de α.

2. Por el criterio de Lancret, si α es hélice el vector $a = \frac{\tau}{k}\mathbf{t} + \mathbf{b}$ es constante, y entonces $\mathbf{b}\cdot a = 1$ para todo s: la indicatriz $\beta = \mathbf{b}$ vive en un plano. Como además vive en la esfera unidad por ser $\mathbf{b}$ unitario, está en la intersección de plano y esfera, que es una circunferencia no degenerada: $|a| > 1$ porque $\tau/k \neq 0$. La indicatriz recorre un arco de ella, no necesariamente

toda. Y ser plana equivale a que se anule el producto mixto de sus tres primeras derivadas, que es justo el primer apartado.

Resolución del ejercicio 2

La justificación sin cálculo. Es la parte del ejercicio que más puntos da por menos trabajo, y consiste en darse cuenta de qué superficie es esta.

La circunferencia α es plana y su normal principal $\mathbf{n}$ vive en el mismo plano $z = 0$. Por tanto $x(s,v) = \alpha(s) + v\mathbf{n}(s)$ tiene su tercera coordenada idénticamente nula: **la superficie es un trozo del plano** $z = 0$. Concretamente, con $\alpha(s) = (\cos s, \operatorname{sen} s, 0)$ y $\mathbf{n}(s) = (-\cos s, -\operatorname{sen} s, 0)$,

$$x(s,v) = \big((1-v)\cos s,\ (1-v)\operatorname{sen} s,\ 0\big),$$

que son coordenadas polares de radio $1 - v$.

Y en un plano la derivada covariante coincide con la derivada usual, porque la componente normal de la derivada de un campo tangente es nula. Luego ser paralelo equivale a ser constante, y el transportado paralelo de w es el propio w en todo punto.

La comprobación. Sobre α se tiene $v = 0$, luego $u_1' = 1$ y $u_2' = 0$, y de los símbolos de la ayuda sobreviven en $v = 0$ solo $\Gamma^2_{11} = 1$ y $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -1$. Escribiendo $W = f_1\mathbf{X}_1 + f_2\mathbf{X}_2$ y anulando la derivada covariante,

$$\begin{cases} f_1' + \Gamma^1_{21} f_2 = 0 \\ f_2' + \Gamma^2_{11} f_1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} f_1' = f_2 \\ f_2' = -f_1 \end{cases} \implies f_1'' + f_1 = 0.$$

Con $w = \mathbf{n}(0) = \mathbf{X}_2(0,0)$, las condiciones iniciales son $f_1(0) = 0$ y $f_2(0) = 1$, de donde $f_1 = \operatorname{sen} s$ y $f_2 = \cos s$. Como en $v = 0$ se tiene $\mathbf{X}_1 = \mathbf{t}$ y $\mathbf{X}_2 = \mathbf{n}$,

$$\begin{aligned} W(s) &= \operatorname{sen} s\, \mathbf{t}(s) + \cos s\, \mathbf{n}(s) \\ &= \operatorname{sen} s\, (-\operatorname{sen} s, \cos s, 0) + \cos s\, (-\cos s, -\operatorname{sen} s, 0) = (-1,0,0), \end{aligned}$$

constante, y en efecto igual a $\mathbf{n}(0)$. ■

Segundo apartado. Aquí $f_1 = s$ y $f_2 = v$, y se aplica la fórmula de la derivada covariante con los símbolos de la ayuda, ahora sin particularizar v.

Para $\dfrac{DV}{ds}$ se toma $u_1' = 1$, $u_2' = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{DV}{ds} &= \Big[\underbrace{\tfrac{\partial f_1}{\partial s}}_{=1} + \Gamma^1_{21} f_2\Big]\mathbf{X}_1 + \Big[\underbrace{\tfrac{\partial f_2}{\partial s}}_{=0} + \Gamma^2_{11} f_1\Big]\mathbf{X}_2 \\ &= \Big[1 - \frac{v}{1-v}\Big]\mathbf{X}_1 + (1-v)s\,\mathbf{X}_2 = \frac{1-2v}{1-v}\,\mathbf{X}_1 + (1-v)s\,\mathbf{X}_2. \end{aligned}$$

Para $\dfrac{DV}{dv}$ se toma $u_1' = 0$, $u_2' = 1$:

$$\frac{DV}{dv} = \Big[\underbrace{\tfrac{\partial f_1}{\partial v}}_{=0} + \Gamma^1_{12} f_1\Big]\mathbf{X}_1 + \Big[\underbrace{\tfrac{\partial f_2}{\partial v}}_{=1} + \Gamma^2_{12} f_1 + \Gamma^2_{22} f_2\Big]\mathbf{X}_2 = -\frac{s}{1-v}\,\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2.$$

■

Resolución del ejercicio 3

Este ejercicio se contesta entero con el teorema sobre superficies tangentes del capítulo 4 y con la asimetría que lo acompaña.

Los tres primeros: siempre se puede. Las tres propiedades se heredan entre superficies tangentes a lo largo de una curva, porque el triedro de Darboux es el mismo para las dos. Así que basta tomar una superficie donde la curva tenga la propiedad y otra cualquiera que la toque con el mismo plano tangente a lo largo de ella. Ejemplos concretos:

- **Geodésica:** una esfera y un cilindro tangentes a lo largo de un círculo máximo horizontal; ese círculo es geodésica de la esfera, y por tangencia lo es también del cilindro.
- **Línea de curvatura:** una esfera y un cono tangentes a lo largo de un paralelo. En la esfera los paralelos son líneas de curvatura por ser superficie de revolución, y en el cono también.
- **Línea asintótica:** un plano y cualquier superficie tangente a él a lo largo de una recta contenida en ambos. Toda recta contenida en una superficie es asintótica.

Los tres últimos: también son posibles. Para los apartados 4 y 6, toma los planos $z = 0$ e $y = 0$. Comparten el eje OX, que es una recta y por tanto es geodésica y asintótica en ambos. Sus normales $(0,0,1)$ y $(0,1,0)$ no son paralelas en ningún punto: las superficies no son tangentes.

La salvedad del triedro es decisiva. Donde $k > 0$, compartir una geodésica obliga a $\mathbf{N} = \pm\mathbf{n}$ y compartir una asintótica obliga a $\mathbf{N} = \pm\mathbf{b}$; en esos puntos los planos tangentes sí coinciden. Pero el enunciado no exige curvatura positiva, y las rectas proporcionan precisamente los ejemplos pedidos.

Compartir una **línea de curvatura** sí es posible sin tangencia, porque la condición $\tau_g = 0$ no dice hacia dónde apunta $\mathbf{N}$, solo cómo varía. Un ejemplo: un paralelo de una esfera, **distinto del ecuador**, es línea de curvatura de ella, y también lo es del cilindro circular que tiene ese mismo paralelo como directriz, porque en el cilindro los paralelos son líneas de curvatura. Las dos superficies no son tangentes a lo largo de él: el normal de la esfera apunta al centro y el del cilindro es horizontal. La salvedad no es cosmética: con la esfera unidad y el paralelo de latitud u_1, el producto escalar de los dos normales vale $\cos u_1$, de modo que coinciden *exactamente* cuando $u_1 = 0$; sobre el ecuador la esfera y el cilindro sí son tangentes y el ejemplo se cae. ■

LA IDEA: QUÉ BUSCABA ESTE EXAMEN

El reparto es distinto del de 2026 y conviene notarlo: aquí los tres ejercicios son de cosas muy distintas y ninguno se puede improvisar.
El primero es de curvas puras y premia tener automatizado el cálculo con Frenet-Serret.
El segundo premia **reconocer la superficie antes de calcular**: quien ve que es un trozo de plano contesta el apartado difícil en dos frases, y quien no lo ve resuelve un sistema de ecuaciones diferenciales para llegar al mismo sitio. Y el tercero no tiene ni una cuenta: se contesta entero sabiendo qué determina el plano tangente y qué no.
El aviso que hay que llevarse es el del ejercicio 2. Cuando un enunciado da los símbolos de Christoffel como ayuda, es tentador lanzarse a usarlos. Pero el propio enunciado pide justificar *sin hacer ningún cálculo adicional*, y esa frase es la pista: la respuesta buena no pasa por los símbolos.

D.4 Segunda convocatoria de 2025

Ficha. Convocatoria de julio, 9 de julio de 2025, curso 2024/2025. Cuatro ejercicios y diez puntos repartidos $4+3+2+1$. Es el examen más largo de los recogidos aquí y el que mejor muestra el patrón completo: una superficie reglada construida a partir de una curva, un bloque teórico sobre derivada covariante, un resultado general de tangencia y una lectura de figura. El aviso de siempre: no se valorará, ni parcialmente, ninguna respuesta que no esté debidamente justificada, aunque sea correcta.

Enunciado

Ejercicio 1. [2,5 + 1,5 *puntos*]

Sea $\alpha = \alpha(t)$ una c.p.r. y sea t_0 tal que $k(t_0) \neq 0$. Se llama **recta polar** de α en $\alpha(t_0)$ a la recta que pasa por el centro del círculo osculador de α en $\alpha(t_0)$ y es perpendicular al plano osculador en ese punto. Se pide:

1. Si α es una hélice circular p.n. (no plana), sea M la superficie formada por todas las rectas polares de α.
   a) Dar una s.p. cuya imagen esté contenida en M.
   b) Clasificar sus puntos.
   c) Calcular sus líneas de curvatura y sus líneas asintóticas. ¿Puede ser α una de ellas?
2. Sea $\alpha(t) = (t,\, t^2/2,\, 0)$, $t > 0$. Calcular una s.p. de la superficie formada por sus rectas polares. ¿Es el lugar geométrico de los centros de curvatura de α una geodésica parametrizada de dicha superficie? ¿Es dicho lugar geométrico una geodésica?

Ejercicio 2. [1 *punto cada apartado*]

Sean M una superficie regular orientada, $\alpha : I \to M$ una curva regular parametrizada naturalmente y V un campo tangente diferenciable y unitario a lo largo de α. Probar:

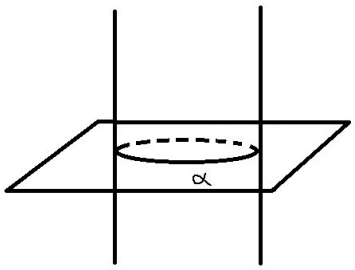
1. Si $V(s) = \mathbf{t}(s)$, entonces $\dfrac{D\mathbf{t}}{ds} = K_g(s)\,\mathbf{N}(s) \times \mathbf{t}(s)$ para todo $s \in I$.
2. En general, se verifica que existe una función diferenciable λ tal que $\dfrac{DV}{ds} = \lambda(s)\,\mathbf{N}(s) \times V(s)$ para todo $s \in I$.
3. Si α es tal que puede considerarse $V(s) = \mathbf{n}(s)$, ¿qué función es λ?

Ejercicio 3. [2 *puntos*]

Probar que si dos superficies comparten una línea asintótica y no son tangentes, entonces dicha línea asintótica ha de ser una recta. Dar un ejemplo en que esto ocurra, justificándolo adecuadamente. Aquí «no son tangentes» se entiende en cada punto de la curva.

Ejercicio 4. [1 *punto*]

Justificar adecuadamente si la curva α de la figura puede ser línea de curvatura del cilindro y/o del plano.



Resolución del ejercicio 1

Preliminar: qué es la recta polar. El centro del círculo osculador en $\alpha(t_0)$ es $\alpha(t_0)+\rho(t_0)\mathbf{n}(t_0)$, con $\rho = 1/k$, y la dirección perpendicular al plano osculador es la de $\mathbf{b}(t_0)$. Luego la recta polar es

$$r(t_0) = \big\{\alpha(t_0)+\rho(t_0)\mathbf{n}(t_0) + v\,\mathbf{b}(t_0) :\ v\in\mathbb{R}\big\}.$$

Conviene saber también qué es esta recta desde otro punto de vista, porque explica el nombre y simplifica varios apartados: es la **intersección del plano normal en t_0 con su derivado**. Para comprobarlo usamos parámetro arco: imponer $\big(P-\alpha\big)\cdot\mathbf{t}=0$ y derivar da $-1+k\big(P-\alpha\big)\cdot\mathbf{n}=0$, es decir $\big(P-\alpha\big)\cdot\mathbf{n}=\rho$, que junto con la primera condición describe exactamente $r(t_0)$. Es, pues, el lugar de los centros de las esferas que tienen contacto de orden al menos dos con α en ese punto.

Apartado 1(a). Sea la hélice circular parametrizada naturalmente

$$\alpha(s) = \Big(a\cos\tfrac{s}{c},\ a\,\mathrm{sen}\,\tfrac{s}{c},\ \tfrac{bs}{c}\Big), \qquad c=\sqrt{a^2+b^2},\quad a>0,\ b\neq 0,$$

para la cual

$$k=\frac{a}{c^2},\qquad \tau=\frac{b}{c^2},\qquad \rho=\frac{c^2}{a},$$

$$\mathbf{n}(s)=\Big(-\cos\tfrac{s}{c},\ -\mathrm{sen}\,\tfrac{s}{c},\ 0\Big),\qquad \mathbf{b}(s)=\Big(\tfrac{b}{c}\,\mathrm{sen}\,\tfrac{s}{c},\ -\tfrac{b}{c}\cos\tfrac{s}{c},\ \tfrac{a}{c}\Big).$$

El centro de curvatura es

$$\gamma(s)=\alpha(s)+\rho\,\mathbf{n}(s)=\Big(-\tfrac{b^2}{a}\cos\tfrac{s}{c},\ -\tfrac{b^2}{a}\,\mathrm{sen}\,\tfrac{s}{c},\ \tfrac{bs}{c}\Big),$$

porque $a-\dfrac{c^2}{a}=\dfrac{a^2-c^2}{a}=-\dfrac{b^2}{a}$. Es otra hélice circular, de radio b^2/a y del mismo paso, desfasada media vuelta. La superficie pedida es

$$\boxed{x(s,v)=\gamma(s)+v\,\mathbf{b}(s)=\Big(-\tfrac{b^2}{a}\cos\tfrac{s}{c}+\tfrac{vb}{c}\,\mathrm{sen}\,\tfrac{s}{c},\ -\tfrac{b^2}{a}\,\mathrm{sen}\,\tfrac{s}{c}-\tfrac{vb}{c}\cos\tfrac{s}{c},\ \tfrac{bs}{c}+\tfrac{va}{c}\Big).}$$

Regularidad. Derivando y usando Frenet, con ρ constante,

$$\gamma' = \mathbf{t}+\rho\,\mathbf{n}' = \mathbf{t}+\rho(-k\mathbf{t}+\tau\mathbf{b}) = (1-\rho k)\mathbf{t}+\rho\tau\,\mathbf{b} = \rho\tau\,\mathbf{b},$$

ya que $\rho k=1$. Por tanto

$$x_s=\gamma'+v\mathbf{b}'=\rho\tau\,\mathbf{b}-v\tau\,\mathbf{n}=\tau\,(\rho\,\mathbf{b}-v\,\mathbf{n}),\qquad x_v=\mathbf{b},$$

y

$$x_s \times x_v = \tau(\rho\mathbf{b} - v\mathbf{n}) \times \mathbf{b} = -v\tau\,(\mathbf{n} \times \mathbf{b}) = -v\tau\,\mathbf{t}, \qquad |x_s \times x_v| = |v|\,|\tau|.$$

Como la hélice no es plana, $\tau \neq 0$, y la aplicación es regular exactamente donde $v \neq 0$. Es superficie parametrizada, por ejemplo, en $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$.

Una observación que ahorra todo el resto. Se acaba de obtener $\gamma' = \rho\tau\,\mathbf{b}$: la tangente al lugar de los centros de curvatura es la propia dirección de las generatrices. Es decir,

M es la desarrollable tangencial de la curva γ,

que ya se estudió por completo en el capítulo 4. Todo lo que sigue puede leerse allí; aquí se rehace para que el examen quede corregible sin saltar.

Apartado 1(b): clasificación de los puntos. De lo anterior,

$$\mathbf{N} = \frac{x_s \times x_v}{|x_s \times x_v|} = -\operatorname{sgn}(v\tau)\,\mathbf{t}(s)\ :$$

la normal de M es el tangente de α, y por tanto el plano tangente de M a lo largo de cada generatriz es el plano normal de α, constante sobre esa generatriz. Derivando otra vez,

$$x_{ss} = \tau\big(vk\,\mathbf{t} - \rho\tau\,\mathbf{n} - v\tau\,\mathbf{b}\big), \qquad x_{sv} = -\tau\,\mathbf{n}, \qquad x_{vv} = 0,$$

de donde, tomando por concretar $v > 0$ y $\tau > 0$, con lo que $\mathbf{N} = -\mathbf{t}$,

$$L_{11} = -\tau\,v\,k, \qquad L_{12} = -\mathbf{t}\cdot{-\tau\mathbf{n}} = 0, \qquad L_{22} = 0.$$

Por tanto

$$K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g} = 0,$$

y como $L_{11} \neq 0$ (pues k, τ y v son todos no nulos), la S.F.F. no es idénticamente nula. Luego **todos los puntos de la parametrización regular elegida son parabólicos**.

Apartado 1(c): líneas de curvatura y líneas asintóticas. Los coeficientes métricos son

$$g_{11} = \tau^2(\rho^2 + v^2), \qquad g_{12} = \tau\rho, \qquad g_{22} = 1, \qquad g = \tau^2 v^2,$$

y, escribiendo $II = (L_{ij})$ y usando coordenadas columna, la matriz del operador de Weingarten en la base $\{x_s, x_v\}$ resulta

$$A = G^{-1}II = \begin{pmatrix} -\dfrac{k}{\tau v} & 0 \\ \dfrac{1}{v} & 0 \end{pmatrix},$$

con autovalores 0 y $-\dfrac{k}{\tau v}$, coherente con $K = 0$.

- El autovector de autovalor 0 cumple que su primera componente es nula: es la dirección de $x_v = \mathbf{b}$, la **generatriz**.
- El autovector del otro autovalor es proporcional a $(-k, \tau)$, es decir, a $-k\,x_s + \tau\,x_v = \tau k v\,\mathbf{n}$: la dirección de $\mathbf{n}$, el **normal principal de α**.

Las **líneas de curvatura** son, pues, dos familias: las propias rectas polares (s constante) y las curvas con $dv/ds = -\tau/k$, esto es

$$v = C - \rho\tau\, s,$$

que son exactamente las **involutas de** γ, ya que $\rho\tau\, s$ es el parámetro arco de γ.

Las **líneas asintóticas** salen de $II = L_{11}a^2 + 2L_{12}ab + L_{22}b^2 = -\tau v k\, a^2$, que se anula si y solo si $a = 0$: la única dirección asintótica en cada punto es la de la generatriz. Las líneas asintóticas son, por tanto, **las propias rectas polares**, lo cual era previsible sin cuentas, porque toda recta contenida en una superficie es línea asintótica.

¿Puede ser α una de ellas? **No**, y hay dos razones independientes, cada una suficiente.

Primera. Las líneas asintóticas son las generatrices, que son **rectas**. Y α es una hélice circular con $k = a/c^2 \neq 0$, luego no es una recta.

Segunda. La otra familia de líneas de curvatura tiene, en cada punto, dirección tangente $\mathbf{n}(s)$. Ahora bien, para la hélice circular

$$\mathbf{n}(s) = \Big(-\cos\tfrac{s}{c},\ -\operatorname{sen}\tfrac{s}{c},\ 0\Big)$$

es **siempre horizontal**, mientras que el tangente de α,

$$\mathbf{t}(s_0) = \Big(-\tfrac{a}{c}\operatorname{sen}\tfrac{s_0}{c},\ \tfrac{a}{c}\cos\tfrac{s_0}{c},\ \tfrac{b}{c}\Big),$$

tiene tercera componente $b/c \neq 0$. Luego $\mathbf{t}(s_0)$ no puede ser proporcional a $\mathbf{n}(s)$ para ningún s, y α no puede recorrer una línea de curvatura de esa familia. ■

Apartado 2. Ahora $\alpha(t) = (t,\ t^2/2,\ 0)$ con $t > 0$, una parábola contenida en el plano $z = 0$. Se tiene

$$\alpha' = (1, t, 0), \qquad \alpha'' = (0, 1, 0), \qquad \alpha' \times \alpha'' = (0, 0, 1),$$

luego $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$ es **constante**, $\tau \equiv 0$ (como toda curva plana) y

$$k = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3} = \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}, \qquad \rho = (1+t^2)^{3/2},$$

$$\mathbf{t} = \frac{(1, t, 0)}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \frac{(-t, 1, 0)}{\sqrt{1+t^2}}.$$

El lugar de los centros de curvatura es

$$\gamma(t) = \alpha + \rho\,\mathbf{n} = (t, \tfrac{t^2}{2}, 0) + (1+t^2)(-t, 1, 0) = \big(-t^3,\ 1 + \tfrac{3t^2}{2},\ 0\big),$$

y como todas las rectas polares tienen la misma dirección $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$, la superficie es

$$\boxed{x(t, v) = \big(-t^3,\ 1 + \tfrac{3t^2}{2},\ v\big), \qquad t > 0,\ v \in \mathbb{R}.}$$

Es un **cilindro** de generatrices verticales sobre la evoluta de α. Es regular, porque $x_t \times x_v = (3t, 3t^2, 0)$ tiene norma $3t\sqrt{1+t^2} \neq 0$ para $t > 0$. De paso se observa otra vez que $\mathbf{N} \propto (1, t, 0) \propto \mathbf{t}(t)$, en concordancia con el apartado anterior.

¿Es γ geodésica parametrizada? **No.** Una geodésica parametrizada cumple $D\gamma'/dt = 0$, y de ahí

$$\frac{d}{dt}\gamma' \cdot \gamma' = 2\Big\langle \frac{D\gamma'}{dt}, \gamma' \Big\rangle = 0,$$

es decir, tiene rapidez constante. Aquí

$$|\gamma'(t)| = |(-3t^2, 3t, 0)| = 3t\sqrt{1+t^2},$$

que no es constante. Basta con eso. (Se comprueba también de forma directa: la aceleración $\gamma'' = (-6t, 3, 0)$ tendría que ser normal a la superficie, y su producto escalar con la dirección tangente $(-t, 1, 0)$ vale $6t^2 + 3 \neq 0$.)

¿Es γ geodésica? **Sí.** La pregunta ahora es si $K_g \equiv 0$, es decir, si lo es tras reparametrizar por el arco. Con

$$\mathbf{t} = \frac{\gamma'}{|\gamma'|} = \frac{(-t, 1, 0)}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \mathbf{N} = \frac{(1, t, 0)}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \mathbf{S} = \mathbf{N} \times \mathbf{t} = (0, 0, 1),$$

resulta que $\mathbf{S}$ es constante y vertical, mientras que $\mathbf{t}$ tiene tercera componente idénticamente nula, luego también la tiene $\mathbf{t}'$. Por tanto

$$K_g = \left\langle \frac{d\mathbf{t}}{ds}, \mathbf{S} \right\rangle = \frac{\mathbf{t}'(t) \cdot (0, 0, 1)}{|\gamma'|} = 0.$$

■

LA IDEA: LA TRAMPA DEL APARTADO 2 ESTÁ EN LA PALABRA «PARAMETRIZADA»

Las dos preguntas finales parecen la misma y no lo son, y ahí se reparte el punto y medio.
Geodésica parametrizada significa $D\gamma'/dt = 0$, que es una condición sobre la curva *y su parametrización*. Obliga a rapidez constante, así que basta mirar $|\gamma'|$ para descartarla.
Geodésica a secas significa $K_g \equiv 0$, que es una condición solo sobre la traza. Una geodésica mal parametrizada sigue siendo geodésica.
Y la razón geométrica de que γ lo sea es la mejor manera de recordarlo: un cilindro se **desenrolla** sobre el plano sin estirar, y bajo ese desarrollo la curva base se convierte en una recta, porque el desarrollo lleva el arco de la base al eje horizontal. Rectas del desarrollo, geodésicas del cilindro.

Resolución del ejercicio 2

Apartado 1. El campo $\mathbf{S} = \mathbf{N} \times \mathbf{t}$ es unitario, tangente a M y ortogonal a $\mathbf{t}$, de modo que $\{\mathbf{t}, \mathbf{S}\}$ es base ortonormal del plano tangente a lo largo de α. Como $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$ y la derivada covariante es compatible con la métrica,

$$2\left\langle \frac{D\mathbf{t}}{ds}, \mathbf{t} \right\rangle = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{D\mathbf{t}}{ds} = \left\langle \frac{D\mathbf{t}}{ds}, \mathbf{S} \right\rangle \mathbf{S}.$$

Y ese coeficiente es, por definición, la curvatura geodésica. Luego $\dfrac{D\mathbf{t}}{ds} = K_g\, \mathbf{S} = K_g\, (\mathbf{N} \times \mathbf{t})$.
■

Apartado 2. Sea V tangente unitario cualquiera. Entonces $\mathbf{N} \times V$ es tangente (por ser ortogonal a $\mathbf{N}$), unitario (por ser $\mathbf{N} \perp V$ y ambos unitarios) y ortogonal a V: así que $\{V, \mathbf{N} \times V\}$ es base ortonormal del plano tangente. Como DV/ds es tangente, se escribe

$$\frac{DV}{ds} = \mu\, V + \lambda\, (\mathbf{N} \times V).$$

Pero $V\cdot V = 1$ da $\left\langle \frac{DV}{ds}, V\right\rangle = 0$, luego $\mu = 0$ y

$$\frac{DV}{ds} = \lambda\,(\mathbf{N}\times V), \qquad \lambda = \left\langle \frac{DV}{ds}, \mathbf{N}\times V\right\rangle,$$

que es diferenciable por serlo V, $\mathbf{N}$ y α. ■

Apartado 3. Que pueda tomarse $V = \mathbf{n}$ significa que el normal principal de α es **tangente** a M. Como $\mathbf{t}$ también lo es y $\mathbf{t}\cdot\mathbf{n} = 0$, el par $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ es base ortonormal del plano tangente, y por tanto

$$\mathbf{N} = \varepsilon\,\mathbf{b}, \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

Con esto todo es inmediato. Por Frenet, $\dot{\mathbf{n}} = -k\,\mathbf{t} + \tau\,\mathbf{b}$, y de esos dos sumandos el primero es tangente y el segundo es normal, luego

$$\frac{D\mathbf{n}}{ds} = -k\,\mathbf{t}.$$

Por otro lado, $\mathbf{N}\times V = \varepsilon\,\mathbf{b}\times\mathbf{n} = -\varepsilon\,\mathbf{t}$, de modo que igualando,

$$-k\,\mathbf{t} = \lambda\,(-\varepsilon\,\mathbf{t}) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \varepsilon\,k.$$

Y ese valor es exactamente la curvatura geodésica: como $\mathbf{S} = \mathbf{N}\times\mathbf{t} = \varepsilon\,\mathbf{n}$ y $D\mathbf{t}/ds$ es la parte tangente de $k\,\mathbf{n}$, que es $k\,\mathbf{n}$ entera, resulta $K_g = k\mathbf{n}\cdot\varepsilon\mathbf{n} = \varepsilon k$. En resumen,

$$\boxed{\lambda(s) = K_g(s) = \pm\,k(s).}$$

■

LA IDEA: λ ES UNA VELOCIDAD ANGULAR

Los tres apartados dicen una sola cosa: **a lo largo de una curva, todo campo tangente unitario gira dentro del plano tangente, y λ es su velocidad angular**. El signo lo fija la orientación, porque $\mathbf{N}\times V$ es el resultado de girar V un cuarto de vuelta en el sentido positivo.

De ahí sale una consecuencia que conviene tener: si V y W son dos campos tangentes unitarios y θ es el ángulo de W respecto de V, entonces $\lambda_W = \lambda_V + \theta'$. En particular, **dos campos que formen ángulo constante tienen el mismo λ**, y por eso en el apartado 3 sale el mismo valor K_g que en el apartado 1: el ángulo entre $\mathbf{t}$ y $\mathbf{n}$ es $\pi/2$, constante.

Y hay un regalo escondido en el apartado 3 que merece la pena decir en el examen aunque no se pregunte: si $\mathbf{n}$ es tangente, entonces $\mathbf{N} = \pm\mathbf{b}$ y $K_n = k\mathbf{n}\cdot\varepsilon\mathbf{b} = 0$, es decir, α **es línea asintótica de** M. Es el caso límite del teorema de Meusnier, con $\mathbf{n}$ perpendicular a $\mathbf{N}$.

Resolución del ejercicio 3

Sea α la curva común, parametrizada naturalmente, asintótica en M_1 y en M_2, y sean $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ los normales unitarios de cada superficie a lo largo de ella.

Ser asintótica significa curvatura normal nula, es decir,

$$\ddot{\alpha}\cdot\mathbf{N}_i = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Supóngase que en un punto $k \neq 0$. Entonces $\mathbf{n}$ está bien definido, $\ddot{\alpha} = k\,\mathbf{n}$ y la condición anterior da

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{N}_1 = \mathbf{n}\cdot\mathbf{N}_2 = 0.$$

Además $\mathbf{t}\cdot\mathbf{N}_i = 0$ siempre, por estar α contenida en las dos superficies. Luego $\mathbf{N}_1$ y $\mathbf{N}_2$ son ambos ortogonales al plano generado por $\mathbf{t}$ y $\mathbf{n}$, que es el plano osculador y tiene dimensión dos. Su ortogonal es la recta generada por $\mathbf{b}$, y como los dos son unitarios,

$$\mathbf{N}_1 = \pm\mathbf{b} = \pm\,\mathbf{N}_2 :$$

los planos tangentes coinciden y **las superficies son tangentes en ese punto**.

Contrarrecíproco: **en todo punto donde las superficies no son tangentes,** $k = 0$. Si no son tangentes en ningún punto de α, entonces $k \equiv 0$ a lo largo de toda la curva, y una curva de curvatura idénticamente nula es una recta. ■

Un ejemplo. Los dos planos $z = 0$ e $y = 0$, que se cortan en el eje OX.

- El eje OX está contenido en ambos y es una recta, luego su curvatura es nula y con ella su curvatura normal: es línea asintótica de los dos.
- Los normales son $(0, 0, 1)$ y $(0, 1, 0)$, que no son proporcionales en ningún punto: los planos no son tangentes en ninguno de los puntos del eje.

Un ejemplo menos trivial. El helicoide $x(u, v) = (u\cos v,\ u\,\mathrm{sen}\,v,\ bv)$ con $b \neq 0$ y el plano $z = 0$. Comparten la recta $v = 0$, que es el eje OX, asintótica en ambos por ser recta contenida en ellos. Y el normal del helicoide en esos puntos vale $(0,\ -b,\ u)/\sqrt{u^2 + b^2}$, que nunca es proporcional a $(0, 0, 1)$ porque $b \neq 0$: no son tangentes en ningún punto de la recta.

Resolución del ejercicio 4

La figura muestra un cilindro circular de eje vertical cortado por un plano horizontal, y α es la circunferencia intersección. La respuesta es que **sí** en los dos casos, y por razones distintas.

Del plano: sí, y trivialmente. En un plano $L_{ij} \equiv 0$, luego el operador de Weingarten es idénticamente nulo y *todo* vector tangente es autovector suyo, con autovalor cero. Es decir, todas las direcciones son principales y **toda curva regular contenida en un plano es línea de curvatura**. En particular α.

Del cilindro: sí. La circunferencia α es un **paralelo** del cilindro. En la parametrización de revolución $x(u, v) = (r\cos u,\ r\,\mathrm{sen}\,u,\ v)$ se tiene $g_{12} = 0$ y $L_{12} = 0$, y esa es exactamente la condición para que las líneas paramétricas sean líneas de curvatura. Los paralelos son una de las dos familias.

También se ve directamente por el criterio de Olinde Rodrigues: a lo largo de α el normal del cilindro es $\mathbf{N} = (\cos u, \mathrm{sen}\,u, 0)$, luego

$$\dot{\mathbf{N}} = (-\,\mathrm{sen}\,u, \cos u, 0)\,\frac{du}{ds} \qquad \text{y} \qquad \alpha' = r\,(-\,\mathrm{sen}\,u, \cos u, 0)\,\frac{du}{ds},$$

que son proporcionales. Esa proporcionalidad es la definición de línea de curvatura. ■

LA IDEA: POR QUÉ LOS EJERCICIOS 3 Y 4 ESTÁN EN EL MISMO EXAMEN

Puestos uno al lado del otro dicen cosas opuestas, y esa es la gracia.
El **ejercicio 3** dice que dos superficies no tangentes casi no pueden compartir una línea asintótica: solo si es una recta. Compartir asintótica es una condición rígida.
El **ejercicio 4** exhibe dos superficies no tangentes, un cilindro y un plano que se cortan en ángulo recto, compartiendo una línea de curvatura que *no* es una recta, sino una circunferencia. Compartir línea de curvatura no es rígido en absoluto.
La razón de fondo es el **teorema de Joachimsthal**: si dos superficies se cortan a lo largo de una curva formando ángulo constante, y la curva es línea de curvatura de una de ellas, entonces lo es de la otra. Aquí el ángulo es constante e igual a $\pi/2$, porque el normal del cilindro es siempre horizontal y el del plano siempre vertical. Con eso, saber la respuesta para el plano, que es inmediata, ya da la del cilindro sin tocar el cilindro.
Merece la pena guardarlo como atajo: **ante una pregunta de este tipo, mirar primero si el ángulo de corte es constante**. Si lo es, las dos respuestas van juntas y basta con resolver la fácil.

D.5 Primera convocatoria de 2024

Ficha. Convocatoria de enero, 16 de enero de 2024, curso 2023/2024. Dos ejercicios de seis y cuatro apartados, a punto el apartado. El primero construye una curva a partir de otra y con las dos monta una reglada; el segundo es un bloque completo sobre torsión geodésica. Además del aviso de siempre sobre justificar, este enunciado añade otro: no se valorará ninguna respuesta escrita de forma ilegible.

Enunciado

Ejercicio 1. [1 *punto cada apartado*]

Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. tal que $k(s) \neq 0$ para todo s y existe s_0 con $\alpha(s_0) = 0$. Sea Π un plano que pasa por el origen de coordenadas y tiene vector característico unitario $\mathbf{a}$ y, para cada s, sea $\beta(s)$ la proyección de $\alpha(s)$ sobre Π. Se pide:

1. Demostrar que $\beta(s) = \alpha(s) - \big[\alpha(s)\cdot\mathbf{a}\big]\,\mathbf{a}$ es la c.p.r. descrita.
2. Si $\mathbf{a} = \mathbf{b}_\alpha(s_0)$ y α es plana, probar, sin hacer ningún cálculo adicional, que $\alpha = \beta$.
3. A partir de ahora, supóngase que α es plana y que el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}_\alpha(s_0)$ es de 45 grados. Se considera entonces la superficie reglada formada por las rectas que unen $\alpha(s)$ y $\beta(s)$, para cada s. Construir una s.p. $X(s,v)$ cuya imagen esté contenida en dicha superficie, usando α como directriz.
4. Sin hacer ningún cálculo adicional, justificar que g_{12} es cero en los puntos de β.
5. Clasificar los puntos de X.
6. ¿Es α una línea de curvatura de X? ¿Y una línea asintótica?

Ejercicio 2. [1 *punto cada apartado*]

Sea $\alpha(s)$ una curva alabeada regular parametrizada naturalmente en una superficie regular M y sea $P = \alpha(s)$ un punto sobre la misma. Se define la *torsión geodésica* de α en P como $\tau_g(s) = -\dot{\mathbf{N}}(s)\cdot\mathbf{S}(s)$. Probar:

1. $\tau_g(0) = (k_2 - k_1)\cos\varphi \operatorname{sen}\varphi$, donde k_1 y k_2 son las curvaturas principales en $P = \alpha(0)$, y φ es el ángulo formado por $\mathbf{t}(0)$ y la dirección principal $\mathbf{X}_{(1)}$ en P.
2. $\tau_g(s) = 0$ si y solo si P es umbílico o bien $\dot\alpha(0)$ es una dirección principal.
3. El eje OX en la superficie $z = xy$ tiene torsión geodésica **no nula** en todos sus puntos.
4. Dar un ejemplo de superficie parametrizada en la que alguna recta contenida en ella tenga torsión geodésica idénticamente nula.

Resolución del ejercicio 1

Apartado 1. La proyección ortogonal de un punto P sobre el plano que pasa por el origen con normal unitaria $\mathbf{a}$ se obtiene restando la componente en la dirección $\mathbf{a}$, es decir, $P - P\cdot\mathbf{a}\,\mathbf{a}$. Que la fórmula del enunciado es esa proyección se comprueba con las dos propiedades que la caracterizan:

$$\beta(s)\cdot\mathbf{a} = \alpha(s)\cdot\mathbf{a} - \alpha(s)\cdot\mathbf{a}\,\underbrace{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}_{=1} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \beta(s) \in \Pi,$$

$$\beta(s) - \alpha(s) = -\big[\alpha(s)\cdot\mathbf{a}\big]\mathbf{a} \;\parallel\; \mathbf{a} \qquad \Longrightarrow \qquad \beta(s) - \alpha(s) \perp \Pi.$$

Falta lo que el enunciado esconde en las tres letras c.p.r.: que sea **regular**. Derivando,

$$\beta'(s) = \mathbf{t}(s) - \big[\mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{a}\big]\mathbf{a},$$

que es la proyección de $\mathbf{t}(s)$ sobre Π. Se anula si y solo si $\mathbf{t}(s)$ es paralelo a $\mathbf{a}$. Luego β **es regular exactamente en los puntos donde la tangente de α no es perpendicular a Π**. Conviene decirlo, porque a partir del apartado 3 la hipótesis de los 45 grados garantiza justamente eso. Sin esa hipótesis no se puede afirmar la regularidad en todo el dominio: con $\alpha(s) = (\operatorname{sen} s, 1 - \cos s, 0)$ y $\mathbf{a} = (1,0,0)$, la proyección cumple $\beta'(0) = 0$, aunque $k \equiv 1$. ■

Apartado 2. Como α es plana y $k \neq 0$, su torsión es idénticamente nula y por Frenet $\dot{\mathbf{b}} = -\tau\,\mathbf{n} = 0$: la binormal es **constante**, igual a $\mathbf{b}_\alpha(s_0) = \mathbf{a}$. Por tanto α está contenida en un plano de vector característico $\mathbf{a}$, y ese plano contiene el punto $\alpha(s_0) = 0$.

Ahora bien, Π es también un plano de vector característico $\mathbf{a}$ que pasa por el origen, y dos planos con la misma normal y un punto común coinciden. Luego α está contenida en Π, y la proyección ortogonal sobre un plano deja fijos los puntos de ese plano: $\beta = \alpha$. No ha hecho falta ningún cálculo. ■

Apartado 3. La recta que une $\alpha(s)$ con $\beta(s)$ tiene la dirección de $\beta(s) - \alpha(s)$, que es paralela a $\mathbf{a}$ para todo s. Tomando α como directriz y recorriendo la recta con el parámetro que lleva de α a β,

$$\boxed{X(s,v) = \alpha(s) + v\big(\beta(s) - \alpha(s)\big) = \alpha(s) - v\big[\alpha(s)\cdot\mathbf{a}\big]\mathbf{a}.}$$

Así $X(s,0) = \alpha(s)$ y $X(s,1) = \beta(s)$: las dos curvas del enunciado son líneas paramétricas, que es lo que hace falta para el apartado siguiente.

Regularidad. Escribiendo $\varphi(s) = \alpha(s)\cdot\mathbf{a}$, se tiene

$$X_s = \mathbf{t} - v\varphi'\mathbf{a}, \qquad X_v = -\varphi\,\mathbf{a}, \qquad X_s \times X_v = -\varphi\,(\mathbf{t}\times\mathbf{a}).$$

Y aquí entra la hipótesis de los 45 grados. Como α es plana, $\mathbf{b}$ es constante y $\mathbf{t}$ vive siempre en el plano de la curva; descomponiendo $\mathbf{a} = \cos 45^\circ\,\mathbf{b} + \operatorname{sen} 45^\circ\,\mathbf{u}$ con $\mathbf{u}$ unitario en ese plano,

$$\mathbf{t}\cdot\mathbf{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{t}\cdot\mathbf{u}, \qquad \text{luego} \qquad \big|\mathbf{t}\cdot\mathbf{a}\big| \le \frac{\sqrt{2}}{2} < 1,$$

de modo que $\mathbf{t}$ nunca es paralelo a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{t}\times\mathbf{a}\neq 0$. La aplicación X es, pues, regular exactamente donde $\varphi(s)\neq 0$, es decir, fuera de los puntos en que α corta a Π; en ellos $\alpha(s)=\beta(s)$ y la "recta que une" los dos puntos degenera. En particular hay que excluir $s=s_0$. ■

Apartado 4. No hace falta calcular nada, solo mirar quiénes son los dos vectores en los puntos de β, esto es, en $v=1$.

La curva $s\mapsto X(s,1)$ es β, luego $X_s(s,1)=\beta'(s)$, que es **tangente a** Π por estar β contenida en Π. Y $X_v=-\varphi\mathbf{a}$ es paralelo a $\mathbf{a}$, que es **normal a** Π. Un vector tangente a un plano y otro normal a ese mismo plano son ortogonales, luego

$$g_{12}=X_s\cdot X_v=0 \qquad \text{en los puntos de } \beta.$$

■

Apartado 5. La imagen de X está contenida en el **cilindro generalizado** de directriz α y generatrices en la dirección constante $\mathbf{a}$, porque todo punto de X es de la forma $\alpha(s)+w\,\mathbf{a}$. Y en toda reglada de dirección constante,

$$X_{vv}=0 \implies L_{22}=0, \qquad X_{sv}=-\varphi'\mathbf{a} \implies L_{12}=-\varphi'\mathbf{N}\cdot\mathbf{a}=0,$$

esto último porque $\mathbf{N}$ es proporcional a $\mathbf{t}\times\mathbf{a}$, que es ortogonal a $\mathbf{a}$. Por tanto

$$K=\frac{L_{11}L_{22}-L_{12}^2}{g}=0.$$

Queda ver si L_{11} se anula o no. Con $X_{ss}=k\,\mathbf{n}-v\varphi''\mathbf{a}$ y $\mathbf{N}=-\operatorname{sgn}(\varphi)\dfrac{\mathbf{t}\times\mathbf{a}}{|\mathbf{t}\times\mathbf{a}|}$,

$$L_{11}=\mathbf{N}\cdot X_{ss}=k\,\mathbf{N}\cdot\mathbf{n},$$

y el producto mixto se calcula de una vez:

$$(\mathbf{t}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{n}=(\mathbf{t},\mathbf{a},\mathbf{n})=-(\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{a})=-\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Como además $|\mathbf{t}\times\mathbf{a}|^2=1-\mathbf{t}\cdot\mathbf{a}^2\geq\frac{1}{2}>0$, resulta

$$L_{11}=\operatorname{sgn}(\varphi)\,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{k}{|\mathbf{t}\times\mathbf{a}|}\;\neq\;0,$$

porque $k\neq 0$ por hipótesis. Luego $K\equiv 0$ con S.F.F. no nula: **todos los puntos de** X **son parabólicos**. ■

Apartado 6. Con $L_{12}=L_{22}=0$ y $L_{11}\neq 0$, la matriz del operador de Weingarten en la base $\{X_s,X_v\}$, usando coordenadas columna y $II=(L_{ij})$, es

$$A=G^{-1}II=\frac{1}{g}\begin{pmatrix} g_{22}L_{11} & 0\\ -g_{12}L_{11} & 0\end{pmatrix},$$

con autovalores 0 y $g_{22}L_{11}/g$. El autovector de autovalor cero es la dirección de X_v, la **generatriz**. El otro es proporcional a $(g_{22},-g_{12})$, y sustituyendo $g_{22}=\varphi^2$ y $g_{12}=-\varphi\varphi'(1-v)$ se llega, tras simplificar, a la dirección de

$$\mathbf{t}-\big[\mathbf{t}\cdot\mathbf{a}\big]\mathbf{a}=\beta'(s),$$

la proyección de $\mathbf{t}$ sobre Π. Es decir: **las líneas de curvatura de X son las generatrices y las secciones por planos paralelos a Π**, entre ellas la propia β.

¿Es α línea de curvatura? **No.** La curva α es la línea $v = 0$, con tangente $\mathbf{t}$, y $\mathbf{t}$ no es ninguna de las dos direcciones principales: no es la generatriz, y coincidir con β' exigiría $\mathbf{t}\cdot\mathbf{a} = 0$, que solo ocurre en los puntos aislados donde la tangente de α es paralela a Π, no a lo largo de toda la curva.

¿Es α línea asintótica? **Tampoco.** Al ser todos los puntos parabólicos hay en cada uno una única dirección asintótica, y es la del núcleo del operador de Weingarten, es decir, la generatriz. Y α no es una generatriz: ni siquiera es una recta, porque $k \neq 0$. Se ve también de frente, sin hablar de direcciones:

$$II(X_s, X_s) = L_{11} \neq 0.$$

■

LA IDEA: LA CLAVE DEL EJERCICIO ES ELEGIR BIEN LA v

Este ejercicio se gana o se pierde en el apartado 3, y no por dificultad técnica sino por una decisión de parametrización.
La tentación es escribir $X(s, v) = \alpha(s) + v\,\mathbf{a}$, que también describe la superficie y es más cómoda. Pero con ella β *no* es una línea paramétrica, sino la curva $v = -\alpha(s)\cdot\mathbf{a}$, y entonces el apartado 4 deja de poder contestarse "sin hacer ningún cálculo adicional": $g_{12} = \mathbf{t}\cdot\mathbf{a}$ no es cero.
La pista está en el propio enunciado, que habla de **las rectas que unen $\alpha(s)$ y $\beta(s)$**. Si se toma como parámetro el que va de una a la otra, es decir $X(s, v) = \alpha + v(\beta - \alpha)$, entonces α es $v = 0$, β es $v = 1$, y el apartado 4 se contesta en una línea. La regla general que conviene llevarse es esta: **cuando un enunciado nombra dos curvas de la superficie, parametrízala de modo que las dos sean líneas paramétricas.**
Y merece la pena ver dónde se usa cada hipótesis. Que α sea **plana** da $\mathbf{b}$ constante y con ello toda la estructura de cilindro. Los 45 **grados** se usan dos veces: para que $\mathbf{t}$ no sea paralelo a $\mathbf{a}$, que es la regularidad, y para que $\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} \neq 0$, que es lo que impide que los puntos sean planos. Y $k \neq 0$ es lo que hace que L_{11} no se anule. Ninguna hipótesis sobra.

Resolución del ejercicio 2

Apartado 1. Sea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ una base ortonormal de direcciones principales en P, con $L_P\mathbf{e}_i = k_i\mathbf{e}_i$, elegida de modo que $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{N}\}$ esté positivamente orientada, y sea φ el ángulo orientado desde $\mathbf{e}_1$ hasta $\mathbf{t}(0)$ en esa base. Entonces

$$\mathbf{t}(0) = \cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \operatorname{sen}\varphi\,\mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{S}(0) = \mathbf{N}\times\mathbf{t}(0) = -\operatorname{sen}\varphi\,\mathbf{e}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{e}_2,$$

usando $\mathbf{N}\times\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{N}\times\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1$.

Por la ecuación de Weingarten, $\dot{\mathbf{N}}(0) = -L_P\big(\mathbf{t}(0)\big)$, luego

$$\tau_g(0) = -\dot{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{S} = L_P\mathbf{t}\cdot\mathbf{S}.$$

Y como $L_P\mathbf{t} = k_1\cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + k_2\operatorname{sen}\varphi\,\mathbf{e}_2$,

$$\tau_g(0) = k_1\cos\varphi\,(-\operatorname{sen}\varphi) + k_2\operatorname{sen}\varphi\,\cos\varphi = (k_2 - k_1)\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi.$$

■

Apartado 2. Escribiendo la fórmula anterior como

$$\tau_g = \tfrac{1}{2}\,(k_2 - k_1)\,\operatorname{sen} 2\varphi,$$

el producto se anula si y solo si se anula uno de los dos factores.

Si $k_1 = k_2$, el punto es **umbílico**. Si $\operatorname{sen} 2\varphi = 0$, entonces φ es múltiplo de $\pi/2$ y $\mathbf{t}(0) = \pm\mathbf{e}_1$ o $\mathbf{t}(0) = \pm\mathbf{e}_2$, es decir, $\dot\alpha(0)$ es **dirección principal**. Y recíprocamente, en cualquiera de los dos casos $\tau_g = 0$. ■

Apartado 3. La superficie $z = xy$ es la carta de Monge con $h(x, y) = xy$, para la cual $h_x = y$, $h_y = x$, $h_{xx} = h_{yy} = 0$ y $h_{xy} = 1$. En los puntos del eje OX, es decir $(x, 0, 0)$, escribiendo $W = \sqrt{1 + x^2}$,

$$\mathbf{N} = \frac{(-h_x, -h_y, 1)}{W} = \frac{(0, -x, 1)}{W}, \qquad \mathbf{t} = (1, 0, 0), \qquad \mathbf{S} = \mathbf{N} \times \mathbf{t} = \frac{(0, 1, x)}{W}.$$

Derivando respecto de x, que es el parámetro natural del eje,

$$\dot{\mathbf{N}} = -\frac{1}{W^3}\,(0, 1, x),$$

de donde

$$\tau_g = -\dot{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{S} = \frac{1}{W^3}\cdot\frac{1 + x^2}{W} = \frac{W^2}{W^4} = \frac{1}{1 + x^2} \;\neq\; 0$$

para todo x. ■

Otra vía (sin derivar la normal). El eje OX es una **recta contenida en la superficie**, luego es línea asintótica. Y para una línea asintótica se cumple $\tau_g^2 = -K$. Como en esta superficie

$$K = \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^2} = \frac{-1}{(1 + x^2)^2} < 0,$$

resulta $\tau_g = \pm\dfrac{1}{1 + x^2}$, que no se anula nunca. De paso queda claro por qué: los puntos son **hiperbólicos**, luego no son umbílicos, y una dirección asintótica en un punto hiperbólico nunca es principal. Por el apartado 2, la torsión geodésica no puede anularse.

Apartado 4. Sirve el **cilindro circular** $x(u, v) = (r\cos u,\ r\operatorname{sen} u,\ v)$ y cualquiera de sus **generatrices**, las rectas $u = u_0$.

La justificación es inmediata: a lo largo de una generatriz el normal vale $\mathbf{N} = (\cos u_0, \operatorname{sen} u_0, 0)$, que **no depende de** v. Luego $\dot{\mathbf{N}} = 0$ y

$$\tau_g = -\dot{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{S} = 0$$

en todos los puntos de la recta. También se ve con el apartado 2: las generatrices del cilindro son líneas de curvatura, es decir, su dirección es principal, y eso basta.

Un ejemplo aún más barato, si se admite lo trivial, es cualquier recta de un plano: todos los puntos de un plano son umbílicos. ■

D.6 Segunda convocatoria de 2024

Ficha. Convocatoria de julio, 10 de julio de 2024, curso 2023/2024. Tres ejercicios y diez puntos: $3 + 4 + 3$. El primero es de curvas puras y se contesta con dos productos escalares. El segundo es el mejor ejercicio teórico de todos los recogidos aquí, porque monta un si y solo si en tres piezas y luego pide un contraejemplo que muestra por qué no basta un ángulo constante. El tercero es la lectura de figura sobre el cilindro.

Enunciado

Primer ejercicio. [1,5 *puntos cada apartado*]

Dada la c.p.r. $\alpha(t) = (t,\, t^2,\, t^3)$ en $\mathbb{R}^3$, se considera la recta γ trazada desde uno cualquiera de sus puntos $\alpha(t)$ que se apoya en el eje OZ y es paralela al plano OXY. Se pide estudiar:

1. Si γ está contenida en el plano osculador de α en dicho punto.
2. Si para algún valor regular de t, γ está contenida en el plano normal de α en dicho punto.

Segundo ejercicio. [1 *punto cada apartado*]

Sea M una s.r. orientada y $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. en M. Para cada s, sea

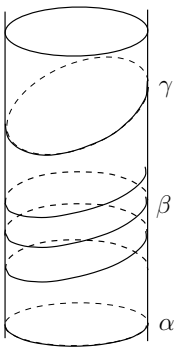
$$v(s) = \lambda(s)\,\mathbf{t}(s) + \mu(s)\,\mathbf{S}(s),$$

con λ y μ dos funciones diferenciables tales que $\lambda^2(s) + \mu^2(s) = 1$ para todo s, donde $\mathbf{S}(s)$ denota la normal intrínseca de α en $\alpha(s)$.

1. Probar que α es una geodésica si y solo si $\dot{\mathbf{S}}(s) \parallel \mathbf{N}(s)$ para todo s. ¿Cuál es el coeficiente de paralelismo si α no es una recta?
2. Si α es una geodésica, probar que λ es constante si y solo si $\dot{v}(s) \parallel \mathbf{N}(s)$ para todo s.
3. Si λ es constante y $\dot{v}(s) \parallel \mathbf{N}(s)$ para todo s, probar que α es una geodésica.
4. Estudiar el caso en que M sea un plano, α una circunferencia en ese plano y $v = \mathbf{S}$.

Tercer ejercicio. [3 *puntos*]

Se considera el cilindro como superficie regular y las curvas parametrizadas regulares sobre él que se ven en la figura adjunta, α, β, γ. Para cada una de dichas curvas, indicar si es geodésica, línea de curvatura o línea asintótica, o ninguna de las tres, razonando la respuesta.



Resolución del primer ejercicio

Quién es la recta γ. Ser paralela al plano OXY significa que su altura z es constante, e igual a la del punto de partida, $z = t^3$. Apoyarse en el eje OZ significa cortarlo, y el único punto del eje a esa altura es $(0, 0, t^3)$. Luego γ es la recta que une $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ con $(0, 0, t^3)$, es decir,

$$\gamma(u) = \alpha(t) + u\,\mathbf{w}, \qquad \mathbf{w} = (t,\ t^2,\ 0).$$

Conviene notar desde ya que $\mathbf{w} = 0$ si y solo si $t = 0$, y que en ese caso $\alpha(0)$ es el propio origen, que está *sobre* el eje OZ: la construcción no determina ninguna recta. Así que en todo lo que sigue $t \neq 0$.

El triedro, en lo que hace falta. Derivando,

$$\alpha' = (1,\ 2t,\ 3t^2), \qquad \alpha'' = (0,\ 2,\ 6t), \qquad \alpha' \times \alpha'' = (6t^2,\ -6t,\ 2) = 2\,(3t^2,\ -3t,\ 1).$$

Como $\alpha' \neq 0$ y $\alpha' \times \alpha'' \neq 0$ para todo t, la curva es regular y su curvatura no se anula nunca: los tres planos del triedro están definidos en todo punto.

Apartado 1. La recta γ pasa por $\alpha(t)$, luego está contenida en el plano osculador si y solo si su dirección es ortogonal a la binormal, que va en la dirección de $\alpha' \times \alpha''$. Y

$$\mathbf{w}\cdot(3t^2, -3t, 1) = 3t^3 - 3t^3 + 0 = 0.$$

La respuesta es **sí, y para todo** $t \neq 0$, no solo para algunos valores. ■

Apartado 2. El plano normal en $\alpha(t)$ es el ortogonal al vector tangente. Como γ pasa por $\alpha(t)$, está contenida en él si y solo si $\mathbf{w} \perp \alpha'$:

$$\mathbf{w}\cdot\alpha' = t \cdot 1 + t^2 \cdot 2t + 0 \cdot 3t^2 = t + 2t^3 = t\,(1 + 2t^2).$$

Este producto se anula si y solo si $t = 0$, porque $1 + 2t^2 > 0$ siempre. Y $t = 0$ es precisamente el valor en que γ no está definida.

Luego la respuesta es **no: no hay ningún valor de t para el que γ esté contenida en el plano normal**. ■

QUÉ DEJA. Los dos apartados juntos dicen algo más fuerte que sus respuestas por separado, y conviene verlo porque es la manera de contestar el segundo en dos líneas.

Por el apartado 1, γ vive siempre en el plano osculador. Si además viviera en el plano normal, viviría en la intersección de los dos, que es exactamente la **recta normal principal**. Es decir, el apartado 2 está preguntando, disfrazado, si γ llega a ser alguna vez la normal principal de α. Y no lo es nunca.

La cuenta que lo decide, $\mathbf{w}\cdot\alpha' = t(1 + 2t^2)$, tiene además una lectura geométrica: el único candidato es $t = 0$, y $t = 0$ es el único punto en que la curva corta al eje OZ, que es justo donde la construcción se rompe. El enunciado está montado para que el candidato y la singularidad coincidan.

DE DÓNDE VIENE

La curva $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ tiene nombre propio: es la **cúbica alabeada**, y es el ejemplo más usado de curva que no es plana, en este curso y en geometría algebraica. Su gracia es que sus tres coordenadas son las tres primeras potencias, de modo que α', α'' y α''' son siempre independientes (su determinante vale 12) y las cuentas del triedro salen polinómicas y limpias. Es también la curva de menor grado que no cabe en ningún plano, y por eso aparece como contraejemplo estándar cada vez que hace falta uno.

Resolución del segundo ejercicio

Todo el ejercicio sale de las **ecuaciones de Darboux**, que conviene tener escritas antes de empezar. En el triedro intrínseco $\{\mathbf{t}, \mathbf{S}, \mathbf{N}\}$, ortonormal y positivamente orientado a lo largo de α,

$$\dot{\mathbf{t}} = K_g\,\mathbf{S} + K_n\,\mathbf{N}, \qquad \dot{\mathbf{S}} = -K_g\,\mathbf{t} + \tau_g\,\mathbf{N}, \qquad \dot{\mathbf{N}} = -K_n\,\mathbf{t} - \tau_g\,\mathbf{S}.$$

Apartado 1. La segunda ecuación lo dice todo:

$$\dot{\mathbf{S}} = -K_g\,\mathbf{t} + \tau_g\,\mathbf{N}.$$

Como $\{\mathbf{t}, \mathbf{N}\}$ son independientes, $\dot{\mathbf{S}}$ es proporcional a $\mathbf{N}$ si y solo si se anula su componente en $\mathbf{t}$, es decir, si y solo si $K_g \equiv 0$. Y eso es exactamente ser geodésica.

El coeficiente. Cuando α es geodésica, $\dot{\mathbf{S}} = \tau_g\,\mathbf{N}$, de modo que el coeficiente de paralelismo es la torsión geodésica. Donde $k > 0$, para una geodésica se cumple $\tau = \tau_g$. En esos puntos

$$\dot{\mathbf{S}}(s) = \tau(s)\,\mathbf{N}(s)\,:$$

el coeficiente es la torsión de α. La hipótesis «no es una recta» no garantiza $k > 0$ en cada punto. Donde se anule la curvatura, la expresión τ_g sigue siendo válida aunque no exista el triedro de Frenet. ■

Apartado 2. Sea α geodésica, de modo que $K_g \equiv 0$ y las ecuaciones de Darboux se reducen a $\dot{\mathbf{t}} = K_n\mathbf{N}$ y $\dot{\mathbf{S}} = \tau_g\mathbf{N}$: las derivadas de los dos campos tangentes son **puramente normales**. Derivando $v = \lambda\mathbf{t} + \mu\mathbf{S}$,

$$\dot{v} = \dot{\lambda}\,\mathbf{t} + \dot{\mu}\,\mathbf{S} + \big(\lambda K_n + \mu\tau_g\big)\mathbf{N}.$$

($\Leftarrow$) Si $\dot{v} \parallel \mathbf{N}$, su parte tangente es nula, y como $\{\mathbf{t}, \mathbf{S}\}$ es base del plano tangente, $\dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$. En particular λ es constante.

($\Rightarrow$) Si λ es constante, entonces $\mu^2 = 1 - \lambda^2$ es constante. Distinguiendo: si esa constante es cero, $\mu \equiv 0$ y $\dot{\mu} \equiv 0$; si no lo es, μ no se anula en ningún punto y de $2\mu\dot{\mu} = 0$ se sigue $\dot{\mu} \equiv 0$. En ambos casos $\dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ y $\dot{v} = (\lambda K_n + \mu\tau_g)\mathbf{N}$, paralelo a $\mathbf{N}$. ■

Apartado 3. Ahora **no** se supone que α sea geodésica, y hay que probarlo. Con λ constante se tiene, como en el apartado anterior, $\dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$. Derivando v con las ecuaciones de Darboux completas,

$$\dot{v} = \lambda\big(K_g\mathbf{S} + K_n\mathbf{N}\big) + \mu\big(-K_g\mathbf{t} + \tau_g\mathbf{N}\big) = \underbrace{(-\mu K_g)}_{\text{en } \mathbf{t}}\,\mathbf{t} + \underbrace{(\lambda K_g)}_{\text{en } \mathbf{S}}\,\mathbf{S} + \big(\lambda K_n + \mu\tau_g\big)\mathbf{N}.$$

Imponer $\dot{v} \parallel \mathbf{N}$ obliga a que las dos componentes tangentes se anulen:

$$\mu\,K_g = 0 \qquad \text{y} \qquad \lambda\,K_g = 0.$$

Y aquí entra la condición $\lambda^2 + \mu^2 = 1$: en cada punto, λ y μ no pueden ser ambos nulos. Luego $K_g = 0$ en todo punto y α es geodésica. ■

Apartado 4. Sea M un plano, α una circunferencia de radio r contenida en él y $v = \mathbf{S}$, es decir, $\lambda \equiv 0$ y $\mu \equiv 1$.

En un plano todos los puntos son planos, luego el endomorfismo de Weingarten es nulo y

$$K_n \equiv 0, \qquad \tau_g \equiv 0.$$

La circunferencia, en cambio, tiene $K_g = \pm 1/r \neq 0$: no es geodésica, como tenía que ser, porque las geodésicas de un plano son sus rectas. Sustituyendo en Darboux,

$$\dot{v} = \dot{\mathbf{S}} = -K_g\,\mathbf{t} = \mp\frac{1}{r}\,\mathbf{t},$$

que es **tangente** y no es paralelo a $\mathbf{N}$.

Qué ilustra este caso. Que la hipótesis de derivada normal no puede omitirse en el apartado 3. Aquí $\lambda \equiv 0$ es constante, y sin embargo α no es geodésica; lo que falla es la otra hipótesis, $\dot{v} \parallel \mathbf{N}$. El apartado 4 es el contraejemplo que impide creer que con λ constante bastara. ■

LA IDEA: LOS CUATRO APARTADOS SON UN SOLO ENUNCIADO

Vale la pena leer el ejercicio entero de una vez, porque está construido con mucho cuidado y esa construcción es la respuesta.
El campo $v = \lambda\mathbf{t} + \mu\mathbf{S}$ con $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ es simplemente **un campo tangente unitario a lo largo de** α, escrito en la base intrínseca. Que λ sea constante significa que v **forma ángulo constante con la curva**.
Con eso, los tres primeros apartados dicen esto: *si α es geodésica, los campos que forman ángulo constante con ella son exactamente los que tienen derivada covariante nula; y al revés, que exista uno así obliga a que α sea geodésica*. Es decir, un campo unitario que mantenga el ángulo y sea paralelo es un detector de geodésicas.
Y el apartado 4 impide la lectura perezosa. En el plano, la normal intrínseca de una circunferencia mantiene el ángulo con la curva perfectamente, un ángulo recto todo el rato, y sin embargo la circunferencia no es geodésica. Lo que le falta es lo otro: $\dot{\mathbf{S}}$ apunta en dirección tangente a la circunferencia, dentro del plano. Mantener el ángulo no basta: también debe anularse la derivada covariante.

Resolución del tercer ejercicio

En la figura original, α es un paralelo, β una hélice circular con paso no nulo y γ una sección por un plano oblicuo, que es una elipse. No hay una generatriz entre las tres curvas: la figura del capítulo 4 es otro ejemplo.

En un cilindro de radio r, las direcciones principales son la vertical y la horizontal, y la única dirección asintótica es la vertical. Al desenrollarlo, las trazas geodésicas se convierten localmente en rectas.

- α: **geodésica y línea de curvatura**, pero no asintótica. Es horizontal, y su desarrollo es una recta.
- β: **geodésica**, pero ni principal ni asintótica. Su desarrollo es una recta oblicua, con ambas componentes de la velocidad no nulas.
- γ: **ninguna de las tres**. Tras girar el eje horizontal y trasladar la altura, podemos escribirla como $\gamma(u) = (r\cos u, r\,\mathrm{sen}\,u, c + a\cos u)$, con $a \neq 0$. Su desarrollo es $(ru, c + a\cos u)$, una sinusoide, no una recta. La componente angular nunca se anula, así que su dirección nunca es asintótica; y salvo en puntos aislados combina las dos direcciones principales, por lo que tampoco es línea de curvatura.

QUÉ DEJA. El aviso que hay que llevarse de este examen es el del segundo ejercicio, y es de método.

Cuando un enunciado da un campo escrito en una base y una ligadura entre los coeficientes, como aquí $\lambda^2 + \mu^2 = 1$, esa ligadura **no es decoración**: es la que se usa al final. En el apartado 3 es exactamente lo que impide que λ y μ se anulen a la vez, y sin ese paso la demostración no cierra.

Y el otro aviso: en los apartados 2 y 3 las ecuaciones de Darboux que hay que usar **no son las mismas**. En el 2 se supone geodésica y se pueden simplificar de entrada; en el 3 hay que usarlas completas, porque K_g es justamente la incógnita. Sustituir demasiado pronto es el error que arruina el apartado 3.

D.7 Segunda convocatoria de 2023

Ficha. Convocatoria de julio, 10 de julio de 2023, curso 2022/2023. Tres ejercicios y diez puntos: $2+4+4$. Es el examen de las regladas: una proyección de curva, una familia de regladas que pasa por el cilindro, el cono y el hiperboloide, y la silla de montar con sus geodésicas.

Enunciado

Ejercicio 1. [$1+1$ *puntos*] Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n.. Al proyectar ortogonalmente cada punto $\alpha(s)$ sobre el plano rectificante a α en $\alpha(0)$ se obtiene una curva $\beta(s)$. (a) Parametrizar β y estudiar su regularidad. (b) ¿Puede ser s también el parámetro natural de β?

Ejercicio 2. [$1+1+2$ *puntos*] Sean las curvas $\alpha(s) = (\cos s, \operatorname{sen} s, 0)$ y $\beta(s) = (\cos s, \operatorname{sen} s, a)$ con $a > 0$. Fijado $\lambda \in \mathbb{R}$, para cada s se trazan las rectas r_s que unen los puntos $\alpha(s)$ y $\beta(s+\lambda)$, generando una superficie reglada M_λ.

1. ¿Qué superficie es M_0?
2. Una superficie reglada de directriz α y dirección de las generatrices ω es desarrollable si y solo si $(\alpha', \omega, \omega') = 0$. ¿Para qué valores de λ es M_λ desarrollable?
3. Dar un atlas de M_π y clasificar sus puntos.

Ejercicio 3. [$1+1+1+1$ *puntos*] Sea el conjunto $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z - x^2 + 4y^2 = 0\}$.

1. Demostrar que M es una superficie regular. ¿Qué se puede decir de su orientabilidad?
2. Probar que M es la imagen de la superficie parametrizada $X(u,v) = \big(2(u+v),\ u-v,\ 16uv\big)$ para cierto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ que se debe explicitar.
3. Clasificar los puntos de M. ¿Contiene M algún punto umbílico?
4. ¿Para qué valores de $c \in \mathbb{R}$ es la intersección de M con el plano $y = c$ una curva geodésica de M? Indicar una ecuación paramétrica de dicha geodésica y estudiar si es una línea asintótica de M.

Resolución del ejercicio 1

El plano rectificante en $\alpha(0)$ pasa por $p_0 = \alpha(0)$ y está generado por $\mathbf{t}(0)$ y $\mathbf{b}(0)$; su normal unitaria es $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}(0)$, que existe porque α es una c.r.p.n. con $k(0) \neq 0$. Proyectar ortogonalmente sobre él es restar la componente normal:

$$\beta(s) = \alpha(s) - \big(\alpha(s) - p_0\big)\cdot\mathbf{n}_0\,\mathbf{n}_0.$$

Regularidad. Derivando, $\beta'(s) = \mathbf{t}(s) - \mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{n}_0\,\mathbf{n}_0$, la proyección del tangente sobre el plano. Se anula si y solo si $\mathbf{t}(s)$ es paralelo a $\mathbf{n}_0$. Como $\mathbf{t}(0)\cdot\mathbf{n}_0 = 0$, en $s=0$ vale $\beta'(0) = \mathbf{t}(0)$ y β es regular en un entorno de 0; deja de serlo exactamente en los puntos donde la tangente de α es perpendicular al plano rectificante inicial.

¿Es s el parámetro natural de β? Se tiene $|\beta'|^2 = 1 - \mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{n}_0^2$, luego s sería natural si y solo si $\mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{n}_0 \equiv 0$. Derivando esa identidad, $k(s)\mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{n}_0 \equiv 0$, y en $s=0$ eso da $k(0) = 0$, contra la

hipótesis. Luego **no**: en ningún intervalo que contenga a 0 es s el parámetro natural de β. Lo que ocurre es que β pierde rapidez en cuanto α se levanta del plano. ■

QUÉ DEJA. Merece la pena mirar $\beta''(0) = 0$: la proyección tiene curvatura nula en ese punto, aunque la curva original tenga $k(0) > 0$. Si además $\tau(0) \neq 0$, el término transversal cúbico de la forma canónica local no se anula y aparece una inflexión. Sin esa hipótesis no tiene por qué haber una cúbica ni cambio de lado; para una curva plana, por ejemplo, la proyección sobre el plano rectificante queda en una recta.

Resolución del ejercicio 2

Apartado 1. Con $\lambda = 0$ la recta r_s une $(\cos s, \operatorname{sen} s, 0)$ con $(\cos s, \operatorname{sen} s, a)$: es vertical. Las generatrices son las verticales sobre la circunferencia unidad y M_0 es el **cilindro circular** $x^2 + y^2 = 1$.

Apartado 2. Con directriz α y dirección $\omega(s) = \beta(s+\lambda) - \alpha(s) = \big(\cos(s+\lambda) - \cos s,\ \operatorname{sen}(s+\lambda) - \operatorname{sen} s,\ a\big)$ se tiene $\alpha' = (-\operatorname{sen} s, \cos s, 0)$ y $\omega' = \big(-\operatorname{sen}(s+\lambda) + \operatorname{sen} s,\ \cos(s+\lambda) - \cos s,\ 0\big)$. El producto mixto, desarrollado por la tercera columna (solo ω tiene tercera componente), resulta

$$(\alpha', \omega, \omega') = a\big[\operatorname{sen} s \cos(s+\lambda) - \cos s \operatorname{sen}(s+\lambda)\big] = a \operatorname{sen}\big(s - (s+\lambda)\big) = -a \operatorname{sen} \lambda.$$

No depende de s. Luego M_λ es desarrollable si y solo si $\operatorname{sen}\lambda = 0$, es decir, $\lambda = k\pi$.

Conviene decir qué superficie sale en cada caso, y hay que hilar fino con los múltiplos, porque λ solo cuenta módulo 2π. Cortando por la altura $z = av$ se obtiene

$$x^2 + y^2 = \left|(1-v)e^{is} + v\, e^{i(s+\lambda)}\right|^2 = (1-v)^2 + v^2 + 2v(1-v)\cos\lambda,$$

que no depende de s: todas las secciones horizontales son circunferencias, y el radio mínimo se alcanza en $v = \frac{1}{2}$ y vale $|\cos(\lambda/2)|$. De ahí sale la clasificación completa: si λ es múltiplo **par** de π, la dirección ω es vertical y M_λ es el **cilindro**; si es múltiplo **impar**, el radio mínimo es cero y M_λ es un **cono**; y si λ **no** es múltiplo de π, el radio mínimo es positivo y la superficie es un **hiperboloide de una hoja**, el que se obtiene al retorcer un haz de cuerdas tensas entre dos aros, y no es desarrollable.

Apartado 3. Con $\lambda = \pi$, $\omega(s) = (-2\cos s, -2\operatorname{sen} s, a)$ y

$$x(s,v) = \alpha(s) + v\,\omega(s) = \big((1-2v)\cos s,\ (1-2v)\operatorname{sen} s,\ av\big).$$

El punto medio de $\alpha(s)$ y $\beta(s+\pi)$ es $(0,0,a/2)$ para todo s: todas las generatrices pasan por él. M_π es el **cono** de vértice $(0,0,a/2)$; eliminando parámetros, $x^2 + y^2 = (1 - 2z/a)^2$.

Atlas. $x_s \times x_v = (1-2v)\,(a\cos s,\ a\operatorname{sen} s,\ 2)$, de norma $|1-2v|\sqrt{a^2+4}$: regular si y solo si $v \neq \frac{1}{2}$, el vértice. Con $f = x^2 + y^2 - (1-2z/a)^2$ se tiene $\nabla f = 0$ solo en el vértice, luego $M_\pi \setminus \{(0,0,a/2)\}$ es superficie regular. Y el vértice no admite carta, por la razón topológica del capítulo 2: al quitarlo, cualquier entorno suyo dentro de M_π se rompe en **dos** trozos (las dos napas, $v < \frac{1}{2}$ y $v > \frac{1}{2}$), mientras que a un disco abierto del plano se le puede quitar un punto y sigue siendo conexo. Luego M_π entera **no** es una superficie regular. Un atlas de M_π menos el vértice lo dan las cuatro restricciones de x a $(0,2\pi)\times(-\infty,\frac{1}{2})$, $(0,2\pi)\times(\frac{1}{2},\infty)$, $(-\pi,\pi)\times(-\infty,\frac{1}{2})$ y $(-\pi,\pi)\times(\frac{1}{2},\infty)$.

Clasificación. Es desarrollable, luego $K \equiv 0$. Y $x_{ss} = -(1-2v)(\cos s, \operatorname{sen} s, 0)$ da $L_{11} = \mathbf{N}\cdot x_{ss} = -a|1-2v|/\sqrt{a^2+4} \neq 0$: la S.F.F. no es nula y **todos los puntos son parabólicos**, como en todo cono fuera del vértice. ■

LA IDEA: UNA FAMILIA QUE RECORRE LAS TRES REGLADAS

El ejercicio está construido para que al mover λ se pase por los tres ejemplos de reglada que aparecen en el curso. En $\lambda = 0$, cilindro. En $\lambda = \pi$, cono. En medio, el hiperboloide de una hoja, que es la superficie de las torres de refrigeración y de las cuerdas retorcidas: tensa cuerdas entre dos aros paralelos, gira un aro un ángulo λ y la superficie que forman las cuerdas es M_λ. El producto mixto constante $-a \operatorname{sen}\lambda$ es el "grado de retorcimiento", y se anula justo cuando las cuerdas vuelven a estar en planos que pasan por el eje.

Resolución del ejercicio 3

Apartado 1. Con $f(x,y,z) = z - x^2 + 4y^2$, $\nabla f = (-2x,\, 8y,\, 1)$ no se anula nunca: 0 es valor regular y M es superficie regular. Por ser una superficie de nivel es **orientable**, con $\mathbf{N} = \nabla f / |\nabla f|$ definido en toda ella.

Apartado 2. Con $x = 2(u+v)$ e $y = u - v$ resulta $x^2 - 4y^2 = 4(u+v)^2 - 4(u-v)^2 = 16uv = z$, luego $X(U) \subseteq M$. El cambio $(u,v) \mapsto (x,y)$ es lineal e invertible, con inversa $u = \frac{1}{2}(\frac{x}{2} + y)$, $v = \frac{1}{2}(\frac{x}{2} - y)$, así que todo punto de M, que es el grafo $z = x^2 - 4y^2$ sobre el plano entero, se alcanza: $U = \mathbb{R}^2$ y $X(U) = M$. Regularidad: $X_u \times X_v = (16u + 16v,\, 32v - 32u,\, -4) \neq 0$. Es una carta global.

Apartado 3. Como carta de Monge $h(x,y) = x^2 - 4y^2$: $h_{xx} = 2$, $h_{yy} = -8$, $h_{xy} = 0$, luego

$$K = \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^2} = \frac{-16}{(1 + 4x^2 + 64y^2)^2} < 0$$

en todo punto: **todos los puntos son hiperbólicos**. Un punto umbílico tiene $k_1 = k_2$ y por tanto $K = k_1^2 \geq 0$; aquí $K < 0$, luego **no hay umbílicos**.

Apartado 4. La sección por $y = c$ es $\gamma(x) = (x,\, c,\, x^2 - 4c^2)$, con $\gamma' = (1, 0, 2x)$ y $\gamma'' = (0, 0, 2)$. Sobre ella $\mathbf{N} \propto (-2x,\, 8c,\, 1)$ y la normal intrínseca es $\mathbf{S} \propto \mathbf{N} \times \gamma' \propto (16cx,\, 1 + 4x^2,\, -8c)$. La curvatura geodésica se anula si y solo si $\gamma'' \cdot \mathbf{S} = 0$, es decir $-16c = 0$. Luego la sección es geodésica **si y solo si** $c = 0$: la parábola

$$\gamma(x) = (x,\, 0,\, x^2), \qquad x \in \mathbb{R},$$

intersección de M con su plano de simetría $y = 0$. No es asintótica: con $\gamma' = (1, 0, 2x)$ y $\gamma'' = (0, 0, 2)$, y con el normal unitario $\mathbf{N} = (-2x, 0, 1)/\sqrt{1 + 4x^2}$,

$$II(\gamma', \gamma') = \gamma'' \cdot \mathbf{N} = \frac{2}{\sqrt{1 + 4x^2}} > 0$$

en todo punto. Lo que decide es el signo, no el valor: en carta de Monge $L_{11} = h_{xx}/\sqrt{1 + |\nabla h|^2}$, y el radical es positivo, así que basta con $h_{xx} = 2 \neq 0$. ■

QUÉ DEJA. Dos atajos que valen para cualquier examen. Primero: **la intersección de una superficie con un plano de simetría, cuando la intersección es una curva regular, es una traza geodésica**, porque la simetría deja fija la curva y obliga a que su aceleración esté en el plano, donde vive la normal. Aquí $y \mapsto -y$ es simetría de M y por eso $c = 0$ sale sin cuentas. Segundo: $z = x^2 - 4y^2 = (x - 2y)(x + 2y)$, luego la silla es **doblemente reglada**, y sus líneas asintóticas son las rectas $x \pm 2y = \text{cte}$. Una sección $y = c$ nunca es una de ellas.

D.8 Primera convocatoria de 2022

Ficha. Convocatoria de enero, 19 de enero de 2022, curso 2021/2022. Dos ejercicios teóricos de cuatro apartados, $5+5$. Los dos son regladas construidas sobre una curva: la de las normales intrínsecas y la de las binormales. Casi todo está demostrado en los capítulos 3 y 4; aquí va el hilo completo para corregir.

Enunciado

Primer ejercicio. [1,5 + 1 + 1 + 1,5 *puntos*] Sea $X = X(u,v)$ una superficie simple y $\alpha(s)$ una c.r.p.n. sobre X. Se considera la superficie reglada Y de directriz α y generatrices con direcciones $\mathbf{S}(s)$, la normal intrínseca de α. (a) ¿Bajo qué condiciones es Y desarrollable? (b) Probar que X e Y tienen la misma normal a lo largo de α. (c) Probar que α es geodésica de X si y solo si es geodésica de Y. (d) Si X es la esfera unidad y α una curva sobre ella, ¿es Y desarrollable? Dar una condición sobre α para que Y sea cilíndrica.

Segundo ejercicio. [1 + 1,5 + 1,5 + 1 *puntos*] Sea $\alpha(s)$ una curva alabeada c.r.p.n. y $X = X(s,t)$ la superficie reglada de las binormales de α. (a) Ver si X es superficie parametrizada y estudiar su orientabilidad. (b) Estudiar si α es línea asintótica de X. (c) Calcular la curvatura de Gauss y clasificar los puntos de X. (d) Estudiar si α es línea de curvatura de X.

Resolución del primer ejercicio

Sea $Y(s,v) = \alpha(s) + v\,\mathbf{S}(s)$ y recuérdense las ecuaciones de Darboux, $\dot{\mathbf{t}} = K_g\mathbf{S} + K_n\mathbf{N}$, $\dot{\mathbf{S}} = -K_g\mathbf{t} + \tau_g\mathbf{N}$.

(a) Y es desarrollable si y solo si $(\mathbf{t},\mathbf{S},\dot{\mathbf{S}}) = 0$. Sustituyendo, $(\mathbf{t},\mathbf{S},-K_g\mathbf{t}+\tau_g\mathbf{N}) = \tau_g(\mathbf{t},\mathbf{S},\mathbf{N}) = \tau_g$. Luego Y **es desarrollable si y solo si** $\tau_g \equiv 0$, es decir, si y solo si α es línea de curvatura de X (en un punto umbílico, toda dirección es principal).

(b) En $v = 0$, $Y_s = \mathbf{t}$ e $Y_v = \mathbf{S}$, luego $Y_s \times Y_v = \mathbf{t}\times\mathbf{S} = \mathbf{N}$, unitario. La normal de Y a lo largo de α es la de X, y de paso Y es regular en $v = 0$.

(c) Por (b) las dos superficies son tangentes a lo largo de α, y ser geodésica solo depende de la normal: α es geodésica si y solo si $\ddot{\alpha}$ es paralela a $\mathbf{N}$, que es la misma para las dos. Es el ejercicio de superficies tangentes del capítulo 3.

(d) En la esfera todo punto es umbílico, luego $\tau_g \equiv 0$ para cualquier curva y Y es **siempre desarrollable**. Es cilíndrica cuando $\mathbf{S}$ es constante, y $\dot{\mathbf{S}} = -K_g\mathbf{t}+\tau_g\mathbf{N} = -K_g\mathbf{t}$, que se anula si y solo si $K_g \equiv 0$: α **debe ser un arco de circunferencia máxima**. Entonces $\mathbf{S}$ es el eje del círculo y Y es el cilindro recto sobre él. ■

Resolución del segundo ejercicio

Con $X(s,t) = \alpha(s) + t\,\mathbf{b}(s)$ y Frenet, $X_s = \mathbf{t} - t\tau\,\mathbf{n}$, $X_t = \mathbf{b}$ y

$$X_s \times X_t = -\mathbf{n} - t\tau\,\mathbf{t}, \qquad |X_s \times X_t| = \sqrt{1+t^2\tau^2}.$$

(a) La norma no se anula nunca: X es superficie parametrizada en $I\times\mathbb{R}$, donde I es el intervalo de α. La parametrización admite el normal continuo $\mathbf{N} = -(\mathbf{n}+t\tau\,\mathbf{t})/\sqrt{1+t^2\tau^2}$ en todo su dominio, y en ese sentido es **orientable**. No se ha demostrado que X sea inyectiva: para hablar de un normal bien definido sobre la imagen como conjunto hay que comprobarlo también cuando dos pares de parámetros representan el mismo punto.

(b) Sobre α ($t = 0$) es $\mathbf{N} = -\mathbf{n}$, y $\ddot{\alpha} = k\mathbf{n}$, luego $K_n = \ddot{\alpha}\cdot\mathbf{N} = -k \neq 0$: **no es asintótica**. En cambio sí es geodésica, porque $\ddot{\alpha}$ es paralela a $\mathbf{N}$.

(c) $X_{tt} = 0$ da $L_{22} = 0$; $X_{st} = -\tau\,\mathbf{n}$ da $L_{12} = \tau/\sqrt{1+t^2\tau^2}$; y con $g = 1 + t^2\tau^2$,

$$K = \frac{-L_{12}^2}{g} = \frac{-\tau^2}{(1+t^2\tau^2)^2}.$$

Donde $\tau \neq 0$ los puntos son **hiperbólicos**, porque $K < 0$. Los demás tienen $K = 0$, y ahí hay que mirar la S.F.F. para separar parabólico de plano. Con

$$X_{ss} = t\,k\tau\,\mathbf{t} + (k - t\tau')\,\mathbf{n} - t\tau^2\,\mathbf{b} \qquad \Longrightarrow \qquad L_{11} = \frac{-t^2\tau^2 k - k + t\tau'}{\sqrt{1+t^2\tau^2}},$$

y con $L_{12} = \tau/\sqrt{1+t^2\tau^2}$ y $L_{22} = 0$:

- $\tau \neq 0$**:** $K < 0$, puntos **hiperbólicos**.
- $\tau(s_0) = \tau'(s_0) = 0$**:** queda $L_{11} = -k(s_0) \neq 0$ en toda la generatriz: puntos **parabólicos**. Incluye los ceros aislados con derivada nula. Si $\tau \equiv 0$ en un intervalo, además $\mathbf{b}$ es constante allí y la banda es un cilindro sobre la curva plana.
- $\tau(s_0) = 0$ **aislado, con** $\tau'(s_0) \neq 0$**:** en esa generatriz $L_{12} = L_{22} = 0$ y $L_{11} = t\tau'(s_0) - k(s_0)$, que se anula en **exactamente un punto**,

$$t = \frac{k(s_0)}{\tau'(s_0)}.$$

  Ahí la S.F.F. entera es nula: es un **punto plano**. En el resto de la generatriz los puntos son parabólicos.

Por tanto, un cero de la torsión no basta para decidir: hay un punto plano en su generatriz exactamente cuando $\tau'(s_0) \neq 0$. En ese punto se anula toda la segunda forma fundamental; los demás puntos de la generatriz son parabólicos.

(d) Rodrigues: a lo largo de α, $\dot{\mathbf{N}} = -\dot{\mathbf{n}} = k\mathbf{t} - \tau\mathbf{b}$, que es paralelo a $\mathbf{t}$ si y solo si $\tau = 0$. Luego α **es línea de curvatura de** X **si y solo si es plana**. Coherente con el apartado (a) del primer ejercicio: α es geodésica de X, y para una geodésica $\tau_g = \tau$, que debe anularse. ■

D.9 Tercera convocatoria de 2021

Ficha. Tercera convocatoria, 9 de diciembre de 2021, curso 2020/2021. Dos ejercicios, $5 + 5$. El primero es una construcción con una curva plana que acaba siendo una superficie de revolución; el segundo es la teoría completa de las regladas desarrollables, que en este libro está en el capítulo 4.

Enunciado

Primer ejercicio. [$1+2+2$ *puntos*] Sean Π un plano de $\mathbb{R}^3$ con vector característico unitario $\mathbf{w}$, $\alpha = \alpha(s)$, $s \in I$, una c.r.p.n. contenida en Π, $f = f(t)$ y $h = h(t)$, $t \in J$, dos funciones diferenciables con $f'^2(t) + h'^2(t) = 1$, y $U = I \times J$. Se define $x(s,t) = \alpha(s) + f(t)\,\mathbf{n}(s) + h(t)\,\mathbf{w}$.[1] Se pide: (1) dar una condición necesaria y suficiente para que x sea superficie parametrizada; (2) supuesto que lo es, con $M = x(U)$, probar que si h es constante entonces M es un plano perpendicular a $\mathbf{w}$; (3) si Π es $z = 0$ y α la circunferencia unidad, probar que M es una superficie de revolución de eje paralelo a $\mathbf{w}$.

Segundo ejercicio. [$2+1+2$ *puntos*] Sea $x(s,v)$ la reglada de directriz $\alpha(s)$, c.r.p.n., y generatrices $\omega(s)$ unitario; es desarrollable si $(\alpha', \omega, \omega') = 0$. (1) Probar que x es desarrollable si y solo si $K \equiv 0$. (2) Probar que si es desarrollable el plano tangente es constante a lo largo de cada generatriz. (3) Si $\omega(s)$ está en el plano osculador y forma ángulo constante θ con $\mathbf{t}(s)$, ¿bajo qué condiciones es x desarrollable?

Resolución del primer ejercicio

Como α es plana con $k > 0$, su binormal es constante e igual a $\pm\mathbf{w}$, y por Frenet en el plano $\dot{\mathbf{n}} = -k\,\mathbf{t}$.

(1) $x_s = \mathbf{t} + f\dot{\mathbf{n}} = (1 - f(t)k(s))\,\mathbf{t}$ y $x_t = f'\mathbf{n} + h'\mathbf{w}$. Usando $\mathbf{t} \times \mathbf{w} = \mp\mathbf{n}$,

$$x_s \times x_t = (1 - fk)\big(f'\,\mathbf{b} \mp h'\,\mathbf{n}\big), \qquad |x_s \times x_t| = |1 - f(t)k(s)|\sqrt{f'^2 + h'^2} = |1 - f(t)k(s)|.$$

Condición necesaria y suficiente: $f(t)k(s) \neq 1$ **para todo** (s,t).

(2) Si $h \equiv h_0$, todo punto $x(s,t) = \alpha(s) + f(t)\mathbf{n}(s) + h_0\mathbf{w}$ es un punto de Π, porque $\alpha(s)$ y $\mathbf{n}(s)$ viven en él, trasladado por $h_0\mathbf{w}$. Luego M está en el plano paralelo a Π a distancia $|h_0|$, cuya normal es $\mathbf{w}$, y por ser superficie parametrizada es un abierto de él.

(3) Con $\alpha(s) = (\cos s, \operatorname{sen} s, 0)$, $\mathbf{n} = (-\cos s, -\operatorname{sen} s, 0)$ y $\mathbf{w} = (0,0,1)$,

$$x(s,t) = \big((1 - f(t))\cos s,\ (1 - f(t))\operatorname{sen} s,\ h(t)\big)\ :$$

una porción de la superficie que se obtiene al girar alrededor de OZ el perfil $(1 - f(t),\, h(t))$, que además está parametrizado por el arco gracias a $f'^2 + h'^2 = 1$. El eje OZ es paralelo a $\mathbf{w}$, y la condición de (1) se lee ahora $f(t) \neq 1$: el perfil no toca el eje. ■

[1] En el enunciado original el tercer sumando es $h(t)\mathbf{a}$, con un vector $\mathbf{a}$ que **no se define en ninguna parte**. Es una errata, y adoptamos la lectura $\mathbf{a} = \mathbf{w}$, coherente con la construcción (también $\mathbf{a} = -\mathbf{w}$ permitiría reformularla): con un $\mathbf{a}$ cualquiera ni $|x_s \times x_t|$ sale igual a $|1 - fk|$ ni la superficie del apartado 3 es de revolución. Aquí se escribe $\mathbf{w}$ desde el principio.

Resolución del segundo ejercicio

(1) En toda reglada $x_{vv} = 0$, luego $L_{22} = 0$ y $K = -L_{12}^2/g$. Con $\mathbf{N} \propto (\alpha' + v\omega') \times \omega$ y $x_{sv} = \omega'$,

$$\big((\alpha' + v\omega') \times \omega\big)\cdot\omega' = (\alpha', \omega, \omega') + v(\omega', \omega, \omega') = (\alpha', \omega, \omega'),$$

así que $L_{12} = (\alpha', \omega, \omega')/\sqrt{g}$ y $K = -(\alpha', \omega, \omega')^2/g^2$. Luego $K \equiv 0$ si y solo si $(\alpha', \omega, \omega') \equiv 0$.

(2) Si es desarrollable, α', ω y ω' son coplanarios. Como ω es unitario, $\omega' \perp \omega$, y si $\omega' \neq 0$ el plano común es el generado por ω y ω'. Entonces $\alpha' \times \omega$ y $\omega' \times \omega$ son ambos perpendiculares a ese plano, luego paralelos, y $\mathbf{N} \propto \alpha' \times \omega + v\,\omega' \times \omega$ tiene dirección **independiente de** v: los dos sumandos son múltiplos de un mismo vector unitario $\mathbf{u}$ perpendicular al plano, de modo que $\mathbf{N} \propto (\mu + v\nu)\mathbf{u}$ con μ, ν independientes de v, y en los puntos regulares $\mu + v\nu \neq 0$. El plano tangente no cambia a lo largo de la generatriz; lo único que puede cambiar es el signo de $\mathbf{N}$, al cruzar $\mu + v\nu$ por cero, y ahí la superficie ya no es regular. Si $\omega' = 0$ el segundo sumando desaparece y $\mathbf{N} \propto \alpha' \times \omega$ no depende de v en absoluto.

(3) $\omega = \cos\theta\,\mathbf{t} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{n}$, y por Frenet $\omega' = -k\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{t} + k\cos\theta\,\mathbf{n} + \tau\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{b}$. En la base $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ el producto mixto es el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -k\operatorname{sen}\theta & k\cos\theta & \tau\operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} = \tau\operatorname{sen}^2\theta.$$

Luego x es desarrollable si y solo si $\tau \equiv 0$ **(la curva es plana) o** $\theta = 0$ **módulo** π **(**$\omega = \pm\mathbf{t}$**, la desarrollable tangencial)**. ■

APÉNDICE E

Cómo usar este libro

Este apéndice explica el código visual, los ejercicios y la notación del libro.

El libro desarrolla los pasos que pueden costar al estudiar la materia. Cuando ayuda, el resultado se presenta mediante el problema que resuelve y una imagen geométrica antes del enunciado formal. El dibujo orienta la lectura; las hipótesis y el argumento permiten comprobarla. Los conceptos que más cuestan llevan además un caso resuelto a mano, con números concretos, cerca de la teoría general: el plano en polares antes de los símbolos de Christoffel, el paraboloide $z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$ junto a la segunda forma fundamental, la silla $z = xy$ con sus líneas de curvatura y sus asintóticas. Y algunas secciones terminan diciendo qué se ha ganado: qué pregunta del principio queda contestada.

El código visual.

Hay cinco tipos de bloque y cada uno significa siempre lo mismo. Merece la pena aprendérselos aquí y no volver a pensar en ellos.

- **Filete azul.** Una demostración. Va entera y comentada: si un paso no es evidente, se dice por qué se da. Los pasos largos llevan nombre, y ese nombre dice qué hace el paso; uno de ellos va señalado como el núcleo de la prueba, para saber dónde está el peso y qué es andamiaje.
- **Filete ocre, «La idea».** La imagen mental de lo que viene o de lo que acaba de pasar. Si solo hay tiempo para leer una cosa de una sección, es esta.
- **Filete verde, «Antes de leer» y «Repaso intercalado».** El andamiaje de estudio. Se contestan con el libro cerrado.
- **Filete gris fino, «De dónde viene» y «Conexión».** Historia del concepto y enlaces con otras asignaturas. Se pueden saltar sin perder el hilo, pero pueden ayudar a relacionar y recordar las ideas.
- **Filete azul pizarra, «Diálogo».** Preguntas del lector y sus respuestas. Reúne preguntas y respuestas sobre los pasos del razonamiento.

Intercalados en el texto hay además avisos breves en cursiva verde que empiezan por EXPLÍCATE. Proponen una pausa para intentar explicar el paso sin tenerlo delante.

Para qué están aquí las demostraciones.

En esta asignatura no se exige reproducir las demostraciones de los teoremas del temario. Por eso no llevan marcas de examen. Esto no elimina las justificaciones: los exámenes sí piden demostrar afirmaciones y resolver problemas razonadamente, como puede comprobarse en el apéndice de convocatorias.

Las pruebas están para entender por qué funcionan los resultados y dónde se usa cada hipótesis. No hace falta memorizar su redacción; sí conviene poder recuperar el argumento decisivo y aplicarlo. De ahí la forma que tienen. Delante de cada una hay una imagen que anticipa el enunciado; dentro, los pasos van con nombre y uno de ellos señalado como el núcleo; y detrás, cuando aporta, se dice qué papel jugó cada hipótesis y qué se rompe al quitarla.

La forma de estudiar que se sigue de esto es concreta: leer la caja de idea, cerrar el libro, contarse la demostración en voz alta como si fuera una historia con tres o cuatro movimientos, y solo entonces abrirlo para comprobar los detalles técnicos. Después comprueba que puedes escribir la relación clave, indicar sus hipótesis y usarla en un ejemplo. Contar una historia fluida ayuda, pero por sí solo no comprueba la comprensión.

Los ejercicios.

Van dentro del tema, no en un apéndice, y en el punto donde ya se tiene lo justo para intentarlos. La estructura habitual es el enunciado, pistas escaladas de menor a mayor cuando aportan, y la resolución detallada y, cuando el problema admite más de un camino, las otras vías. La resolución sigue al enunciado: puede taparse durante el intento y consultarse al revisarlo. Muchas resoluciones empiezan por *la idea*: qué se va a hacer y por qué ese camino, en una o dos líneas. Las de los tipos que más se repiten terminan con *qué hemos aprendido* y *dónde se falla*: el error que se comete al hacerlo por primera vez y la condición que no se puede olvidar.

El criterio es de máximos: entra todo problema de las hojas del curso que aporte algo, y no solo una selección. Todo ejercicio que venga de una hoja lleva al final del título una marca gris pequeña, del tipo [H1.13], que dice de qué hoja y de qué problema procede: se lee si se busca y se ignora si no. Los ejercicios sin esa marca proceden de convocatorias, de las lecciones o son variantes explicativas; se señala su procedencia cuando corresponde. Las cuatro hojas están cubiertas enteras — los veinticinco problemas de la primera, los diecisiete de la segunda, los veintidós de la tercera y los catorce de la cuarta —, y a ellas se suman los ejercicios que vienen de convocatorias, en cuyo caso se indica cuál justo debajo del enunciado.

Las conexiones.

Las cajas grises CONEXIÓN relacionan la materia en tres direcciones:

- **Hacia atrás**, con lo ya estudiado en otras asignaturas. No se limitan a nombrarlas: dicen qué teorema concreto es el que está reapareciendo. Buena parte de esta asignatura es el teorema de la función inversa, el de la función implícita y la existencia y unicidad para sistemas lineales, disfrazados de geometría.
- **Hacia dentro**, con los capítulos anteriores. El triedro de Frenet no termina donde se define: es el material con el que se construyen después las superficies regladas de los capítulos siguientes.
- **Hacia delante**, con *Geometría y topología de superficies*. Las dos asignaturas son una sola línea partida en dos cuatrimestres, hasta el punto de que el material de la segunda incluye este

temario completo bajo el título de prerrequisito. De los cuatro ingredientes del teorema de Gauss-Bonnet, que vertebra aquella asignatura, tres se construyen aquí.

El ritmo.

No hay reparto de horas ni calendario de sesiones: el ritmo lo pone el lector, y conviene comprobar cada bloque con algún ejercicio sin mirar. Si ya dominas una herramienta, puedes abreviar sus cálculos y volver a ellos solo si el intento descubre una laguna. En particular, quien conoce integración multivariable puede centrarse en qué aporta la métrica y en las convenciones de orientación. El apéndice *Añadidos y omisiones* dice qué se puede saltar si el tiempo aprieta.

Por qué los repasos mezclan temas.

Los bloques de repaso nunca preguntan solo por el capítulo recién leído. Esto es deliberado: alternar problemas obliga a elegir qué herramienta usar, además de ejecutarla. En un ensayo aleatorizado con 787 estudiantes de secundaria, la práctica intercalada obtuvo un 61 % frente a un 38 % en una prueba un mes después.[1] Es evidencia en matemáticas escolares, no una estimación del efecto en este curso universitario. Aquí se aplica la idea de mezclar problemas después de haber entendido los ejemplos básicos, y contrastar los intentos con sus soluciones.

La notación.

La notación es la del profesor, deliberadamente, hasta en las abreviaturas: una c.p.r. es una curva parametrizada regular y una c.r.p.n. es una curva regular parametrizada naturalmente. Solo hay dos desviaciones, ambas por claridad:

1. Se escribe *parámetro natural* completo en lugar de la abreviatura habitual, que se confunde a simple vista con *plano normal*.
2. La numeración de los apuntes del profesor (*Definición 1.1.1*, *Teorema 3.2*) desaparece. Cuando aquí hace falta citar un resultado anterior, se indica su contenido o la página donde aparece.

La curvatura se denota k en todo el libro. En algunos enunciados el profesor la escribe κ; es exactamente la misma función.

[1] Rohrer y colaboradores (2020), *A randomized controlled trial of interleaved mathematics practice*, doi:10.1037/edu0000367.