Notas de

Geometría y topología de superficies

Nota editorial.

Estos apuntes han sido redactados con inteligencia artificial a partir de múltiples materiales, bajo la dirección y revisión del autor. Pueden contener errores; ante cualquier discrepancia, manda el material oficial de la asignatura.

El temario sigue el proyecto docente de la asignatura *Geometría y Topología de Superficies* del Grado en Matemáticas de la Universidad de Sevilla, y los exámenes resueltos proceden de sus convocatorias. Aun así, el contenido es el de un curso estándar de la materia y puede ser útil a estudiantes de otras universidades. Lo específico de cómo se imparte y se examina en Sevilla está reunido en el apéndice «Qué cae en el examen», que se puede saltar entero.

Versión de septiembre de 2026.

Índice general

1. El Teorema de Gauss-Bonnet **1**

1.1. Conceptos Previos 2

1.1.1. Regiones simples y regiones regulares 3

1.1.2. Orientación positiva de la frontera 5

1.1.3. Triangulaciones y característica de Euler-Poincaré 9

1.1.4. Integración de una función sobre una región 15

Repaso: conceptos previos 17

1.2. Valor Algebraico de la Derivada Covariante. Fórmula de Liouville 18

1.2.1. El valor algebraico de la derivada covariante 19

1.2.2. Una determinación diferenciable del ángulo 21

1.2.3. La diferencia de dos valores algebraicos es la derivada del ángulo 24

1.2.4. La fórmula de Liouville 27

Repaso: la fórmula de Liouville 35

1.3. El Teorema de Gauss-Bonnet 36

1.3.1. Ángulos externos y ángulos internos 36

1.3.2. El teorema del índice de rotación 39

1.3.3. El lema del triángulo 42

1.3.4. El teorema general 47

1.3.5. Regiones regulares que no son simples 51

1.3.6. Versión local del teorema 54

1.3.7. El teorema de Gauss para triángulos geodésicos 55

1.3.8. Superficies compactas 55

1.3.9. Ejercicios 57

1.3.10. Problemas de la relación 61

Repaso: el teorema 75

1.4. Algunas Aplicaciones 76

1.4.1. Ángulo de holonomía 77

1.4.2. Superficies con curvatura no positiva 83

1.4.3. El teorema de Jacobi 85

Repaso: aplicaciones 88
1.5. Una aplicación destacada: Índice de Campos en Puntos Singulares 89
1.5.1. Puntos singulares y su índice 89
1.5.2. El teorema de Poincaré 93
1.5.3. Problemas de la relación 96
Repaso: índice de campos 99

2. Material complementario sobre curvas en una superficie 101
2.1. Direcciones en un punto de una superficie 102
2.2. Familias de curvas 104
2.3. Sistemas de curvas 107
2.4. Trayectorias ortogonales 111
Repaso del capítulo 117

3. Introducción 118
3.1. Espacios topológicos 119
3.2. Compacidad 122
3.3. Conexión 123
3.4. Espacio cociente 125
3.4.1. Topología final y propiedad universal 127
3.4.2. Los cocientes fundamentales 131
3.5. Suspensión de espacios 133
3.6. Espacios proyectivos 136
3.7. Modelos topológicos 138
3.8. Problemas de la relación 141
Repaso del capítulo 155

4. Clasificación de superficies I 156
4.1. Teorema de clasificación de superficies 157
4.2. Suma conexa 163
4.2.1. Tipo I 164
4.2.2. Tipo II 166
4.3. Mezclando tipos 167
4.4. Orientabilidad. Asas y gorros cruzados 170
4.4.1. Orientabilidad en las superficies de tipo I y II 170
4.4.2. Asas y gorros cruzados 173
4.5. Problemas de la relación 174
Repaso del capítulo 182

5. Teoría de homotopía 184
5.1. Homotopía 185
5.1.1. Retractos 188
5.2. Caminos y equivalencia de caminos 190
5.3. Grupo fundamental 194
5.3.1. Cambio de punto base 196
5.4. Problemas de las relaciones 201
Repaso del capítulo 219

6. Cálculo del grupo fundamental **221**
6.1. Grupo fundamental de S^1 . . . 222
6.2. Aplicaciones . . . 230
6.3. Problemas de las relaciones . . . 237
Repaso del capítulo . . . 243

7. Teorema de Seifert-van Kampen **245**
7.1. Presentación de grupos . . . 246
7.2. El teorema . . . 250
7.2.1. Uso del teorema . . . 253
7.2.2. Los cálculos fundamentales . . . 254
7.3. Separación del plano por curvas cerradas . . . 259
7.4. Problemas de las relaciones . . . 264
Repaso del capítulo . . . 271

8. Clasificación de superficies. Conclusión **273**
8.1. El grupo fundamental de una superficie de tipo I . . . 274
8.2. El grupo fundamental de una superficie de tipo II . . . 277
8.3. Fin del teorema de clasificación. Triangulación . . . 280
8.4. Característica de Euler-Poincaré . . . 287
8.5. Problemas de las relaciones . . . 291
Repaso del capítulo . . . 299

A. Qué cae en el examen **300**
A.1. Cómo se examina . . . 300
A.2. Por capítulos . . . 301

B. Exámenes resueltos **306**
B.1. Segunda convocatoria de 2025-26, parte de topología . . . 306
B.2. Primera convocatoria de 2025-26, parte de geometría . . . 312
B.3. Segunda convocatoria de 2024-25, parte de geometría . . . 319
B.4. Primera convocatoria de 2024-25, parte de geometría . . . 325
B.5. Prueba de evaluación de 2024-25, parte de geometría . . . 329
B.6. Segunda convocatoria de 2024-25, parte de topología . . . 334
B.7. Primera convocatoria de 2024-25, parte de topología . . . 342
B.8. Primera convocatoria de 2023-24, parte de topología . . . 346

C. Catálogo de superficies **353**
C.1. Cómo se usa la tabla . . . 353
C.2. Plano . . . 354
C.3. Cilindro circular . . . 354
C.4. Esfera . . . 355
C.5. Cono . . . 355
C.6. Toro de revolución . . . 356
C.7. Hiperboloide de una hoja . . . 356
C.8. Hiperboloide de dos hojas, una hoja . . . 357
C.9. Catenoide . . . 357

C.10. Paraboloide de revolución 358
C.11. Tubo alrededor de una curva plana 358
C.12. Elipsoide 359
C.13. Resumen en una tabla 359

D. Cómo usar este libro **360**

E. Añadidos y omisiones **365**
Qué no está en el material de origen 365
Escalones añadidos en la ampliación 366
Precisiones en los conceptos previos 367
Precisiones en el material de curvas 367
Precisiones en la introducción topológica 368

CAPÍTULO 1

El Teorema de Gauss-Bonnet

ANTES DE LEER

Contesta estas preguntas antes de leer nada. No hace falta saber responderlas todavía: sirven para localizar qué quieres entender. Al encontrar cada respuesta, compárala con tu primer intento.

1. Dibuja un triángulo sobre una esfera cuyos tres lados sean arcos de círculo máximo. ¿Cuánto suman sus ángulos? ¿Puede sumar $3\pi/2$? ¿Y 3π?
2. Una región de una superficie tiene una frontera que es una curva cerrada. Si te piden recorrerla «dejando la región a la izquierda», ¿qué datos necesitas para que esa frase signifique algo?
3. Divide un cuadrado en triángulos de dos maneras muy distintas y cuenta, en cada una, caras más vértices menos aristas. ¿Qué observas?
4. Un campo de vectores unitario a lo largo de una curva sobre una superficie no puede crecer ni encoger. ¿Qué es entonces lo único que puede hacer, y cuántos números hacen falta para describirlo?
5. La curvatura geodésica se definió en *Geometría local* (sección 3.3 de aquel libro) con una fórmula que usa el vector normal a la superficie. Pero es una cantidad intrínseca. ¿Cómo puede ser, y cómo la calcularías sin salir de la superficie?
6. El teorema de Gauss-Bonnet tiene tres sumandos a la izquierda y uno a la derecha. Si deformas la superficie sin romperla, ¿cuáles cambian y cuáles no?
7. Coge un vector tangente a una esfera, pasea con él a lo largo de un triángulo cerrado sin girarlo nunca respecto de la superficie, y vuelve al punto de partida. ¿Apunta adonde apuntaba? Si no, ¿de qué depende el ángulo que ha girado?
8. Dos geodésicas salen del mismo punto de una superficie con curvatura negativa. ¿Pueden volver a encontrarse?
9. ¿Puedes peinar una esfera sin dejar remolinos? ¿Y un flotador?

Las respuestas están, por este orden, en las secciones 1.3.7, 1.1.2, 1.1.3, 1.2.1, 1.2.4, 1.3.4,

1.4.1, 1.4.2 y 1.5.2.

LA IDEA: EL MAPA DE LA LECCIÓN

La lección es una sola y tiene cinco secciones, que van en su orden natural. La primera define las cinco palabras que el enunciado del teorema necesita. La segunda fabrica la única herramienta de cálculo de la demostración, la fórmula de Liouville. La tercera demuestra el teorema, primero para un triángulo y después para cualquier región. La cuarta y la quinta lo explotan: holonomía, superficies de curvatura no positiva, teorema de Jacobi, y el índice de los campos de vectores con el teorema de Poincaré. Todo lo que se usa de *Geometría local* se reenuncia en el sitio donde se usa, con el capítulo y la sección de aquel libro donde está demostrado.

1.1 Conceptos Previos

LA PREGUNTA: EL EXCESO QUE NO ERA UN ERROR DE MEDIDA

Un agrimensor mide con teodolito los tres ángulos de un triángulo enorme trazado sobre el terreno y le sale una suma algo mayor que π. Repite las medidas, cambia de aparato y el sobrante sigue ahí. ¿De qué depende ese sobrante: del tamaño del triángulo, del sitio donde se ha trazado, o de algo que la superficie lleva dentro y que no hay manera de quitar cambiando de instrumento?

LA IDEA: UN TEOREMA QUE MIDE CON INTEGRALES Y CONTESTA CON ENTEROS

En una hoja de papel, los ángulos de un triángulo suman π. Sobre una esfera unidad no. Un triángulo formado por tres arcos de círculo máximo suma más de π, y lo que sobra no es un error de medida: es exactamente el área que encierra. En una esfera de radio r, el exceso es $A(T)/r^2$.
Ese es el resultado que Gauss publicó en 1827 y que vertebra esta mitad de la asignatura. En su forma más simple dice

$$\sum_{i=1}^{3} \widetilde{\varphi}_i - \pi = \iint_T K\, dA,$$

donde $\widetilde{\varphi}_i$ son los ángulos internos del triángulo y K la curvatura de Gauss de la superficie. A la izquierda hay ángulos, que se miden con un transportador. A la derecha hay una integral de curvatura. El teorema dice que son lo mismo.
Y después viene lo verdaderamente extraño. Si en vez de un triángulo se toma una superficie compacta entera, el miembro de la izquierda deja de depender de la forma y se convierte en un número entero multiplicado por 2π: un número que no cambia si se abolla la superficie, se estira o se retuerce. Una integral de curvaturas, que depende de cómo está curvada la superficie en cada punto, acaba dando un dato que solo sabe de topología.

El teorema, en la forma en que suele enunciarse, es este:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} k_g(s)\, ds \;+\; \iint_R K\, dA \;+\; \sum_{e=1}^{r} \varphi_e \;=\; 2\pi\, \chi(R).$$

Y usa cinco palabras que todavía no significan nada: qué es una *región regular* R; qué quiere decir que las C_i estén *orientadas positivamente*; qué son los *ángulos externos* φ_e; qué es la *característica de Euler-Poincaré* $\chi(R)$; y por qué el símbolo $\iint_R f\, dA$ tiene un valor que no depende de la parametrización con que se calcule.

Esta sección define esas cinco cosas y nada más. Es la primera de las cinco de la lección, y hace exactamente lo que promete: preparar el terreno.

DE DÓNDE VIENE: 1827, 1848, 1935

Las tres fechas del teorema están separadas por más de un siglo y cada una añade una capa.
En **1827** Gauss presentó, en el trabajo *General investigations of curved surfaces*, la versión de los triángulos geodésicos: el exceso sobre π de la suma de los ángulos internos es la integral de la curvatura. Cuando $K = 0$ el enunciado se reduce a que los ángulos suman π, es decir, a la igualdad habitual para los ángulos de un triángulo plano; cuando $K = 1$, a que el exceso es el área.
En **1848** Bonnet extendió el resultado a una región acotada por una curva simple que *no* es geodésica. Es el paso que obliga a introducir la curvatura geodésica de la frontera: si el borde no es «recto» visto desde dentro de la superficie, hay que pagar por ello, y el precio es $\oint k_g\, ds$.
En **1935** Hopf publicó una nueva prueba del teorema del índice de rotación, que es el ingrediente que cierra la demostración.

1.1.1 Regiones simples y regiones regulares

LA PREGUNTA: QUÉ ES UN «TROZO» DE SUPERFICIE

Un cartógrafo que quiere dar el área de un país y la longitud de su costa descubre que la segunda depende de la regla con que la mida: la costa de Noruega, medida con una regla de un kilómetro, mide bastante más que con una de diez, y con reglas más finas sigue creciendo. Si ese crecimiento no tuviera límite, el modelo tendría longitud infinita y no podríamos tratarlo como una curva regular a trozos de longitud finita. Para que la curvatura repartida por el interior de un trozo de superficie y el giro acumulado por su borde se puedan comparar, el borde tiene que ser una curva de verdad y el interior tener área. ¿Qué hay que exigirle exactamente a un trozo de superficie para que las dos integrales existan, y hasta dónde se puede aflojar esa exigencia sin quedarse sin teorema?

LA IDEA: QUÉ LE PEDIMOS A UN TROZO DE SUPERFICIE

Lo que sigue son dos definiciones que parecen burocráticas y no lo son. Cada condición está comprando una cosa concreta, y conviene saber cuál: hay problemas que consisten únicamente en darse cuenta de que la región de partida *no* cumple una de ellas.
La idea es que una región tiene que ser un trozo de superficie con dos propiedades: que las integrales de las funciones continuas que usaremos sean finitas, algo que aquí garantiza la compacidad; y que tenga frontera bien identificada, formada por curvas y no por un conjunto raro, para poder recorrerla e integrar a lo largo.

En todo lo que sigue, M denota una s.r., en el sentido de *Geometría local* (sección 2.1, *La definición de superficie*): un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que en un entorno de cada punto se describe por una parametrización local regular.

Definición. Una **región** $R \subseteq M$ es la unión de un conjunto abierto y su frontera. Se dice que R es una **región simple** si es homeomorfa a un disco y su frontera ∂R es la traza de una curva regular a trozos, cerrada y simple, es decir, sin autointersecciones. Un **triángulo** es una región simple con exactamente tres vértices.

Del enunciado se sigue que una región simple es **compacta y simplemente conexa**, porque lo es el disco cerrado y esas dos propiedades se conservan por homeomorfismos. Las dos harán falta.

Definición. Una región $R \subseteq M$ conexa y acotada se dice **regular** si es compacta y su frontera es unión de un número finito de curvas cerradas, simples y regulares a trozos que no se cortan entre sí.

Tres observaciones que no son adorno.

Primera. Se conviene que si M es compacta y $\partial M = \emptyset$, entonces M es ella misma una región regular. Esto no es una trivialidad administrativa: es la puerta por la que entra la versión global del teorema. Una región regular sin frontera hace desaparecer el primer sumando y el tercero, y deja el teorema reducido a $\iint_M K\,dA = 2\pi\chi(M)$.

Segunda. Toda región simple es regular. El recíproco es falso, y el contraejemplo que hay que tener en la cabeza es la *corona*: un anillo tiene dos curvas frontera, no una, y no es homeomorfo a un disco.

Tercera. En una región plana acotada podemos distinguir una curva frontera exterior y otras que rodean los agujeros. En una superficie general no hay por qué tener esa distinción: en una banda de cilindro comprendida entre dos paralelos, ninguno de los dos paralelos encierra por sí solo una región compacta del cilindro. Para orientar la frontera basta mirar de qué lado queda R en cada punto.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: QUEDARSE SOLO CON LAS REGIONES SIMPLES

La alternativa. Enunciar el teorema únicamente para regiones homeomorfas a un disco, sin admitir agujeros. La frontera sería entonces siempre una sola curva cerrada.
Su ventaja. Es considerable. No haría falta orientar varias curvas por separado y, sobre todo, la característica valdría 1 siempre: el segundo miembro del teorema sería la constante 2π y no habría nada que contar.
Qué la hunde. Dos cosas, y las dos son centrales. La primera es que la versión que justifica la asignatura — la de las superficies compactas, donde la curvatura total resulta ser un invariante topológico — trata precisamente de una región *sin* frontera, que no es homeomorfa a ningún disco: con la restricción no se podría ni enunciar. La segunda es que la corona, que es la región con agujero más corriente de todas, tiene respuesta 0 y no 2π. Admitir agujeros cuesta una definición más y un recuento; no admitirlos cuesta el teorema.

CONEXIÓN: QUÉ ASIGNATURA ESTÁ HABLANDO AQUÍ

Nada de lo anterior es geometría diferencial. «Homeomorfa a un disco», «compacta», «conexa», «simplemente conexa», «sin autointersecciones» son todas nociones de *Topología*. La compacidad permite integrar funciones continuas sobre la región sin problemas de convergencia. Que la frontera tenga un número finito de curvas es otra condición de la definición: no se deduce de la

compacidad por sí sola.
Esto es típico del teorema entero, y conviene irse acostumbrando: Gauss-Bonnet es un teorema en el que las hipótesis son topológicas, las cuentas son de cálculo diferencial, y la conclusión vuelve a ser topológica.

Observación. Hay una advertencia de vocabulario que conviene hacer aquí, porque la palabra «región» ya se usó en *Geometría local* (sección 3.2, *Medidas en una superficie*, apartado del área) con un sentido parecido pero no idéntico. Allí una región era la unión de un dominio y su frontera, donde un dominio es un abierto conexo cuya frontera es imagen de una circunferencia del plano por un homeomorfismo diferenciable a trozos. Esa definición servía para hablar de áreas y es, esencialmente, la de región simple de aquí. La novedad de esta asignatura es la *región regular*, que admite varios agujeros.

1.1.2 Orientación positiva de la frontera

LA PREGUNTA: «A LA IZQUIERDA» SIN MIRAR DESDE FUERA

Un barco que bordea una isla puede hacerlo con la costa a babor o a estribor, y las instrucciones náuticas fijan cuál. En una hoja de papel bastaría decir «en sentido antihorario», pero eso presupone alguien que mira la hoja desde arriba, y sobre la superficie de la Tierra no hay arriba: el capitán solo dispone de lo que ve desde cubierta. La integral a lo largo del borde cambia de signo si el borde se recorre al revés, de modo que antes de escribir el teorema hay que fijar un sentido de recorrido. ¿Cómo se dice «con la región a la izquierda» usando únicamente cosas medibles sobre la propia superficie, en el punto donde uno está?

LA IDEA: LA REGIÓN A LA IZQUIERDA

Aquí está la primera pieza que decide signos, y los signos son la mitad de los errores de esta asignatura.
La imagen es esta: uno camina por la frontera de la región, de pie sobre la superficie, con la cabeza apuntando en la dirección del vector normal $\mathbf{N}$. La frontera está *orientada positivamente* si al caminar así la región queda a la izquierda.
Todo el contenido de la definición formal es traducir «a la izquierda» a un lenguaje que no dependa de dónde esté uno mirando. Y la herramienta para hacerlo ya existe: la **normal intrínseca** $\mathbf{S} = \mathbf{N} \times \mathbf{t}$ de *Geometría local* (sección 3.3, *Curvatura geodésica*, donde se introduce junto con K_g), que es el vector unitario tangente a la superficie, perpendicular a la curva, y que apunta hacia el lado izquierdo del caminante. Orientar positivamente la frontera es elegir el sentido de recorrido para que $\mathbf{S}$ apunte hacia dentro de la región.

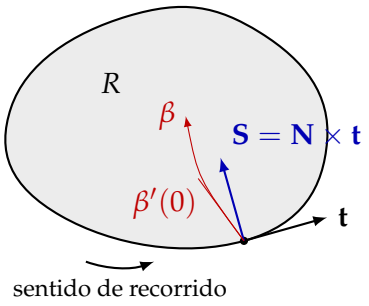
Definición. Sea M orientada por un campo normal $\mathbf{N}$ y sea $\alpha = \alpha(t)$ una curva regular a trozos, cerrada y simple en M, frontera de una región R. Se dice que α está **orientada positivamente** si para cualquier punto suyo $\alpha(t)$ que no sea un vértice, y para cada segmento de curva regular $\beta : [0, \varphi] \to R$ que pase por $\alpha(t)$ y no sea tangente a α ahí (es decir, con

$\beta(0) = \alpha(t)$ y $\beta'(0) \notin \operatorname{span}\{\alpha'(t)\}$), se tiene

$$\beta'(0) \cdot \mathbf{S}(t) > 0,$$

es decir, el ángulo entre $\beta'(0)$ y $\mathbf{S}(t)$ está estrictamente entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

La condición dice, literalmente: *cualquier camino que entre transversalmente en la región desde la frontera lo hace formando ángulo agudo con* **S**. Y eso es la manera precisa de decir que **S** apunta hacia dentro.



Orientación positiva: con **N** hacia el lector, $\mathbf{S} = \mathbf{N} \times \mathbf{t}$ queda a la izquierda de la marcha y apunta hacia dentro de R; cualquier curva β que entra transversalmente en R forma ángulo agudo con **S**.

Definición. La frontera de una región regular está **orientada positivamente** si lo está cada una de las curvas cerradas, simples y regulares a trozos que la forman.

EXPLÍCATE. *En un anillo plano orientado por la normal $(0,0,1)$, las dos circunferencias frontera están orientadas positivamente. Dilas en voz alta: ¿en qué sentido gira cada una vista desde arriba? Si has dicho «las dos igual», vuelve a mirar el dibujo mental: la región tiene que quedar a la izquierda en ambas, y la región está en lados distintos de cada circunferencia.*

De cada curva frontera hay exactamente dos orientaciones posibles y solo una es la positiva. Por tanto **orientar positivamente la frontera no es hacer nada: es elegir**, y esa elección depende del campo normal **N** con que se haya orientado M. Cambiar **N** por $-\mathbf{N}$ invierte todas las orientaciones positivas.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: ORIENTAR «EN SENTIDO ANTIHORARIO VISTO DESDE LA PUNTA DE **N**»

La alternativa. Definir la orientación positiva de una curva frontera diciendo que se recorre en sentido antihorario para un observador situado en el extremo del vector normal **N**.
Su ventaja. Es el criterio del plano de toda la vida, se entiende sin explicación y no obliga a introducir la normal intrínseca **S**.
Qué la hunde. Que «antihorario» exige ver la curva entera de una vez, desde fuera y de golpe, y sobre una superficie general eso no está disponible: la definición tiene que ser local, formulada en cada punto de la curva y sin observador. Y aunque uno se limitara al plano, ese criterio da la respuesta equivocada en cuanto hay agujeros: en una corona orientada por $\mathbf{N} = (0,0,1)$, la circunferencia interior está orientada positivamente cuando se recorre en sentido *horario* visto desde arriba, porque la región queda fuera de ella y no dentro. La condición con **S** acierta en los dos casos sin cambiar una letra, porque lo único que mira es hacia dónde se entra en la región.

Observación (Una nota práctica)**.** En los problemas la situación no se presenta como en la definición. Cada curva frontera viene dada como una sucesión de segmentos regulares que se cortan en vértices, cada uno con su propio parámetro. Se podría demostrar que, bajo

condiciones poco restrictivas, esa curva admite una parametrización global con un solo parámetro, pero el esfuerzo técnico no compensa. Lo que se hace es conservar el parámetro de cada trozo y limitarse a decidir, para cada uno, si el sentido que induce la orientación positiva coincide con el suyo o es el opuesto.

Es lo que se hace siempre en la práctica, y explica por qué las integrales $\int_{C_i} K_g\, ds$ del enunciado del teorema significan «la suma de las integrales correspondientes a los arcos regulares de C_i» y no una integral única.

CONEXIÓN: POR QUÉ EL SIGNO DE K_g DEPENDE DE LA ORIENTACIÓN Y EL DE K NO

Esta es la asimetría central del teorema y hay que tenerla clara antes de seguir.
En *Geometría local* (sección 3.3, *Curvatura geodésica*, con los cambios de parámetro de la sección 1.2) se probó que si $\beta = \alpha \circ f$ es una reparametrización regular, las curvaturas geodésicas en puntos correspondientes *coinciden si f conserva la orientación y son opuestas si la invierte*. La razón está a la vista en la fórmula

$$K_g = \frac{(\mathbf{N}, \alpha', \alpha'')}{|\alpha'|^3},$$

que es un determinante: cambiar el sentido de recorrido cambia el signo de α' y, con él, el del determinante. Y cambiar $\mathbf{N}$ por $-\mathbf{N}$ hace lo mismo.
La curvatura de Gauss, en cambio, es el producto de las dos curvaturas principales, y si $\mathbf{N}$ cambia de signo las dos cambian a la vez: K no se entera. Por eso en el teorema de Gauss-Bonnet hay que orientar cuidadosamente la frontera y no hay que orientar nada para calcular $\iint_R K\, dA$.

Ejercicio 1.1. *Los dos casquetes de la esfera, o dónde está la trampa*

En la esfera unidad, sean R_1 y R_2 las dos regiones que un paralelo distinto del ecuador determina en ella, es decir, los dos casquetes esféricos. Aplicando el teorema de Gauss-Bonnet a ambas regiones se obtiene

$$A(R_1) + \int_{\partial R_1} K_g(s)\, ds = 2\pi, \qquad A(R_2) + \int_{\partial R_2} K_g(s)\, ds = 2\pi.$$

Como $\partial R_1 = \partial R_2$, se sigue que

$$\int_{\partial R_1} K_g(s)\, ds = \int_{\partial R_2} K_g(s)\, ds,$$

y por tanto $A(R_1) = A(R_2)$. De aquí se deduce que cualquier paralelo de la esfera unidad la divide en dos regiones de igual área, lo cual es falso, como puede comprobarse por simple observación.
Decir, justificadamente, cuál es el error cometido en el razonamiento anterior, corregirlo y obtener la conclusión correcta.

Observación. Este ejercicio usa el enunciado del teorema, que todavía no se ha demostrado, pero no usa nada de su demostración: el teorema entra como dato del problema, igual que en el enunciado original. Lo que aquí se pone en juego es exclusivamente la sección 1.1.2.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Las dos igualdades de partida son correctas. La conclusión es falsa. Luego el fallo está en el paso intermedio, que es el único que queda.*

2. «$\partial R_1 = \partial R_2$» *es cierto* como conjuntos de puntos. *Pero en el teorema la frontera no aparece como conjunto de puntos, sino como curva recorrida en un sentido concreto. ¿Cuál?*
3. *Dibuja la normal intrínseca* $\mathbf{S} = \mathbf{N} \times \mathbf{t}$ *en un punto del paralelo. Para* R_1 *tiene que apuntar hacia el norte y para* R_2 *hacia el sur, con la misma* $\mathbf{N}$*. ¿Qué le pasa entonces a* $\mathbf{t}$*?*
4. *Recuerda qué le hace a* K_g *invertir el sentido de recorrido.*

Resolución. La idea. Si todas las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa, algún paso es falso, y aquí solo hay uno sospechoso: el que identifica las dos fronteras. Basta mirar qué es exactamente «la frontera» para el teorema de Gauss-Bonnet, y el paso cae solo.

Localización del error. El paso ilegítimo es el tercero. Es verdad que ∂R_1 y ∂R_2 son el mismo conjunto de puntos, el paralelo. Pero el teorema de Gauss-Bonnet no integra sobre un conjunto de puntos: integra a lo largo de una curva **orientada positivamente respecto de la región a la que se aplica**. Y las dos regiones están en lados opuestos del paralelo.

Fijémonos en la esfera orientada por un campo normal $\mathbf{N}$, el mismo para las dos aplicaciones del teorema. En un punto del paralelo, la normal intrínseca $\mathbf{S} = \mathbf{N} \times \mathbf{t}$ tiene que apuntar hacia el interior de la región. Para el casquete norte apunta hacia el norte; para el casquete sur, hacia el sur. Como $\mathbf{N}$ es la misma y $\mathbf{S}$ es opuesta, el vector tangente $\mathbf{t}$ también es opuesto: **las dos orientaciones positivas recorren el paralelo en sentidos contrarios**.

Y ahora se aplica lo que ya se sabía de *Geometría local* (sección 3.3): invertir el sentido de recorrido cambia el signo de la curvatura geodésica. Por tanto, lejos de ser iguales, las dos integrales son **opuestas**:

$$\int_{\partial R_1} K_g \, ds = -\int_{\partial R_2} K_g \, ds.$$

Conclusión correcta. Llamando c al valor de la primera integral, el sistema que de verdad se obtiene es

$$A(R_1) + c = 2\pi, \qquad A(R_2) - c = 2\pi.$$

Sumando las dos ecuaciones desaparece c y queda

$$\boxed{A(R_1) + A(R_2) = 4\pi}$$

que es correcto y es, además, todo lo que se podía concluir: la suma de las dos áreas es el área total de la esfera unidad. Restando se obtiene el valor de la integral de la curvatura geodésica,

$$c = \frac{A(R_2) - A(R_1)}{2},$$

que no se anula salvo si el paralelo es el ecuador. Y ahí está la clave de por qué el argumento falso parecía funcionar: *en el ecuador sí* da igual el sentido, porque el ecuador es una geodésica y su curvatura geodésica es idénticamente nula. El enunciado excluye expresamente el ecuador, y no por casualidad. ■

Otra vía (comprobándolo con números). Merece la pena verlo con la cuenta hecha, porque fija los signos de una vez.

Se toma la parametrización habitual de la esfera unidad por latitud y longitud,

$$x(u,v) = (\cos u \cos v,\ \cos u \operatorname{sen} v,\ \operatorname{sen} u), \qquad u \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}),\ v \in (0, 2\pi),$$

y el paralelo $u = u_0$ con $u_0 > 0$. Un cálculo directo da $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = -\cos u \, x(u,v)$, de modo que el campo normal que esta parametrización induce es el **interior**, $\mathbf{N} = -x$. Con él, la

curvatura geodésica del paralelo recorrido en el sentido de v creciente resulta ser

$$K_g = \frac{(\mathbf{N}, \alpha', \alpha'')}{|\alpha'|^3} = -\tan u_0,$$

y la normal intrínseca sale $\mathbf{S} = (\operatorname{sen} u_0 \cos v,\ \operatorname{sen} u_0 \operatorname{sen} v,\ -\cos u_0)$, cuya tercera componente es negativa: apunta hacia el sur. Es decir, con este sentido de recorrido el paralelo está orientado positivamente como frontera del casquete **sur**.

La longitud del paralelo es $2\pi \cos u_0$, luego

$$\int_{\partial R_2} K_g \, ds = (-\tan u_0)(2\pi \cos u_0) = -2\pi \operatorname{sen} u_0.$$

Y el área del casquete sur es

$$A(R_2) = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{u_0} \cos u \, du \, dv = 2\pi(1 + \operatorname{sen} u_0),$$

porque $\sqrt{g} = \cos u$ en esta parametrización. Sumando:

$$A(R_2) + \int_{\partial R_2} K_g \, ds = 2\pi(1 + \operatorname{sen} u_0) - 2\pi \operatorname{sen} u_0 = 2\pi. \quad \checkmark$$

Para el casquete norte todo se repite con el recorrido invertido: la integral vale $+2\pi \operatorname{sen} u_0$ y el área $2\pi(1 - \operatorname{sen} u_0)$, y la suma vuelve a ser 2π. Las dos integrales son opuestas y las dos áreas suman 4π, como tenía que ser.

QUÉ DEJA. Dos cosas, y la segunda es la importante. La primera: en Gauss-Bonnet, «la frontera» nunca es un conjunto de puntos, es una curva con un sentido, y ese sentido lo fija la región. Dos regiones distintas con la misma frontera la recorren al revés. La segunda, más general: cuando un razonamiento correcto en cada paso llega a una conclusión falsa, el fallo casi siempre está en un paso donde se ha identificado silenciosamente dos objetos que solo coinciden como conjuntos. Es un patrón, no una casualidad, y en esta asignatura se repite.

1.1.3 Triangulaciones y característica de Euler-Poincaré

LA PREGUNTA: POR QUÉ CONTAR DA SIEMPRE LO MISMO

En un poliedro convexo, el número de caras más el de vértices menos el de aristas vale siempre dos, lo mismo para un cubo que para un icosaedro, que no se parecen en nada. Al partir en triángulos un trozo cualquiera de superficie se puede hacer la misma cuenta. ¿Sale también un número que no dependa del despiece elegido y, si sale, qué propiedad del trozo está midiendo ese número?

LA IDEA: CONTAR EN VEZ DE MEDIR

Hasta aquí todo eran objetos continuos: curvas, campos, integrales. Ahora entra el único ingrediente del teorema que se obtiene *contando*, y esa es exactamente la razón de que el resultado final sea un entero.
La idea es partir la región en triángulos y contar cuántas caras, cuántas aristas y

cuántos vértices han salido. El número

$$\chi = \text{caras} + \text{vértices} - \text{aristas}$$

no depende de cómo se haya hecho la partición. Si uno subdivide un triángulo en tres, gana dos caras, gana un vértice y gana tres aristas: la cuenta no se mueve. Esa insensibilidad es todo el asunto.

Definición. Una **triangulación** de una región regular R es una familia finita $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_n\}$ de triángulos tal que
1. $\bigcup_{i=1}^{n} T_i = R$;
2. si $i \neq j$ y $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, entonces $T_i \cap T_j$ es un lado común o un vértice común de T_i y T_j.

La segunda condición es la que impide las particiones patológicas: dos triángulos no pueden solaparse a medias ni compartir «medio lado». Sin ella la cuenta no daría lo mismo siempre.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: MEDIR LA COMPLEJIDAD CONTANDO AGUJEROS

La alternativa. En lugar de $\chi = C + V - A$, tomar como medida de la complejidad de una región el número de agujeros que se le ven.
Su ventaja. Se cuenta con el dedo, no exige triangular nada y para una corona o un pantalón da inmediatamente 1 y 2.
Qué la hunde. La palabra «agujero» mezcla dos cosas distintas: un borde interior, como el de la corona, y un asa, como la del toro. Ambas pueden describirse sin mirar desde fuera, pero no contribuyen igual a la característica. El recuento $C + V - A$ evita esa ambigüedad. Además, para piezas de una misma triangulación, las características se combinan según

$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B),$$

porque las caras, aristas y vértices comunes se han contado dos veces y hay que restarlos una. Esa aditividad es lo que se usa al trocear y volver a sumar. El recuento $C + V - A$ se hace sin salir de la superficie y con cualquier despiece, que es la propiedad que convierte el segundo miembro del teorema en algo calculable.

Proposición. Sea $\mathcal{T}$ una triangulación de una región regular. Sean C el número de caras, A_i el número de lados que *no* están en la frontera de la región (lados internos) y A_e el número de lados que sí lo están (lados externos). Entonces

$$3C = 2A_i + A_e.$$

LA IDEA: DE DÓNDE SALE ESA IGUALDAD

No hay que demostrarla para creerla: basta contar la misma cosa de dos maneras.
Cada triángulo tiene tres lados, así que si uno recorre los triángulos y va apuntando sus lados, apunta $3C$ lados en total. Pero apunta cada lado interno *dos veces*, porque un lado interno pertenece a dos triángulos, y cada lado externo *una sola vez*, porque un lado de la frontera pertenece solo a uno. Luego $3C = 2A_i + A_e$.
Esto ya es la idea completa de la prueba. La justificación local y la inducción siguiente detallan por qué el recuento funciona, cualquiera que sea el orden en que se añadan los triángulos.

Paso 1: cuántas caras llegan a una arista *(el núcleo de la prueba)*. Miremos un punto interior de una arista. En una carta, la arista separa un pequeño disco en dos lados. Si la arista es interna, la región ocupa ambos lados y hay exactamente un triángulo en cada uno; si es frontera, ocupa solo uno y hay un solo triángulo. No puede haber dos en un mismo lado sin que se solapen sus interiores.

Paso 2: contar también en una subfamilia de triángulos. Para hacer la inducción sin exigir que cada unión intermedia sea una región regular, en una subfamilia llamaremos A_i a las aristas incidentes con dos caras de esa subfamilia y A_e a las incidentes con una. En la triangulación completa son precisamente los lados internos y externos, por el paso anterior.
Con una cara, $3 \cdot 1 = 2 \cdot 0 + 3$. Supongamos que la igualdad vale para una subfamilia de $\widetilde{C}$ caras y añadamos otra cara T, de modo que $C = \widetilde{C} + 1$. Cada lado compartido pasa de tener una cara a tener dos; cada lado nuevo tiene una.

Paso 3: comprobar el balance al añadir la cara. Si T no comparte lados, aunque comparta algún vértice, se añaden tres lados con una sola cara: $A_i = \widetilde{A}_i$ y $A_e = \widetilde{A}_e + 3$. Por tanto $2A_i + A_e = 3\widetilde{C} + 3 = 3C$. Si comparte lados, quedan los tres casos siguientes.

Caso A: comparte un lado. Ese lado tenía una cara en la subfamilia y pasa a ser interno; los otros dos lados de T son nuevos y son externos. Luego

$$A_i = \widetilde{A}_i + 1, \qquad A_e = \widetilde{A}_e - 1 + 2 = \widetilde{A}_e + 1,$$

y por tanto

$$2A_i + A_e = 2\widetilde{A}_i + 2 + \widetilde{A}_e + 1 = (2\widetilde{A}_i + \widetilde{A}_e) + 3 = 3\widetilde{C} + 3 = 3(\widetilde{C} + 1) = 3C.$$

Caso B: comparte dos lados. Los dos eran externos y pasan a internos; el tercero es nuevo y externo:

$$A_i = \widetilde{A}_i + 2, \qquad A_e = \widetilde{A}_e - 2 + 1 = \widetilde{A}_e - 1,$$

$$2A_i + A_e = 2\widetilde{A}_i + 4 + \widetilde{A}_e - 1 = (2\widetilde{A}_i + \widetilde{A}_e) + 3 = 3C.$$

Caso C: comparte tres lados. Los tres lados pasan de una cara a dos, y no hay lados nuevos:

$$A_i = \widetilde{A}_i + 3, \qquad A_e = \widetilde{A}_e - 3,$$

$$2A_i + A_e = 2\widetilde{A}_i + 6 + \widetilde{A}_e - 3 = (2\widetilde{A}_i + \widetilde{A}_e) + 3 = 3C.$$

En los cuatro casos el balance es el mismo, y no es casualidad: añadir un triángulo añade tres al miembro izquierdo, y el miembro derecho sube tres porque los lados compartidos «pierden» uno cada uno al pasar de externos a internos y ganan dos al contarse doble.

Lo que hay que llevarse. Se cuentan las parejas «triángulo y uno de sus lados» de dos maneras. Por triángulos salen 3C, tres por cara. Por lados, cada lado interno aparece dos veces y cada lado de la frontera una sola. El único hecho geométrico que se usa es el del paso 1: a un lado interno llegan exactamente dos caras, y a uno de la frontera, una. La inducción solo

comprueba que el recuento no depende del orden en que se van añadiendo los triángulos.

Observación (Sobre la fuente)**.** En el material de partida, la cadena de igualdades del primer caso tiene una errata de imprenta: aparece $2\widetilde{A}_i + 2\widetilde{A}_e$ donde debe ir $2\widetilde{A}_i + \widetilde{A}_e + 3$. Aquí se ha escrito la cuenta entera y se ha formulado la inducción para subfamilias: quitar una cara no garantiza que lo restante sea una región regular.

Definición. Dada una triangulación $\mathcal{T}$ de una región regular, si A denota el número total de sus lados y V el de sus vértices, el número entero

$$\chi(\mathcal{T}) = C + V - A$$

se llama **característica de Euler-Poincaré** de la triangulación.

Observación (Un aviso de notación: dos letras para el mismo número)**.** La parte de geometría escribe este número $X(\mathcal{T})$, con equis latina mayúscula; la parte de topología lo escribe $\chi(K) = V - E + T$, con chi griega, vértices menos aristas más triángulos. Es el mismo número y la misma suma con los sumandos en otro orden. Este libro escribe χ en las dos mitades, por las razones explicadas en «Cómo usar este libro», pero en los enunciados de la parte de geometría aparecerá con equis latina.

Los ejemplos que hay que tener memorizados, porque son los que salen:

Ejemplo. 1. Una región rectangular admite una triangulación de característica 1.
2. Cualquier disco cerrado admite una triangulación de característica 1.
3. Una corona circular admite una triangulación de característica 0.
4. Cualquier esfera admite una triangulación de característica 2.

Los cuatro se comprueban a mano y merece la pena hacerlo una vez; es el ejercicio que viene a continuación.

Los tres resultados siguientes son los que convierten la característica en algo utilizable. Aquí se enuncian sin demostración, remitiendo a los libros de Ahlfors y Sario, *Riemannian Surfaces*, de Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*, y de Munkres, *Topology: A first course*. Aquí se hace lo mismo: son teoremas de topología, no de geometría diferencial, y la segunda mitad de la asignatura vuelve sobre ellos.

Proposición. Toda región regular de M admite una triangulación.

Proposición. Dada una región regular R, la característica de Euler-Poincaré de cualquier triangulación de R **no depende de la triangulación**. Por eso se denota $\chi(R)$.

Proposición. La característica de Euler-Poincaré es un invariante topológico: dos regiones regulares homeomorfas tienen la misma característica. Además, si dos superficies regulares M y $\widetilde{M}$ son compactas y conexas y $\chi(M) = \chi(\widetilde{M})$, entonces M y $\widetilde{M}$ son homeomorfas.

Proposición. La característica de Euler-Poincaré de una superficie regular, orientable, compacta y conexa es par y menor o igual que dos.

Observación (La primera colisión entre las dos mitades de la asignatura)**.** El penúltimo enunciado hay que leerlo con cuidado, porque **tal como suena no es cierto para superficies cualesquiera**, y en la otra mitad de la asignatura aparecerá el contraejemplo.

La parte de topología probará que el toro y la botella de Klein tienen los dos característica 0 y que no son homeomorfos. Su conclusión es que las superficies compactas quedan clasificadas por **dos** datos, la orientabilidad y la característica, no por uno solo.

Los dos enunciados conviven porque la palabra «superficie» no significa lo mismo. En la parte de geometría, superficie quiere decir s.r. de $\mathbb{R}^3$, y los propios apuntes de topología advierten de que la botella de Klein y el plano proyectivo *no caben en* $\mathbb{R}^3$ sin puntos dobles: no aparecen nunca aquí. Dentro de ese universo más pequeño, la característica basta.

La regla práctica es sencilla y conviene apuntarla: *si se cita este enunciado fuera del contexto de las superficies de* $\mathbb{R}^3$*, hay que añadirle la hipótesis de orientabilidad*. La proposición siguiente, que sí la lleva escrita, es la que hay que usar cuando haya dudas.

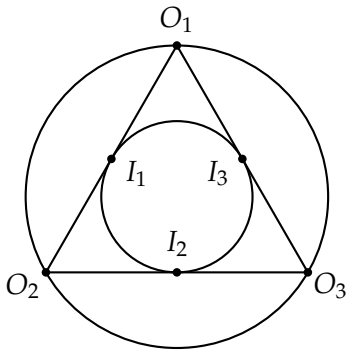
Proposición. Si M está orientada por un atlas de orientación, entonces toda región regular de M admite una triangulación en la que cada triángulo está contenido en alguna superficie simple de dicho atlas. Además, si la frontera de cada triángulo está orientada positivamente, dos triángulos adyacentes inducen orientaciones opuestas en el lado común.

LA IDEA: POR QUÉ ESTA ÚLTIMA PROPOSICIÓN ES LA CLAVE TÉCNICA

Parece un detalle y es el motor de la demostración del teorema. Dice dos cosas.
La primera es que siempre se puede triangular *en pequeño*, de modo que cada triángulo quepa entero dentro de una sola parametrización local. Eso permite hacer cuentas con coordenadas en cada triángulo por separado, que es lo único que sabemos hacer.
La segunda es la que hace desaparecer casi todo al final. Si dos triángulos vecinos inducen orientaciones opuestas en su lado común, al sumar las integrales de curvatura geodésica sobre todos los triángulos, cada lado interno se recorre dos veces en sentidos contrarios y sus dos contribuciones se cancelan. Solo sobreviven los lados externos, que son la frontera de la región. Esa cancelación es la razón de que un teorema local, válido en un triángulo, se convierta en un teorema global.

Ejercicio 1.2. *Cuatro triangulaciones y una comprobación*

1. Triangula un rectángulo y calcula χ. Hazlo con dos triangulaciones distintas y comprueba que sale lo mismo.
2. Triangula una corona circular y calcula χ.
3. Triangula la esfera y calcula χ.
4. En la triangulación de la corona, comprueba la igualdad $3C = 2A_i + A_e$.
5. Explica, sin calcular nada, por qué el disco y el rectángulo tienen que tener la misma característica.



Triangulación de la corona con tres vértices en cada circunferencia y seis aristas en zigzag: $V = 6$, $A = 12$ (seis en las dos circunferencias, seis interiores), $C = 6$, luego $\chi = C + V - A = 0$; y $3C = 18 = 2 \cdot 6 + 6 = 2A_i + A_e$. Los

lados sobre las circunferencias son arcos, no segmentos rectos.

Resolución. 1. El rectángulo. Se traza una diagonal. Quedan $C = 2$ caras, $V = 4$ vértices y $A = 5$ aristas, que son los cuatro lados más la diagonal. Luego

$$\chi = C + V - A = 2 + 4 - 5 = 1.$$

Segunda triangulación: se añade el centro del rectángulo y se une con los cuatro vértices. Ahora $C = 4$, $V = 5$ y $A = 8$, que son los cuatro lados más los cuatro radios. Luego $\chi = 4 + 5 - 8 = 1$. Sale lo mismo, como tenía que ser.

EXPLÍCATE. *Antes de seguir, di en voz alta qué le pasa a la cuenta cuando subdivides un triángulo cualquiera añadiendo su baricentro y uniéndolo con los tres vértices. Cuenta cuánto sube cada uno de los tres sumandos.*

2. La corona circular. Se ponen n vértices en la circunferencia exterior y n en la interior, y se unen alternando para formar una banda de triángulos. Con $n = 3$: los vértices exteriores o_1, o_2, o_3 y los interiores i_1, i_2, i_3, y los seis triángulos

$$(o_1o_2i_1),\ (o_2i_1i_2),\ (o_2o_3i_2),\ (o_3i_2i_3),\ (o_3o_1i_3),\ (o_1i_3i_1).$$

Contando: $V = 6$; $C = 6$; y las aristas son las tres exteriores, las tres interiores y los seis radios en zigzag, o sea $A = 12$. Luego

$$\chi = 6 + 6 - 12 = 0.$$

Con n vértices en cada circunferencia sale $V = 2n$, $C = 2n$, $A = 4n$ y de nuevo $\chi = 0$. La característica no depende de n, que era lo esperado.

3. La esfera. El borde de un tetraedro es homeomorfo a la esfera y ya está triangulado: $C = 4$ caras, $V = 4$ vértices, $A = 6$ aristas. Luego

$$\chi = 4 + 4 - 6 = 2.$$

4. La comprobación $3C = 2A_i + A_e$ en la corona. Con $n = 3$ hay $C = 6$ triángulos, luego $3C = 18$. Los lados externos son los que están en la frontera de la región, es decir, las tres aristas de la circunferencia exterior y las tres de la interior: $A_e = 6$. Los seis radios en zigzag son internos: $A_i = 6$. Y en efecto

$$2A_i + A_e = 2 \cdot 6 + 6 = 18 = 3C. \quad \checkmark$$

5. Disco y rectángulo. No hace falta calcular. El disco cerrado y el rectángulo cerrado son homeomorfos, y la característica de Euler-Poincaré es un invariante topológico. Luego tienen la misma, y el apartado 1 dice que vale 1. ■

Observación (El error de conteo que hay que evitar)**.** En la corona es tentador contar «tres aristas exteriores, tres interiores y tres radios», poniendo un solo radio por cada par de vértices enfrentados. No funciona: con tres radios las piezas que salen son cuadriláteros, no triángulos, y una triangulación exige triángulos. Hacen falta dos radios por cada uno de los tres sectores, es decir, seis.

La forma segura de no equivocarse es contar los lados con la fórmula $3C = 2A_i + A_e$ antes de contar las aristas a ojo, y usar el resultado como control.

QUÉ DEJA. El hábito de comprobar una triangulación con $3C = 2A_i + A_e$ antes de fiarse de ella, y los cuatro valores que hay que saber de memoria: disco y rectángulo 1, corona 0, esfera 2. En la parte de topología reaparecerán como $\chi(M_n) = 2 - 2n$ y $\chi(N_n) = 2 - n$, y el 2 de la esfera será el caso $n = 0$ de la primera fórmula.

1.1.4 Integración de una función sobre una región

LA PREGUNTA: UNA INTEGRAL QUE NO PUEDE DEPENDER DE QUIEN LA CALCULA

Dos atlas dan mapas distintos del mismo país: uno con la proyección de Mercator, que agranda todo lo que está lejos del ecuador, y otro con una proyección que conserva las áreas. Sobre cada mapa se puede medir el área con una cuadrícula, y sale un número distinto en cada uno; el área del país es solo una. Integrar sobre un trozo de superficie es lo mismo: hay que bajarlo al plano con una parametrización y hacer allí una integral doble corriente, y la parametrización la elige quien calcula, entre infinitas que deforman las áreas de maneras distintas. ¿Qué hay que meter dentro de la integral del plano para que el número que sale sea el mismo con todas ellas?

Queda por decir qué significa el símbolo $\iint_R f\,dA$ del teorema, y sobre todo por qué tiene un valor que no depende de con qué coordenadas se calcule.

Si R es una región acotada contenida en la imagen de una sola p.l. $x : U \to M$ y f es diferenciable en $x(U)$, se define

$$\iint_R f\,dA = \iint_{x^{-1}(R)} f(x(u,v))\sqrt{g(u,v)}\,du\,dv.$$

Esta fórmula no es nueva: es la definición de área de *Geometría local* (sección 3.2, *Medidas en una superficie*, apartado *Área*) con un peso f delante. Allí se definió

$$A(R) = \iint_{x^{-1}(R)} |\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|\,du\,dv = \iint_{x^{-1}(R)} \sqrt{g}\,du\,dv,$$

de modo que el caso $f \equiv 1$ devuelve el área, como tiene que ser.

El valor $f(x(u,v))$ es el peso en el punto de la superficie que representa (u,v). La integral no depende de la p.l. elegida, aunque se invierta la orientación: dA mide área, no área con signo.

Un caso a mano. El disco unidad del plano $z = 0$ se puede describir con la p.l. cartesiana $x(u,v) = (u,v,0)$ o con la polar $x(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 0)$, con $0 < r < 1$ y $0 < \theta < 2\pi$. En la cartesiana, $\mathbf{X}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{X}_2 = (0,1,0)$ y $\sqrt{g} = 1$: el área es la integral doble de 1 sobre el disco, que vale π. En la polar,

$$\mathbf{X}_1 = (\cos\theta,\ \mathrm{sen}\,\theta,\ 0), \qquad \mathbf{X}_2 = (-r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ r\cos\theta,\ 0),$$

de donde $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = r^2$ y $\sqrt{g} = r$. Sin el factor, la integral sobre el rectángulo de parámetros $(0,1) \times (0,2\pi)$ daría 2π, que es el área de ese rectángulo y no la del disco. Con él,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr\,d\theta = \pi,$$

lo mismo que con la cartesiana. El factor r se lee así: un rectángulo pequeño de parámetros, de lados dr y $d\theta$, se convierte en un trozo de sector de lados dr y $r\,d\theta$, estrecho cerca del centro y ancho lejos de él. Esa deformación de las áreas es exactamente la que corrige $\sqrt{g}$.

CONEXIÓN: ES EL CAMBIO DE VARIABLE DE SIEMPRE

Este es uno de los sitios donde conviene no dejarse impresionar por la notación. Si $\bar{x} = x \circ h$ es otra p.l. de la misma porción de superficie, con h el cambio de coordenadas, la regla de la cadena da

$$\sqrt{\bar{g}} = \left(\sqrt{g} \circ h\right) |\det J(h)|,$$

y entonces la igualdad de las dos integrales es exactamente el **teorema del cambio de variable** para integrales dobles, el de *Diferenciación de funciones de varias variables*, con $|\det J(h)|$ haciendo su papel de siempre. El $\sqrt{g}$ no es un añadido misterioso: es el factor que corrige la distorsión de áreas que introduce la parametrización, y por eso la definición de área de *Geometría local* (sección 3.2) lo llevaba ya.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: INTEGRAR EN EL PLANO DE PARÁMETROS SIN FACTOR

La alternativa. Definir $\iint_R f\,dA$ como la integral doble $\iint_{x^{-1}(R)} f\,du\,dv$, sin el factor $\sqrt{g}$.
Su ventaja. Es literalmente la integral doble de *Diferenciación de funciones de varias variables*, sin añadidos, y para una parametrización fija se calcula igual de bien.
Qué la hunde. Que el número cambia al cambiar de parametrización, de modo que no sería un dato de la superficie sino del sistema de coordenadas. El ejemplo más corto: el plano $z = 0$ parametrizado por $x(u, v) = (u, v, 0)$ y el mismo plano parametrizado por $\bar{x}(u, v) = (2u, v, 0)$ describen la misma región, y para el cuadrado unidad la integral sin factor vale 1 con la primera y $1/2$ con la segunda. El $\sqrt{g}$ no es un adorno: es el jacobiano que hace que la definición sobreviva al cambio de variable, y sin él ni siquiera el área estaría bien definida.

Cuando R no cabe dentro de una sola p.l. — por ejemplo, si es la esfera entera — se triangula. Sea $\{x_a\}_{a\in A}$ un atlas y sea $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_n\}$ una triangulación de R con cada T_i contenido en la imagen de una superficie simple x_{a_i} del atlas. Para $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciable, se define

$$\iint_R f\,dA = \sum_{i=1}^{n} \iint_{x_{a_i}^{-1}(T_i)} f\left(x_{a_i}(u_{a_i}, v_{a_i})\right) \sqrt{g_{x_{a_i}}}\,du_{a_i}\,dv_{a_i}.$$

Proposición. Esta suma no depende ni de la triangulación $\mathcal{T}$ ni del atlas elegido. Por tanto tiene sentido geométrico y se denota $\iint_R f\,dA$.

La prueba, que aquí no se da, junta dos cosas que ya están a la vista. Dentro de cada triángulo, cambiar de p.l. no altera el sumando, por el cambio de variable de la conexión anterior. Y cambiar de triangulación no altera la suma, porque la integral doble es aditiva: al superponer dos particiones, cada trozo común se cuenta una vez en las dos.

EXPLÍCATE. *Si un cambio de coordenadas tiene jacobiano negativo, ¿por qué no cambia el signo de esta integral? Señala el valor absoluto en la fórmula del cambio de variable. La orientación sí hace falta para fijar los signos de K_g y de la frontera; para integrar $f\,dA$, no.*

La existencia de la triangulación adecuada la garantiza la última proposición de la sección anterior. Aquí se ve para qué servía.
Qué se ha ganado. Las palabras del enunciado ya significan algo: región regular, orientación positiva de la frontera, característica de Euler-Poincaré e integral $\iint_R f\,dA$. La quinta, el ángulo externo, se precisa al empezar la sección 1.3, donde se usa. La pregunta del agrimensor sigue abierta: de qué depende el sobrante lo dirá el teorema. De lo que hace falta para

demostrarlo ya está la contabilidad, triangular y contar; falta la herramienta de cálculo, que es la fórmula de Liouville de la sección siguiente.

Repaso: conceptos previos

REPASO INTERCALADO: CONCEPTOS PREVIOS, PRIMERA RONDA

Se contestan **a libro cerrado**, en un folio, y solo después se comprueban. Intenta responder antes de consultar el texto: así podrás distinguir lo que reconstruyes por ti mismo de lo que solo reconoces al leerlo.
Este bloque tiene tres rondas de dificultad creciente. La primera se hace al terminar la sección; la segunda, dos o tres sesiones después; la tercera, al acabar la sección del teorema. No se hacen las tres seguidas.

Primera ronda: reconstruir.

1. Define región simple y región regular. Da un ejemplo de región regular que no sea simple y di cuál es su característica.
2. ¿Qué significa que la frontera de una región esté orientada positivamente? Contesta con la normal intrínseca y después con la imagen del caminante.
3. Enuncia la relación $3C = 2A_i + A_e$ y explica en una frase por qué es cierta, sin inducción.
4. Escribe la característica de Euler-Poincaré del disco, del rectángulo, de la corona y de la esfera.
5. ¿Por qué la integral $\int\int_R f\,dA$ no depende de la parametrización con que se calcule? ¿Qué teorema de otra asignatura lo garantiza?
6. ¿Por qué podemos usar un atlas cualquiera para integrar $f\,dA$, mientras que la orientación sí interviene en el signo de K_g?

REPASO INTERCALADO: CONCEPTOS PREVIOS, SEGUNDA RONDA

Segunda ronda: distinguir y aplicar.

1. ¿Por qué el signo de K_g depende de la orientación y el de K no? Contesta mirando las dos fórmulas.
2. Dos regiones distintas comparten una curva frontera. ¿Qué relación hay entre las dos integrales de curvatura geodésica? ¿Cuándo coinciden?
3. Una región regular tiene tres curvas frontera. ¿Cuánto vale su característica si es homeomorfa a un disco con dos agujeros?
4. ¿Por qué una región simple es compacta y simplemente conexa? ¿Dónde se van a usar esas dos propiedades?
5. En una triangulación de una corona con cuatro vértices en cada circunferencia, ¿cuántas caras, aristas y vértices hay? Comprueba $3C = 2A_i + A_e$.
6. Se afirma que dos superficies regulares compactas y conexas con la misma característica son homeomorfas. ¿Es cierto sin más? ¿Qué hipótesis hay que añadir si se sale de $\mathbb{R}^3$?
7. ¿Por qué la triangulación que da la última proposición de la sección tiene que ser fina, con cada triángulo dentro de una sola carta?

REPASO INTERCALADO: CONCEPTOS PREVIOS, TERCERA RONDA, CON MATERIAL ANTERIOR

Tercera ronda: con material de otras asignaturas.

1. «Homeomorfa a un disco», «compacta», «simplemente conexa». ¿De qué asignatura son esas tres palabras y qué significan exactamente?
2. El factor $\sqrt{g}$ del elemento de área no es un añadido misterioso. ¿De dónde sale, y con qué teorema de *Diferenciación* se demuestra que la integral no depende de las coordenadas?
3. En *Geometría local* (sección 3.3) se probó que la curvatura geodésica cambia de signo al invertir el sentido de recorrido. Reconstruye el argumento en dos líneas mirando la fórmula $K_g = (\mathbf{N}, \alpha', \alpha'')/|\alpha'|^3$.
4. Sin calcular: ¿cuál es la característica de un cilindro finito, de una banda de Möbius y de un toro? Para las dos últimas necesitarás la segunda mitad del libro; intenta razonarlo igualmente.
5. ¿Qué falla exactamente en el razonamiento de los dos casquetes esféricos? Contesta en una sola frase.
6. Un compañero afirma que en una corona plana con las dos fronteras circulares las dos curvaturas geodésicas integrales son iguales, porque las dos circunferencias son «igual de curvas». ¿Qué le contestas?

1.2 Valor Algebraico de la Derivada Covariante. Fórmula de Liouville

LA PREGUNTA: EL TIMONEL QUE NO PUEDE SOLTAR EL TIMÓN

Un barco navega con rumbo fijo hacia el este, siguiendo un paralelo. La brújula no se mueve y, sin embargo, el timonel tiene que llevar el timón ligeramente metido durante todo el viaje: si lo suelta, el barco se desvía poco a poco hacia el ecuador. Cuanto más cerca del polo, más timón hace falta. ¿Se puede calcular cuánto tiene que girar en cada momento sin salir de la carta de navegación, a partir solo de la escala del mapa en cada punto y del ángulo que forma el rumbo con los meridianos?

LA IDEA: PARA QUÉ SIRVE ESTA SECCIÓN

Esta sección de la lección es puramente instrumental, y conviene saberlo para no perderse: no demuestra nada sobre Gauss-Bonnet, sino que fabrica la única herramienta que usaremos en su demostración.

La herramienta es la **fórmula de Liouville**, que parte la curvatura geodésica de una curva en dos sumandos: el giro de la rejilla de coordenadas al recorrer la curva, y la derivada del ángulo que la tangente forma con las líneas coordenadas. Esa partición es exactamente lo que permite aplicar después el teorema de Green a un trozo y el teorema del índice de rotación al otro.

Para llegar a ella hacen falta dos piezas previas: el *valor algebraico de la derivada covariante*, que mide cuánto gira un campo unitario, y una *determinación diferenciable del ángulo* entre dos campos, que es un tecnicismo imprescindible.

1.2.1 El valor algebraico de la derivada covariante

LA PREGUNTA: CUÁNTO GIRA UN CAMPO QUE NO PUEDE CRECER

Quien lleva una brújula por un camino ve que la aguja no cambia de tamaño: lo único que hace es girar. Para describir en cada instante lo que hace la aguja no hacen falta las tres componentes de su derivada, sino un solo número, cuánto gira y hacia qué lado. Un campo de vectores tangentes y unitarios a lo largo de una curva sobre una superficie está en la misma situación: no puede alargarse ni encogerse, solo girar dentro del plano tangente, hacia un lado o hacia el otro. ¿Cuál es el único número que hace falta para describir ese giro, y por qué todo lo demás sobra?

LA IDEA: LA DERIVADA COVARIANTE DE UN CAMPO UNITARIO SOLO TIENE UN GRADO DE LIBERTAD

Sea V un campo de vectores tangentes a la superficie a lo largo de una curva, y supóngase que es **unitario**: $|V| = 1$ en todo punto. Un campo así no puede crecer ni encoger. Su variación vista desde la superficie es un giro dentro del plano tangente, con un solo grado de libertad. Visto desde $\mathbb{R}^3$, también puede inclinarse porque cambia el propio plano tangente.
La derivada covariante $\frac{DV}{dt}$, que es la componente tangencial de V', mide precisamente ese giro. Al ser V unitario, $\frac{DV}{dt}$ es perpendicular a V y tangente a la superficie, y en el plano tangente solo hay una dirección perpendicular a V: la de $\mathbf{N} \times V$. Luego $\frac{DV}{dt}$ es un múltiplo de $\mathbf{N} \times V$, y ese múltiplo es un solo número real.
Ese número se llama **valor algebraico de la derivada covariante**. Es toda la información que hay: dice a qué velocidad gira V y en qué sentido.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: QUEDARSE CON LA DERIVADA ORDINARIA V'

La alternativa. No proyectar nada y trabajar directamente con $V'(t)$, la derivada del campo entendido como curva de $\mathbb{R}^3$.
Su ventaja. Es la derivada de toda la vida, no obliga a descomponer en componente tangencial y componente normal, y contiene estrictamente más información que la derivada covariante.
Qué la hunde. Que la información de más que contiene es precisamente la que no pertenece a la superficie. Tómese una hoja de papel plana y enróllese en un cilindro sin estirarla: para un habitante de la hoja no ha cambiado nada, porque ninguna distancia medida sobre ella ha cambiado. Un campo unitario que en la hoja plana era constante tiene $V' = 0$; el mismo campo, una vez enrollada la hoja, tiene $V' \neq 0$, con componente normal no nula — el campo tangente a los paralelos del cilindro cumple $V' = -u'\,\mathbf{N}$. La derivada ordinaria distingue las dos situaciones y por tanto no es intrínseca; la componente tangencial, que es la derivada covariante, vale cero en las dos. Como todo lo que se demuestra en esta lección es intrínseco, la parte normal no solo sobra: estorba.

Recordemos el aparato de *Geometría local* que se da por sabido; está en la sección 3.4 de aquel libro, *Derivada covariante. Paralelismo*, con las fórmulas en coordenadas y el teorema del transporte paralelo. Un campo vectorial tangente a lo largo de una c.p.r. $\alpha : (a, b) \to M$ es una aplicación V que asigna a cada t un vector $V(t) \in T_{\alpha(t)}(M)$. Escrito en una p.l. entorno de $\alpha(t_0)$ queda $V(t) = f_1(t)\mathbf{X}_1(t) + f_2(t)\mathbf{X}_2(t)$, y el campo es diferenciable si lo son f_1 y f_2.

Su derivada covariante $\frac{DV}{dt}$ es la componente tangencial de V', y vale

$$\frac{DV}{dt} = V'(t) - \big(V'(t)\cdot\mathbf{N}(t)\big)\mathbf{N}(t) = \sum_{k=1}^{2}\Big[f_k' + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^k f_i u_j'\Big]\mathbf{X}_k.$$

De aquí en adelante, M está orientada por un campo normal $\mathbf{N}$ y todos los campos son tangentes y de clase C^1 como mínimo: sus primeras derivadas son continuas.

Definición. Sea V un campo vectorial **unitario** a lo largo de una curva diferenciable $\alpha : I \to M$. Entonces

$$\frac{DV}{dt} = \lambda\,\big(\mathbf{N}(t)\times V(t)\big)$$

para una única función real $\lambda = \lambda(t)$, que se denota $\left[\frac{DV}{dt}\right]$ y se llama el **valor algebraico de la derivada covariante** de V en t.

Antes de seguir hay que justificar que esa λ existe y es única, porque la definición lo da por hecho.

Lema. Si V es un campo tangente unitario a lo largo de α, entonces $\frac{DV}{dt}$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{N}\times V$.

> Tres pasos, ninguno con truco.
> Primero, $\frac{DV}{dt}$ es tangente a la superficie: lo es por definición, porque es la componente tangencial de V'.
> Segundo, $\frac{DV}{dt}$ es perpendicular a V. En efecto, de $V\cdot V = 1$ se sigue derivando que $V'\cdot V = 0$. Y como V es tangente, al descomponer $V' = \frac{DV}{dt} + (V'\cdot\mathbf{N})\mathbf{N}$ y multiplicar por V, el segundo sumando no aporta nada porque $\mathbf{N}\cdot V = 0$. Luego $\frac{DV}{dt}\cdot V = V'\cdot V = 0$.
> Tercero, $\{V, \mathbf{N}\times V\}$ es una base ortonormal del plano tangente, porque V es unitario y tangente, y $\mathbf{N}\times V$ es unitario, tangente y perpendicular a V. Un vector del plano tangente perpendicular a V es, por tanto, un múltiplo de $\mathbf{N}\times V$, y el escalar está unívocamente determinado.

Proposición. Se verifica que

$$\left[\frac{DV}{dt}\right] = (V'(t), \mathbf{N}(t), V(t)).$$

> Multiplicando escalarmente $\frac{DV}{dt} = \lambda(\mathbf{N}\times V)$ por el vector unitario $\mathbf{N}\times V$ se obtiene $\lambda = \frac{DV}{dt}\cdot(\mathbf{N}\times V)$. Y en ese producto se puede cambiar $\frac{DV}{dt}$ por V', porque las dos difieren en un múltiplo de $\mathbf{N}$, que es perpendicular a $\mathbf{N}\times V$. Luego
>
> $$\lambda = V'\cdot(\mathbf{N}\times V) = (V', \mathbf{N}, V),$$
>
> ya que el producto escalar de un vector por un producto vectorial es el determinante de los tres.

Un caso a mano. En el plano $z = 0$, orientado por $\mathbf{N} = (0,0,1)$, se recorre en sentido antihorario la circunferencia de radio r centrada en el origen, parametrizada por el arco: $\alpha(s) = \big(r\cos(s/r),\ r\,\mathrm{sen}(s/r),\ 0\big)$. A lo largo de ella se miran dos campos unitarios.

El tangente. Sus datos son

$$V = \alpha' = \big(-\operatorname{sen}\tfrac{s}{r},\ \cos\tfrac{s}{r},\ 0\big), \qquad V' = -\tfrac{1}{r}\big(\cos\tfrac{s}{r},\ \operatorname{sen}\tfrac{s}{r},\ 0\big),$$
$$\mathbf{N}\times V = \big(-\cos\tfrac{s}{r},\ -\operatorname{sen}\tfrac{s}{r},\ 0\big).$$

La derivada V' apunta al centro, y $\mathbf{N}\times V$ también. Luego

$$\left[\frac{DV}{ds}\right] = V'\cdot(\mathbf{N}\times V) = \frac{1}{r}\Big(\cos^2\frac{s}{r} + \operatorname{sen}^2\frac{s}{r}\Big) = \frac{1}{r}:$$

el tangente gira hacia la izquierda a razón de $1/r$ radianes por unidad de longitud, que es la curvatura de la circunferencia. Cuanto más pequeña, más deprisa gira.

Un campo constante, $W = (1,0,0)$. Como $W' = 0$, se tiene $\left[\frac{DW}{ds}\right] = 0$: el campo no gira, aunque se lleve de paseo por una curva que sí gira.

En los dos casos ha bastado un número para decir lo que hace el campo, que es lo que prometía la definición. Los dos campos volverán a aparecer en la subsección de la diferencia de dos valores algebraicos, para comprobar la fórmula que liga sus giros.

Observación (El signo depende de la orientación, y el objeto no)**.** Merece la pena tenerlo claro desde ahora, porque es la misma asimetría de antes.

El signo de $\left[\frac{DV}{dt}\right]$ **depende de la orientación** de M: si se cambia $\mathbf{N}$ por $-\mathbf{N}$, el determinante cambia de signo. En cambio, ni el concepto de transporte paralelo ni el de curva geodésica dependen de la orientación, porque los dos se definen por la anulación de $\frac{DV}{dt}$, y anularse no tiene signo. La curvatura geodésica sí depende, como ya se vio.

1.2.2 Una determinación diferenciable del ángulo

LA PREGUNTA: UN ÁNGULO QUE SE PUEDA DERIVAR

El indicador de rumbo de un avión marca de 0 a 360 grados y, al pasar por el norte, salta de 359 a 0 aunque el avión haya girado un solo grado. Para el piloto es una molestia; para quien quiera derivar el rumbo respecto del tiempo es un desastre, porque en el salto no hay derivada. Comparar dos campos unitarios obliga a hablar del ángulo que forman, y el ángulo solo está determinado salvo múltiplos de 2π. ¿Se puede elegir su valor en todos los instantes a la vez de manera coherente, sin saltos, y qué queda fijado en cuanto se elige el valor en un solo instante?

Para comparar dos campos unitarios hace falta hablar del ángulo que forman, y hace falta que ese ángulo sea una *función diferenciable* de t, no un valor definido módulo 2π. Es un detalle técnico y es imprescindible: sin él, la proposición que viene después no se puede ni enunciar.

LA IDEA: POR QUÉ EL ÁNGULO HAY QUE FABRICARLO, NO LEERLO

El ángulo entre dos vectores unitarios se lee del coseno, pero el arcocoseno solo devuelve valores en $[0,\pi]$: pierde el sentido del giro y puede producir esquinas. Por ejemplo, $\arccos(\cos t) = |t|$ para $-\pi \le t \le \pi$. Esta función es continua, pero no derivable en $t = 0$, aunque el giro original t sea suave.
La solución es la de siempre en estos casos: en vez de *leer* el ángulo en cada instante,

se *fabrica* eligiendo un valor inicial y dejando que evolucione de forma continua, integrando su velocidad de variación. Es exactamente el mismo truco con el que se define el argumento continuo de una curva en el plano complejo, o el que se usará en la parte de topología para elevar un camino de la circunferencia a la recta. Merece la pena reconocerlo como un patrón.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: LEER EL ÁNGULO CON EL ARCOCOSENO

La alternativa. Definir $\varphi(t) = \arccos\big(V(t)\cdot W(t)\big)$ y derivar eso.
Su ventaja. Es una fórmula explícita, cerrada y sin integrales, que se evalúa en cada instante por separado y no obliga a elegir nada.
Qué la hunde. Que el arcocoseno devuelve valores en $[0,\pi]$ y con ello pierde dos cosas imprescindibles. Pierde el signo: no distingue el giro hacia un lado del giro hacia el otro, que es exactamente la información que lleva el valor algebraico de la derivada covariante. Y pierde el recuento de vueltas: un campo que gira una vuelta entera respecto de otro y un campo que no se mueve devuelven el mismo valor final, cuando el teorema del índice de rotación vive precisamente de contar esas vueltas. Además puede dejar de ser derivable al pasar por 0 o por π, como acaba de mostrar el ejemplo $|t|$. La construcción por integración no tiene ninguno de los tres problemas, y el único precio que cobra es fijar un valor inicial.

Sea $\widetilde{V} = \mathbf{N}\times V$, de modo que $\{V(t), \widetilde{V}(t)\}$ es base ortonormal positiva de $T_{\alpha(t)}(M)$ para cada t. Como W es unitario y tangente, se puede escribir

$$W(t) = a(t)V(t) + b(t)\widetilde{V}(t), \qquad a^2 + b^2 = 1,$$

con a y b diferenciables.

Proposición. Fijada una determinación φ_0 del ángulo de $V(t_0)$ a $W(t_0)$, es decir, con $a(t_0) = \cos\varphi_0$ y $b(t_0) = \operatorname{sen}\varphi_0$, la función

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} \big(a(\sigma)b'(\sigma) - b(\sigma)a'(\sigma)\big)\,d\sigma$$

es diferenciable y cumple $a(t) = \cos\varphi(t)$ y $b(t) = \operatorname{sen}\varphi(t)$ para todo $t \in I$.

LA IDEA: DOS PUNTOS QUE SALEN JUNTOS Y LLEVAN LA MISMA VELOCIDAD

Toda la demostración cabe en una imagen. Sobre la circunferencia unidad hay dos puntos viajando. Uno es $(a(t), b(t))$, que es el que de verdad marca la posición de W respecto de V. El otro es $(\cos\varphi(t), \operatorname{sen}\varphi(t))$, que es el que fabrica la fórmula. Hay que demostrar que son el mismo punto siempre.
Para eso no hace falta compararlos en cada instante: basta el argumento de siempre en cinemática. *Dos puntos que salen del mismo sitio de la circunferencia y giran con la misma velocidad angular no se separan.* Salen del mismo sitio por la elección de φ_0, y la fórmula $\varphi' = ab' - ba'$ les asigna la misma velocidad angular. La prueba comprueba esa idea sin suponer de antemano que sus vectores velocidad coinciden.
Y aquí está la falsa intuición que conviene desmontar antes de empezar. Uno tiende a pensar que el problema del ángulo es de *elección*: que hay muchos valores posibles y hay que escoger uno bueno. No es eso. El ángulo, una vez fijado en un instante, ya no admite ninguna elección más: está obligado a seguir al punto. Lo único que hay que

comprobar es que la fórmula integral, que es una definición hecha a ciegas, produce exactamente ese seguimiento forzoso. La libertad está en el instante inicial y en ningún otro sitio.

Las dos afirmaciones de arranque se leen directamente en la fórmula que define φ. En $t = t_0$ el intervalo de integración se reduce a un punto, la integral vale 0 y queda $\varphi(t_0) = \varphi_0$. Y el integrando $ab' - ba'$ es continuo, porque a y b son de clase C^1; el teorema fundamental del cálculo dice entonces que una integral con extremo superior variable de una función continua es derivable y que su derivada es el integrando evaluado en ese extremo, es decir,

$$\varphi' = ab' - ba'.$$

Paso 1: traducir la tesis a una sola función escalar. Hay que ver que los dos puntos de la circunferencia coinciden, es decir, que $a = \cos\varphi$ y $b = \operatorname{sen}\varphi$. Comparar dos pares de funciones es incómodo, así que se comprime la tesis en una sola igualdad: los dos puntos coinciden exactamente cuando la distancia entre ellos es nula,

$$(a - \cos\varphi)^2 + (b - \operatorname{sen}\varphi)^2 = 0.$$

Desarrollando y usando $a^2 + b^2 = 1$ y $\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi = 1$, eso equivale a

$$2 - 2\big(a\cos\varphi + b\operatorname{sen}\varphi\big) = 0,$$

o sea, a que la función $f = a\cos\varphi + b\operatorname{sen}\varphi$ valga idénticamente 1. Esa f no es un artificio: es el producto escalar de los dos puntos de la circunferencia, es decir, el coseno del ángulo que forman entre sí. Decir $f \equiv 1$ es decir que ese ángulo es siempre cero.

Paso 2: la función es constante *(el núcleo de la prueba)*. Aquí está todo el peso, y lo que lo sostiene es una sola identidad. Derivando y agrupando,

$$f' = a'\cos\varphi - a\varphi'\operatorname{sen}\varphi + b'\operatorname{sen}\varphi + b\varphi'\cos\varphi = \cos\varphi\,(a' + b\varphi') + \operatorname{sen}\varphi\,(b' - a\varphi').$$

Los dos paréntesis se anulan por separado. Sustituyendo $\varphi' = ab' - ba'$ y usando dos veces $a^2 + b^2 = 1$ y su consecuencia $aa' + bb' = 0$:

$$a' + b(ab' - ba') = a'(1 - b^2) + ab\,b' = a(aa' + bb') = 0,$$

$$b' - a(ab' - ba') = b'(1 - a^2) + ab\,a' = b(aa' + bb') = 0.$$

Luego $f' = 0$ y f es constante.
La igualdad que ha hecho el trabajo es $aa' + bb' = 0$, y merece ser dicha aparte porque es el corazón: **el vector velocidad de un punto que se mueve sobre la circunferencia es perpendicular al radio**. De ahí sale que su velocidad angular sea exactamente $ab' - ba'$, y de ahí que la φ fabricada por la fórmula persiga al punto sin poder despegarse.

Paso 3: fijar el valor de la constante. Como $f(t_0) = \cos^2\varphi_0 + \operatorname{sen}^2\varphi_0 = 1$, se concluye que $f \equiv 1$, que es lo que había que probar.

Lo que hay que llevarse. El ángulo no se lee: se fabrica, integrando su velocidad $\varphi' = ab' - ba'$ desde un valor inicial elegido. Para ver que el punto fabricado $(\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi)$ es el verdadero (a, b) se mira su producto escalar f: vale 1 al principio, y su derivada se anula porque $aa' + bb' = 0$, es decir, porque la velocidad de un punto que se mueve sobre la circunferencia es perpendicular al radio.

Observación (Qué papel juega cada hipótesis)**.** Son solo dos y las dos se ven en la imagen de los móviles.

- $a^2 + b^2 = 1$, es decir, que W sea unitario. Sin eso el punto (a, b) no vive en la circunferencia y el paso 2 no vale tal como está escrito. Si W no se anula, su dirección sigue teniendo sentido: basta normalizarlo como $W/|W|$ antes de aplicar el argumento.
- **Fijar φ_0 en un instante t_0.** Es la salida común de los dos móviles. Si no se fija, la fórmula da φ salvo un múltiplo de 2π, y el resultado sigue siendo cierto para cualquiera de esas elecciones: lo que *no* se puede es no elegir ninguna. Esta es la razón de que en todos los enunciados que vienen después aparezca la coletilla «una determinación diferenciable del ángulo» en lugar de «el ángulo».

Un caso a mano. Se vuelve al ejemplo del arcocoseno. Con $a(t) = \cos t$ y $b(t) = \operatorname{sen} t$ en $[-\pi, \pi]$, y eligiendo $t_0 = -\pi$ y $\varphi_0 = -\pi$, el integrando vale $ab' - ba' = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ y la fórmula da

$$\varphi(t) = -\pi + \int_{-\pi}^{t} 1 \, d\sigma = t.$$

La determinación diferenciable devuelve el giro verdadero, con su signo, donde el arcocoseno devolvía $|t|$ y una esquina en $t = 0$. Un segundo caso, con un punto que no gira a velocidad constante: $a = \cos(t^2)$, $b = \operatorname{sen}(t^2)$, $t_0 = 0$ y $\varphi_0 = 0$. Ahora $ab' - ba' = 2t\cos^2(t^2) + 2t\operatorname{sen}^2(t^2) = 2t$, y $\varphi(t) = \int_0^t 2\sigma \, d\sigma = t^2$. Para $t < 0$ el ángulo decrece hasta 0 y para $t > 0$ vuelve a crecer: la fórmula sigue al punto en los dos sentidos de giro sin ningún salto.

EXPLÍCATE. *La igualdad $aa' + bb' = 0$ se ha usado dos veces en el paso central. Di de dónde sale y qué propiedad geométrica de W está codificando.*

1.2.3 La diferencia de dos valores algebraicos es la derivada del ángulo

Proposición. Sean $V(t)$ y $W(t)$ dos campos de vectores tangentes y unitarios a lo largo de una curva diferenciable $\alpha : I \to M$. Entonces

$$\left[\frac{DW}{dt}\right] - \left[\frac{DV}{dt}\right] = \frac{d\varphi}{dt},$$

donde φ es una determinación diferenciable del ángulo de $V(t)$ a $W(t)$.

LA IDEA: DOS AGUJAS DE RELOJ

Nada más que lo evidente, una vez dicho: *la diferencia entre lo que gira W y lo que gira V es lo que varía el ángulo entre ellos*. Si los dos giran igual, el ángulo no cambia.
La imagen es un reloj, y conviene tomarla en serio porque predice el enunciado entero. La aguja de las horas gira a una velocidad, la de los minutos a otra, y el ángulo que se abre entre las dos cambia a la diferencia de las dos velocidades. Nadie necesita demostrarlo: si a las tres en punto el ángulo es recto y una hora después ya no lo es, es exactamente porque una aguja ha girado más que la otra. La proposición dice eso

mismo, con $\left[\frac{DW}{dt}\right]$ y $\left[\frac{DV}{dt}\right]$ en el papel de las dos velocidades angulares y $d\varphi/dt$ en el de la velocidad con que se abre el ángulo.
Conviene desmontar de entrada la lectura falsa. Un giro sobre una superficie curva no es un giro sobre una esfera de reloj, y uno podría sospechar que la curvatura estropea la resta: que al pasear por una superficie abollada las velocidades angulares dejen de sumarse limpiamente. No ocurre, y la razón es que en cada instante el giro se mide *dentro del plano tangente de ese instante*, que es un plano y nada más que un plano. La curvatura no interviene aquí; intervendrá más tarde, cuando haya que comparar planos tangentes de puntos distintos. Este resultado es local en el sentido más fuerte: es plano.
Su utilidad es que convierte el cálculo de un valor algebraico en el de otro más cómodo, más una derivada de un ángulo. Y de ahí sale, en la sección siguiente, la fórmula de Liouville: se compara el campo que interesa con el campo tangente a la u_1-curva, cuyo giro se sabe calcular con los coeficientes métricos.

El plan, en una línea: escribir W como V girado un ángulo φ, derivar esa igualdad, y comprobar que la derivada se parte en «lo que gira V» más «lo que crece φ». Los cuatro pasos siguientes son eso, con las cuentas.

Paso 1: montar la base girada. Sean $\widetilde{V} = \mathbf{N} \times V$ y $\widetilde{W} = \mathbf{N} \times W$. Por la subsección anterior,

$$W = \cos\varphi\, V + \operatorname{sen}\varphi\, \widetilde{V}.$$

Hace falta también $\widetilde{W}$ en términos de la base $\{V, \widetilde{V}\}$, porque es el vector contra el que se va a proyectar todo. Aplicando $\mathbf{N}\times$ a la igualdad anterior,

$$\widetilde{W} = \cos\varphi\,(\mathbf{N} \times V) + \operatorname{sen}\varphi\,(\mathbf{N} \times \widetilde{V}) = \cos\varphi\,\widetilde{V} + \operatorname{sen}\varphi\,(\mathbf{N} \times (\mathbf{N} \times V)).$$

Y por la fórmula del doble producto vectorial,

$$\mathbf{N} \times (\mathbf{N} \times V) = \mathbf{N}\,\mathbf{N}\cdot V - V\,\mathbf{N}\cdot\mathbf{N} = -V,$$

porque V es tangente, luego $\mathbf{N}\cdot V = 0$, y $\mathbf{N}$ es unitario. Por tanto

$$\widetilde{W} = \cos\varphi\,\widetilde{V} - \operatorname{sen}\varphi\, V.$$

Obsérvese que $\{V, \widetilde{V}\}$ girado un ángulo φ da exactamente $\{W, \widetilde{W}\}$: son la misma base ortonormal, vista con la cabeza inclinada.

Paso 2: derivar, y ver aparecer los dos giros por separado. Ahora se deriva W:

$$W' = \varphi'\big(-\operatorname{sen}\varphi\, V + \cos\varphi\,\widetilde{V}\big) + \cos\varphi\, V' + \operatorname{sen}\varphi\,\widetilde{V}' = \varphi'\,\widetilde{W} + \cos\varphi\, V' + \operatorname{sen}\varphi\,\widetilde{V}',$$

donde se ha reconocido el paréntesis como $\widetilde{W}$. La estructura de esta igualdad es ya el enunciado: el primer sumando es el giro que W hace *respecto de* V, y los otros dos son el arrastre de V mismo. Lo que queda es comprobar que ese arrastre, al proyectarlo, vale exactamente $\left[\frac{DV}{dt}\right]$ y no otra cosa.

Paso 3: proyectar sobre $\widetilde{W}$ *(el núcleo de la prueba).* Se multiplica escalarmente por $\widetilde{W}$, que es unitario:

$$\widetilde{W}\cdot W' = \varphi' + \cos\varphi\, \widetilde{W}\cdot V' + \operatorname{sen}\varphi\, \widetilde{W}\cdot \widetilde{V}'.$$

Los dos últimos términos se calculan sustituyendo $\widetilde{W} = \cos\varphi\, \widetilde{V} - \operatorname{sen}\varphi\, V$ y usando dos hechos elementales: como $|V| = |\widetilde{V}| = 1$, se tiene $V\cdot V' = 0$ y $\widetilde{V}\cdot\widetilde{V}' = 0$; y como $V \perp \widetilde{V}$, derivando $V\cdot\widetilde{V} = 0$ resulta $V\cdot\widetilde{V}' = -V'\cdot\widetilde{V}$. Con esto,

$$\widetilde{W}\cdot V' = \cos\varphi\, \widetilde{V}\cdot V', \qquad \widetilde{W}\cdot\widetilde{V}' = -\operatorname{sen}\varphi\, V\cdot\widetilde{V}' = \operatorname{sen}\varphi\, V'\cdot\widetilde{V}.$$

Sustituyendo:

$$\widetilde{W}\cdot W' = \varphi' + \cos^2\varphi\, V'\cdot\widetilde{V} + \operatorname{sen}^2\varphi\, V'\cdot\widetilde{V} = \varphi' + V'\cdot\widetilde{V}.$$

Aquí está el momento decisivo, y cabe en una frase: **los dos términos cruzados se recombinan en uno solo porque** $\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi = 1$. Dicho sin fórmulas, el ángulo φ desaparece del arrastre. Y tiene que desaparecer, porque girar la base no puede cambiar la velocidad con que V gira: si el ángulo entre las dos agujas se mantiene fijo, ambas tienen la misma velocidad angular. Si ese ángulo cambia, el giro adicional ya está recogido en φ'.

Paso 4: reconocer lo que ha quedado. Solo queda leer los dos productos escalares. Por la proposición anterior, $\left[\frac{DV}{dt}\right] = V'\cdot(\mathbf{N}\times V) = V'\cdot\widetilde{V}$. Y la misma proposición, aplicada ahora al campo W en lugar de a V — lo único que cambia es el nombre del campo, porque W también es unitario y tangente y $\widetilde{W} = \mathbf{N}\times W$ es su compañero de base —, da $\left[\frac{DW}{dt}\right] = W'\cdot\widetilde{W}$. La igualdad recién obtenida es, por tanto,

$$\left[\frac{DW}{dt}\right] = \varphi' + \left[\frac{DV}{dt}\right],$$

que es el enunciado.

Lo que hay que llevarse. Se escribe W como V girado un ángulo φ y se deriva. Al proyectar W' sobre $\widetilde{W} = \mathbf{N}\times W$ quedan dos sumandos: φ', que es el giro de W respecto de V, y $V'\cdot\widetilde{V} = \left[\frac{DV}{dt}\right]$, que es el giro de V. El ángulo desaparece de este último porque los dos términos cruzados se juntan con $\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi = 1$.

Un caso a mano. En la circunferencia de radio r del caso a mano de la subsección 1.2.1, el tangente V gira a razón de $1/r$ y el campo constante $W = (1,0,0)$ no gira. El ángulo de W a V es $\varphi(s) = s/r + \pi/2$, porque $V = \cos\varphi\, W + \operatorname{sen}\varphi\,(\mathbf{N}\times W)$ con $\mathbf{N}\times W = (0,1,0)$: basta comprobar que $\cos(s/r+\pi/2) = -\operatorname{sen}(s/r)$ y $\operatorname{sen}(s/r+\pi/2) = \cos(s/r)$. La proposición, con los papeles de los dos campos intercambiados, dice $\left[\frac{DV}{ds}\right] - \left[\frac{DW}{ds}\right] = \varphi'(s)$, y en efecto $1/r - 0 = 1/r$. El ángulo entre los dos campos crece exactamente lo que gira el tangente, porque el otro campo está quieto.

CONEXIÓN: EL GIRO RELATIVO DE LA MECÁNICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

La fórmula de Poisson de la mecánica permite reconocer qué mide el valor algebraico. La terna ortonormal positiva $\{V, \mathbf{N} \times V, \mathbf{N}\}$ es una base móvil de $\mathbb{R}^3$. Si $\boldsymbol{\omega}$ es su velocidad angular, entonces $V' = \boldsymbol{\omega} \times V$, y por tanto

$$\left[\frac{DV}{dt}\right] = (\boldsymbol{\omega} \times V) \cdot (\mathbf{N} \times V) = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{N}.$$

Así, el valor algebraico recoge la componente del giro de la terna alrededor de la normal: la que hace girar V dentro del plano tangente. Las otras componentes de $\boldsymbol{\omega}$ inclinan ese plano en el espacio.
Ahora $W = \cos\varphi\, V + \operatorname{sen}\varphi\, (\mathbf{N} \times V)$ tiene, además del movimiento de la base, un giro relativo de velocidad φ'. La fórmula de derivación en una base móvil da

$$W' = \varphi'(\mathbf{N} \times W) + \boldsymbol{\omega} \times W, \qquad \left[\frac{DW}{dt}\right] = \varphi' + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{N}.$$

Restar los dos valores algebraicos elimina el giro común de la base, exactamente como al comparar velocidades angulares en mecánica. Esta es la proposición recién probada; no hace falta que haya un sólido material girando.
Un ejemplo en el plano fija la interpretación. Para la base polar $V = e_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$ y $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$, se tiene $\left[\frac{DV}{dt}\right] = \theta'$, aunque la curvatura de Gauss del plano sea cero. Un vector W fijo en ejes cartesianos forma con e_r un ángulo con $\varphi' = -\theta'$: ambos giros se cancelan y $\frac{DW}{dt} = 0$. En Liouville se hará esta misma separación usando la rejilla de la superficie.

1.2.4 La fórmula de Liouville

LA IDEA: CALCULAR K_g SIN SALIR DE LA SUPERFICIE

En *Geometría local* (sección 3.3, apoyada en el teorema de Gauss de la sección 3.1) se demostró que la curvatura geodésica es una cantidad intrínseca, es decir, que depende solo de los coeficientes métricos y sus derivadas. Pero la fórmula que se dio para calcularla,

$$K_g = (\mathbf{N}, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}),$$

es extrínseca: usa el vector normal, que es información de cómo está metida la superficie en el espacio. Hay una fórmula intrínseca, con determinantes y símbolos de Christoffel, pero es fea y no se presta a integrarse.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: LA FÓRMULA INTRÍNSECA CON SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL

La alternativa. Quedarse con esa expresión de K_g en coordenadas arbitrarias, la que se obtiene escribiendo la derivada covariante con los Γ_{ij}^k y tomando el determinante correspondiente.
Su ventaja. Generalidad total: no exige $g_{12} = 0$ ni ninguna otra preparación, y responde de una vez a la pregunta de si K_g es intrínseca.
Qué la hace menos cómoda aquí. Que no muestra directamente la separación que necesitamos. Lo que Gauss-Bonnet necesita no es *una* fórmula intrínseca cualquiera, sino una que al recorrer la frontera de una región se parta en un término al que el teorema de Green convierta en integral doble y otro que sea una derivada total. La expresión con símbolos de Christoffel es un cociente de determinantes con derivadas segundas: para aprovecharla habría que reorganizarla y hacer visible esa separación. La fórmula de Liouville la tiene exactamente, y el precio que cobra por ello es pedir coordenadas ortogonales. Esa es la única razón por la que el capítulo 2, con su corolario de reparametrización ortogonal, es prerrequisito de este.

La fórmula de Liouville resuelve las dos cosas a la vez. Dice que, en coordenadas ortogonales, la curvatura geodésica de una curva se parte en dos sumandos:

$$K_g = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\dot{u}_2 - \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}\dot{u}_1\right\}}_{\text{lo que gira la propia rejilla de coordenadas}} + \underbrace{\frac{d\varphi}{ds}}_{\text{lo que gira la curva respecto de la rejilla}} .$$

El primer sumando depende de la métrica, de la rejilla elegida y de cómo la recorre la curva: por eso aparecen $\dot{u}_1$ y $\dot{u}_2$. No es un giro propio de la tangente respecto de esa rejilla; ese giro es el segundo sumando, una derivada total. Al integrar este último a lo largo de un arco solo sobrevive la diferencia de ángulos en los extremos.
Esa partición es *toda* la demostración del teorema de Gauss-Bonnet. Al integrar sobre la frontera de un triángulo, el primer sumando se convierte, por el teorema de Green, en una integral doble que resulta ser $-\iint_T K\,dA$; y el segundo se convierte, por el teorema del índice de rotación, en 2π menos la suma de los ángulos externos. Sumando las dos cosas sale el teorema.

Un caso a mano: el plano con dos rejillas. Antes de la fórmula general conviene verla donde todo se puede dibujar: el plano $z = 0$, orientado por $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$. Allí K_g es la curvatura con signo de las curvas planas, y se sabe lo que mide: lo que gira el tangente por unidad de longitud, respecto de unos ejes fijos.

Con la rejilla cartesiana, $x(u_1, u_2) = (u_1, u_2, 0)$, es $g_{11} = g_{22} = 1$ y $g_{12} = 0$. Las derivadas de los coeficientes métricos son nulas, el primer sumando desaparece y queda

$$K_g = \frac{d\varphi}{ds},$$

con φ el ángulo del eje u_1 al tangente. Es la fórmula de las curvas planas: la rejilla no gira, y todo el giro que se ve es de la curva.

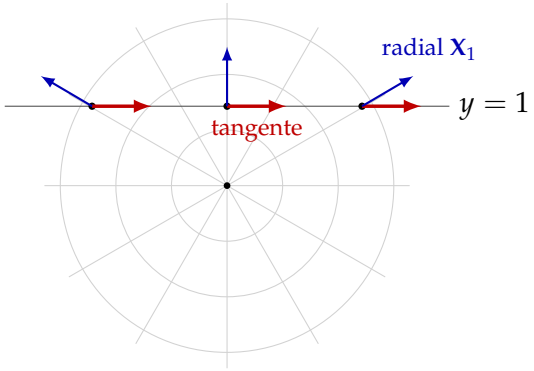
Con la rejilla polar, $x(r, \theta) = (r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 0)$, es $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = r^2$ y $\sqrt{g} = r$, como se calculó en el caso a mano de la sección 1.1.4. Ahora $\partial g_{22}/\partial r = 2r$ y $\partial g_{11}/\partial\theta = 0$, de

modo que el primer sumando vale $\frac{1}{2r} \cdot 2r \cdot \dot{\theta} = \dot{\theta}$ y

$$K_g = \dot{\theta} + \frac{d\varphi}{ds},$$

con φ el ángulo de la dirección radial $\mathbf{X}_1 = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$ al tangente. La rejilla polar sí gira: al moverse, la dirección radial cambia exactamente lo que cambia θ. Dos comprobaciones, que se ven en la figura:

- La circunferencia de radio R centrada en el origen, recorrida en sentido antihorario: $\theta = s/R$, y el tangente es siempre perpendicular al radio, de modo que $\varphi \equiv \pi/2$. Sale $K_g = 1/R + 0$. Todo el giro lo pone la rejilla; respecto de ella, la curva no gira nada.
- La recta horizontal $y = 1$, recorrida hacia la derecha, $\alpha(s) = (s, 1, 0)$. El tangente forma con el eje horizontal el ángulo 0 y la dirección radial el ángulo θ, así que el ángulo de la radial al tangente es $\varphi = -\theta$. Los dos sumandos se cancelan, $K_g = \dot{\theta} - \dot{\theta} = 0$, como tiene que ser en una recta. La rejilla gira, con $\dot{\theta} = -1/(1+s^2)$, y la curva gira lo mismo respecto de ella, en sentido contrario.



La recta $y = 1$ sobre la rejilla polar. El tangente (rojo) no gira; al avanzar hacia la derecha, la dirección radial (azul) gira en sentido horario, $\dot{\theta} < 0$. El ángulo de la radial al tangente gira lo mismo en sentido contrario, y la suma de los dos giros, que es K_g, es nula.

La lección se lleva entera a cualquier superficie: **el primer sumando de Liouville es lo que gira la rejilla al recorrer la curva, y el segundo, lo que gira la curva respecto de la rejilla**. En el plano hay una rejilla que no gira nunca, la cartesiana. En una superficie con $K \neq 0$ no hay ninguna rejilla ortogonal así: si el primer sumando fuera nulo para todas las curvas, g_{11} solo dependería de u_1 y g_{22} solo de u_2, y la expresión de K en coordenadas ortogonales que se demuestra en la sección siguiente, la (1.4), daría $K = 0$.

Proposición. Sea $x = x(u_1, u_2)$ una superficie simple de M con $g_{12} = 0$ y cuya orientación sea compatible con la de M. Sea $V(t)$ un campo de vectores tangentes y unitarios a lo largo de una curva diferenciable $\alpha(t) = x(u_1(t), u_2(t))$. Entonces

$$\left[\frac{DV}{dt}\right] = \frac{1}{2\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\, u_2' - \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}\, u_1'\right\} + \frac{d\varphi}{dt},$$

donde φ es una determinación diferenciable del ángulo orientado desde $E_1 = \mathbf{X}_1/\sqrt{g_{11}}$ hasta V, es decir, $V = \cos\varphi\, E_1 + \operatorname{sen}\varphi\, (\mathbf{N} \times E_1)$. Esta igualdad admite giros positivos y negativos y también el caso $V = E_1$.

El plan es el del reloj de la sección anterior. Se elige como aguja de referencia la rejilla de coordenadas, se aplica la resta de velocidades angulares, y todo el trabajo se concentra en una sola pregunta: *¿cuánto gira la rejilla?* La respuesta a esa pregunta es la fórmula.

Paso 1: elegir la aguja de referencia. Sean

$$E_1 = \frac{\mathbf{X}_1}{\sqrt{g_{11}}}, \qquad E_2 = \frac{\mathbf{X}_2}{\sqrt{g_{22}}},$$

los campos tangentes unitarios a las curvas paramétricas. Como $g_{12} = 0$, son ortonormales, y como la orientación es compatible se tiene $\mathbf{N} = E_1 \times E_2$; en particular $\mathbf{N} \times E_1 = E_2$. Aquí se ve por primera vez para qué hace falta $g_{12} = 0$: sin esa hipótesis $\{E_1, E_2\}$ sería una base oblicua, y en una base oblicua no hay ángulos que medir sin corregirlos.
Por la proposición de la sección anterior aplicada a los campos E_1 y V, y observando que el ángulo de $\mathbf{X}_1$ a V es el mismo que el de E_1 a V porque E_1 es un múltiplo positivo de $\mathbf{X}_1$,

$$\left[\frac{DV}{dt}\right] = \left[\frac{DE_1}{dt}\right] + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Todo se reduce, pues, a calcular $\left[\frac{DE_1}{dt}\right]$, que es lo que gira la propia rejilla de coordenadas. Nótese que ese sumando no depende de V, pero sí de la curva a lo largo de la que se mueve la rejilla.

Paso 2: derivar la rejilla a lo largo de la curva. Por la caracterización del valor algebraico,

$$\left[\frac{DE_1}{dt}\right] = E_1'(t)\cdot(\mathbf{N} \times E_1) = E_1'(t)\cdot E_2 = \Big(\frac{\partial E_1}{\partial u_1}\cdot E_2\Big)u_1' + \Big(\frac{\partial E_1}{\partial u_2}\cdot E_2\Big)u_2',$$

donde se ha usado la regla de la cadena, porque E_1 depende de t a través de $u_1(t)$ y $u_2(t)$.

Paso 3: limpiar los productos escalares con la ortogonalidad. Quedan dos productos escalares. Se calcula el primero con detalle; el segundo se obtiene repitiendo palabra por palabra la misma cuenta con $\partial/\partial u_2$ en lugar de $\partial/\partial u_1$, de modo que la derivada segunda que sobrevive al final es $\mathbf{X}_{12}$ y no $\mathbf{X}_{11}$. Como

$$\frac{\partial E_1}{\partial u_1} = \frac{\mathbf{X}_{11}\sqrt{g_{11}} - \mathbf{X}_1\,\partial\sqrt{g_{11}}/\partial u_1}{g_{11}},$$

al multiplicar por $E_2 = \mathbf{X}_2/\sqrt{g_{22}}$ el segundo sumando desaparece, porque $\mathbf{X}_1\cdot\mathbf{X}_2 = g_{12} = 0$. Queda

$$\frac{\partial E_1}{\partial u_1}\cdot E_2 = \frac{\mathbf{X}_{11}\cdot\mathbf{X}_2}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}} = \frac{\mathbf{X}_{11}\cdot\mathbf{X}_2}{\sqrt{g}},$$

donde en el último paso se ha usado que con $g_{12} = 0$ es $g = g_{11}g_{22}$.

Paso 4: convertir la derivada segunda en métrica pura *(el núcleo de la prueba)*. Falta identificar $\mathbf{X}_{11}\cdot\mathbf{X}_2$, y este es el paso que decide todo. Lo que hay ahí es una derivada *segunda* de la parametrización, es decir, información sobre cómo se dobla la superficie

dentro del espacio. Si al final del cálculo quedara algo de eso, la fórmula sería extrínseca y no serviría para nada de lo que viene después. Lo que ocurre es lo contrario: ese producto escalar resulta ser una derivada primera de los coeficientes métricos, y con eso desaparece toda huella del espacio ambiente.
En una frase: **aquí es donde la curvatura geodésica se vuelve intrínseca**. Todo lo demás de la demostración es álgebra de bases ortonormales.
Aquí entran las *ecuaciones de Gauss* y el *teorema de Gauss* de *Geometría local* (sección 3.1, *La primera forma fundamental*, subsección *Las ecuaciones de Gauss*): como $\mathbf{X}_{11}\cdot\mathbf{X}_h=\sum_l \Gamma^l_{11}g_{lh}$ y $g_{12}=0$, resulta $\mathbf{X}_{11}\cdot\mathbf{X}_2=\Gamma^2_{11}g_{22}$, y la fórmula de los símbolos de Christoffel en términos de los coeficientes métricos da

$$\mathbf{X}_{11}\cdot\mathbf{X}_2=\Gamma^2_{11}g_{22}=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}.$$

El otro producto escalar se obtiene por este mismo camino, y conviene decir qué cambia al recorrerlo: donde había $\mathbf{X}_{11}$ hay ahora $\mathbf{X}_{12}$, el símbolo que aparece es Γ^2_{12} en vez de Γ^2_{11}, y al pasarlo a coeficientes métricos cambian dos cosas y solo dos, la derivada que sobrevive y su signo:

$$\mathbf{X}_{12}\cdot\mathbf{X}_2=\Gamma^2_{12}g_{22}=\tfrac{1}{2}\,\partial g_{22}/\partial u_1,$$

es decir, la derivada de g_{22} respecto de u_1 con signo más, donde antes salía la de g_{11} respecto de u_2 con signo menos. Quien prefiera verlo sin la fórmula de Christoffel tiene las dos igualdades obtenidas a mano en el bloque *Otra vía* que viene unas líneas más abajo.

Paso 5: recomponer. Sustituyendo,

$$\frac{\partial E_1}{\partial u_1}\cdot E_2=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}/\partial u_2}{\sqrt{g}},\qquad \frac{\partial E_1}{\partial u_2}\cdot E_2=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}/\partial u_1}{\sqrt{g}},$$

y por tanto

$$\left[\frac{DE_1}{dt}\right]=\frac{1}{2\sqrt{g}}\Big\{\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}u_2'-\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}u_1'\Big\},$$

que junto con la primera igualdad da el enunciado.

Lo que hay que llevarse. Cuatro movimientos. (i) Se compara V con la rejilla $E_1=\mathbf{X}_1/\sqrt{g_{11}}$, y la resta de giros da $\left[\frac{DV}{dt}\right]=\left[\frac{DE_1}{dt}\right]+\varphi'$. (ii) El giro de la rejilla es $E_1'\cdot E_2$, que la regla de la cadena parte en un término con u_1' y otro con u_2'. (iii) Con $g_{12}=0$, esos términos se reducen a $\mathbf{X}_{11}\cdot\mathbf{X}_2/\sqrt{g}$ y $\mathbf{X}_{12}\cdot\mathbf{X}_2/\sqrt{g}$. (iv) El núcleo: derivando $g_{12}=0$, g_{11} y g_{22}, esos dos productos valen $-\frac{1}{2}\,\partial g_{11}/\partial u_2$ y $\frac{1}{2}\,\partial g_{22}/\partial u_1$. No queda nada del espacio ambiente: solo métrica.

Observación (Qué papel juega cada hipótesis)**.** ▪ $g_{12}=0$. Entra dos veces y las dos son esenciales. En el paso 1 hace que $\{E_1,E_2\}$ sea ortonormal, sin lo cual no hay ángulos que medir directamente; y en el paso 3 hace desaparecer un sumando entero al proyectar, además de permitir escribir $g=g_{11}g_{22}$. Sin ortogonalidad el resultado sigue siendo cierto pero con una expresión con más términos. La ortogonalidad deja a la vista la forma que usaremos al integrar.

▪ V **unitario**. Es lo que da sentido al valor algebraico: para un campo que cambia de longitud,

la derivada covariante mezcla estiramiento con giro. Para aislar el giro de un campo no nulo se aplica el resultado a $V/|V|$.
- **Orientación compatible.** Es lo que fija $\mathbf{N} \times E_1 = E_2$ y no $-E_2$. Si se invierte, la fórmula sale con el signo cambiado, que es el mismo cambio de signo que sufre K_g al invertir la orientación.

Otra vía (sin símbolos de Christoffel). El paso donde se identifica $\mathbf{X}_{11}\cdot\mathbf{X}_2$ es el único que pide maquinaria, y se puede evitar por completo derivando los coeficientes métricos directamente. Merece la pena, porque es más corto y no hay que recordar la fórmula de Christoffel.

Se parte de $g_{11} = \mathbf{X}_1\cdot\mathbf{X}_1$ y se deriva respecto de u_2:

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} = 2\,\mathbf{X}_{12}\cdot\mathbf{X}_1 \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{X}_1\cdot\mathbf{X}_{12} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}.$$

Ahora se deriva $g_{12} = \mathbf{X}_1\cdot\mathbf{X}_2$ respecto de u_1, teniendo en cuenta que $g_{12} \equiv 0$ y que $\mathbf{X}_{21} = \mathbf{X}_{12}$:

$$0 = \frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} = \mathbf{X}_{11}\cdot\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_1\cdot\mathbf{X}_{12} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{X}_{11}\cdot\mathbf{X}_2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}.$$

Y para el otro, se deriva $g_{22} = \mathbf{X}_2\cdot\mathbf{X}_2$ respecto de u_1:

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} = 2\,\mathbf{X}_{21}\cdot\mathbf{X}_2 \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{X}_{12}\cdot\mathbf{X}_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}.$$

Salen los mismos dos valores en cuatro líneas. La vía de los símbolos tiene la ventaja de dejar a la vista que la fórmula es intrínseca, porque los símbolos de Christoffel lo son; esta tiene la ventaja de que no hay que recordar nada.

Corolario (Fórmula de Liouville)**.** Sean $x = x(u_1, u_2)$ una superficie simple de M entorno de un punto p, con $g_{12} = 0$ y orientación compatible con la de M; $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. contenida en dicha superficie simple y pasando por p; y $\varphi(s)$ el ángulo de $\mathbf{X}_1(s)$ a $\mathbf{t}(s)$ en la orientación dada. Entonces

$$K_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{g(s)}}\left\{\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}(s)\,\dot{u}_2(s) - \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}(s)\,\dot{u}_1(s)\right\} + \frac{d\varphi}{ds}.$$

> Basta aplicar la proposición anterior al campo $V = \dot{\alpha}$, que es unitario por estar α parametrizada naturalmente, y observar que
>
> $$K_g(s) = (\ddot{\alpha}(s), \mathbf{N}(s), \dot{\alpha}(s)) = \left[\frac{D\dot{\alpha}}{ds}\right],$$
>
> que es la caracterización del valor algebraico aplicada a $V = \dot{\alpha}$, cuya derivada es $\ddot{\alpha}$.

Cómo se lee el primer sumando. Donde mejor se ve es en las propias líneas coordenadas, porque en ellas el segundo sumando desaparece. Sobre una u_2-curva, con u_1 constante y recorrida con u_2 creciente, el tangente es $E_2 = \mathbf{N} \times E_1$, el ángulo desde E_1 vale $\pi/2$ todo el rato, $\dot{u}_1 = 0$ y $\dot{u}_2 = 1/\sqrt{g_{22}}$. Liouville da

$$K_g = \frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}}\,\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\,\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\,\frac{\partial}{\partial u_1}\log\sqrt{g_{22}}.$$

Se lee así. Un trozo de la u_2-curva de parámetro du_2 mide $\sqrt{g_{22}}\,du_2$, y $\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial}{\partial u_1}$ es la derivada por unidad de longitud cuando uno se aparta de la curva en perpendicular, hacia E_1. Luego **la curvatura geodésica de una línea coordenada es la rapidez relativa con que se alargan sus vecinas al apartarse de ella**. Si se alargan hacia E_1, es $K_g > 0$ y la curva gira hacia $\mathbf{S} = \mathbf{N} \times E_2 = -E_1$, es decir, hacia el lado donde sus vecinas son más cortas. Es lo que le pasa a un corredor en una pista: la calle interior es más corta, y quien quiere mantenerse siempre a la misma distancia del centro tiene que ir girando hacia dentro. En las circunferencias de la rejilla polar, $\sqrt{g_{22}} = r$ y sale $K_g = 1/r$; en los paralelos de la esfera unidad, $\sqrt{g_{22}} = \cos u$ y sale $-\operatorname{tg} u$, el valor que calcula el ejercicio siguiente. Con los papeles cambiados, sobre una u_1-curva recorrida con u_1 creciente es $K_g = -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial}{\partial u_2}\log\sqrt{g_{11}}$.

CONEXIÓN: QUÉ DE *Geometría local* SE ACABA DE COBRAR

Esta sección es el punto de la asignatura donde más material anterior se usa de golpe. Conviene verlo listado, porque explica por qué aquel libro entero es prerrequisito de este.

- **Los coeficientes métricos** g_{ij} y el hecho de que $g > 0$ por la condición de regularidad (sección 3.1 de aquel libro). Sin eso no hay $\sqrt{g}$ en el denominador.
- **Las ecuaciones de Gauss** $\mathbf{X}_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \mathbf{X}_k + L_{ij}\mathbf{N}$ (sección 3.1), que son las que permiten escribir $\mathbf{X}_{11}\cdot\mathbf{X}_2$ en términos de un símbolo de Christoffel.
- **El teorema de Gauss** (sección 3.1) que da los Γ_{ij}^k en función de los g_{ij} y sus derivadas, y que es lo que hace intrínseca la fórmula.
- **La derivada covariante** y su expresión en coordenadas (sección 3.4).
- **La caracterización de** K_g (sección 3.3) como $(\mathbf{N}, \dot\alpha, \ddot\alpha)$, y el hecho de que la curvatura geodésica sea intrínseca, que aquí deja de ser un enunciado y se convierte en una fórmula utilizable.
- **La condición** $g_{12} = 0$, que en aquel libro (sección 3.2, apartado *Ángulo*) era el criterio de ortogonalidad de las líneas paramétricas y aquí es la hipótesis de trabajo.

Y hay un cobro más, que se hará efectivo en la sección siguiente: la curvatura de Gauss admite, en coordenadas con $g_{12} = 0$, una expresión que solo usa g_{11}, g_{22} y sus derivadas. Al aplicar el teorema de Green al primer sumando de Liouville aparece exactamente esa expresión, con signo cambiado. De ahí sale el $-\iint_T K\,dA$ del teorema.

Ejercicio 1.3. *La curvatura geodésica de un paralelo de la esfera, por dos caminos*

En la esfera unidad con la p.l. habitual

$$x(u,v) = (\cos u\cos v,\ \cos u\,\operatorname{sen} v,\ \operatorname{sen} u), \qquad u \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}), \quad v \in (0, 2\pi),$$

se considera el paralelo $u = u_0$, recorrido en el sentido de v creciente.

1. Calcular los coeficientes métricos y comprobar que $g_{12} = 0$.
2. Identificar el campo normal $\mathbf{N}$ que induce esta parametrización. ¿Apunta hacia fuera o hacia dentro de la esfera?
3. Calcular K_g del paralelo con la fórmula extrínseca $(\mathbf{N}, \dot\alpha, \ddot\alpha)$.
4. Calcularlo otra vez con la fórmula de Liouville y comprobar que coincide.
5. ¿Para qué valores de u_0 es el paralelo una geodésica? ¿Concuerda con lo que se sabe de las geodésicas de la esfera?

Resolución. 1. Coeficientes métricos.

$$\mathbf{X}_1 = (-\operatorname{sen} u\cos v,\ -\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v,\ \cos u), \qquad \mathbf{X}_2 = (-\cos u\operatorname{sen} v,\ \cos u\cos v,\ 0).$$

De ahí

$$g_{11} = \operatorname{sen}^2 u \cos^2 v + \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^2 v + \cos^2 u = \operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1,$$

$$g_{22} = \cos^2 u \operatorname{sen}^2 v + \cos^2 u \cos^2 v = \cos^2 u,$$

$$g_{12} = \operatorname{sen} u \cos u \operatorname{sen} v \cos v - \operatorname{sen} u \cos u \operatorname{sen} v \cos v = 0. \quad \checkmark$$

Luego $g = g_{11}g_{22} = \cos^2 u$ y $\sqrt{g} = \cos u$, que es positivo en el dominio.

2. El campo normal. Calculando el producto vectorial componente a componente sale

$$\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = -\cos u \left(\cos u \cos v,\ \cos u \operatorname{sen} v,\ \operatorname{sen} u\right) = -\cos u\ x(u,v).$$

Como $\cos u > 0$ en el dominio y $|x(u,v)| = 1$, resulta

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|} = -x(u,v),$$

es decir, el normal **interior**: apunta hacia el centro de la esfera. Conviene subrayarlo porque es contraintuitivo y decide todos los signos que vienen. La parametrización habitual de la esfera no induce el normal exterior.

3. Cálculo extrínseco. Con $c = \cos u_0$ y $s = \operatorname{sen} u_0$, el paralelo es

$$\alpha(v) = (c\cos v,\ c\operatorname{sen} v,\ s), \qquad \alpha'(v) = (-c\operatorname{sen} v,\ c\cos v,\ 0),$$

$$\alpha''(v) = (-c\cos v,\ -c\operatorname{sen} v,\ 0),$$

y sobre él $\mathbf{N} = -(c\cos v,\ c\operatorname{sen} v,\ s)$. Como

$$\alpha' \times \alpha'' = (0,\ 0,\ c^2\operatorname{sen}^2 v + c^2\cos^2 v) = (0,0,c^2),$$

se tiene $(\mathbf{N}, \alpha', \alpha'') = \mathbf{N}\cdot(\alpha' \times \alpha'') = -s\,c^2$. Y como $|\alpha'| = c$, la fórmula para parámetro arbitrario da

$$K_g = \frac{(\mathbf{N}, \alpha', \alpha'')}{|\alpha'|^3} = \frac{-s\,c^2}{c^3} = -\frac{\operatorname{sen} u_0}{\cos u_0} = -\operatorname{tg} u_0.$$

4. Cálculo por Liouville. El paralelo tiene $u_1 = u_0$ constante, luego $\dot{u}_1 = 0$ y el segundo término del corchete desaparece. Para el primero,

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} = \frac{\partial(\cos^2 u)}{\partial u} = -2\cos u \operatorname{sen} u.$$

El parámetro natural es $s = v\cos u_0$, porque $|\alpha'| = \cos u_0$ es constante, de modo que

$$\dot{u}_2 = \frac{dv}{ds} = \frac{1}{\cos u_0}.$$

Sustituyendo en la fórmula de Liouville,

$$K_g = \frac{1}{2\cos u_0}\left\{(-2\cos u_0 \operatorname{sen} u_0)\cdot\frac{1}{\cos u_0}\right\} + \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{\operatorname{sen} u_0}{\cos u_0} + \frac{d\varphi}{ds}.$$

Falta el término del ángulo. φ es el ángulo de $\mathbf{X}_1$ a $\mathbf{t}$. Pero $\mathbf{X}_1$ apunta a lo largo del meridiano y $\mathbf{t} = \alpha'/|\alpha'| = \mathbf{X}_2/\sqrt{g_{22}}$ apunta a lo largo del paralelo, y como $g_{12} = 0$ son perpendiculares en todos los puntos. Se comprueba además que $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{t} = \mathbf{N}$, de modo que el triedro $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{t}, \mathbf{N}\}$ es directo y $\varphi \equiv \pi/2$. Al ser constante, $d\varphi/ds = 0$ y queda

$$K_g = -\operatorname{tg} u_0,$$

que coincide con el cálculo extrínseco. ✓

5. ¿Cuándo es geodésica? $K_g = -\operatorname{tg} u_0$ se anula si y solo si $u_0 = 0$, es decir, solo para el ecuador. Y eso concuerda exactamente con lo que se sabía de *Geometría local* (sección 3.5, *Geodésicas*): las geodésicas de la esfera son los círculos máximos, y el único paralelo que es un círculo máximo es el ecuador. Concuerda también con el ejemplo del transporte paralelo de aquel libro (sección 3.4), donde se comprobaba que el campo velocidad de un paralelo es paralelo si y solo si el paralelo es el ecuador. ■

Observación (El error de signo que hay que vigilar)**.** Si uno da por hecho, sin comprobarlo, que la parametrización habitual de la esfera induce el normal exterior, obtiene $K_g = +\operatorname{tg} u_0$ y todos los signos posteriores cambian. No es un error grave mientras uno sea coherente, porque el signo de K_g es convencional; pero **deja de ser inocuo en cuanto se aplica Gauss-Bonnet**, porque ahí el signo de K_g tiene que ser el que corresponde a la orientación positiva de la frontera respecto de la región elegida.

La regla segura: calcular $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ siempre, y no suponer nunca hacia dónde apunta.

Qué se ha ganado. La pregunta del timonel tiene respuesta, y sale de la carta de navegación sin salir de ella: Liouville solo pide la escala de la carta, que son los g_{ij}, y el rumbo respecto de los meridianos, que es φ. Un barco que sigue un paralelo lleva rumbo constante, así que el segundo sumando es nulo y todo el giro lo pone el primero. Los paralelos se acortan hacia el polo, y quien quiere seguir uno tiene que ir girando hacia el polo a razón de $|K_g| = \operatorname{tg} u_0 / a$ radianes por unidad de longitud en una esfera de radio a: es el valor del ejercicio, dividido por a porque la curvatura geodésica tiene dimensiones de inverso de longitud. Si suelta el timón, el barco sigue una geodésica, un círculo máximo, que se aparta del paralelo hacia el ecuador. En una esfera del tamaño de la Tierra, con $a \approx 6371$ km, por cada 1000 km recorridos hay que girar unos 5,2° a 30° de latitud, 9,0° a 45° y 15,6° a 60°; en el ecuador, nada. Cuanto más cerca del polo, más timón, como decía la pregunta. Lo que queda abierto es para qué sirve la partición en dos sumandos al integrar sobre una curva cerrada, y eso es la sección siguiente.

Repaso: la fórmula de Liouville

REPASO INTERCALADO: LIOUVILLE, PRIMERA RONDA

A libro cerrado.

1. Define el valor algebraico de la derivada covariante y demuestra el lema que garantiza que está bien definido.
2. Prueba que $\left[\frac{DV}{dt}\right] = (V', \mathbf{N}, V)$.
3. ¿Por qué el signo de $\left[\frac{DV}{dt}\right]$ depende de la orientación y la propiedad de ser paralelo no?
4. Enuncia la fórmula de Liouville. ¿Qué sumando mide el giro de la rejilla al recorrer la curva y cuál el giro de la tangente respecto de ella?
5. ¿Qué hipótesis sobre la parametrización hace falta para que la fórmula valga, y dónde se usa en la demostración?

REPASO INTERCALADO: LIOUVILLE, SEGUNDA RONDA, CON MATERIAL ANTERIOR

1. Reconstruye la construcción de una determinación diferenciable del ángulo. ¿Por qué no basta con tomar el arcocoseno?
2. En la demostración de que $\left[\frac{DW}{dt}\right] - \left[\frac{DV}{dt}\right] = \varphi'$ se usa dos veces que un campo unitario es ortogonal a su derivada. Localiza los dos sitios.
3. ¿Qué cinco resultados de *Geometría local* se usan en la demostración de la fórmula de Liouville?
4. Calcula K_g de un meridiano de la esfera con Liouville, sin hacer ninguna cuenta vectorial. ¿Qué sale y por qué tenía que salir eso?
5. En una superficie con $g_{11} = g_{22} = 1$ y $g_{12} = 0$, ¿en qué se convierte la fórmula de Liouville? ¿Qué superficies conocidas admiten esas coordenadas?
6. El primer sumando de Liouville se convertirá, en la sección siguiente, en la curvatura de Gauss. Sin mirar: ¿mediante qué teorema, y en qué plano se aplica?

1.3 El Teorema de Gauss-Bonnet

LA PREGUNTA: LA VUELTA QUE NO SALE ENTERA

Alguien recorre a pie el borde de una finca en terreno llano y va sumando todos los giros que hace su cuerpo, positivos a la izquierda y negativos a la derecha. Al volver al punto de partida la suma es exactamente una vuelta entera, y lo es para cualquier finca, tenga la forma que tenga. Repite el recorrido alrededor de una finca en la ladera de una colina y la cuenta ya no cuadra. ¿Adónde se ha ido la diferencia, y se puede predecir midiendo solo dentro de la finca?

Esta sección demuestra el teorema. El camino tiene tres tramos: primero se aprende a contar los giros que ocurren de golpe en los vértices y se demuestra que, en el plano, la tangente de una curva cerrada simple da exactamente una vuelta; después se prueba el teorema para un triángulo, con el teorema de Green y la fórmula de Liouville; y por último se pega triángulo con triángulo para llegar a cualquier región regular, con o sin agujeros, y a las superficies compactas enteras.

1.3.1 Ángulos externos y ángulos internos

LA PREGUNTA: CONTABILIZAR UN GIRO QUE OCURRE EN UN INSTANTE

Quien camina alrededor de una manzana de casas apenas gira a lo largo de las aceras y gira de golpe en cada esquina: casi todo el giro del paseo ocurre en cuatro instantes. Al recorrer la frontera de una región con esquinas le pasa lo mismo al vector tangente, que gira suavemente a lo largo de los lados y *salta* en cada vértice; una integral no ve ese salto, porque en el vértice la derivada ni siquiera existe. ¿Cómo se contabiliza lo que gira la tangente en un punto donde no está definida, y qué se hace cuando la esquina es tan aguda que la curva vuelve exactamente sobre sus pasos?

LA IDEA: LO QUE GIRA LA TANGENTE AL DOBLAR UNA ESQUINA

Ya solo falta una pieza del enunciado, y es la que más cuesta.
Imagínese que se recorre la frontera de una región. Mientras se está en un arco regular, el vector tangente gira suavemente. Al llegar a un vértice, salta: el vector tangente antes de la esquina y el vector tangente después no coinciden, y el ángulo que hay que girar para pasar de uno a otro es el **ángulo externo** de ese vértice. El ángulo *interno* es lo que queda para completar π, es decir, el ángulo que uno mediría con un transportador por dentro de la región.
En el plano, para una curva cerrada simple, los giros suaves de la tangente más los saltos suman $\pm 2\pi$. Volver mirando en la misma dirección solo garantiza un número entero de vueltas; que sea exactamente una es el contenido del teorema del índice de rotación. Sobre una superficie curva habrá que distinguir ese giro respecto de una rejilla del giro intrínseco que mide K_g.

Sea $\alpha : [0, l] \to M$ una curva regular a trozos, cerrada y simple, con k vértices $\alpha(t_i)$, donde $0 = t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} = l$ y $\alpha(t_1) = \alpha(t_{k+1})$. Como cada restricción $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ es regular, en $t = t_i$ existen las derivadas laterales

$$\alpha'(t_i^+) = \lim_{t \to t_i^+} \alpha'(t), \qquad \alpha'(t_i^-) = \lim_{t \to t_i^-} \alpha'(t),$$

las dos no nulas. En el punto inicial se entiende la derivada entrante como la del último arco, al cerrar la curva. Para interpretar los ángulos internos, suponemos que α recorre positivamente la frontera de una región R.

Definición. Sea φ_i la menor determinación del ángulo de $\alpha'(t_i^-)$ a $\alpha'(t_i^+)$, de modo que $0 < |\varphi_i| \leq \pi$.

- Si $|\varphi_i| \neq \pi$, es decir, si el vértice **no es cuspidal**, se le da a φ_i el signo del determinante $(\alpha'(t_i^-), \alpha'(t_i^+), \mathbf{N}(t_i))$.
- Si $\alpha(t_i)$ es un **punto cuspidal**, las tangentes son antiparalelas y $|\varphi_i| = \pi$. El signo lo decide el lado que ocupa R: si el ángulo interno es 0 (la región termina en un pico estrecho), se toma $\varphi_i = +\pi$; si es 2π (el pico entra en la región), se toma $\varphi_i = -\pi$.

El ángulo signado φ_i se llama **ángulo externo**, o **salto**, en el vértice $\alpha(t_i)$, y al ángulo $\pi - \varphi_i$ se le llama **ángulo interno**.

Conviene fijar de una vez la notación que se usará en todo el capítulo, porque los dos ángulos aparecen mezclados y confundirlos estropea cualquier cuenta. Escribiendo $\widetilde{\varphi}_i$ para el interno,

$$\varphi_i + \widetilde{\varphi}_i = \pi, \qquad \text{es decir} \qquad \varphi_i = \pi - \widetilde{\varphi}_i, \qquad 0 \leq \widetilde{\varphi}_i \leq 2\pi. \tag{1.1}$$

El que aparece en el teorema de Gauss-Bonnet es *siempre* el externo φ_i; el que uno mide con un transportador dentro de la región es *siempre* el interno $\widetilde{\varphi}_i$. Y la regla de signos de la definición, escrita de un vistazo, es

$$\operatorname{sig} \varphi_i = \operatorname{sig}(\alpha'(t_i^-), \alpha'(t_i^+), \mathbf{N}(t_i)), \tag{1.2}$$

para vértices no cuspidales. En una cúspide se usa el lado que ocupa la región:

$$\widetilde{\varphi}_i = 0 \implies \varphi_i = \pi, \qquad \widetilde{\varphi}_i = 2\pi \implies \varphi_i = -\pi. \tag{1.3}$$

Mirar el signo del determinante en puntos cercanos puede ayudar en dibujos sencillos, pero la regularidad de los arcos no garantiza que ese signo se estabilice. Si se invierte el recorrido

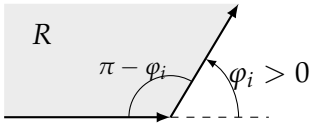
manteniendo $\mathbf{N}$, los saltos cambian de signo; la relación con el ángulo interior de R se lee con el recorrido positivo.

Tres advertencias que conviene tener presentes.

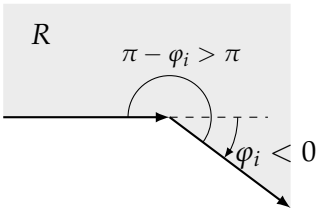
Primera: el ángulo externo tiene signo y el interno se deduce de él. Un vértice convexo, en el que la región «se cierra», tiene ángulo externo positivo y ángulo interno menor que π. Un vértice cóncavo, en el que la región «se abre», tiene ángulo externo negativo y ángulo interno mayor que π. En símbolos,

$$\text{convexo:}\quad 0 < \varphi_i \le \pi,\ \ 0 \le \widetilde{\varphi}_i < \pi; \qquad \text{cóncavo:}\quad -\pi \le \varphi_i < 0,\ \ \pi < \widetilde{\varphi}_i \le 2\pi.$$

La suma de los ángulos externos de una región con esquinas cóncavas puede ser bastante menor que la de una convexa.



vértice convexo: la tangente gira a la izquierda



vértice cóncavo: la tangente gira a la derecha

La región queda a la izquierda de la marcha. En el vértice convexo la tangente gira hacia la región, $\varphi_i > 0$ y el ángulo interno es menor que π; en el cóncavo gira hacia fuera, $\varphi_i < 0$ y el interno supera π.

Segunda: el caso cuspidal es aparte y no es un capricho. Cuando $|\varphi_i| = \pi$, los dos vectores tangentes son antiparalelos y el determinante que daría el signo se anula: hay que mirar qué ocurre *cerca* del vértice, no en él. Un pico en el que la curva vuelve sobre sus pasos tiene ángulo externo π o $-\pi$ según hacia qué lado quede la región.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: FIJAR EL ÁNGULO CUSPIDAL SIEMPRE EN $+\pi$

La alternativa. En un vértice cuspidal, donde los dos vectores tangentes son antiparalelos, convenir sin más que el ángulo externo vale $+\pi$, sin distinguir qué lado ocupa la región.
Su ventaja. Elimina el único caso especial de la definición. El determinante $(\alpha'(t_i^-), \alpha'(t_i^+), \mathbf{N}(t_i))$ se anula justamente ahí, de modo que la regla general no decide, y el convenio la sustituiría por una respuesta única y sin ambigüedad.
Qué la hunde. Que hay cúspides de los dos tipos y el teorema del índice de rotación distingue entre ellas: una cúspide en la que la región queda por fuera del pico tiene ángulo interior 2π y aporta $-\pi$; si la región ocupa el pico estrecho, el interior es 0 y aporta $+\pi$. Si se fijaran las dos en $+\pi$, la suma de todos los giros dejaría de valer $\pm 2\pi$ y Gauss-Bonnet daría un resultado equivocado en cuanto la región tuviera un pico entrante. El dato que falta en las tangentes antiparalelas es cuál de sus dos lados ocupa R.

Tercera: hay que decidir cuál de los dos ángulos que se ven es cuál. En un vértice de la frontera el ángulo de corte de los dos segmentos regulares — aquel cuyo coseno es el producto escalar de los vectores tangentes respectivos — coincide con el ángulo exterior o con el interior según la orientación. Es el punto exacto donde más fácil es equivocarse.

Dos ejemplos planos fijan las tres advertencias, y conviene hacerlos de cabeza. En un cuadrado recorrido en sentido antihorario los cuatro vértices son convexos, con $\widetilde{\varphi}_i = \pi/2$, luego

$$\varphi_i = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{4} \varphi_i = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

En una región en forma de ele hay seis vértices: cinco convexos, otra vez con $\widetilde{\varphi} = \pi/2$, y uno cóncavo con $\widetilde{\varphi} = 3\pi/2$, cuyo ángulo externo es *negativo*, $\varphi = \pi - 3\pi/2 = -\pi/2$. La suma vuelve a salir la misma:

$$\sum_i \varphi_i = 5 \cdot \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi.$$

Que las dos sumas coincidan no es casualidad: es el teorema del índice de rotación de la subsección siguiente, y el vértice cóncavo es justamente el que obliga a que los ángulos externos lleven signo.

EXPLÍCATE. *Toma un cuadrado en el plano orientado por $(0,0,1)$, recorrido en sentido antihorario. Sin calcular nada, di cuánto vale cada ángulo externo y cuánto suman los cuatro. Después hazlo con una región en forma de ele, que tiene un vértice cóncavo, y compara las dos sumas.*

1.3.2 El teorema del índice de rotación

LA PREGUNTA: CUÁNTAS VUELTAS DA LA TANGENTE

Un coche completa un circuito plano sin cruces y vuelve a la salida apuntando hacia donde apuntaba. Si seguimos desde arriba la dirección del coche y sumamos sus giros con signo, ¿depende el resultado de lo enrevesado que sea el trazado, o siempre queda exactamente una vuelta neta?

LA IDEA: LA DIRECCIÓN TANGENTE DA UNA VUELTA NETA

Dibujemos una flecha tangente que avance por la curva plana. No seguimos el volante, sino la dirección del movimiento respecto de unos ejes fijos. La flecha gira a lo largo de cada arco y salta en las esquinas. El teorema afirma que, si la curva es cerrada y simple, la suma es $\pm 2\pi$.

La curva puede serpentear y la flecha puede girar a ambos lados. Lo que se cuenta es el balance con signo, no todo lo que ha girado en valor absoluto. En un triángulo recorrido positivamente, ese balance se ve en las tres esquinas: sus giros suman 2π. El resultado dice que una frontera simple, por retorcida que sea, conserva ese mismo balance.

Cerrar la curva solo obliga a que el giro sea un múltiplo entero de 2π. La hipótesis de simplicidad es la que reduce ese entero a $+1$ o -1; justificar este paso es la dificultad real del teorema. En una superficie, usaremos la versión que mide el ángulo respecto de un campo coordenado definido sobre toda la región simple encerrada, no solo sobre su borde.

Teorema (Teorema del índice de rotación, Hopf 1935)**.** Sea $x : U \to M$ una p.l. con orientación compatible con la de M, es decir, con $\mathbf{N} = (\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2)/|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|$. Sea $\alpha = \alpha(s) : [0, l] \to x(U)$ una curva cerrada, simple, regular a trozos y parametrizada naturalmente, que limita una región simple $R \subset x(U)$, con k vértices. Sea θ_i una determinación diferenciable del ángulo que forma $\dot{\alpha}(s)$ con $\mathbf{X}_1(s)$ a lo largo del lado $\alpha([s_i, s_{i+1}])$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{k} \big(\theta_i(s_{i+1}) - \theta_i(s_i)\big) + \sum_{i=1}^{k} \varphi_i = \pm 2\pi.$$

El signo es positivo si α está orientada positivamente y negativo en caso contrario.

Es decir: *las variaciones del ángulo de $\dot{\alpha}$ respecto de $\mathbf{X}_1$ en todos los lados, más los saltos en los vértices, suman $\pm 2\pi$.*

DE DÓNDE VIENE: QUÉ APORTÓ HOPF EN 1935

El resultado era conocido antes de 1935. En la primera página de su artículo *Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven*, Hopf dice que presenta nuevas demostraciones de resultados conocidos y cita pruebas anteriores. Su aportación aquí es una demostración especialmente breve mediante las direcciones de las secantes y de las tangentes.
No se reproduce esa prueba en este libro. Conviene distinguir el argumento visual que permite recordar el enunciado de la demostración que garantiza que vale para todas las curvas admitidas, incluidas las que se retuercen muchas veces.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: ENUNCIARLO PARA CURVAS CERRADAS CUALESQUIERA

La alternativa. Quitar la hipótesis de simplicidad y afirmar el teorema para toda curva cerrada regular a trozos.
Su ventaja. Sería mucho más general, y la simplicidad es precisamente la hipótesis más incómoda de verificar en un problema concreto: exige saber que la curva no se corta a sí misma en ningún sitio.
Qué la hunde. Que es falso, y falla en los ejemplos más sencillos. Una circunferencia recorrida dos veces tiene una tangente que gira 4π, no 2π. Una curva en forma de ocho tiene variación total nula, porque las dos vueltas que da son de signos contrarios y se cancelan. Lo que sí es cierto para cualquier curva cerrada es que la variación total del ángulo es un múltiplo entero de 2π, y ese entero — el índice de rotación propiamente dicho — es un invariante que se estudia por su cuenta y que no se ha tirado a la basura. Lo que la simplicidad compra es que ese entero valga exactamente ± 1, y de ahí sale el 2π suelto del segundo miembro de Gauss-Bonnet.

Ejercicio 1.4. *La suma de los ángulos externos de un triángulo curvilíneo del cilindro*

Sea C el cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$. En él se consideran las curvas: α, el resultado de cortar C con el plano $x = z$; β, el meridiano $x = 1$, $y = 0$; y γ, el paralelo $z = 0$. Sea R la región encerrada por α, β y γ en el semiespacio $x \geq 0$.
Calcular la suma de los ángulos externos de R.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Parametriza el cilindro por $x(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$ y escribe las tres curvas en esas coordenadas. Dos de ellas son líneas paramétricas.*
2. *La condición $x \geq 0$ dice qué intervalo recorre u.*
3. *Dibuja la región en el plano (u, v). Recuerda del ejercicio de las trayectorias ortogonales que esa p.l. tiene la identidad por matriz de la P.F.F.: en ese plano los ángulos se miden como en el plano euclídeo de siempre.*
4. *Los ángulos externos son π menos los internos. Y los internos se leen del dibujo, sin integrar nada.*

Resolución. Preparación: todo en coordenadas. Con $x(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$ las tres curvas son

$$\alpha:\ v = \cos u\ \ (\text{porque } z = x = \cos u), \qquad \beta:\ u = 0, \qquad \gamma:\ v = 0.$$

La condición $x \geq 0$ equivale a $\cos u \geq 0$, es decir, $u \in [-\pi/2, \pi/2]$.

En el rectángulo de parámetros, γ es el eje horizontal $v = 0$, β es el eje vertical $u = 0$, y α es la gráfica de $v = \cos u$, que sobre $[-\pi/2, \pi/2]$ es un arco que sube desde $(-\pi/2, 0)$ hasta

el máximo $(0,1)$ y baja hasta $(\pi/2,0)$. Las tres curvas encierran **dos** regiones triangulares simétricas, la de $u \in [-\pi/2,0]$ y la de $u \in [0,\pi/2]$. Se toma la segunda; por simetría la otra da lo mismo.

Sus tres vértices son

$$P_1 = x(0,0) = (1,0,0), \qquad P_2 = x(\tfrac{\pi}{2},0) = (0,1,0), \qquad P_3 = x(0,1) = (1,0,1),$$

que son, respectivamente, $\beta \cap \gamma$, $\gamma \cap \alpha$ y $\alpha \cap \beta$.

Por qué se puede medir en el plano de parámetros. Como se comprobó antes, $g_{11} = g_{22} = 1$ y $g_{12} = 0$: la matriz de la P.F.F. es la identidad. Por tanto la parametrización conserva ángulos y longitudes, y los ángulos de la región sobre el cilindro son *exactamente* los del dibujo plano. Este es el paso que ahorra todo el trabajo, y es legítimo justificarlo así: no se está calculando ninguna curvatura geodésica.

Los tres ángulos internos.

En P_1, la región ocupa localmente el cuadrante $\{u \geq 0,\ v \geq 0\}$, porque $\cos u \approx 1$ cerca de $u = 0$. Los dos lados que llegan son γ, en la dirección $\partial/\partial u$, y β, en la dirección $\partial/\partial v$. Son perpendiculares, luego el ángulo interno vale $\pi/2$.

En P_3, la región es localmente $\{u \geq 0,\ v \leq \cos u\}$. El lado β llega en la dirección vertical, y el lado α sale con pendiente $dv/du = -\operatorname{sen} u = 0$ en $u = 0$, es decir, horizontal. Otra vez perpendiculares: ángulo interno $\pi/2$.

En P_2, con $u = \pi/2$, el lado γ tiene dirección $(-1,0)$ en coordenadas (u,v), hacia u decreciente, y el lado α sale con pendiente $dv/du = -\operatorname{sen}(\pi/2) = -1$, es decir, en la dirección $(-1,1)$ hacia u decreciente. El ángulo entre $(-1,0)$ y $(-1,1)$ es $\pi/4$.

La suma. Los ángulos externos son $\varphi_i = \pi - \widetilde{\varphi}_i$:

$$\varphi_1 = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}, \qquad \varphi_3 = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

y todos son positivos porque los tres vértices son convexos. Luego

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3} \varphi_i = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}}$$

■

Otra vía (comprobando los signos con el determinante). El paso que se ha dado por bueno es que los tres ángulos externos son positivos. Se comprueba con la definición, y merece la pena hacerlo una vez.

Se necesita el campo normal. Como $\mathbf{X}_1 = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0)$ y $\mathbf{X}_2 = (0,0,1)$, resulta $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0)$, que es unitario: aquí sí, el normal inducido es el **exterior**, al revés que en la esfera.

La orientación positiva de la frontera recorre γ con u creciente, luego α con u decreciente, y por último β bajando. En el vértice P_2, el vector tangente entrante es $\alpha'(t^-) = (-1,0,0)$ y el saliente es $\alpha'(t^+) = (1,0,1)$, y $\mathbf{N}(P_2) = (0,1,0)$. El determinante vale

$$((-1,0,0),(1,0,1),(0,1,0)) = 1 > 0,$$

luego $\varphi_2 > 0$, y el ángulo entre los dos vectores tangentes es $3\pi/4$, no $\pi/4$: el ángulo externo es el suplementario del que se lee entre los lados, tal y conviene advertirlo. Los otros dos vértices salen igual, con determinante 1 y ángulo $\pi/2$.

Otra vía (comprobación final con el teorema). Esta segunda comprobación usa Gauss-Bonnet y un cálculo directo de la integral de curvatura geodésica. Verifica por otra vía que el $7\pi/4$ es correcto.

El cilindro tiene $K \equiv 0$, y R es una región simple, luego $\chi(R) = 1$ y el teorema de Gauss-Bonnet da

$$\oint_{\partial R} K_g\, ds + 0 + \sum \varphi_i = 2\pi \quad \Longrightarrow \quad \oint_{\partial R} K_g\, ds = 2\pi - \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Hay que ver que la integral vale eso. Los lados γ y β no aportan nada: β es un segmento de recta, y γ es un paralelo, cuya curvatura geodésica en el cilindro es nula porque su vector $\gamma'' = (-\cos u, -\operatorname{sen} u, 0)$ es paralelo al normal $\mathbf{N} = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0)$; los dos son geodésicas.

Para $\alpha(u) = (\cos u, \operatorname{sen} u, \cos u)$ se tiene $|\alpha'|^2 = 1 + \operatorname{sen}^2 u$ y

$$\alpha' \times \alpha'' = (-1, 0, 1), \qquad (\mathbf{N}, \alpha', \alpha'') = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0)\cdot(-1, 0, 1) = -\cos u,$$

de donde $K_g = -\cos u\,/\,(1 + \operatorname{sen}^2 u)^{3/2}$. Recorriendo α con u decreciente, que es lo que pide la orientación positiva, cambian a la vez el signo de K_g y el sentido de recorrido. El elemento de longitud sigue siendo positivo, $ds = \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 u}\,|du|$. Juntando ambos cambios, la integral se escribe:

$$\int_\alpha K_g\, ds = \int_{\pi/2}^{0} \frac{-\cos u}{1 + \operatorname{sen}^2 u}\, du = \int_0^1 \frac{dw}{1 + w^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4},$$

con el cambio $w = \operatorname{sen} u$. Coincide. ✓

QUÉ DEJA. El movimiento que resuelve la mitad de los problemas de esta asignatura: *si la superficie admite una parametrización con la identidad por matriz de la P.F.F., los ángulos se miden en el plano de parámetros y no hay nada que calcular*. El cilindro y el cono lo permiten; la esfera no. Y una advertencia de método: la suma de ángulos externos se obtiene de los giros en las esquinas, teniendo en cuenta qué lado ocupa la región y su orientación; no hace falta calcular K ni K_g.

1.3.3 El lema del triángulo

LA PREGUNTA: BAJAR EL PROBLEMA A UN PLANO DONDE GREEN SEPA TRABAJAR

El teorema que se persigue iguala una integral sobre el borde de una región con otra sobre su interior, que es exactamente lo que hace el teorema de Green. Pero Green vive en un abierto del plano, y aquí hay una superficie curva donde ni las coordenadas son cartesianas ni el área se mide con $du\,dv$. ¿Se puede trasladar el problema al plano de parámetros de modo que Green haga el trabajo, y qué aparece por el camino que nadie había puesto ahí a propósito?

Todo el teorema está en este lema. Lo demás es contabilidad.

LA IDEA: EL PLAN, OTRA VEZ Y YA CON NOMBRES

Se toma un triángulo tan pequeño que quepa entero dentro de una sola p.l. con $g_{12} = 0$, lo cual siempre se puede por el corolario de reparametrización ortogonal. Sobre él se integra la curvatura geodésica de la frontera y se parte con la fórmula de Liouville en dos trozos:

- El trozo de los coeficientes métricos es una integral de línea en el plano de paráme-

tros. El **teorema de Green** la convierte en una integral doble, y esa integral doble resulta ser exactamente $-\iint_T K\,dA$. Este es el paso donde entra la curvatura de Gauss, y entra sola: nadie la ha puesto ahí.
- El trozo de la variación del ángulo es una derivada total. Al integrarla queda la variación total del ángulo de la tangente, y el **teorema del índice de rotación** dice que eso vale 2π menos los saltos.

Sumando los dos, sale el lema. El resto de la sección consiste en pegar triángulos.

La intuición falsa que conviene desmontar antes. Al ver el enunciado por primera vez uno cree que el 2π del segundo miembro es una constante geométrica: algo que sale de medir la superficie, hermano del 2π de la longitud de la circunferencia. No lo es. Ese 2π viene de recorrer positivamente una frontera simple, y entra en la cuenta por el teorema del índice de rotación, que es un enunciado sobre el plano de parámetros y no sobre la superficie. La prueba de que es así es que el 2π sigue ahí para un triángulo de lados rectos en el plano: $K = 0$ y $K_g = 0$ en los lados, y entonces el lema dice únicamente que los ángulos externos de un triángulo plano suman 2π, que es cierto desde la escuela. *Gauss-Bonnet no añade el 2π; lo que añade es que las curvaturas tienen que repartirse ese 2π entre ellas.*

Y el corazón, en una frase. La curvatura de Gauss no se mete en la demostración: **aparece sola, como el rotacional del campo que sale de Liouville, en el momento en que se aplica Green.** Todo lo demás es contabilidad.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: DEMOSTRAR EL LEMA EN COORDENADAS CUALESQUIERA

La alternativa. Aplicar la fórmula de Liouville sin exigir $g_{12} = 0$, ahorrándose el corolario de reparametrización ortogonal del capítulo 2.
Su ventaja. Se evita una construcción técnica entera, que además se apoya en el teorema de la función inversa y en un sistema de ecuaciones diferenciales.
Qué obliga a cambiar. La fórmula de Liouville que acabamos de probar supone $g_{12} = 0$: no se puede usar esa misma expresión quitando la hipótesis. Con coordenadas generales también hay una demostración mediante Green, pero hay que preparar una base ortonormal y calcular su giro. Aquí elegimos coordenadas ortogonales para aprovechar directamente la fórmula ya disponible.

Lema (Lema del triángulo)**.** Sea T un triángulo de M contenido en $x(U)$, donde $x : U \to M$, $x = x(u_1, u_2)$, es una p.l. de M con $g_{12} = 0$ y orientación compatible con la de M. Se recorre ∂T positivamente. Entonces

$$\oint_{\partial T} K_g\,ds + \iint_T K\,dA + \sum_{i=1}^{3} \varphi_i = 2\pi,$$

donde K_g es la curvatura geodésica de ∂T, K la curvatura de Gauss de la superficie y φ_i los ángulos externos de ∂T.

Probamos primero esta versión local, con el triángulo entero dentro de una carta ortogonal. El corolario del capítulo 2 proporciona esas cartas cerca de cada punto; después elegiremos una triangulación suficientemente fina. No afirma que un triángulo

dado de antemano quepa entero en una de ellas.
Sea $\alpha : [0,l] \to M$ una curva cerrada, simple, regular a trozos y parametrizada naturalmente, con $\alpha([0,l]) = \partial T$, $\alpha(s) = x(u_1(s), u_2(s))$, orientada positivamente. Sean $\alpha(s_i)$, $i = 1,2,3,4$, sus vértices, con $\alpha(s_1) = \alpha(0) = \alpha(l) = \alpha(s_4)$. Se descompone

$$\oint_{\partial T} K_g(s)\, ds = \sum_{i=1}^{3} \int_{s_i}^{s_{i+1}} K_g(s)\, ds.$$

Paso 1: partir con Liouville. En cada trozo regular $\alpha([s_i, s_{i+1}])$, la fórmula de Liouville da

$$K_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{g}}\Big\{\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\dot{u}_2 - \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}\dot{u}_1\Big\} + \frac{d\theta_i}{ds},$$

donde $\theta_i(s)$ es el ángulo de $\mathbf{X}_1(s)$ a $\dot{\alpha}(s)$. Integrando en $[s_i, s_{i+1}]$ y sumando en i:

$$\oint_{\partial T} K_g\, ds = \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{1}{2\sqrt{g}}\Big\{\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\dot{u}_2 - \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}\dot{u}_1\Big\} ds}_{\text{(A)}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\theta_i}{ds}\, ds}_{\text{(B)}}.$$

Paso 2: el sumando (A) con el teorema de Green *(el núcleo de la prueba)*. Obsérvese que $\dot{u}_j\, ds = du_j$, de modo que (A) es literalmente una integral de línea en el plano de parámetros a lo largo de $x^{-1}(\partial T)$:

$$\text{(A)} = \oint_{x^{-1}(\partial T)} \big(P\, du_1 + Q\, du_2\big), \qquad P = -\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}, \quad Q = \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}.$$

Como α es la frontera de T y está orientada positivamente, el teorema de Green en el plano (u_1, u_2) da

$$\text{(A)} = \iint_{x^{-1}(T)} \left[\left(\frac{\partial g_{22}/\partial u_1}{2\sqrt{g}}\right)_1 + \left(\frac{\partial g_{11}/\partial u_2}{2\sqrt{g}}\right)_2\right] du_1 du_2,$$

escribiendo $(\ )_j$ para $\partial/\partial u_j$.
Y aquí ocurre lo interesante. En coordenadas con $g_{12} = 0$, la curvatura de Gauss admite la expresión puramente métrica

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{g}}\left[\left(\frac{\partial g_{11}/\partial u_2}{\sqrt{g}}\right)_2 + \left(\frac{\partial g_{22}/\partial u_1}{\sqrt{g}}\right)_1\right], \tag{1.4}$$

que es una consecuencia del teorema egregio; figura como ejercicio 3.31 en el libro de Hernández Cifre y Pastor González, y se demuestra justo después de esta prueba con lo que ya se sabe de *Geometría local*. Multiplicando (1.4) por $\sqrt{g}$ se ve que el corchete de la integral doble es exactamente $-K\sqrt{g}$, luego

$$\text{(A)} = -\iint_{x^{-1}(T)} K\sqrt{g}\, du_1 du_2 = -\iint_T K\, dA.$$

Paso 3: el sumando (B) con el teorema del índice de rotación. Cada integral de (B) es la de una derivada total:

$$(\mathrm{B}) = \sum_{i=1}^{3} \big[\theta_i(s_{i+1}) - \theta_i(s_i)\big].$$

Y el teorema del índice de rotación, aplicado a α que está orientada positivamente, dice que esa suma más los saltos vale 2π:

$$(\mathrm{B}) = 2\pi - \sum_{i=1}^{3} \varphi_i.$$

Paso 4: sumar los dos trozos y reordenar. Sumando (A) y (B),

$$\oint_{\partial T} K_g \, ds = -\iint_T K \, dA + 2\pi - \sum_{i=1}^{3} \varphi_i,$$

que reordenado es el enunciado.

Lo que hay que llevarse. Se integra Liouville a lo largo del borde del triángulo. El trozo que mide el giro de la rejilla es una integral de línea en el plano de parámetros; Green la convierte en la integral de su rotacional, y ese rotacional es $-K\sqrt{g}$, de donde sale $-\iint_T K\,dA$. El trozo que mide el giro de la curva respecto de la rejilla es una derivada total; junto con los saltos de los vértices suma 2π por el teorema del índice de rotación. Reordenando sale el lema.

De dónde sale la fórmula (1.4)**.** Es el único ingrediente del lema que faltaba por demostrar, y la prueba es corta si se hace con la rejilla ortonormal de Liouville en lugar de con símbolos de Christoffel. Usa dos resultados de *Geometría local*, que se reenuncian:

- los coeficientes de la segunda forma fundamental son $L_{ij} = \mathbf{N}\cdot\mathbf{X}_{ij}$, donde $\mathbf{X}_{ij}$ es la derivada segunda de la parametrización respecto de u_i y u_j (sección 4.4, *La segunda forma fundamental*);
- la curvatura de Gauss es el cociente de los dos determinantes, $K = (L_{11}L_{22} - L_{12}^2)/g$ (sección 4.4.2, *Curvatura media, curvatura de Gauss y el teorema egregio de Gauss*).

La idea, en una línea: el giro de la rejilla se escribe como $P\,du_1 + Q\,du_2$, y al calcular su rotacional $\partial Q/\partial u_1 - \partial P/\partial u_2$ las derivadas segundas se cancelan por el teorema de Schwarz; solo sobrevive un producto de componentes normales, que es un determinante de la segunda forma fundamental, es decir, K. Se escribe ∂_j por $\partial/\partial u_j$.

Paso 1: lo que hay que probar. Sean $E_1 = \mathbf{X}_1/\sqrt{g_{11}}$ y $E_2 = \mathbf{X}_2/\sqrt{g_{22}}$, la base ortonormal de la demostración de Liouville, con $\mathbf{N} = E_1 \times E_2$. En los pasos 3 a 5 de aquella demostración se obtuvo

$$P = \partial_1 E_1 \cdot E_2 = -\frac{\partial_2 g_{11}}{2\sqrt{g}}, \qquad Q = \partial_2 E_1 \cdot E_2 = \frac{\partial_1 g_{22}}{2\sqrt{g}},$$

que son exactamente las P y Q del paso 2 del lema. El corchete de la integral doble es $\partial_1 Q - \partial_2 P$, y (1.4) dice que vale $-K\sqrt{g}$. Eso es lo que hay que ver.

Paso 2: derivar y dejar que Schwarz se lleve las derivadas segundas. Por la regla del producto,

$$\partial_1 Q - \partial_2 P = \partial_1\partial_2 E_1 \cdot E_2 + \partial_2 E_1 \cdot \partial_1 E_2 - \partial_2\partial_1 E_1 \cdot E_2 - \partial_1 E_1 \cdot \partial_2 E_2 = \partial_2 E_1 \cdot \partial_1 E_2 - \partial_1 E_1 \cdot \partial_2 E_2,$$

porque las derivadas cruzadas de E_1 coinciden: la parametrización es de clase C^∞ y vale el teorema de Schwarz.

Paso 3: descomponer en la base $\{E_1, E_2, \mathbf{N}\}$ *(el núcleo de la prueba).* Como E_1 es unitario, cada $\partial_j E_1$ es perpendicular a E_1 y solo tiene componentes sobre E_2 y $\mathbf{N}$; igual, cada $\partial_j E_2$ solo tiene componentes sobre E_1 y $\mathbf{N}$. En el producto escalar $\partial_2 E_1 \cdot \partial_1 E_2$ la componente sobre E_2 del primero multiplica a la del segundo, que es nula, y solo sobreviven las componentes normales:

$$\partial_2 E_1 \cdot \partial_1 E_2 = \big(\partial_2 E_1 \cdot \mathbf{N}\big)\big(\partial_1 E_2 \cdot \mathbf{N}\big), \qquad \partial_1 E_1 \cdot \partial_2 E_2 = \big(\partial_1 E_1 \cdot \mathbf{N}\big)\big(\partial_2 E_2 \cdot \mathbf{N}\big).$$

Y esas componentes normales son coeficientes de la segunda forma fundamental. Al derivar $E_1 = \mathbf{X}_1/\sqrt{g_{11}}$ sale un término con la derivada de $1/\sqrt{g_{11}}$, que multiplica a $\mathbf{X}_1$ y es perpendicular a $\mathbf{N}$, y otro que es $\mathbf{X}_{1j}/\sqrt{g_{11}}$; por tanto

$$\partial_j E_1 \cdot \mathbf{N} = \frac{L_{1j}}{\sqrt{g_{11}}}, \qquad \partial_j E_2 \cdot \mathbf{N} = \frac{L_{2j}}{\sqrt{g_{22}}}.$$

Aquí está el corazón: **lo tangente se ha ido por la ortonormalidad y lo que queda de las dos derivadas es solo cómo se dobla la superficie**.

Paso 4: reconocer K. Sustituyendo, y con $\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}} = \sqrt{g}$ porque $g_{12} = 0$,

$$\partial_1 Q - \partial_2 P = \frac{L_{12}L_{21} - L_{11}L_{22}}{\sqrt{g}} = -\frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{\sqrt{g}} = -\frac{K\,g}{\sqrt{g}} = -K\sqrt{g}.$$

Dividiendo por $\sqrt{g}$ y escribiendo $\partial_1 Q$ y $\partial_2 P$ con los coeficientes métricos se obtiene (1.4).

Lo que hay que llevarse. El rotacional del giro de la rejilla se calcula derivando dos veces. Las derivadas segundas se van por Schwarz, las componentes tangentes por la ortonormalidad, y solo sobrevive el producto de las componentes normales, que es $-\det(L_{ij})/\sqrt{g} = -K\sqrt{g}$. De paso, la cuenta demuestra el teorema egregio en coordenadas ortogonales: el primer miembro, $\partial_1 Q - \partial_2 P$, solo contiene coeficientes métricos y sus derivadas.

Observación (Dónde se usa cada hipótesis)**.** Merece la pena recorrerlas, porque hay regiones donde alguna falla y es ahí donde se ve para qué sirve cada una.

- T **cabe en una sola p.l.**: sin eso no hay plano (u_1, u_2) donde aplicar Green. Es la razón de que el teorema general haya que demostrarlo triangulando.
- $g_{12} = 0$: sin eso la fórmula (1.4) no vale y el paso 2 se cae. Es legítimo suponerlo por el corolario de reparametrización ortogonal, que es local, y por eso el triángulo tiene que ser pequeño.
- **Orientación compatible**: sin eso el signo de K_g y el signo del teorema de Green no casan, y el resultado sale con el signo cambiado.
- α **simple**: el teorema del índice de rotación es falso para curvas con autointersecciones; una

curva que da dos vueltas da $\pm 4\pi$.

- α **orientada positivamente**: si no, el índice de rotación da -2π. Manteniendo la normal, cambian de signo la integral de K_g y los saltos, pero no la integral de área. La identidad se escribe entonces $\oint K_g\, ds - \iint_T K\, dA + \sum \varphi_i = -2\pi$.

CONEXIÓN: GREEN, STOKES Y EL GIRO DE LA TANGENTE

Green convierte aquí la integral de $P\, du_1 + Q\, du_2$ en $-\iint_T K\, dA$. Para obtener Gauss–Bonnet falta sumar el giro de la tangente: sus variaciones suaves y los saltos exteriores suman 2π. Por eso aparecen tanto la integral de curvatura como los ángulos de las esquinas.
Si ya conoces las formas diferenciales, el paso de Green es Stokes en coordenadas: $\omega = P\, du_1 + Q\, du_2$ cumple $d\omega = -K\sqrt{g}\, du_1 \wedge du_2$, y $\int_{\partial x^{-1}(T)} \omega = \int_{x^{-1}(T)} d\omega$. La identidad que vincula $d\omega$ con K aporta la geometría de la superficie; Stokes y el índice de rotación completan la cuenta.

1.3.4 El teorema general

Teorema (Gauss-Bonnet)**.** Sea R una región regular de una s.r. orientada M y sean $C_1, \ldots, C_n$ las curvas cerradas, simples y regulares a trozos que forman la frontera de R. Si cada C_i está orientada positivamente y $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_r\}$ es el conjunto de ángulos externos en todos los vértices de todas las C_i, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} K_g(s)\, ds + \iint_R K\, dA + \sum_{e=1}^{r} \varphi_e = 2\pi\chi(R),$$

donde la integral sobre C_i significa la suma de las integrales correspondientes a los arcos regulares de C_i.

LA IDEA: DE UN TRIÁNGULO A UNA REGIÓN CUALQUIERA

Se trocea R en triángulos pequeños, se aplica el lema a cada uno y se suma. Al sumar ocurren dos cosas:

- **Las integrales de curvatura geodésica de los lados internos se cancelan.** Cada lado interno pertenece a dos triángulos y, orientados positivamente, cada uno lo recorre en un sentido; y K_g cambia de signo al invertir el recorrido. Solo sobreviven los lados que están en la frontera de R.
- **Los 2π se acumulan**: sale $2\pi C$, con C el número de triángulos. Ese número depende de la triangulación y el miembro izquierdo no, así que los ángulos tienen que compensar la diferencia. Y lo hacen: al reagrupar los ángulos internos alrededor de cada vértice, el recuento convierte $2\pi C$ en $2\pi(C - A + V)$, que es $2\pi\chi(R)$.

La segunda es la que produce el resultado y es pura contabilidad de vértices, aristas y caras. Por eso el teorema acaba dando un invariante topológico: porque lo único que sobrevive del troceo es un recuento que no depende de cómo se troceó.

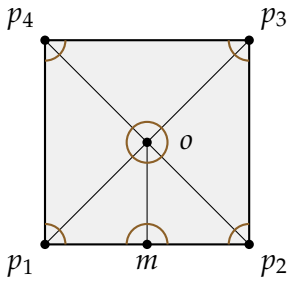
La imagen: un montón de ángulos contado dos veces. Imagínese que después de trocear la región se recortan con tijeras todos los ángulos internos de todos los triángulos y se echan a un montón. Ese montón se puede pesar de dos maneras. La primera es ir triángulo por triángulo: cada uno aporta tres ángulos, y de ahí sale una cuenta en la que solo interviene el número de caras y de lados. La segunda es ir vértice por vértice: alrededor de un vértice de dentro los ángulos completan una vuelta entera,

alrededor de uno del borde completan media, y en las esquinas de verdad de la región completan lo que dejan libre los ángulos externos. Los dos pesos son el mismo montón. Igualarlos es todo el teorema.

La intuición falsa. Uno espera que la topología entre en escena por alguna puerta profunda, y busca en la demostración el momento en que se habla de agujeros o de deformaciones. No hay tal momento. La característica de Euler-Poincaré aparece por la puerta de servicio, en forma de $C - A + V$, al restar dos maneras de contar el mismo montón de ángulos. Lo profundo no es la demostración: es que ese recuento no dependa de cómo se troceó, y eso ya estaba probado antes.

El corazón, en una frase. Los 2π que sobran al pegar triángulos son exactamente los que la contabilidad de vértices, aristas y caras quita.

Un caso a mano: el montón de ángulos en un cuadrado. En el plano, con triángulos de lados rectos, el lema solo dice que los ángulos internos de cada triángulo suman π, y el montón de ángulos se puede pesar con los dedos. Se toma el cuadrado $[0,2] \times [0,2]$, con esquinas $p_1 = (0,0)$, $p_2 = (2,0)$, $p_3 = (2,2)$ y $p_4 = (0,2)$, se añaden el centro $o = (1,1)$ y el punto medio $m = (1,0)$ del lado inferior, y se trocea en los cinco triángulos p_1mo, mp_2o, p_2p_3o, p_3p_4o y p_4p_1o.



El cuadrado troceado en cinco triángulos. Los arcos marcan cómo se reparten los quince ángulos internos alrededor de cada vértice: una vuelta entera en o, media en m y un cuarto en cada esquina.

Recuento: $C = 5$ caras; $V = 6$ vértices, de los que uno es interno (o), cuatro son esquinas de la región ($p_1, \dots, p_4$) y uno, m, lo ha puesto la triangulación en un lado liso; y $A = 10$ aristas, cinco en el borde y cinco internas. Se comprueba $3C = 15 = 2 \cdot 5 + 5$ y $\chi = 5 - 10 + 6 = 1$.

El montón son los quince ángulos internos de los cinco triángulos.

- *Pesado por triángulos*: cada triángulo aporta π, luego el montón pesa 5π.
- *Pesado por vértices*: alrededor de o los ángulos dan una vuelta entera, 2π; alrededor de m, medio plano, π; en cada esquina, el ángulo recto del cuadrado, y las cuatro juntas 2π. En total, $2\pi + \pi + 2\pi = 5\pi$.

Es el mismo montón y pesa lo mismo. La demostración que sigue hace exactamente esto, escrito con ángulos externos para que valga en una superficie curva. Aquí sus números serían: la suma de los quince ángulos externos de los triángulos es $3\pi C - 5\pi = 10\pi$; el recuento del paso 5 la escribe como $2\pi(A - V) + \sum \varphi_l = 2\pi \cdot 4 + 2\pi$, donde $\sum \varphi_l = 4 \cdot \frac{\pi}{2}$ son los ángulos externos del cuadrado; y el teorema queda $0 + 0 + 2\pi = 2\pi(C - A + V) = 2\pi$.

Paso 1: pegar los triángulos y ver qué se cancela. Sea $\mathcal{T}$ una triangulación de R con cada triángulo T_j contenido en una superficie simple con $g_{12} = 0$, que existe por la proposición de la sección 1.1.3. Se aplica el lema a cada triángulo y se suman los C resultados. Como cada lado interno se recorre dos veces en sentidos opuestos, sus dos contribuciones a la integral de curvatura geodésica se cancelan, y queda

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} K_g \, ds + \iint_R K \, dA + \sum_{j=1}^{C} \sum_{k=1}^{3} \varphi_{jk} = 2\pi C, \tag{1.5}$$

donde $\varphi_{j1}, \varphi_{j2}, \varphi_{j3}$ son los ángulos externos de T_j.

Paso 2: pasar a ángulos internos, que son los que se pueden contar. Todo lo que queda es transformar $\sum_j \sum_k \varphi_{jk}$: el único término que aún depende de la triangulación. Los ángulos externos no se dejan agrupar alrededor de un vértice, pero los internos sí, porque son los que rellenan el disco. Se pasa a ángulos internos, $\psi_{jk} = \pi - \varphi_{jk}$:

$$\sum_{j,k} \psi_{jk} = 3\pi C - \sum_{j,k} \varphi_{jk}. \tag{1.6}$$

Paso 3: primer recuento, triángulo por triángulo. Como las C_i son curvas cerradas, es decir, polígonos, se tiene $A_e = V_e$: cada lado externo aporta un vértice externo. Y por la relación demostrada en la sección 1.1.3, $3C = 2A_i + A_e = 2A_i + V_e$. Sustituyendo en (1.6),

$$\sum_{j,k} \psi_{jk} = 2\pi A_i + \pi V_e - \sum_{j,k} \varphi_{jk}. \tag{1.7}$$

Paso 4: segundo recuento, vértice por vértice. La misma suma se puede hacer agrupando alrededor de cada vértice. Se denota por V_i el número de vértices internos y por V_e el de externos, y estos últimos se parten en $V_e = V_{ec} + V_{et}$, donde V_{ec} son los que son vértices de alguna C_i — y por la notación elegida $V_{ec} = r$ — y V_{et} los que ha introducido la triangulación. Entonces:

- alrededor de un vértice *interno*, los ángulos internos completan una vuelta: suman 2π;
- alrededor de un vértice *externo introducido por la triangulación*, la frontera es lisa ahí y los ángulos completan un semiplano: suman π;
- alrededor de un vértice *de alguna* C_i, suman el ángulo interno de la región, que es $\pi - \varphi_e$.

Luego

$$\sum_{j,k} \psi_{jk} = 2\pi V_i + \pi V_{et} + \sum_{l=1}^{r} (\pi - \varphi_l). \tag{1.8}$$

Paso 5: igualar los dos recuentos *(el núcleo de la prueba)*. Es el mismo montón de ángulos pesado de dos maneras, así que los dos resultados tienen que coincidir. Igualarlos deja al descubierto un $C - A + V$ que nadie había puesto ahí.
De (1.7) y (1.8),

$$\sum_{j,k} \varphi_{jk} = 2\pi A_i + \pi V_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - r\pi + \sum_{l=1}^{r} \varphi_l.$$

Ahora se usa $V_{et} = V_e - r$, con lo que $\pi V_{et} + r\pi = \pi V_e$, y los dos términos πV_e se cancelan:

$$\sum_{j,k} \varphi_{jk} = 2\pi A_i - 2\pi V_i + \sum_{l=1}^{r} \varphi_l.$$

Y como $A_e = V_e$, se tiene $2\pi A_i - 2\pi V_i = 2\pi(A_i + A_e) - 2\pi(V_i + V_e) = 2\pi(A - V)$, luego

$$\sum_{j,k} \varphi_{jk} = 2\pi(A - V) + \sum_{l=1}^{r} \varphi_l. \tag{1.9}$$

Paso 6: cierre. Sustituyendo (1.9) en (1.5):

$$\sum_i \int_{C_i} K_g \, ds + \iint_R K \, dA + 2\pi(A - V) + \sum_l \varphi_l = 2\pi C,$$

y pasando el término de $(A - V)$ al otro miembro,

$$\sum_i \int_{C_i} K_g \, ds + \iint_R K \, dA + \sum_l \varphi_l = 2\pi\big(C - A + V\big) = 2\pi\chi(R).$$

Lo que hay que llevarse. Se aplica el lema a cada triángulo y se suma: las integrales de K_g de los lados internos se cancelan de dos en dos, y quedan $2\pi C$ a la derecha y todos los ángulos externos de los triángulos a la izquierda. Esos ángulos se pasan a internos y el montón se cuenta dos veces: por triángulos, con $3C = 2A_i + A_e$, y por vértices, con una vuelta entera en los internos, medio plano en los que ha puesto la triangulación en el borde y el ángulo interno de la región en sus esquinas. Igualar los dos recuentos cambia $2\pi C$ por $2\pi(C - A + V)$.

EXPLÍCATE. *El paso donde aparece la característica de Euler-Poincaré es el* (1.9)*. Vuelve a mirarlo y di en voz alta de dónde sale el $C - A + V$: no de la geometría, sino de haber contado la misma suma de dos maneras. Esa es la respuesta a por qué un teorema con integrales da un entero.*

Observación (Qué papel juega cada hipótesis)**.**

- R **es una región regular**, es decir, compacta y con frontera formada por curvas cerradas simples. La compacidad es lo que permite una triangulación *finita*; sin ella el paso 1 sumaría infinitos términos y no habría C que escribir. Y que la frontera sean curvas cerradas es lo que da $A_e = V_e$ en el paso 3: en un polígono cerrado hay tantos lados como vértices, y esa igualdad se usa dos veces.
- **Cada triángulo cabe en una p.l. con** $g_{12} = 0$**.** Es la hipótesis del lema, heredada. Es también la razón de que haya que triangular: el lema es local y la región no.
- **Orientación:** M **orientada y las** C_i **positivamente orientadas.** Es lo que hace que los lados internos se cancelen en el paso 1. Sin una orientación global coherente, dos triángulos vecinos pueden recorrer su lado común en el mismo sentido, y las dos integrales no se cancelan con esa elección de signos. Esto limita esta formulación con una normal global, no el teorema de Gauss-Bonnet en general: también existe una versión para superficies no orientables, que aquí no necesitamos.
- **Los vértices se cuentan bien.** La partición $V_e = V_{ec} + V_{et}$ del paso 4 parece burocracia y no lo es: los vértices que introduce la triangulación aportan π y los que ya eran esquinas de la región aportan $\pi - \varphi_e$. Confundirlos es el error que hace que la cuenta no cierre.

DE DÓNDE VIENE: POR QUÉ EL RESULTADO SORPRENDIÓ

El término $\int\int_R K\,dA$ se llama *curvatura integral* de la región. Lo que Gauss vio en 1827 y Bonnet extendió en 1848 es una relación local; lo que hoy se considera importante del teorema es otra cosa, y es lo que suele destacarse al presentarlo: que *prueba una notable relación entre la topología de una superficie compacta y la integral de su curvatura*.
La sorpresa está en que los dos miembros pertenecen a mundos distintos. La izquierda se calcula midiendo: hay que saber cómo está curvada la superficie en cada punto. La derecha se calcula contando: basta con saber cuántos agujeros tiene. Que midiendo se obtenga un resultado de contar es lo que hace de este un teorema profundo y no una identidad más.

El teorema general devuelve también el lema para cualquier triángulo, aunque no quepa en una carta ortogonal: basta usar que es una región simple y que $\chi(T) = 1$. La restricción de tamaño servía para la prueba local, no para la identidad final.

1.3.5 Regiones regulares que no son simples

LA PREGUNTA: QUÉ CAMBIA CUANDO LA REGIÓN TIENE AGUJEROS

Una isla con un lago en medio tiene dos orillas, la del mar y la del lago. Quien camina por la orilla del mar con la tierra a su izquierda va en un sentido; quien camina por la orilla del lago con la tierra a su izquierda va en el sentido contrario, porque la tierra está fuera del lago y no dentro. En un disco el teorema deja 2π en el segundo miembro. En una corona hay dos curvas frontera, y la cuenta ingenua — 2π por cada una — daría 4π, que no es lo que sale. ¿Qué número aparece a la derecha cuando la región tiene agujeros, y por qué las dos orillas no contribuyen igual aunque las dos sean circunferencias?

LA IDEA: POR QUÉ ESTA SECCIÓN EXISTE

Casi todos los ejemplos habituales son regiones simples, con $\chi = 1$. Las interesantes son las regiones **con agujeros**, donde χ vale otra cosa y hay varias curvas frontera que hay que orientar cada una por su lado.
Todo el contenido de esta sección es aprender a manejar tres cosas: contar $\chi(R)$ cuando hay agujeros, orientar bien cada curva frontera, y darse cuenta de que las contribuciones de curvas distintas no se suman ingenuamente.

1.3.5.1 La característica de una región con agujeros

Proposición. Sea R una región regular homeomorfa a un disco con m agujeros abiertos disjuntos quitados, de modo que su frontera tiene $m + 1$ curvas. Entonces

$$\chi(R) = 1 - m.$$

Se comprueba directamente sobre una triangulación y se ve mejor por inducción en m.
Para $m = 0$ es el disco, con $\chi = 1$.
Sea R con m agujeros y sea R' el resultado de tapar uno de ellos, que tiene $m - 1$. Tapar un agujero significa añadir un disco triangulado pegado a R por la curva frontera de

ese agujero. Si el agujero tiene p vértices en su borde, un disco triangulado que lo tape con un solo vértice interior nuevo añade: 1 vértice, p aristas nuevas (las que van del vértice nuevo a los p del borde) y p caras. Luego

$$\chi(R') = \chi(R) + 1 - p + p = \chi(R) + 1.$$

Como por hipótesis de inducción $\chi(R') = 1 - (m-1) = 2 - m$, resulta $\chi(R) = 1 - m$.

Ejemplo. Los tres casos que hay que tener memorizados:
- **Disco**: una curva frontera, $\chi = 1$. Gauss-Bonnet da 2π.
- **Corona** (disco con un agujero): dos curvas frontera, $\chi = 0$. Gauss-Bonnet da 0.
- **Disco con dos agujeros** («pantalón»): tres curvas frontera, $\chi = -1$. Gauss-Bonnet da -2π.

En general, cada agujero baja la característica en una unidad y baja el segundo miembro del teorema en 2π.

Observación (El error que este apartado evita)**.** Que la superficie sea plana ($K = 0$) no hace geodésicas a sus circunferencias. En una corona plana, la frontera exterior aporta 2π y la interior -2π: las dos integrales de curvatura geodésica se cancelan porque los recorridos positivos respecto de la corona tienen sentidos opuestos. El resultado es 0, de acuerdo con $\chi = 0$. Hay que comprobar por separado la curvatura de la superficie, la de cada arco del borde y la característica de la región.

El problema resuelto más abajo de un rectángulo con un agujero circular y otro triangular permite practicar esa distinción.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: MANEJAR LOS AGUJEROS A BASE DE CORTES

La alternativa. Cortar la región desde su borde exterior hasta cada borde interior y trabajar con el disco resultante. Cada corte deja dos copias del arco en el borde del disco. Esa frontera es simple en la superficie cortada; su imagen en la superficie original repasa los cortes y no es una curva simple.
Su ventaja. Permite deducir la fórmula para regiones con agujeros a partir del caso del disco, llevando la cuenta de las contribuciones de los cortes.
Qué exige. Al identificar de nuevo las dos copias de cada arco, sus integrales de curvatura geodésica se cancelan por los sentidos opuestos. También hay que contar los giros introducidos en los extremos: cada corte aporta en total 2π de giro adicional. Con m cortes, la fórmula del disco da para el borde original $2\pi - 2m\pi$. Es precisamente $2\pi\chi(R)$. El método funciona; la característica resume esa contabilidad y permite usar una sola fórmula.

1.3.5.2 Curvas cerradas dentro de una región

Hay una configuración que reaparece continuamente: se toma una región, se meten dentro una o varias curvas cerradas simples disjuntas, y se pide comparar las curvaturas geodésicas integrales o comprobar que no hay contradicción. Aparece una y otra vez en los problemas de esta sección.

El mecanismo es siempre el mismo y conviene tenerlo escrito de una vez.

Proposición. Sea M una s.r. orientada con $K \equiv 0$ y sea C una curva regular, cerrada y simple contenida en una región de M que sea homeomorfa a un disco. Si C es frontera de una región

simple R_C contenida en ella y se orienta positivamente respecto de R_C, entonces

$$\oint_C K_g \, ds = 2\pi.$$

Se aplica la versión local a R_C. No hay vértices, luego no hay ángulos externos; $K \equiv 0$, luego la integral doble se anula; y $\chi(R_C) = 1$. Queda $\oint_C K_g \, ds = 2\pi$.

LA IDEA: LA APARENTE CONTRADICCIÓN, Y POR QUÉ NO LO ES

El ejercicio típico da una región T de un cilindro y una curva C_1 cerrada y simple en su interior, y pide calcular $\oint_{C_1} K_g$ de dos maneras: aplicando el teorema a la región que C_1 encierra, y aplicándolo a la región comprendida entre la frontera de T y C_1. Y pregunta si hay contradicción.
No la hay, y la razón es la orientación. En la primera aplicación, C_1 es la frontera exterior de la región que encierra, y sale $\oint K_g = 2\pi$. En la segunda, C_1 es la frontera *interior* de una corona, se recorre en el sentido opuesto, y la misma integral vale -2π; pero la corona tiene $\chi = 0$, no 1, y las cuentas cuadran.
La moraleja es la misma que la del ejercicio de los casquetes de la sección 1.1.2: **hay que fijar la normal y el sentido de recorrido para dar signo a la integral**. La región determina cuál de los dos sentidos se considera positivo en cada aplicación de Gauss-Bonnet.

Ejercicio 1.5. *Dos agujeros en un cilindro*

Sea C el cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$ orientado con la normal exterior, y sea R la región de C comprendida entre los paralelos $z = -1$ y $z = 1$. Sean γ_1 y γ_2 dos curvas regulares, cerradas, simples y disjuntas contenidas en el interior de R, que encierran regiones simples R_1 y R_2 disjuntas. Sea $R_3 = R - (\operatorname{int} R_1 \cup \operatorname{int} R_2)$: se quitan los interiores y se conservan los bordes.

1. Calcular $\chi(R_3)$.
2. Comprobar que el teorema de Gauss-Bonnet se verifica en R_3.
3. ¿Cuánto vale $\oint_{\gamma_1} K_g \, ds$? ¿Depende de qué curva sea γ_1?

Resolución. La idea. Todo sale de tres datos que se leen sin calcular: el cilindro tiene $K \equiv 0$, sus paralelos son geodésicas y cada agujero baja la característica en una unidad. Lo único delicado es la orientación: cada γ_i se recorre en un sentido como frontera de R_i y en el contrario como frontera de R_3.

1. La característica. La región R entre los dos paralelos es una corona, homeomorfa a $S^1 \times [-1, 1]$, luego $\chi(R) = 0$. Quitarle un disco abierto baja la característica en una unidad, igual que añadir un agujero a un disco, porque el argumento de la demostración anterior no usa que la región de partida fuera un disco. Quitando dos:

$$\chi(R_3) = 0 - 2 = -2.$$

La frontera de R_3 tiene cuatro curvas: los dos paralelos y las dos curvas γ_i.

2. Comprobación. El cilindro es desarrollable, luego $K \equiv 0$ y $\iint_{R_3} K\,dA = 0$. Los dos paralelos son geodésicas del cilindro — en el desenrollado son rectas —, luego no aportan nada. No hay vértices. El teorema queda

$$\oint_{\gamma_1} K_g\,ds + \oint_{\gamma_2} K_g\,ds = 2\pi\chi(R_3) = -4\pi,$$

con las dos curvas orientadas positivamente *respecto de* R_3, es decir, como fronteras interiores, dejando R_3 a la izquierda, que es el sentido opuesto al que tendrían como fronteras de R_1 y R_2.

3. El valor de cada una. Cada γ_i es la frontera de la región simple R_i. Aplicando la versión local a R_i, con $K \equiv 0$, sin vértices y con $\chi(R_i) = 1$:

$$\oint_{\gamma_i} K_g\,ds = 2\pi \qquad \text{(orientada como frontera de } R_i\text{)}.$$

No depende de qué curva sea. Cualquier curva regular, cerrada y simple del cilindro que encierre una región simple y se oriente positivamente respecto de ella tiene curvatura geodésica integral 2π, independientemente de su forma.

Y las dos cuentas casan: como frontera de R_3 cada γ_i se recorre al revés, luego aporta -2π, y la suma es $-4\pi = 2\pi\chi(R_3)$. ✓ ■

Dónde se falla. Tres sitios. (1) Tomar $\chi(R_3) = -1$, como si la banda fuera un disco al que se le quitan dos agujeros: la banda ya tiene $\chi = 0$ antes de quitarle nada. (2) Dar a $\oint_{\gamma_i} K_g\,ds$ el mismo signo en las dos aplicaciones del teorema: la comprobación del apartado 2 daría entonces $4\pi = -4\pi$. (3) Olvidar los dos paralelos en la frontera de R_3: no aportan nada porque son geodésicas, pero hay que decirlo, y en un cono, por ejemplo, sí aportarían.

QUÉ DEJA. Tres cosas. Primera: quitar un agujero baja χ en uno, y el segundo miembro del teorema en 2π. Segunda: una curva cerrada y simple que encierre una región simple en una superficie con $K \equiv 0$ tiene siempre curvatura geodésica integral 2π con la orientación positiva respecto de esa región, independientemente de su forma; es una versión del teorema del índice de rotación. Tercera, y es la que más se confunde: la misma curva aporta $+2\pi$ o -2π según de qué región se la considere frontera.

El enunciado general se especializa en tres casos, y conviene tenerlos separados, porque se parecen lo bastante como para confundirlos y dicen cosas distintas.

1.3.6 Versión local del teorema

Corolario (Versión local)**.** Sea R una región **simple** de una s.r. orientada M, cuya frontera venga dada por una curva cerrada, simple, regular a trozos con k vértices y orientada positivamente. Entonces

$$\oint_{\partial R} K_g\,ds + \iint_R K\,dA + \sum_{i=1}^{k} \varphi_i = 2\pi.$$

> Una región simple es homeomorfa a un disco, y la característica de Euler-Poincaré de un disco vale 1. Sustituyendo $\chi(R) = 1$ en el teorema general se obtiene el enunciado.

1.3.7 El teorema de Gauss para triángulos geodésicos

LA PREGUNTA: MEDIR LA CURVATURA CON UN TRANSPORTADOR

En el plano los ángulos de un triángulo suman π; en la esfera suman más, y en una silla de montar, menos. Supóngase alguien que vive dentro de la superficie, que no puede salir de ella y que solo dispone de un transportador y de la capacidad de trazar el camino más corto entre dos puntos. ¿Puede averiguar la curvatura del sitio donde vive, y con qué exactitud?

Corolario (Teorema de Gauss)**.** Si T es un triángulo geodésico de una superficie orientada, orientado positivamente y con ángulos internos $\widetilde{\varphi}_i$, $i = 1, 2, 3$, entonces

$$\iint_T K\, dA = \sum_{i=1}^{3} \widetilde{\varphi}_i - \pi.$$

Los tres lados son geodésicos, luego $K_g \equiv 0$ sobre ellos y el primer sumando de la versión local desaparece. Y los ángulos externos son $\varphi_i = \pi - \widetilde{\varphi}_i$, de modo que

$$\iint_T K\, dA + \sum_{i=1}^{3} (\pi - \widetilde{\varphi}_i) = 2\pi \quad \Longrightarrow \quad \iint_T K\, dA = 2\pi - 3\pi + \sum \widetilde{\varphi}_i = \sum \widetilde{\varphi}_i - \pi.$$

LA IDEA: EL EXCESO ANGULAR *es* LA CURVATURA ENCERRADA

Este corolario merece leerse despacio porque es la frase que resume la asignatura.

- Si $K \equiv 0$, la suma de los ángulos internos de un triángulo geodésico vale π. Se recupera la geometría del instituto, y se ve que el teorema de la suma de los ángulos de un triángulo es en realidad un enunciado sobre la *curvatura nula* del plano.
- Si $K = 1$, como en la esfera unidad, entonces $\sum \widetilde{\varphi}_i - \pi = \text{área}(T) > 0$. Los triángulos esféricos tienen los ángulos «de más», y lo que les sobra es exactamente su área. Un triángulo esférico grande puede tener tres ángulos rectos.
- Si $K < 0$, como en la seudoesfera, la suma es menor que π. Los triángulos están «hundidos».

Y hay una consecuencia práctica: **si K es constante y no nula, el área de un triángulo geodésico está determinada por sus ángulos**. No hace falta medir nada. En la esfera unidad, un triángulo con tres ángulos rectos tiene área $3 \cdot \pi/2 - \pi = \pi/2$, que es la octava parte de 4π. Y en efecto: es un octante.

1.3.8 Superficies compactas

LA PREGUNTA: POR QUÉ LA CURVATURA TOTAL NO SE ENTERA DE LAS ABOLLADURAS

Abóllese una esfera: donde antes había curvatura uniforme aparecen zonas muy curvadas, zonas casi planas e incluso zonas de curvatura negativa. La curvatura ha cambiado en todos los puntos. Y sin embargo su integral sobre la superficie entera sigue valiendo lo mismo que antes. ¿Por qué lo que se gana en un sitio se pierde exactamente en otro, y qué es lo que se está midiendo en realidad?

Corolario. Si M es compacta, orientable y sin borde, entonces

$$\iint_M K\,dA = 2\pi\chi(M).$$

Una superficie compacta sin borde es, por convenio, una región regular de sí misma, con $\partial M = \emptyset$. Desaparecen entonces el primer sumando y el tercero del teorema general, y queda el enunciado con $R = M$.

LA IDEA: LA FRASE QUE JUSTIFICA LA ASIGNATURA ENTERA

Aquí está el resultado por el que las dos mitades de la asignatura se imparten juntas. El miembro de la izquierda es una integral: depende de cómo esté curvada la superficie en cada punto, y por tanto de su forma. El miembro de la derecha es un entero multiplicado por 2π, y ese entero es un invariante topológico: no cambia si la superficie se abolla, se estira o se retuerce, mientras no se rompa ni se pegue.
Conclusión: **la curvatura total de una superficie compacta y orientable no depende de su forma**. Se puede mover la curvatura de sitio todo lo que se quiera, hacer un bulto aquí y un hoyo allá, pero la integral no se entera. Toda superficie homeomorfa a una esfera — la esfera abollada, el huevo, el elipsoide, la pelota de rugby — tiene $\chi = 2$ y por tanto

$$\iint_M K\,dA = 2\pi \cdot 2 = 4\pi,$$

y toda superficie homeomorfa a una suma conexa de n toros tiene $\chi = 2 - 2n$, de donde

$$\iint_M K\,dA = 2\pi(2 - 2n) = 4\pi(1 - n),$$

que vale 4π para la esfera ($n = 0$), 0 para el toro ($n = 1$) y -4π para el toro doble ($n = 2$). Toda la información que sobrevive a la integración es ese entero n, el número de agujeros.
Y al revés: si se calcula la curvatura integral de una superficie y sale 0, ya se sabe que no es homeomorfa a una esfera, sin haberla mirado.

Ejemplo. El toro de revolución es compacto y puede probarse que su curvatura integral es nula. Se deduce que su característica de Euler-Poincaré vale cero.

Merece la pena entender por qué la integral se anula sin calcularla: el toro tiene una mitad exterior con $K > 0$, la que se ve desde fuera, y una mitad interior con $K < 0$, la del agujero, y las dos aportaciones se compensan exactamente. La circunferencia superior y la inferior, donde $K = 0$, son la frontera entre las dos. Con la parametrización habitual esa compensación se ve escrita:

$$\iint_{\text{mitad exterior}} K\,dA = 4\pi, \qquad \iint_{\text{mitad interior}} K\,dA = -4\pi, \qquad \iint_T K\,dA = 0 = 2\pi\chi(T).$$

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: MEDIR LA CURVATURA TOTAL CON $\iint_M |K|\,dA$

La alternativa. Definir la curvatura total de una superficie compacta como la integral del valor absoluto de la curvatura, para que las zonas de curvatura positiva y negativa no se cancelen.
Su ventaja. Mide la curvatura gaussiana acumulada sin cancelaciones: es no negativa y solo se anula si $K \equiv 0$.

Qué cambia. Ya no es un invariante topológico. Una esfera redonda tiene $\iint_M |K|\,dA = 4\pi$. Si se deforma suavemente conservando su topología y se introduce una zona de curvatura negativa, Gauss-Bonnet sigue dando $\iint_M K\,dA = 4\pi$, pero ahora

$$\iint_M |K|\,dA = 4\pi + 2\iint_{\{K<0\}} |K|\,dA > 4\pi.$$

El toro de revolución de sección circular no distingue estas cantidades al cambiar sus radios: las contribuciones 4π y -4π del ejemplo anterior dan siempre $\iint_M |K|\,dA = 8\pi$. Por tanto, un toro delgado y uno grueso de esa familia tienen la misma curvatura total absoluta.
Esta cantidad tiene interés geométrico propio, pero no sustituye al balance con signo que aparece en Gauss-Bonnet.

1.3.9 Ejercicios

Ejercicio 1.6. *Todos los paralelos del cono tienen la misma curvatura geodésica integral*

Sin hacer ningún cálculo explícito de la curvatura geodésica, probar que todos los paralelos del cono $x^2 + y^2 = z^2$, $z > 0$, tienen la misma curvatura geodésica integral.

Resolución. La idea. La prohibición de calcular obliga a buscar una razón por la que todos los paralelos sean, en el fondo, el mismo. La hay: una homotecia de centro el vértice lleva el cono en sí mismo y un paralelo en cualquier otro, y la curvatura geodésica integral no cambia al cambiar de escala.

El cono es invariante por las **homotecias de centro el vértice**. Si $h_\lambda(X) = \lambda X$ con $\lambda > 0$, entonces $h_\lambda(M) = M$, porque la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ es homogénea y la condición $z > 0$ se conserva.

Además, h_λ lleva el paralelo de altura $z = a$ en el de altura $z = \lambda a$, y como todo paralelo es de esa forma, **dos paralelos cualesquiera del cono son homotéticos**.

Falta ver que la curvatura geodésica integral es invariante por homotecias. Sea α una curva sobre M y $\beta = h_\lambda \circ \alpha = \lambda\alpha$. Entonces

$$\beta' = \lambda\alpha', \qquad \beta'' = \lambda\alpha''.$$

Y el vector normal no cambia: $\mathbf{N}(\lambda p) = \mathbf{N}(p)$, porque el plano tangente al cono en λp es paralelo al plano tangente en p — los dos contienen la misma generatriz y la homotecia conserva direcciones. Por tanto

$$K_g^\beta = \frac{(\mathbf{N}, \beta', \beta'')}{|\beta'|^3} = \frac{\lambda^2(\mathbf{N}, \alpha', \alpha'')}{\lambda^3|\alpha'|^3} = \frac{1}{\lambda}\,K_{g'}^\alpha,$$

mientras que el elemento de longitud se multiplica por λ: $ds_\beta = |\beta'|dt = \lambda|\alpha'|dt = \lambda\,ds_\alpha$.

Los dos factores se compensan:

$$\oint_\beta K_g\,ds = \oint \frac{1}{\lambda}K_g^\alpha \cdot \lambda\,ds_\alpha = \oint_\alpha K_g\,ds.$$

Luego todos los paralelos, siendo homotéticos entre sí, tienen la misma curvatura geodésica integral. ■

Otra vía (con Gauss-Bonnet, que también vale). Se puede evitar la homotecia. Sean α_1 y α_2 dos paralelos y R la corona del cono comprendida entre ellos. Es una región regular con dos curvas frontera y sin vértices, luego $\chi(R) = 0$. Y el cono es desarrollable, así que $K \equiv 0$. Gauss-Bonnet da

$$\oint_{\alpha_1} K_g\, ds + \oint_{\alpha_2} K_g\, ds = 0,$$

con las dos orientadas positivamente respecto de R. Como una de ellas es la frontera exterior y la otra la interior, se recorren en sentidos contrarios; al orientarlas las dos «igual» — las dos con el mismo sentido de giro alrededor del eje — las dos integrales pasan a ser iguales.

QUÉ DEJA. El argumento de la homotecia es el más reutilizable de esta asignatura: *la curvatura geodésica integral es invariante por semejanzas*, porque K_g tiene dimensiones de inverso de longitud y ds de longitud. La misma observación dice que en la esfera de radio r la curvatura geodésica integral de un paralelo no depende de r, sino solo de su latitud. Guarda también el atajo: cuando una superficie es invariante por un grupo de transformaciones, todo lo que sea invariante por ese grupo se puede calcular una vez.

Ejercicio 1.7. *La curvatura integral del hiperboloide de una hoja*

Calcular la curvatura total del hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Resolución. La idea. El hiperboloide no es compacto, así que el corolario de las superficies compactas no se puede usar. Se hace lo de siempre con una superficie que se va al infinito: se corta una región acotada, el teorema convierte su curvatura integral en dos integrales sobre los paralelos del borde, que Liouville calcula sin esfuerzo, y se pasa al límite.

Se parametriza el hiperboloide como superficie de revolución de la hipérbola $x = \sqrt{1+u^2}$, $z = u$:

$$x(u,v) = \big(\sqrt{1+u^2}\cos v,\ \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{sen}\, v,\ u\big), \qquad u \in \mathbb{R},\ v \in (0, 2\pi).$$

Sea R_a la región comprendida entre los paralelos $u = -a$ y $u = a$. Es una corona: $\chi(R_a) = 0$, dos curvas frontera, sin vértices. Gauss-Bonnet da

$$\iint_{R_a} K\, dA = -\oint_{u=a} K_g\, ds - \oint_{u=-a} K_g\, ds,$$

con los dos paralelos orientados positivamente respecto de R_a.

Por la simetría $u \mapsto -u$, que es una isometría del hiperboloide, los dos paralelos tienen curvaturas geodésicas integrales iguales en valor absoluto; y orientados los dos positivamente respecto de R_a — es decir, con la región a la izquierda — contribuyen con el mismo signo, porque la simetría invierte a la vez el sentido de recorrido y el lado en que queda la región. Luego

$$\iint_{R_a} K\, dA = -2\oint_{u=a} K_g\, ds.$$

Falta la curvatura geodésica integral del paralelo $u = a$, con $a > 0$. La calculamos mediante Liouville. Elegimos la normal de $\mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{X}_2$; así, en el borde superior el recorrido positivo tiene v creciente. La longitud del paralelo es $2\pi\sqrt{1+a^2}$ y el ángulo que su tangente forma con $\mathbf{X}_1$ es constante e igual a $\pi/2$, porque esta parametrización por meridianos y paralelos tiene $g_{12} = 0$. Por la fórmula de Liouville, con $\dot{u}_1 = 0$,

$$K_g = \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\dot{u}_2.$$

Aquí $g_{11} = 1 + \dfrac{u^2}{1+u^2} = \dfrac{1+2u^2}{1+u^2}$ y $g_{22} = 1+u^2$, luego $\partial g_{22}/\partial u_1 = 2u$ y $\sqrt{g} = \sqrt{g_{11}g_{22}} = \sqrt{1+2u^2}$. Con $u_2 = 1/\sqrt{g_{22}} = 1/\sqrt{1+a^2}$ y longitud $2\pi\sqrt{1+a^2}$:

$$\oint_{u=a} K_g \, ds = \frac{2a}{2\sqrt{1+2a^2}\sqrt{1+a^2}} \cdot 2\pi\sqrt{1+a^2} = \frac{2\pi a}{\sqrt{1+2a^2}}.$$

Por tanto

$$\iint_{R_a} K \, dA = -\frac{4\pi a}{\sqrt{1+2a^2}},$$

y haciendo $a \to +\infty$,

$$\boxed{\iint_M K \, dA = \lim_{a\to\infty} -\frac{4\pi a}{\sqrt{1+2a^2}} = -\frac{4\pi}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}\,\pi}$$

■

Observación (Por qué no se aplica el corolario compacto)**.** El hiperboloide de una hoja es homeomorfo a un cilindro, cuya característica es 0; si fuera compacto, el corolario daría curvatura integral nula. No lo es, y la curvatura integral resulta ser un número finito no nulo. La lección es que **la versión compacta del teorema no se puede aplicar por analogía a superficies no compactas**: hay que trabajar con regiones acotadas y pasar al límite, y el límite recuerda la geometría, no solo la topología.

Otra vía (integrando directamente, como control). Con la misma parametrización, la curvatura es $K = -1/(1+2u^2)^2$ y $\sqrt{g} = \sqrt{1+2u^2}$, de modo que $K\sqrt{g} = -(1+2u^2)^{-3/2}$. Como la derivada de $u/\sqrt{1+2u^2}$ es precisamente $(1+2u^2)^{-3/2}$,

$$\iint_M K \, dA = -2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(1+2u^2)^{3/2}} = -2\pi\Big[\frac{u}{\sqrt{1+2u^2}}\Big]_{-\infty}^{\infty} = -2\pi \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}\,\pi.$$

Coincide. Y la integral entre $-a$ y a da $-4\pi a/\sqrt{1+2a^2}$, que es el valor que Gauss-Bonnet asignaba a R_a antes del límite.

Dónde se falla. (1) Aplicar el corolario compacto por analogía con el cilindro y contestar 0. (2) Restar las dos integrales de frontera en vez de sumarlas: orientados positivamente respecto de R_a, los dos paralelos contribuyen con el mismo signo, y quien las resta obtiene 0 para todo a. (3) Un resultado positivo es un aviso de error de signo: $K < 0$ en todos los puntos, así que la curvatura integral tiene que ser negativa.

Ejercicio 1.8. *El área de un huso esférico, y el área de la esfera*

Calcular, usando el teorema de Gauss-Bonnet, la curvatura integral de la región que delimitan en una esfera de radio R dos semicírculos máximos que se cortan formando un ángulo interior de θ radianes. A partir de este dato, deducir el valor del área de la esfera.

Resolución. La región R_θ es un huso: está limitada por dos arcos de círculo máximo que se cortan en dos puntos antipodales, y tiene por tanto **dos vértices**. Por simetría, los dos ángulos internos valen θ, luego los dos ángulos externos valen $\pi - \theta$.

Los lados son geodésicas, así que $K_g \equiv 0$ sobre ellos. Y R_θ es una región simple, homeomorfa a un disco, luego $\chi = 1$. La versión local da

$$0 + \iint_{R_\theta} K\,dA + 2(\pi - \theta) = 2\pi,$$

de donde

$$\boxed{\iint_{R_\theta} K\,dA = 2\theta}$$

Obsérvese que no depende del radio.

Como en la esfera de radio R la curvatura de Gauss es constante e igual a $1/R^2$, se tiene $\iint_{R_\theta} K\,dA = A(R_\theta)/R^2$, luego

$$A(R_\theta) = 2\theta R^2.$$

El área de la esfera. Hacemos tender θ a 2π: los husos cubren en el límite toda la esfera salvo una semicircunferencia, de área nula. Por continuidad de la medida,

$$A(S^2(R)) = 2 \cdot 2\pi \cdot R^2 = 4\pi R^2.$$

■

Observación (Un cuidado con el paso al límite)**.** No se aplica directamente la versión local a $\theta = 2\pi$: la esfera entera ya no es una región simple, y los dos arcos que delimitaban el huso coinciden. Se usa la fórmula para $0 < \theta < 2\pi$ y después se toma el límite.

Merece la pena señalarlo porque es exactamente la clase de detalle que separa un argumento correcto de uno meramente verosímil.

Otra vía (comprobación con el teorema de Gauss). El huso no es un triángulo, pero se puede partir en dos triángulos geodésicos trazando un arco de círculo máximo entre dos puntos de sus lados. Aplicando a cada uno el teorema de Gauss y sumando se obtiene el mismo valor. Es un buen ejercicio de comprobación: la curvatura integral es aditiva y los ángulos que se añaden en el corte se cancelan porque suman π a cada lado.

Ejercicio 1.9. *Un polígono geodésico en una superficie de curvatura constante*

1. Probar que en una superficie con curvatura de Gauss constante y no nula, el área de todo polígono geodésico de n lados que encierra una región simple está determinada por sus ángulos internos.
2. Sea M una s.r. orientada con $K < 0$. Probar que, dado un polígono geodésico de M con n lados y todos sus ángulos internos iguales, si $n \leq 4$ entonces dichos ángulos son agudos.

Resolución. 1. Sea P un polígono geodésico de n lados que encierra una región simple, con ángulos internos $\psi_1, \ldots, \psi_n$. Los lados son geodésicos, luego la integral de curvatura geodésica se anula, y $\chi = 1$. La versión local da

$$\iint_P K\,dA + \sum_{i=1}^{n}(\pi - \psi_i) = 2\pi \quad \Longrightarrow \quad \iint_P K\,dA = \sum_{i=1}^{n} \psi_i - (n-2)\pi.$$

Si K es constante, $\iint_P K\,dA = K \cdot A(P)$, y al ser $K \neq 0$ se puede despejar:

$$A(P) = \frac{1}{K}\Big(\sum_{i=1}^{n} \psi_i - (n-2)\pi\Big).$$

El área queda determinada por los ángulos, como se pedía. ■

Obsérvese de paso que la fórmula generaliza el teorema de Gauss: con $n = 3$ da $\sum \psi_i - \pi$.

2. Con todos los ángulos internos iguales a ψ, la fórmula anterior da

$$\iint_P K\, dA = n\psi - (n-2)\pi.$$

Aquí K puede variar: no se saca de la integral. Como $K < 0$ en P y $A(P) > 0$, el miembro izquierdo es estrictamente negativo, luego

$$n\psi < (n-2)\pi \quad \Longrightarrow \quad \psi < \frac{n-2}{n}\,\pi.$$

Se evalúa para los valores permitidos:

$$n = 3:\ \psi < \frac{\pi}{3}; \qquad n = 4:\ \psi < \frac{\pi}{2}.$$

En los dos casos $\psi < \pi/2$, es decir, los ángulos son agudos. ■

Observación (Por qué la hipótesis $n \leq 4$ es imprescindible)**.** Para $n = 5$ la cota es $\psi < 3\pi/5 = 108^\circ$, que ya no obliga a que el ángulo sea agudo, y a partir de ahí la cota crece hacia π. Así que el enunciado es lo más fuerte que se puede decir: con cinco lados o más, un polígono geodésico equiángulo en una superficie de curvatura negativa puede perfectamente tener ángulos obtusos.

De aquí sale también una consecuencia que conviene tener aparte: en una superficie con $K < 0$, un cuadrilátero geodésico **no puede ser un rectángulo**, porque eso exigiría $\psi = \pi/2$ y acabamos de ver que $\psi < \pi/2$.

1.3.10 Problemas de la relación

Los que siguen son los problemas que se contestan con el teorema y sus tres versiones. Los de índice de campos van en la sección 1.5, que es donde corresponden.

Ejercicio 1.10. *La curvatura integral de la esfera*

Probar que la curvatura integral de la esfera es 4π.

Resolución. Qué está pasando. El enunciado parece pedir una integral y no pide ninguna: pide reconocer que la esfera es compacta y que, por tanto, su curvatura integral no depende de su geometría sino solo de su topología.

La esfera es una s.r. compacta, conexa y orientable, luego el corolario para superficies compactas da

$$\iint_{S^2} K\, dA = 2\pi\chi(S^2) = 2\pi \cdot 2 = 4\pi.$$

■

Otra vía (por cálculo directo, que sirve de control). En la esfera de radio R la curvatura de Gauss es constante e igual a $1/R^2$ y el área vale $4\pi R^2$, luego

$$\iint_{S^2(R)} K\, dA = \frac{1}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi,$$

independientemente de R, como tenía que ser.

Otra vía (desde la otra mitad de la asignatura). La parte de topología demostrará que las superficies compactas orientables son la esfera y las sumas conexas de toros, con $\chi(M_n) = 2 - 2n$, y que la esfera es el caso $n = 0$. Ese 2 es el mismo 2 que aquí se obtuvo contando caras, aristas y vértices de un tetraedro. Merece la pena verlo: el 4π de la curvatura total de la esfera y el hecho de que un tetraedro tenga cuatro caras, seis aristas y cuatro vértices son el mismo dato.

QUÉ DEJA. La lectura correcta del corolario compacto: *no es una fórmula para calcular integrales, es una fórmula para no calcularlas*. Y el reflejo de preguntarse, ante cualquier superficie cerrada, cuánto vale su característica antes de plantear ninguna integral.

Ejercicio 1.11. *Dos familias de geodésicas que se cortan*

1. Sea una superficie con $K \geq 0$. Probar que si en un entorno de un punto existen dos familias de geodésicas que se cortan ortogonalmente, entonces $K \equiv 0$ en ese entorno.
2. Sean M una s.r. orientada y $p \in M$ tal que en un entorno de p existen dos familias de geodésicas que se cortan bajo ángulo constante. Calcular $K(p)$.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Dos familias de curvas que se cortan bajo ángulo constante forman en cada punto un cuadrilátero. ¿Qué clase de cuadrilátero?*
2. *Aplica la fórmula del polígono geodésico con $n = 4$.*
3. *En el primer apartado el ángulo es $\pi/2$; en el segundo es un ángulo constante θ cualquiera. Haz primero el segundo, que es más general.*

Resolución. La imagen. Dos familias de curvas que se cortan bajo ángulo constante forman una rejilla. Tomando dos curvas de cada familia se obtiene un cuadrilátero cuyos cuatro lados son geodésicos y cuyos cuatro ángulos internos son conocidos: dos valen θ y dos valen $\pi - \theta$, porque son los ángulos opuestos de la rejilla.

El cálculo. Sea Q uno de esos cuadriláteros geodésicos, que encierra una región simple. Por la fórmula del polígono geodésico con $n = 4$,

$$\iint_Q K\,dA = \sum_{i=1}^{4} \psi_i - (4-2)\pi = \big[\theta + (\pi - \theta) + \theta + (\pi - \theta)\big] - 2\pi = 2\pi - 2\pi = 0.$$

Es decir, **la curvatura integral de todo cuadrilátero de la rejilla es nula**, sea cual sea el ángulo constante θ.

Conclusión del segundo apartado. Haciendo que el cuadrilátero se contraiga alrededor de p y aplicando el teorema del valor medio para integrales dobles, existe p_ε en cada cuadrilátero con $0 = \iint_{Q_\varepsilon} K\,dA = K(p_\varepsilon)A(Q_\varepsilon)$, luego $K(p_\varepsilon) = 0$; y por continuidad de K, al tender $p_\varepsilon \to p$ resulta $K(p) = 0$.

Conclusión del primer apartado. Con $\theta = \pi/2$ el razonamiento anterior da $K \equiv 0$ en todo el entorno, sin necesidad siquiera de la hipótesis $K \geq 0$. ■

Observación (Para qué sirve entonces la hipótesis $K \geq 0$)**.** No hace falta, y merece la pena decirlo porque desconcierta encontrársela. El enunciado clásico la incluye, probablemente para sugerir un camino alternativo: si uno solo sabe que $\iint_Q K\,dA = 0$ para todo cuadrilátero

y además $K \geq 0$, puede concluir $K \equiv 0$ sin invocar el teorema del valor medio, porque una función continua no negativa con integral nula es idénticamente nula.

Ese es un argumento más elemental y perfectamente válido. El que se ha dado arriba es más fuerte, porque no necesita el signo.

Ejercicio 1.12. *El toro de revolución, por trozos*

Sobre el toro de revolución

$$x(u,v) = \big((b + a\cos u)\cos v,\ (b + a\cos u)\operatorname{sen} v,\ a\operatorname{sen} u\big), \qquad 0 < u, v < 2\pi,$$

con $b > a > 0$, se considera la región R cuya frontera la forman las curvas paramétricas $u = \pi/2$, $u = \pi$, $v = \pi/2$ y $v = \pi$.

1. Calcular la curvatura integral de la región R.
2. Utilizando el apartado anterior, descomponer el toro en dos regiones con la misma curvatura integral en valor absoluto pero distinto signo.

Resolución. Qué está pasando. El toro tiene una mitad exterior abombada, con curvatura positiva, y una mitad interior en forma de garganta, con curvatura negativa. La frontera entre las dos son las dos circunferencias superior e inferior, donde $K = 0$. El ejercicio consiste en aprovechar que esa estructura se lee directamente en el signo de $\cos u$.

Coeficientes métricos. Derivando,

$$\mathbf{X}_1 = \big(-a\operatorname{sen} u\cos v,\ -a\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v,\ a\cos u\big),$$

$$\mathbf{X}_2 = \big(-(b + a\cos u)\operatorname{sen} v,\ (b + a\cos u)\cos v,\ 0\big),$$

de donde

$$g_{11} = a^2, \qquad g_{22} = (b + a\cos u)^2, \qquad g_{12} = 0,$$

y por tanto $\sqrt{g} = a\,(b + a\cos u)$, que es positivo porque $b > a$.

La cancelación. Con $K = \dfrac{\cos u}{a(b + a\cos u)}$,

$$K\sqrt{g} = \frac{\cos u}{a(b + a\cos u)} \cdot a(b + a\cos u) = \cos u.$$

El factor incómodo desaparece entero. Este es el motivo de que el toro sea el ejemplo predilecto: la curvatura integral se calcula sin esfuerzo aunque la curvatura sea horrible.

1. La región R.

$$\iint_R K\,dA = \int_{\pi/2}^{\pi}\!\!\int_{\pi/2}^{\pi} \cos u\; dv\, du = \frac{\pi}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos u\, du = \frac{\pi}{2}\big[\operatorname{sen} u\big]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi}{2}(0 - 1) = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\boxed{\iint_R K\,dA = -\frac{\pi}{2}}$$

Sale negativa, como tenía que ser: u recorre $[\pi/2, \pi]$, donde $\cos u \leq 0$, es decir, la región está en la mitad interior del toro.

2. La descomposición. El signo de K es el de $\cos u$, que es positivo para $u \in (-\pi/2, \pi/2)$ y negativo para $u \in (\pi/2, 3\pi/2)$. Se toman

$$R^+ = \Big\{-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\Big\}, \qquad R^- = \Big\{\frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}\Big\},$$

la mitad exterior y la mitad interior. Se añaden sus bordes comunes $u = \pm\pi/2$ para obtener dos regiones regulares que cubren el toro; esos bordes no alteran las integrales de área. Los parámetros angulares se entienden módulo 2π. Entonces

$$\iint_{R^+} K\,dA = \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos u\,du\,dv = 2\pi\cdot 2 = 4\pi,$$

$$\iint_{R^-} K\,dA = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos u\,du\,dv = 2\pi\cdot(-2) = -4\pi.$$

Las dos valen 4π en valor absoluto y tienen signos opuestos, como se pedía. ■

Otra vía (comprobación con el corolario compacto). La suma tiene que ser la curvatura integral del toro entero:

$$4\pi + (-4\pi) = 0 = 2\pi\chi(T),$$

lo que confirma que $\chi(T) = 0$. Y eso, a su vez, es lo que la parte de topología obtendrá por otro camino completamente distinto: triangulando el toro y contando $9 - 27 + 18 = 0$.

Merece la pena parar en esto. Se ha calculado el mismo número de dos maneras que no se parecen en nada: integrando una curvatura sobre una superficie curva, y contando vértices, aristas y triángulos de un dibujo plano con identificaciones. Que coincidan es el contenido del teorema de Gauss-Bonnet.

QUÉ DEJA. El truco del toro, que hay que tener memorizado: $K\sqrt{g} = \cos u$, de modo que la curvatura integral de cualquier región coordenada del toro es $\iint \cos u\,du\,dv$ y se calcula de cabeza. Y la imagen que ordena el toro: mitad exterior con $K > 0$, mitad interior con $K < 0$, y las dos circunferencias de $u = \pm\pi/2$ con $K = 0$ como frontera.

Ejercicio 1.13. *La región entre el ecuador y un paralelo*

Sea M la superficie esférica de centro el origen y radio a. Sea α el ecuador y β otro paralelo cualquiera. Si R es la región encerrada entre ambas curvas, calcular el área de dicha región.

Resolución. Primer movimiento: contar fronteras. La región comprendida entre dos paralelos distintos tiene **dos** curvas frontera, luego es una corona y

$$\chi(R) = 0,$$

no 1. Escribir 2π en el segundo miembro es el error que este problema está diseñado para provocar.

Los ingredientes. En la esfera de radio a, $K = 1/a^2$ es constante, luego

$$\iint_R K\,dA = \frac{A(R)}{a^2}.$$

El ecuador es un círculo máximo y por tanto una geodésica: $\int_\alpha K_g\,ds = 0$. Falta el paralelo β.

La curvatura geodésica integral del paralelo. En la sección 1.2 se obtuvo, para la esfera unidad y el paralelo de latitud u_0,

$$K_g = -\operatorname{tg} u_0, \qquad \text{longitud} = 2\pi\cos u_0 \quad\Longrightarrow\quad \left|\oint_\beta K_g\,ds\right| = 2\pi|\operatorname{sen} u_0|.$$

Y la curvatura geodésica integral es invariante por semejanzas, así que en la esfera de radio a el paralelo de latitud u_0 da el mismo valor: $2\pi|\operatorname{sen} u_0|$. No depende del radio.

Gauss-Bonnet. Sin vértices y con $\chi(R) = 0$:

$$\underbrace{\int_\alpha K_g\, ds}_{=0} + \oint_\beta K_g\, ds + \frac{A(R)}{a^2} = 0,$$

de donde, tomando el signo que corresponde a la orientación positiva respecto de R,

$$\frac{A(R)}{a^2} = 2\pi|\operatorname{sen} u_0| \quad \Longrightarrow \quad \boxed{A(R) = 2\pi a^2|\operatorname{sen} u_0|}$$

■

Otra vía (comprobación integrando el área). Con la parametrización habitual, $\sqrt{g} = a^2 \cos u$, luego

$$A(R) = \int_0^{2\pi} \int_{\text{mín}(0,u_0)}^{\text{máx}(0,u_0)} a^2 \cos u\, du\, dv = 2\pi a^2 |\operatorname{sen} u_0|,$$

que coincide. Este control conviene hacerlo siempre que el signo del término de frontera admita dudas.

Observación (El caso de los trópicos)**.** Un caso concreto: el área de la franja terrestre entre el trópico de Cáncer y el de Capricornio, a unos 23° de latitud, con $a \simeq 6300$ km. Ahora la región está entre dos paralelos simétricos respecto del ecuador, y su área es el doble:

$$A = 2 \cdot 2\pi a^2 \operatorname{sen} 23^\circ \simeq 4\pi(6300)^2(0{,}3907)\ \text{km}^2.$$

Es aproximadamente el 39 % de la superficie terrestre, que es un dato con el que merece la pena contrastar la intuición: su proporción en un mapa depende de la proyección, y no debe confundirse con su proporción de área sobre la esfera.

Ejercicio 1.14. *Una hoja del hiperboloide de dos hojas*

Aplicando el teorema de Gauss-Bonnet, calcular la curvatura integral de una de las hojas del hiperboloide de revolución $z^2 - x^2 - y^2 = 1$.

Resolución. Qué está pasando. Una hoja del hiperboloide de dos hojas es un cuenco convexo, homeomorfo a un plano. No es compacta, así que el corolario para superficies compactas no sirve; hay que trabajar con regiones acotadas.

Parametrización. Girando la rama $x = \operatorname{senh} u$, $z = \cosh u$, $u \geq 0$, alrededor del eje OZ:

$$x(u, v) = (\operatorname{senh} u \cos v,\ \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v,\ \cosh u),$$

que en efecto cumple $z^2 - x^2 - y^2 = \cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$.

$$\mathbf{X}_1 = (\cosh u \cos v,\ \cosh u \operatorname{sen} v,\ \operatorname{senh} u), \qquad \mathbf{X}_2 = (-\operatorname{senh} u \operatorname{sen} v,\ \operatorname{senh} u \cos v,\ 0),$$

$$g_{11} = \cosh^2 u + \operatorname{senh}^2 u = \cosh 2u, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = \operatorname{senh}^2 u,$$

y $\sqrt{g} = \operatorname{senh} u\sqrt{\cosh 2u}$.

La región. Sea R_a la parte con $0 \le u \le a$. El «borde» $u = 0$ es el vértice $(0,0,1)$, un solo punto, así que R_a es un **casquete**: una región simple, homeomorfa a un disco, con una única curva frontera, el paralelo $u = a$, y sin vértices. Luego $\chi(R_a) = 1$. La parametrización polar deja de ser regular en $u = 0$, pero la superficie es suave allí: $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$. Para Liouville solo usamos la carta junto al paralelo $u = a > 0$.

La curvatura geodésica del paralelo, por Liouville. Con $\dot{u}_1 = 0$,

$$K_g = \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u}\,\dot{u}_2 = \frac{2\operatorname{senh} a\cosh a}{2\operatorname{senh} a\sqrt{\cosh 2a}}\cdot\frac{1}{\operatorname{senh} a} = \frac{\cosh a}{\operatorname{senh} a\sqrt{\cosh 2a}}.$$

La longitud del paralelo es $2\pi\operatorname{senh} a$, luego

$$\oint_{u=a} K_g\, ds = \frac{2\pi\cosh a}{\sqrt{\cosh 2a}}.$$

Gauss-Bonnet y paso al límite.

$$\iint_{R_a} K\, dA = 2\pi - \frac{2\pi\cosh a}{\sqrt{\cosh 2a}}.$$

Cuando $a \to +\infty$, usando $\cosh a \sim e^a/2$ y $\cosh 2a \sim e^{2a}/2$,

$$\frac{\cosh a}{\sqrt{\cosh 2a}} \longrightarrow \frac{e^a/2}{e^a/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

de donde

$$\boxed{\iint_M K\, dA = 2\pi - \sqrt{2}\,\pi = \pi\big(2 - \sqrt{2}\big) \simeq 1{,}84}$$

■

Observación (Dos controles de sensatez)**.** El resultado es **positivo**, como tenía que ser: la hoja es convexa y su curvatura de Gauss es positiva en todos sus puntos.

Y es **menor que** 4π, también como tenía que ser: la imagen de la aplicación de Gauss de la hoja es un casquete esférico propio, no la esfera entera, porque las normales de la hoja nunca llegan a apuntar horizontalmente. En efecto, el valor obtenido es la medida de ese casquete.

Compara con el ejercicio del hiperboloide de *una* hoja, que dio $-2\sqrt{2}\pi$: misma familia de superficies, curvaturas integrales de signo opuesto. La diferencia está en que una es un cuenco y la otra una silla de montar.

Ejercicio 1.15. *El elipsoide y su imagen esférica*

Sea M el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ y se considera la región

$$R = \{(x,y,z) \in M \,:\, x \le 0,\ y \le 0,\ z \le 0\}.$$

Hallar el área de la imagen esférica de R.

Resolución. Qué está pasando. El enunciado parece exigir integrar la curvatura de un elipsoide, que es una función horrible con tres parámetros. No hace falta calcular nada: basta una simetría y el corolario compacto.

Primer movimiento: el área de la imagen esférica es la curvatura integral. En *Geometría local* (secciones 4.2, *La aplicación de Gauss*, y 4.4, apartado *Curvatura media, curvatura de Gauss y el teorema egregio*) se probó que, donde $K \neq 0$, la aplicación de Gauss es un difeomorfismo local y

$$|K(p)| = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A(\mathbf{N}(V_\varepsilon))}{A(V_\varepsilon)}.$$

Integrando esa relación sobre una región donde $\mathbf{N}$ sea inyectiva,

$$A\big(\mathbf{N}(R)\big) = \iint_R |K|\, dA.$$

La inyectividad se comprueba aquí directamente: la normal exterior tiene la dirección de $(x/a^2, y/b^2, z/c^2)$. Fijada una dirección unitaria n, el punto correspondiente es $\lambda(a^2n_1, b^2n_2, c^2n_3)$, y la ecuación del elipsoide fija un único $\lambda > 0$. En el elipsoide $K > 0$ en todos sus puntos — es una superficie convexa, todos sus puntos son elípticos —, luego $|K| = K$ y

$$A\big(\mathbf{N}(R)\big) = \iint_R K\, dA.$$

Segundo movimiento: la simetría. Los tres planos coordenados son planos de simetría del elipsoide, y las simetrías respecto de ellos son isometrías que lo llevan en sí mismo. Dividen el elipsoide en **ocho** regiones congruentes, una por octante, y R es una de ellas. Como una isometría conserva la curvatura de Gauss y el área, las ocho tienen la misma curvatura integral.

Tercer movimiento: el corolario compacto. El elipsoide es compacto, conexo, orientable y homeomorfo a una esfera, luego

$$\iint_M K\, dA = 2\pi\chi(M) = 4\pi.$$

Repartiendo entre las ocho regiones:

$$\boxed{A\big(\mathbf{N}(R)\big) = \iint_R K\, dA = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}}$$

■

Observación (Por qué no depende de a, b y c)**.** El resultado no contiene los semiejes, y eso desconcierta la primera vez. La razón es la de siempre: la curvatura integral de una superficie compacta solo depende de su topología. Un elipsoide muy alargado tiene curvatura enorme en los extremos y casi nula en el centro, pero la integral sigue valiendo 4π.

Se puede comprobar de otra manera: la imagen esférica del octante $x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0$ del elipsoide es exactamente el octante correspondiente de la esfera unidad, porque el vector normal del elipsoide en ese octante apunta al mismo octante de direcciones. Y el área de un octante de la esfera unidad es $4\pi/8 = \pi/2$.

Ejercicio 1.16. *Un arco cualquiera sobre el cilindro*

Se considera el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Sea C cualquier arco de curva simple y regular sobre el cilindro que une los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 1)$. ¿Qué consecuencia se obtiene de aplicar el

teorema de Gauss-Bonnet a la región del cilindro delimitada por las circunferencias

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases},$$

la recta $x=0$, $y=-1$ y el arco de curva C? En particular, ¿qué se deduce si C es un arco de hélice circular?

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *De la curva C no se sabe nada. Eso no es un obstáculo: es la gracia del problema.*
2. *Los tres primeros trozos de la frontera son geodésicas del cilindro. ¿Por qué?*
3. *¿Cuánto vale K en el cilindro?*

Resolución. Qué está pasando. Es un tipo de problema que reaparece a menudo: se da una curva de la que no se sabe nada y se pide qué *obliga* el teorema. La respuesta no es un número, es una ligadura.

Los tres lados conocidos son geodésicos. La recta $x=0$, $y=-1$ es una generatriz del cilindro, y una recta contenida en una superficie es geodésica. Las dos circunferencias $z=0$ y $z=1$ son paralelos del cilindro, que en el desenrollado son rectas horizontales, luego también geodésicas. Los tres aportan $K_g \equiv 0$.

La curvatura de Gauss se anula. El cilindro es desarrollable, $K \equiv 0$, luego $\iint_R K\,dA = 0$.

La región que se está suponiendo. La lectura habitual del enunciado es que C y los tres arcos elegidos de las curvas indicadas forman el borde de un disco, sin cruces adicionales. Bajo esa hipótesis $\chi(R)=1$. Un arco simple arbitrario podría salir de la franja o cruzar la generatriz varias veces; entonces hay que identificar primero las regiones que realmente delimita. La simplicidad de C por sí sola no garantiza la configuración del ejercicio.

Lo que queda. El teorema se reduce a

$$\boxed{\int_C K_g\,ds + \sum_i \varphi_i = 2\pi}$$

Esa es la consecuencia: *la curvatura geodésica total del arco C y la suma de los ángulos externos de la región están ligadas, y su suma vale 2π sea cual sea el arco que forme esa frontera simple, recorrido positivamente*. Fijados los ángulos con que C llega a la frontera, su curvatura geodésica total queda determinada.

Si C es un arco de hélice circular. Las hélices circulares son geodésicas del cilindro: en el desenrollado son rectas de pendiente constante. Luego $\int_C K_g\,ds = 0$ y

$$\sum_i \varphi_i = 2\pi.$$

■

Otra vía (comprobándolo en el desenrollado). Con la frontera formada solo por geodésicas, la región desenrollada es un polígono plano de lados rectos, y la suma de los ángulos externos de un polígono plano vale 2π. Es la misma conclusión obtenida sin el teorema, y sirve de control.

Ejercicio 1.17. *La desarrollable tangencial de una circunferencia*

Sea $\alpha(s) = (\cos s, \operatorname{sen} s, 1)$, $s \in (0, 2\pi)$, y sea $x(s,v) = \alpha(s) + v\,\mathbf{t}(s)$, $v > 0$, la superficie desarrollable tangencial de α. Comprobar el teorema de Gauss-Bonnet en la región limitada por las curvas $v = 1$, $v = 2$, $s = \pi/2$ y $s = \pi$.

Resolución. El primer movimiento decide el problema. La curva α es la circunferencia unidad del plano $z = 1$. Sus rectas tangentes están todas contenidas en ese mismo plano. Por tanto **la desarrollable tangencial de α es un trozo del plano** $z = 1$, y el ejercicio consiste en comprobar Gauss-Bonnet en una región plana descrita en coordenadas disfrazadas.

Quien no vea esto se enfrenta a una cuenta larga; quien lo vea, ya sabe que $K \equiv 0$ y que todo el trabajo está en los ángulos y en las curvaturas geodésicas.

Los coeficientes métricos. Con $\mathbf{t}(s) = (-\operatorname{sen} s, \cos s, 0)$ y $\dot{\mathbf{t}} = k\,\mathbf{n} = (-\cos s, -\operatorname{sen} s, 0)$, porque la circunferencia unidad tiene $k \equiv 1$:

$$\mathbf{X}_1 = \alpha' + v\dot{\mathbf{t}} = (-\operatorname{sen} s - v\cos s,\ \cos s - v\operatorname{sen} s,\ 0), \qquad \mathbf{X}_2 = \mathbf{t} = (-\operatorname{sen} s, \cos s, 0).$$

De ahí

$$g_{11} = 1 + v^2, \qquad g_{12} = 1, \qquad g_{22} = 1, \qquad g = (1 + v^2) - 1 = v^2,$$

luego $\sqrt{g} = v$, que es positivo. Obsérvese que $g_{12} = 1 \neq 0$: las líneas paramétricas **no** son ortogonales, y por tanto no se puede aplicar la fórmula de Liouville tal cual.

Identificar las curvas. En el plano $z = 1$, la curva $v = \text{cte.}$ es

$$(\cos s - v\operatorname{sen} s,\ \operatorname{sen} s + v\cos s),$$

cuya distancia al origen es $\sqrt{(\cos s - v\operatorname{sen} s)^2 + (\operatorname{sen} s + v\cos s)^2} = \sqrt{1 + v^2}$. Es decir, **las curvas $v = \text{cte.}$ son circunferencias concéntricas de radio $\sqrt{1+v^2}$**. Y las curvas $s = \text{cte.}$ son las rectas tangentes a la circunferencia unidad, es decir, **segmentos rectilíneos**.

La región es, pues, el trozo de corona circular comprendido entre los radios $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$, cortado por dos rectas tangentes a la circunferencia unidad en los puntos de parámetros $s = \pi/2$ y $s = \pi$.

Los cuatro sumandos.

Curvatura de Gauss. $K \equiv 0$ por ser un trozo de plano, luego $\iint_R K\,dA = 0$.

Los lados $s = cte.$ Son segmentos de recta: $K_g \equiv 0$.

Los lados $v = cte.$ Son arcos de circunferencia de radio $\rho_v = \sqrt{1+v^2}$, cuya curvatura vale $1/\rho_v$ en valor absoluto. La integral de la curvatura geodésica sobre un arco de circunferencia es el ángulo que subtiende, con signo, y no depende del radio. El ángulo subtendido por el arco correspondiente a $s \in [\pi/2, \pi]$ es $\pi/2$, porque al girar s un ángulo Δs la circunferencia $v = \text{cte.}$ gira ese mismo ángulo. Por tanto los dos arcos aportan $+\pi/2$ y $-\pi/2$, con signos opuestos porque uno es la frontera exterior y otro la interior:

$$\int_{v=1} K_g\,ds + \int_{v=2} K_g\,ds = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Los ángulos. Cada radio de la corona es perpendicular a los arcos, pero los lados $s = \text{cte.}$ **no** son radios: son tangentes a la circunferencia unidad, y por tanto cortan a las circunferencias concéntricas bajo un ángulo que no es recto. El ángulo entre $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ cumple

$$\cos\theta = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}},$$

de modo que $\theta_v = \arccos\left(1/\sqrt{1+v^2}\right)$, que vale $\pi/4$ para $v = 1$ y $\arccos(1/\sqrt{5})$ para $v = 2$.

Como en todo rectángulo de coordenadas, en dos vértices opuestos el ángulo interno es θ y en los otros dos es $\pi - \theta$, pero aquí θ depende de v: en los dos vértices con $v = 1$ los ángulos internos son θ_1 y $\pi - \theta_1$, y en los dos con $v = 2$ son θ_2 y $\pi - \theta_2$. La suma de los cuatro es

$$\theta_1 + (\pi - \theta_1) + \theta_2 + (\pi - \theta_2) = 2\pi,$$

luego $\sum \varphi_i = 4\pi - 2\pi = 2\pi$.

Comprobación. La región es simple, $\chi = 1$, y

$$\underbrace{0}_{\text{lados rectos}} + \underbrace{0}_{\text{arcos}} + \underbrace{0}_{K} + \underbrace{2\pi}_{\text{ángulos}} = 2\pi = 2\pi\chi(R). \quad \checkmark$$

■

Observación (La lección de este problema)**.** Es el único problema de esta sección en el que $g_{12} \neq 0$, y no es casualidad. Deja dos avisos.

El primero: **no se puede usar la fórmula de Liouville sin comprobar antes que** $g_{12} = 0$. Aquí no lo es, y quien la aplique obtiene un disparate.

El segundo: aquí los ángulos internos suman 2π porque θ_v depende solo de v y, en cada uno de los dos valores de v, aparecen los ángulos complementarios hasta π: θ_v y $\pi - \theta_v$. Eso **no vale para un rectángulo de coordenadas cualquiera**: si el ángulo entre las líneas coordenadas varía independientemente en los cuatro vértices, no hay tal cancelación. Hay que comprobarla, como se ha hecho aquí.

Ejercicio 1.18. *Consecuencias topológicas del signo de la curvatura*

1. Probar que una superficie compacta, conexa y orientable con curvatura de Gauss positiva verifica que toda curva cerrada y simple la divide en dos regiones. (Se explicita la simplicidad que necesita la aplicación de Jordan.)
2. Sea M una superficie regular, orientable, compacta y conexa que no es homeomorfa a una esfera. Probar que M contiene un punto elíptico, un punto hiperbólico y un punto o bien parabólico o bien plano.
3. Sea M una superficie homeomorfa a un cilindro y con $K < 0$. Probar que M tiene, a lo más, una geodésica cerrada y simple.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Para el apartado 1, ¿qué característica tiene una superficie compacta orientable con $K > 0$? Usa el corolario compacto.*
2. *Para el apartado 2, la característica de una superficie compacta orientable que no es una esfera es ≤ 0. ¿Qué dice eso de la integral de K?*
3. *Para el apartado 3, si hubiera dos geodésicas cerradas y simples disjuntas, ¿qué región encerrarían entre ellas y cuál sería su característica?*

Resolución. 1. Si $K > 0$ en todos los puntos, entonces $\iint_M K\,dA > 0$, y por el corolario compacto $2\pi\chi(M) > 0$, luego $\chi(M) > 0$. Pero la característica de una superficie regular orientable, compacta y conexa es par y menor o igual que dos, así que $\chi(M) = 2$ y M es homeomorfa a una esfera.

Y en una superficie homeomorfa a la esfera, toda curva cerrada y simple la divide: es el teorema de Jordan sobre la esfera, que la parte de topología demuestra con Seifert-van Kampen. ■

2. Como M es compacta, orientable, conexa y no homeomorfa a una esfera, su característica es par y menor o igual que dos, pero distinta de dos: $\chi(M) \leq 0$. Por el corolario compacto,

$$\iint_M K\,dA = 2\pi\chi(M) \leq 0.$$

Existe un punto hiperbólico. Si fuera $K \geq 0$ en todos los puntos, la integral sería ≥ 0; combinado con lo anterior, $\iint_M K\,dA = 0$ y, siendo $K \geq 0$ continua con integral nula, $K \equiv 0$. Pero entonces M sería una superficie compacta con curvatura idénticamente nula, lo cual es imposible: toda superficie compacta de $\mathbb{R}^3$ tiene algún punto elíptico, como se ve en el párrafo siguiente. Luego existe un punto con $K < 0$, es decir, hiperbólico.

Existe un punto elíptico. Este argumento es independiente del teorema y conviene conocerlo. Al ser M compacta, está acotada, luego existe la esfera de centro el origen y radio mínimo r que la contiene, y M toca a esa esfera en algún punto p. En p, la superficie es tangente a la esfera y queda dentro de ella, de modo que sus curvaturas normales son en valor absoluto mayores o iguales que $1/r$ y del mismo signo. Luego $K(p) \geq 1/r^2 > 0$ y p es elíptico.

Existe un punto parabólico o plano. La función K es continua sobre M, que es conexa; toma un valor positivo en el punto elíptico y uno negativo en el hiperbólico. Por el teorema del valor intermedio, existe un punto donde $K = 0$, y ese punto es parabólico o plano según se anulen una o las dos curvaturas principales. ■

3. Supóngase que M, homeomorfa a un cilindro y con $K < 0$, tuviera dos geodésicas cerradas y simples distintas, γ_1 y γ_2.

Primero, ninguna puede limitar un disco: Gauss-Bonnet daría $\iint_D K\,dA = 2\pi$, imposible con $K < 0$. Por tanto ambas dan una vuelta esencial al cilindro.

Si se cortan, usamos un hecho topológico del anillo: dos curvas simples esenciales que se cruzan forman un disco limitado por un arco de cada una (un *bigono*). Puede verse cortando el anillo por una de las curvas y tomando un arco de la otra que recorte un disco sin más cruces dentro. Las geodésicas distintas no pueden ser tangentes, por unicidad, así que los dos ángulos internos ψ_1, ψ_2 del bigono son positivos. Gauss-Bonnet daría $\iint_D K\,dA = \psi_1 + \psi_2 > 0$, contradicción. Este es el argumento del disco geodésico que se desarrollará en la sección de aplicaciones.

Si son disjuntas, la región R comprendida entre ambas es una corona, luego $\chi(R) = 0$, y su frontera está formada por geodésicas sin vértices. Gauss-Bonnet da

$$\underbrace{0}_{\text{geodésicas}} + \iint_R K\,dA + \underbrace{0}_{\text{sin vértices}} = 2\pi \cdot 0 = 0,$$

luego $\iint_R K\,dA = 0$. Pero $K < 0$ en todo punto y $A(R) > 0$, así que la integral es estrictamente negativa. Contradicción. ■

Observación (La variante con el signo cambiado: $K > 0$ en vez de $K < 0$)**.** Hay una variante clásica que pide probar que en una superficie homeomorfa a la esfera con $K > 0$, dos geodésicas cerradas y simples cualesquiera tienen siempre al menos un punto en común.

Se demuestra igual, y merece la pena verlo porque es el argumento del apartado 3 con el signo cambiado. Si fueran disjuntas, la región entre ellas sería una corona con $\chi = 0$ y frontera geodésica, de donde $\iint_R K\,dA = 0$; pero $K > 0$ obliga a que la integral sea positiva. Contradicción.

QUÉ DEJA. El patrón que resuelve casi todos los problemas cualitativos de esta sección: *se supone que existe la configuración prohibida, se identifica la región que encierra, se cuenta su característica y se aplica el teorema; el signo de K hace el resto*. Y una lista corta de características que hay que tener a mano: región simple 1, corona 0, esfera 2, superficie compacta orientable distinta de la esfera ≤ 0.

Ejercicio 1.19. *Una región plana con dos agujeros*

Aplicar el teorema de Gauss-Bonnet a una región plana rectangular con un agujero circular y otro triangular, disjuntos, con frontera rectilínea en el triangular. ¿Qué consecuencia se obtiene?

Resolución. Qué está pasando. Es el ejercicio que obliga a soltar el reflejo de escribir 2π en el segundo miembro. Con dos agujeros la característica es -1 y el segundo miembro es -2π.

Los datos. La región es un rectángulo al que se le han quitado dos discos abiertos, luego tiene tres curvas frontera y

$$\chi(R) = 1 - 2 = -1.$$

Es plana, luego $\iint_R K\,dA = 0$.

Los términos de frontera. La frontera exterior del rectángulo está formada por cuatro segmentos rectos: no aportan curvatura geodésica, y sus cuatro ángulos externos valen $\pi/2$, que suman 2π. El agujero triangular tiene tres lados rectos y tres vértices; llamando ψ_1, ψ_2, ψ_3 a sus ángulos internos *como triángulo*, sus ángulos externos *como frontera de R* valen $-(\pi - \psi_i)$, con signo negativo porque el agujero se recorre en sentido contrario y los vértices son cóncavos vistos desde R. Su suma es $-(3\pi - \pi) = -2\pi$, porque los ángulos internos de un triángulo plano suman π. El agujero circular no tiene vértices y aporta $\oint K_g\,ds = -2\pi$, también negativo por recorrerse en sentido contrario al de la frontera exterior.

La comprobación.

$$\underbrace{-2\pi}_{\text{círculo}} + \underbrace{0}_{\text{lados rectos}} + \underbrace{0}_{K} + \underbrace{2\pi}_{\text{rectángulo}}\ \underbrace{-2\pi}_{\text{triángulo}} = -2\pi = 2\pi\chi(R). \quad \checkmark$$

La consecuencia. Todo cuadra, y esa es la respuesta: *el teorema no da información nueva en el plano, sino que recupera hechos elementales de geometría euclidiana*. Concretamente, la identidad es equivalente a decir que los ángulos externos de un polígono plano suman 2π y que una circunferencia tiene curvatura total 2π. Lo interesante es cómo lo empaqueta: cada agujero resta 2π, y el número de agujeros aparece en el segundo miembro a través de la característica. ■

Ejercicio 1.20. *La imagen esférica de las dos regiones de una geodésica*

Sea M una superficie regular homeomorfa a una esfera, con curvatura de Gauss no nula en cada punto, C una geodésica cerrada y simple de M, y R_1 y R_2 las regiones de M que tienen a C como frontera común. Probar que $\mathbf{N}(R_1)$ y $\mathbf{N}(R_2)$ tienen la misma área, donde $\mathbf{N}$ es la aplicación de Gauss.

Resolución. Primer movimiento: K tiene signo constante. La curvatura de Gauss es continua sobre M, que es conexa, y no se anula en ningún punto; luego no puede cambiar de signo. Además, M es homeomorfa a una esfera, así que $\chi(M) = 2$ y $\iint_M K\,dA = 4\pi > 0$. Por tanto

$K > 0$ en todo punto. Para identificar la integral con el área de la imagen, falta justificar que $\mathbf{N}$ es inyectiva: al ser $K \neq 0$, es un difeomorfismo local; la compacidad de M lo convierte en un recubrimiento de S^2. Como M es conexa y S^2 es simplemente conexa, ese recubrimiento tiene una sola hoja. Así $\mathbf{N}$ es un difeomorfismo y

$$A\big(\mathbf{N}(R_i)\big) = \iint_{R_i} |K|\, dA = \iint_{R_i} K\, dA.$$

Segundo movimiento: Gauss-Bonnet en cada mitad. Cada R_i es una región simple —una curva cerrada y simple divide a una superficie homeomorfa a la esfera en dos discos—, luego $\chi(R_i) = 1$; su frontera es C, que es geodésica, así que no aporta curvatura geodésica; y no hay vértices. El teorema da, para cada i,

$$\iint_{R_i} K\, dA = 2\pi.$$

Por tanto $A(\mathbf{N}(R_1)) = A(\mathbf{N}(R_2)) = 2\pi$: no solo tienen la misma área, sino que se sabe cuál es. ■

Observación. De paso queda comprobado el corolario compacto: $2\pi + 2\pi = 4\pi = 2\pi\chi(M)$.

Y el resultado tiene una lectura geométrica bonita: **una geodésica cerrada y simple de una superficie ovalada reparte la esfera de direcciones en dos mitades iguales**. En la esfera unidad el reparto se ve sin cuentas, y merece la pena decir por qué: ahí la aplicación de Gauss es la identidad, porque el normal exterior en p es el propio p, así que la esfera de direcciones *es* la superficie; la geodésica es un círculo máximo, y la simetría respecto de su plano intercambia los dos hemisferios, luego los dos tienen la misma área, 2π. El teorema dice que ese reparto sigue siendo exacto en cualquier superficie ovalada, por deformada que esté y aunque allí ya no haya ninguna simetría que lo explique.

Ejercicio 1.21. *El cuadrilátero geodésico en curvatura negativa*

Sea M una s.r. con curvatura de Gauss constante y negativa, y sea R una región encerrada por un cuadrilátero geodésico, es decir, por una curva cerrada, simple y regular a trozos con cuatro vértices y cuyos cuatro lados son geodésicas.

1. Si dicho cuadrilátero es un *rectángulo*, es decir, si sus cuatro ángulos internos son rectos, ¿puede ser R simple?
2. Si R es simple, ¿qué se puede decir de los ángulos internos de su frontera?

Resolución. Se escribe el teorema para la región. Supóngase que R es simple, de modo que $\chi(R) = 1$ y vale la versión local. Sean $\widetilde{\varphi}_1, \dots, \widetilde{\varphi}_4$ los ángulos internos y $\varphi_i = \pi - \widetilde{\varphi}_i$ los externos. Como los cuatro lados son geodésicas, $k_g \equiv 0$ sobre ellos y el primer sumando desaparece:

$$\iint_R K\, dA + \sum_{i=1}^{4} \varphi_i = 2\pi.$$

Sea $K \equiv c < 0$ la curvatura, constante por hipótesis. Entonces $\iint_R K\, dA = c\, A(R)$, y sustituyendo los ángulos externos por los internos,

$$c\, A(R) + \sum_{i=1}^{4} (\pi - \widetilde{\varphi}_i) = 2\pi \quad \Longrightarrow \quad c\, A(R) + 4\pi - \sum_{i=1}^{4} \widetilde{\varphi}_i = 2\pi,$$

es decir,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{4} \widetilde{\varphi}_i = 2\pi + c\,A(R)} \tag{1.10}$$

Primer apartado. Si el cuadrilátero fuera un rectángulo, sus cuatro ángulos internos valdrían $\pi/2$ y su suma sería exactamente 2π. Llevándolo a (1.10),

$$2\pi = 2\pi + c\,A(R) \quad \Longrightarrow \quad c\,A(R) = 0.$$

Pero $c < 0$ estrictamente y $A(R) > 0$, porque R es una región con interior no vacío. El producto $c\,A(R)$ es entonces estrictamente negativo y la igualdad es imposible.

Luego R no puede ser simple. En una superficie de curvatura constante negativa no existe ningún rectángulo geodésico que encierre una región homeomorfa a un disco; y por tanto no existe el análogo del rectángulo de la geometría euclídea. ■

Segundo apartado. Si R es simple, la igualdad (1.10) sigue valiendo, y como $c < 0$ y $A(R) > 0$ se tiene $c\,A(R) < 0$, de donde

$$\sum_{i=1}^{4} \widetilde{\varphi}_i < 2\pi.$$

Es decir: **la suma de los cuatro ángulos internos es estrictamente menor que** 2π, que es lo que sumarían en el plano. Hay un *defecto* angular, y la igualdad (1.10) dice además cuánto vale exactamente:

$$A(R) = \frac{1}{c}\Big(\sum_{i=1}^{4} \widetilde{\varphi}_i - 2\pi\Big) = \frac{1}{|c|}\Big(2\pi - \sum_{i=1}^{4} \widetilde{\varphi}_i\Big),$$

de modo que el área del cuadrilátero está determinada por sus ángulos. En particular, al menos uno de los cuatro ángulos internos es estrictamente menor que $\pi/2$, porque si todos fueran mayores o iguales la suma llegaría a 2π. ■

Otra vía (el mismo argumento para un polígono de n lados). No hay nada especial en el cuatro. Repitiendo la cuenta con n vértices se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} \widetilde{\varphi}_i = (n-2)\pi + c\,A(R),$$

que contiene los tres casos de un vistazo, con $(n-2)\pi$ como valor euclídeo de referencia:

- si $c = 0$ se recupera la fórmula del instituto para la suma de los ángulos de un polígono;
- si $c > 0$ hay exceso angular, y por eso en la esfera existen triángulos con tres ángulos rectos;
- si $c < 0$ hay defecto, y por eso no hay rectángulos.

Ese enunciado general es exactamente el del ejercicio sobre polígonos geodésicos en curvatura constante que ya se ha resuelto en este capítulo, y merece la pena reconocer que el problema del cuadrilátero es su caso $n = 4$ con el signo de c fijado.

Otra vía (sin fórmulas, mirando la hipótesis que falla). Hay una lectura del primer apartado que conviene tener, porque es la que se pide cuando el enunciado no deja calcular. Si un rectángulo geodésico encierra una región simple, Gauss-Bonnet obliga a que su curvatura integral sea nula. En una superficie de curvatura constante no nula eso solo puede ocurrir si el área es cero, es decir, si no hay región. Así que el rectángulo geodésico, si existe como curva, tiene que encerrar algo que *no* es una región simple: por ejemplo una región que rodee

un asa, con $\chi \neq 1$. Es el mismo fenómeno que en el ejercicio de las dos geodésicas del cilindro: la curvatura es la correcta y lo que falla es la topología.

QUÉ DEJA. La cadena completa — lados geodésicos anulan $\oint K_g$, curvatura constante saca K de la integral y deja el área, y $\varphi_i = \pi - \widetilde{\varphi}_i$ traduce a ángulos internos — que resuelve de una vez todos los problemas de polígonos geodésicos. Y la consecuencia de fondo: en curvatura constante no nula, **el área de un polígono geodésico está determinada por sus ángulos**, de modo que no hay figuras semejantes de tamaños distintos. Es la razón última de que la geometría hiperbólica no tenga rectángulos que encierren discos ni permita ampliar una figura conservando sus ángulos dentro de la misma curvatura constante.

Qué se ha ganado. Las dos preguntas del principio tienen respuesta. La de la finca: en una región simple, lo que giran los lados, lo que se gira en las esquinas y la curvatura encerrada $\iint_R K\,dA$ suman siempre 2π. La vuelta que falta en la ladera se ha ido a esa integral, y se predice sin salir de la finca, porque K es intrínseca. La del agrimensor: si los lados del triángulo son geodésicas, el sobrante de la suma de ángulos sobre π es exactamente la curvatura que encierra, por el teorema de Gauss de la subsección 1.3.7. No depende del instrumento. Depende del sitio y del tamaño solo a través de esa integral: en una esfera de radio a vale el área del triángulo dividida por a^2. De propina, sobre una superficie compacta la curvatura total ya no depende de la forma, sino solo de $\chi(M)$ (subsección 1.3.8). Queda abierto qué se puede hacer con una igualdad así, y la sección siguiente la usa para leer la curvatura en el giro de un vector transportado y para prohibir ciertas configuraciones de geodésicas.

Repaso: el teorema

REPASO INTERCALADO: GAUSS-BONNET, PRIMERA RONDA

A libro cerrado, en un folio.

1. Enuncia el teorema de Gauss-Bonnet general. Di qué es cada símbolo.
2. Enuncia la versión local y di exactamente en qué se diferencia de la general.
3. Enuncia el teorema de Gauss para triángulos geodésicos y dedúcelo de la versión local en tres líneas.
4. ¿Cuánto vale χ de un disco, de una corona y de un disco con dos agujeros?
5. En la demostración del lema del triángulo, ¿dónde entra el teorema de Green y dónde el del índice de rotación?
6. ¿Por qué se cancelan los lados internos al sumar sobre la triangulación?

REPASO INTERCALADO: GAUSS-BONNET, SEGUNDA RONDA

1. Una superficie compacta y orientable tiene curvatura integral -4π. ¿Qué superficie es?
2. ¿Puede existir una s.r. compacta de $\mathbb{R}^3$ con $K < 0$ en todos sus puntos? Justifica usando la existencia de un punto elíptico en toda superficie compacta de $\mathbb{R}^3$. ¿Por qué Gauss-Bonnet, por sí solo, no basta?
3. En el cilindro, una curva cerrada y simple que encierre una región simple tiene siempre la misma curvatura geodésica integral. ¿Cuál, y por qué no depende de la curva?

4. Dos geódesicas de una superficie con $K \leq 0$ salen del mismo punto. ¿Pueden volver a encontrarse? ¿Y si $K > 0$?
5. ¿Por qué la versión para superficies compactas no se puede aplicar al hiperboloide de una hoja? ¿Qué se hace en su lugar?
6. Un triángulo esférico tiene tres ángulos rectos. ¿Cuál es su área en la esfera unidad? Contesta sin integrar.
7. Explica por qué la curvatura geodésica integral es invariante por semejanzas, y da dos consecuencias.

REPASO INTERCALADO: GAUSS-BONNET, TERCERA RONDA, CON MATERIAL ANTERIOR

Esta ronda mezcla a propósito.

1. El teorema de Green aparece en la demostración aplicado en el plano de parámetros. ¿Qué hipótesis del teorema de Green se están usando y por qué se cumplen?
2. ¿Por qué hace falta suponer $g_{12} = 0$, y qué teorema de otra asignatura garantiza que se puede?
3. Enuncia la fórmula de Liouville y señala cuál de sus dos sumandos se convierte en la curvatura de Gauss y cuál en los ángulos.
4. Una región regular tiene tres curvas frontera y su superficie ambiente tiene $K \equiv 0$; todas las fronteras son geodésicas y no hay vértices. Demuestra que eso es imposible.
5. Sin calcular nada: ¿cuál es la curvatura integral de un cilindro finito, de un cono truncado y de una banda de Möbius con métrica intrínsecamente plana? ¿Cuál carece de la orientación global usada en nuestra formulación?
6. El teorema de Jacobi usa cinco cosas de *Geometría local*. Enuméralas.
7. ¿Qué le pasa al teorema si la curva frontera no es simple y da dos vueltas? Contesta mirando el teorema del índice de rotación.

1.4 Algunas Aplicaciones

LA PREGUNTA: EL PÉNDULO QUE GIRA SOLO

En 1851 Foucault colgó un péndulo de la cúpula del Panteón de París y el plano en que oscilaba fue girando a lo largo del día sin que nadie lo tocara. En el polo habría dado una vuelta completa en un día; en París da unas tres cuartas partes de vuelta, y en el ecuador no giraría nada. Nadie ha empujado el péndulo de lado. ¿Qué es lo que ha girado en realidad, y por qué el ángulo depende de la latitud?

Esta sección recoge lo que el teorema da casi gratis una vez demostrado: el ángulo que gira un vector transportado paralelamente alrededor de una región, que es lo que responde a la pregunta del péndulo; el hecho de que en una superficie con curvatura no positiva dos geodésicas no pueden encerrar un disco; y el teorema de Jacobi sobre la indicatriz de las normales de una curva cerrada.

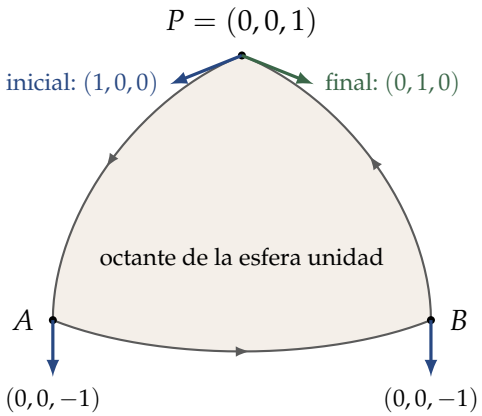
1.4.1 Ángulo de holonomía

LA IDEA: EL VECTOR QUE VUELVE GIRADO

Esta es, de las aplicaciones del teorema, la que más dice sobre qué *es* la curvatura. El experimento es el siguiente. Se toma un vector tangente a la superficie en un punto y se transporta paralelamente a lo largo de una curva cerrada, es decir, se lleva de paseo sin girarlo nunca *desde el punto de vista de la superficie*. Al volver al punto de partida, el vector no tiene por qué ser el mismo: puede haber girado un ángulo. Ese ángulo se llama **ángulo de holonomía**.

En el plano no pasa nada: el transporte paralelo es la traslación de toda la vida y el vector vuelve idéntico. En la esfera sí pasa, y mucho: el ejemplo clásico es recorrer el triángulo formado por dos meridianos y el ecuador.

Lo que dice esta sección es que **el ángulo de holonomía es exactamente la curvatura encerrada**, entendiendo el giro final módulo 2π. Y de ahí sale una caracterización de K sin mencionar el espacio ambiente: es el límite de la holonomía por unidad de área al encoger el circuito hacia un punto.



Recorrido $P \to A \to B \to P$, con $A = (1,0,0)$ y $B = (0,1,0)$. La flecha comienza tangente al primer meridiano; en A apunta hacia abajo. Al recorrer el ecuador conserva el vector $(0,0,-1)$, que sigue siendo tangente. Por el segundo meridiano llega a P apuntando en la dirección $(0,1,0)$: ha girado $\pi/2$ respecto de la inicial. Es el área del octante, porque $K = 1$. Las flechas se han acortado para dibujarlas; la perspectiva no conserva los ángulos.

Sean M una s.r. orientada y $x : U \to M$, $x = x(u,v)$, una p.l. con $g_{12} = 0$ y orientación compatible con la de M. Sea $R \subseteq x(U)$ una región simple sin vértices, con borde una c.r.p.n. $\alpha : [0,l] \to x(U)$ orientada positivamente. Sea v_0 un vector unitario tangente a M en $\alpha(0)$ y sea $V = V(s)$ su transportado paralelo a lo largo de α.

Proposición. En las condiciones anteriores, si $\varphi(s)$ es una determinación diferenciable del ángulo de $\mathbf{X}_1(s)$ a $V(s)$ y se denota $\Delta\varphi = \varphi(l) - \varphi(0)$, entonces

$$\Delta\varphi = \iint_R K\,dA = 2\pi - \oint_\alpha K_g(s)\,ds.$$

El número $\Delta\varphi$ se llama aquí **ángulo de holonomía**, siguiendo una determinación continua respecto del campo coordenado sobre el disco. La rotación que compara los vectores final e inicial solo distingue este número módulo 2π. En particular, si α es una geodésica, $\Delta\varphi = 2\pi$: el vector final coincide con el inicial.

LA IDEA: LA FLECHA NO GIRA, PERO EL SUELO SÍ

La imagen que predice el enunciado es la de alguien que camina por un circuito cerrado llevando una flecha con el brazo rígido, cuidando de no girarla nunca. Al volver al punto de partida la flecha aparece girada. La pregunta es de dónde ha salido ese giro si nadie lo ha hecho, y la respuesta es que no lo ha hecho él: lo ha hecho el suelo.

«No girarla respecto de la superficie» significa que su derivada covariante es cero. No significa que mantenga un ángulo constante con la rejilla: el campo coordenado puede girar durante el recorrido. Liouville separa justamente el giro de ese campo del giro relativo de la flecha. Al integrar y aplicar Green, el balance es la curvatura encerrada. Tampoco basta con mirar el valor de K en los puntos del camino. Un recorrido por una zona intrínsecamente plana puede rodear una zona curvada y tener holonomía no trivial. La fórmula permite calcular el giro a partir del interior; no dice que el transporte deje de depender del camino y de su métrica.

Paso 1: escribir «paralelo» como una igualdad integrable. Como V es paralelo, su derivada covariante se anula y por tanto $\left[\frac{DV}{ds}\right] = 0$ en todo punto. Integrando a lo largo de la curva y usando la fórmula de la sección 1.2.1 para el valor algebraico de la derivada covariante de un campo unitario,

$$0 = \int_0^l \left[\frac{DV}{ds}\right] ds = \underbrace{\int_0^l \frac{1}{2\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\dot{u}_2 - \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}\dot{u}_1\right\} ds}_{(\mathrm{A})} + \int_0^l \frac{d\varphi}{ds}\, ds.$$

Paso 2: el cero se reparte entre el suelo y la flecha *(el núcleo de la prueba)*. Lo que dice esa igualdad es que **cero no significa que nada gire, sino que los dos giros se compensan**: lo que gira la rejilla, con signo menos, es lo que aparenta girar la flecha. Y lo que gira la rejilla ya está calculado. El sumando (A) es exactamente el mismo que apareció en la demostración del lema del triángulo, y el mismo razonamiento —escribirlo como integral de línea en el plano (u, v) y aplicar el teorema de Green— da $(\mathrm{A}) = -\iint_R K\, dA$. El segundo sumando es $\Delta\varphi$. Luego

$$0 = -\iint_R K\, dA + \Delta\varphi, \tag{1.11}$$

que es la primera igualdad.

Paso 3: cambiar el interior por el borde con Gauss-Bonnet. Para la segunda se aplica el teorema de Gauss-Bonnet a R, que es una región simple sin vértices, de modo que $\chi(R) = 1$ y no hay ángulos externos:

$$\oint_\alpha k_g\, ds + \iint_R K\, dA = 2\pi.$$

Despejando la integral doble y sustituyendo en (1.11) se obtiene $\Delta\varphi = 2\pi - \oint_\alpha k_g\, ds$. Y si α es geodésica, esa integral se anula.

Lo que hay que llevarse. «Paralelo» quiere decir $\left[\frac{DV}{ds}\right] = 0$. Liouville parte ese cero en el giro de la rejilla más el giro de V respecto de ella; al integrar a lo largo del borde, el primero es $-\iint_R K\,dA$ por Green, igual que en el lema del triángulo. Luego el giro de V respecto de la rejilla es la curvatura encerrada. La segunda igualdad es Gauss-Bonnet para la región.

Observación (Por qué 2π y no 0 cuando la curva es geodésica)**.** Los dos números describen la misma rotación final. En una geodésica cerrada, su tangente es un campo paralelo que vuelve a sí mismo; todo vector paralelo mantiene su ángulo con ella y también vuelve a sí mismo. Si además bordea el disco del enunciado, Gauss-Bonnet da $\iint_R K\,dA = 2\pi$ y nuestra determinación continua da $\Delta\varphi = 2\pi$. No hay que suponer curvatura integral nula: una vuelta completa ya devuelve la flecha a su dirección inicial.

Corolario. En cualquier superficie con $K \equiv 0$, el transporte paralelo a lo largo de una curva cerrada que bordea una región simple es la identidad.

> Por (1.11), $\Delta\varphi = \iint_R K\,dA = 0$.

Un caso a mano: el péndulo de Foucault. Un modelo geométrico sencillo contesta la pregunta de la sección. Mientras la Tierra gira, el punto de suspensión del péndulo recorre una vez por día sidéreo, unas 23,93 horas, el paralelo de su latitud u_0, y nada empuja de lado el plano en que oscila. En el modelo, vista desde la superficie, la dirección de oscilación se transporta paralelamente a lo largo del paralelo. Lo que se observa es el ángulo que forma con el norte local, y ese ángulo es el que calcula la resta de giros.

Se trabaja en la esfera unidad, orientada por el normal exterior $\mathbf{N}(p) = p$, con $E_1 = (-\operatorname{sen} u_0 \cos v,\ -\operatorname{sen} u_0 \operatorname{sen} v,\ \cos u_0)$ el unitario que apunta al norte y $E_2 = (-\operatorname{sen} v,\ \cos v,\ 0)$ el que apunta al este. Que el transportado V sea paralelo significa $\left[\frac{DV}{dv}\right] = 0$, así que, por la proposición de la diferencia de valores algebraicos, el ángulo φ del norte a V cumple

$$\varphi' = \left[\frac{DV}{dv}\right] - \left[\frac{DE_1}{dv}\right] = -\left[\frac{DE_1}{dv}\right]:$$

la dirección del péndulo gira respecto del norte lo mismo que gira el norte, con el signo cambiado. Y el norte gira al recorrer el paralelo hacia el este: derivando, $E_1' = (\operatorname{sen} u_0 \operatorname{sen} v,\ -\operatorname{sen} u_0 \cos v,\ 0) = -\operatorname{sen} u_0\, E_2$, y con el normal exterior $\mathbf{N} \times E_1 = -E_2$, de modo que $\left[\frac{DE_1}{dv}\right] = E_1' \cdot (\mathbf{N} \times E_1) = \operatorname{sen} u_0$. En una vuelta completa, con v de 0 a 2π,

$$\Delta\varphi = -2\pi \operatorname{sen} u_0.$$

Con el normal exterior, un giro negativo es horario visto desde fuera. **El plano del péndulo da, respecto del suelo,** $\operatorname{sen} u_0$ **vueltas por día sidéreo**, en sentido horario en el hemisferio norte: una en el polo, ninguna en el ecuador, y en París, a 48,85° de latitud, $\operatorname{sen} 48{,}85° \approx 0{,}753$ vueltas, unos 271°. Son las tres cuartas partes de vuelta de la pregunta, y una vuelta entera tarda allí unas $23{,}93/0{,}753 \approx 31{,}8$ horas.

La proposición dice lo mismo por otro camino. El casquete norte que encierra el paralelo tiene área $2\pi(1 - \operatorname{sen} u_0)$, de modo que la holonomía vale $\Delta\varphi = 2\pi(1 - \operatorname{sen} u_0)$, que difiere de $-2\pi \operatorname{sen} u_0$ en una vuelta exacta: los dos números describen la misma rotación. La vuelta de diferencia tampoco es un error. La proposición mide el ángulo respecto de un campo coordenado definido en todo el casquete, y el campo «norte» no lo es: en el polo deja de estar

definido, y al recorrer el paralelo da él mismo una vuelta respecto de cualquier campo que sí lo esté. Esa vuelta es lo que la sección 1.5 llamará índice de un campo en un punto singular.

1.4.1.1 Una nueva interpretación de la curvatura de Gauss

Teorema. Sean $p \in x(U)$ y $q \in U$ con $x(q) = p$. Sea B_ε la bola cerrada de centro q y radio ε en $\mathbb{R}^2$, con $B_\varepsilon \subseteq U$, y sea $V_\varepsilon = x(B_\varepsilon)$. Entonces

$$K(p) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta\varphi_\varepsilon}{A(V_\varepsilon)},$$

donde $\Delta\varphi_\varepsilon$ es el ángulo de holonomía a lo largo de la frontera de V_ε.

Por la igualdad (1.11) aplicada a V_ε,

$$\frac{\Delta\varphi_\varepsilon}{A(V_\varepsilon)} = \frac{\iint_{V_\varepsilon} K\, dA}{A(V_\varepsilon)}.$$

Por el teorema del valor medio para integrales dobles, aplicable porque K es continua, existe $p_\varepsilon \in V_\varepsilon$ con $\iint_{V_\varepsilon} K\, dA = K(p_\varepsilon)A(V_\varepsilon)$. Luego el cociente vale $K(p_\varepsilon)$, y cuando $\varepsilon \to 0$ se tiene $p_\varepsilon \to p$ y, por continuidad, $K(p_\varepsilon) \to K(p)$.

LA IDEA: LA DEFINICIÓN QUE UN HABITANTE DE LA SUPERFICIE PODRÍA DAR

Merece la pena detenerse en lo que se acaba de demostrar, porque cambia el estatus de la curvatura de Gauss.
La definición original de K es extrínseca: es el producto de las curvaturas principales, que se obtienen mirando cómo se dobla la superficie *dentro del espacio*. El teorema egregio dice que, pese a eso, K solo depende de la métrica. Pero la fórmula métrica del teorema egregio exige conocer coeficientes y derivadas. Aquí se obtiene otro procedimiento, basado en el transporte paralelo.
Esta caracterización sí lo dice, y con un procedimiento que un habitante de la superficie podría ejecutar sin salir de ella: *coge un vector, dale una vuelta pequeña transportándolo paralelamente, mira cuánto ha girado y divide por el área encerrada*. En el límite, eso es la curvatura de Gauss.
Es, además, el ejemplo más limpio de la asignatura de que un invariante local (la curvatura en un punto) se puede leer en un fenómeno global (dar una vuelta).

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: DEFINIR LA CURVATURA COMO EL GIRO POR UNIDAD DE ÁREA

La alternativa. Tomar como *definición* de la curvatura de Gauss el límite

$$K(p) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta\varphi_\varepsilon}{A(V_\varepsilon)},$$

en vez de definirla como producto de las curvaturas principales y demostrar después que es intrínseca.
Su ventaja. Es grande y conviene no despacharla: la definición sería intrínseca desde el primer momento, sin necesidad del teorema egregio, y no mencionaría en ningún sitio el espacio ambiente. Un habitante de la superficie podría ejecutarla.
Qué la hunde en este curso. Que, tal como está ordenado el material, sería circular. La existencia del límite se demuestra aquí con la igualdad $\Delta\varphi = \iint_R K\, dA$, que sale de Gauss-Bonnet, que a

> su vez se ha construido sobre la definición extrínseca. No basta, por tanto, con cambiar una frase de la definición: habría que construir primero la conexión intrínseca y justificar el límite por otra vía. En geometría riemanniana esta lectura mediante lazos pequeños es una interpretación de la curvatura de la conexión; una definición habitual usa las derivadas covariantes. Ambas perspectivas se relacionan, pero no hay una única definición obligatoria ni es necesario calcular infinitos transportes uno a uno para usar un límite.

1.4.1.2 Regiones con vértices geodésicos

La situación se extiende a regiones más generales. Sea $R \subseteq x(U)$ una región simple con borde una curva $\alpha = \alpha(s)$ regular a trozos, cerrada y simple, orientada positivamente, **cada uno de cuyos arcos regulares es una geodésica**. Denotando ahora $\theta(s)$ al ángulo orientado desde $\mathbf{X}_1(s)$ hacia $\mathbf{t}(s)$, el teorema de Gauss-Bonnet asegura

$$\iint_R K\,dA + \sum \varphi_i = 2\pi.$$

Y por el teorema del índice de rotación, $\Delta\theta + \sum \varphi_i = 2\pi$, donde $\Delta\theta = \sum(\theta(s_{i+1}) - \theta(s_i))$. Comparando las dos igualdades, el ángulo de holonomía vale de nuevo

$$\Delta\theta = \iint_R K\,dA.$$

La tangente salta en las esquinas; el vector transportado no. En cada lado geodésico, ambos son paralelos y mantienen constante su ángulo mutuo. Por eso los incrementos de θ *dentro de los arcos*, sin añadir los saltos de la tangente, suman el giro acumulado del vector transportado.

Ejercicio 1.22. *La superficie reglada sobre la hélice con $k = \tau = 1$*

Sea $\alpha = \alpha(s)$ una hélice circular parametrizada naturalmente con curvatura y torsión $k(s) = \tau(s) = 1$ para todo s. Para cada s del dominio de α se define

$$a(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{t}(s) + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{b}(s),$$

y se considera la superficie regular dada por la p.l. $x(s, v) = \alpha(s) + v\,a(s)$. Se pide:

1. Probar que $a(s)$ es un campo vectorial tangente a la superficie, diferenciable y paralelo a lo largo de α. Sin hacer ningún cálculo adicional, probar que la curvatura integral de cualquier región regular de esta superficie es nula.
2. Calcular directamente, sin usar el teorema de Gauss-Bonnet, la suma de los ángulos externos de la región limitada por las curvas $s = s_0$, $s = s_1$, $v = 0$ y $v = 1$.
3. Comprobar el resultado obtenido en el apartado anterior usando el teorema de Gauss-Bonnet.

Resolución. 1. El campo a es constante. Con $k = \tau = 1$, las ecuaciones de Frenet son

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{n}, \qquad \dot{\mathbf{n}} = -\mathbf{t} + \mathbf{b}, \qquad \dot{\mathbf{b}} = -\mathbf{n}.$$

Derivando a:

$$\dot{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}\big(\dot{\mathbf{t}} + \dot{\mathbf{b}}\big) = \frac{\sqrt{2}}{2}\big(\mathbf{n} - \mathbf{n}\big) = 0.$$

Luego a es un **vector constante** de $\mathbb{R}^3$.

Es tangente a la superficie porque $\mathbf{X}_2 = \partial x/\partial v = a$, es decir, a es uno de los dos campos coordenados. Es diferenciable por ser constante. Y es paralelo a lo largo de α porque su derivada covariante, que es la componente tangencial de $\dot{a} = 0$, se anula.

La curvatura integral es nula. Aquí está el apartado interesante, y se contesta sin calcular nada más. El campo a es constante en $\mathbb{R}^3$ y tangente a la superficie en todos sus puntos, luego su derivada a lo largo de *cualquier* curva de la superficie es cero y, en particular, su derivada covariante también. Es decir, a es un campo unitario — en efecto, $|a|^2 = \frac{1}{2}(1 + 2\,\mathbf{t}\cdot\mathbf{b} + 1) = 1$ — **paralelo a lo largo de toda curva de la superficie**.

En consecuencia, el transporte a lo largo de cualquier lazo cerrado devuelve a a sí mismo. La holonomía es, por tanto, un múltiplo de 2π. Para discos suficientemente pequeños, $\iint_R K\,dA$ tiende a cero y no puede ser un múltiplo no nulo de 2π: debe valer cero. La caracterización anterior por holonomía dividida entre área da entonces $K = 0$ en cada punto, y por tanto

$$\iint_R K\,dA = 0 \qquad \text{para toda región simple } R.$$

Como toda región regular se triangula en regiones simples y la integral es aditiva, la curvatura integral de cualquier región regular es nula. ■

Observación. Se puede decir también en una línea: al ser a constante, $x(s, v) = \alpha(s) + v\,a$ es un cilindro generalizado sobre α en la dirección fija a, y los cilindros son desarrollables, luego $K \equiv 0$. Pero eso es «cálculo adicional» en el sentido del enunciado; el argumento de la holonomía es el que se pide.

2. Los ángulos externos, sin Gauss-Bonnet. Se calculan los coeficientes métricos. Como $\dot{a} = 0$,

$$\mathbf{X}_1 = \frac{\partial x}{\partial s} = \alpha' + v\dot{a} = \mathbf{t}, \qquad \mathbf{X}_2 = \frac{\partial x}{\partial v} = a.$$

Luego

$$g_{11} = \mathbf{t}\cdot\mathbf{t} = 1, \qquad g_{22} = a\cdot a = 1, \qquad g_{12} = \mathbf{t}\cdot a = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{t}\cdot(\mathbf{t} + \mathbf{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Las líneas paramétricas no son ortogonales, y ese es el punto del ejercicio. El ángulo θ que forman cumple

$$\cos\theta = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

La región es el rectángulo de coordenadas $[s_0, s_1] \times [0, 1]$, con cuatro vértices. En cada uno de ellos el ángulo interno es el ángulo entre las dos direcciones que entran en la región:

- en $(s_0, 0)$ entran $+\mathbf{X}_1$ y $+\mathbf{X}_2$: ángulo $\pi/4$;
- en $(s_1, 0)$ entran $-\mathbf{X}_1$ y $+\mathbf{X}_2$: ángulo $\pi - \pi/4 = 3\pi/4$;
- en $(s_1, 1)$ entran $-\mathbf{X}_1$ y $-\mathbf{X}_2$: ángulo $\pi/4$;
- en $(s_0, 1)$ entran $+\mathbf{X}_1$ y $-\mathbf{X}_2$: ángulo $3\pi/4$.

La suma de los ángulos internos es $2(\pi/4) + 2(3\pi/4) = 2\pi$, y por tanto

$$\boxed{\sum_{i=1}^{4} \varphi_i = 4\pi - 2\pi = 2\pi}$$

3. Comprobación con Gauss-Bonnet. La región es simple, luego $\chi = 1$. Por el apartado 1, $\iint_R K\,dA = 0$. Falta ver que los cuatro lados no aportan curvatura geodésica.

Los lados $s = \text{cte.}$ son segmentos de recta, porque $x(s_0, v) = \alpha(s_0) + v\,a$ recorre una recta al variar v; una recta contenida en una superficie es geodésica.

Los lados $v = \text{cte.}$ son las curvas $\beta_v(s) = \alpha(s) + v\,a$, trasladadas de α por un vector fijo, luego congruentes con α. Su vector tangente es $\mathbf{t}$ y su derivada segunda $\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{n}$. El normal de la superficie es

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|}, \qquad \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = \mathbf{t} \times a = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{t} \times \mathbf{b} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{n},$$

de donde $\mathbf{N} = -\mathbf{n}$. Entonces

$$K_g = (\mathbf{N}, \mathbf{t}, \mathbf{n}) = (-\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{n}) = 0,$$

porque el determinante tiene dos filas proporcionales. Los cuatro lados son geodésicos.

El teorema de Gauss-Bonnet queda

$$0 + 0 + \sum_{i=1}^{4} \varphi_i = 2\pi \cdot 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum \varphi_i = 2\pi,$$

que coincide con el apartado 2. ✓ ■

1.4.2 Superficies con curvatura no positiva

LA PREGUNTA: DOS CAMINOS RECTOS QUE VUELVEN A ENCONTRARSE

En el plano, dos rectas que salen de un mismo punto en direcciones distintas no vuelven a cortarse jamás. En la esfera, dos meridianos que salen del polo norte se cortan otra vez en el polo sur y encierran entre ambos una región con área. ¿Qué propiedad de la superficie decide cuál de las dos cosas ocurre, y basta con conocer el signo de la curvatura?

Proposición. Sea M una superficie orientable con $K \leq 0$. Entonces dos geodésicas que parten de un punto $p \in M$ no pueden encontrarse de nuevo en otro punto $q \in M$ encerrando una región simple.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: ENUNCIARLO SIN HABLAR DE REGIONES SIMPLES

La alternativa. Enunciar el resultado en la forma más memorable posible: «en una superficie con $K \leq 0$, dos geodésicas que salen de un mismo punto no vuelven a encontrarse». Sin regiones, sin simplicidad y sin condiciones.
Su ventaja. Es la frase que uno querría poder decir, y es la que se queda en la cabeza.
Qué la hunde. Un contraejemplo que está en el catálogo de este mismo libro: el cilindro. Su curvatura de Gauss es idénticamente nula, luego cumple $K \leq 0$, y sin embargo dos hélices que salen del mismo punto enrollándose en sentidos contrarios se cortan una y otra vez. En la parametrización $x(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$, tomemos $a > 0$ y las hélices $\gamma_+(t) = x(t, at)$ y $\gamma_-(t) = x(-t, at)$. Salen de $(1, 0, 0)$ y su primer reencuentro es $(-1, 0, a\pi)$, para $t = \pi$. El lazo formado por esos dos arcos da una vuelta al cilindro y no bordea un disco. No se le puede aplicar la versión local de Gauss-Bonnet. La hipótesis «encerrando una región simple» no es una cautela burocrática: es exactamente lo que separa el enunciado verdadero del falso, y es el primer aviso de que para decir algo global sobre superficies hará falta la segunda mitad de la asignatura.

La idea: el gajo de naranja que la curvatura negativa prohíbe

La figura que hay que tener delante es un *gajo*: dos geodésicas que salen del mismo punto, se separan y vuelven a juntarse, encerrando una lente de dos esquinas. En la esfera los gajos existen y se ven a simple vista: dos meridianos cualesquiera salen del polo norte y se reencuentran en el sur. En un plano, en cambio, no hay ninguno, porque dos rectas que se cortan no vuelven a cortarse. La proposición dice que esa diferencia no es un accidente de la esfera y del plano, sino una cuestión de signo: los gajos son cosa de la curvatura positiva.
La razón cabe en una imagen de presupuesto. Gauss-Bonnet reparte una cantidad fija, 2π, entre tres conceptos: lo que giran los lados, lo que se acumula de curvatura por dentro y lo que se gira en las esquinas. En un gajo los lados son geodésicas y no gastan nada, y si $K \leq 0$ el interior tampoco gasta: al contrario, devuelve. Con lo cual las dos esquinas tienen que pagar 2π ellas solas. Y dos esquinas no pueden pagar 2π, porque cada una vale menos de π: una esquina que tuviera giro externo π sería una cúspide de ángulo interno cero. Las dos geodésicas tendrían la misma recta tangente, y la unicidad impediría que fueran dos geodésicas distintas.

La intuición falsa. Uno traduce el enunciado a «con curvatura no positiva las geodésicas se separan y ya no se vuelven a ver», y esa frase es falsa: en el cilindro, que tiene $K \equiv 0$, dos hélices contrarias se cortan una y otra vez. Lo que prohíbe la curvatura no positiva no es el reencuentro, sino el gajo: que lo encerrado entre los dos arcos sea un disco. En el cilindro se reencuentran, pero los dos arcos pueden formar un lazo que da la vuelta al tubo y no bordea ningún disco. El enunciado es local disfrazado de global, y esa distinción es justamente lo que la segunda mitad de la asignatura viene a arreglar.

Paso 1: suponer que hay gajo y pasarle la factura de Gauss-Bonnet. Supóngase que sí, y sea R la región simple que encierran. Su frontera está formada por dos arcos geodésicos y tiene dos vértices, p y q, con ángulos externos φ_1 y φ_2. La versión local da

$$\underbrace{\oint_{\partial R} k_g \, ds}_{=0} + \iint_R K \, dA + \varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi,$$

luego, al ser $K \leq 0$,

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi - \iint_R K \, dA \geq 2\pi.$$

Aquí han trabajado las dos hipótesis a la vez: que los lados sean geodésicos anula la primera integral, y que $K \leq 0$ hace que la segunda no reste sino que sume. Las esquinas se quedan solas con la deuda.

Paso 2: las esquinas no pueden pagar tanto *(el núcleo de la prueba)*. Y lo que las hunde es la unicidad de las geodésicas, que es lo único verdaderamente geométrico de toda la prueba. Las dos geodésicas no pueden cortarse tangencialmente ni en p ni en q: por un punto y una dirección pasa una única geodésica, así que si en p tuvieran la misma dirección tangente serían la misma curva. Por tanto los ángulos internos en

p y q son estrictamente positivos, es decir, $\varphi_1 < \pi$ y $\varphi_2 < \pi$, y

$$\varphi_1 + \varphi_2 < 2\pi,$$

que contradice lo anterior. En una frase: **el presupuesto pide 2π a dos esquinas que como mucho, y sin llegar, dan π cada una.**

Lo que hay que llevarse. Se supone el gajo y se le aplica la versión local: los lados geodésicos no aportan nada y con $K \leq 0$ el interior no resta, así que los dos ángulos externos tienen que sumar al menos 2π. La unicidad de las geodésicas impide que las dos salgan tangentes, de modo que cada ángulo externo es menor que π. Contradicción.

Observación (El caso límite y por qué es interesante)**.** Si $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ no hay dos geodésicas, sino una sola geodésica cerrada y simple. El mismo argumento prueba entonces que **una geodésica cerrada y simple de una superficie con $K \leq 0$ no puede ser frontera de una región simple**.

No es una situación rara: ocurre en el cilindro y en el hiperboloide de una hoja. En el cilindro, los paralelos son geodésicas cerradas y simples, y ninguno de ellos encierra un disco *dentro del cilindro*: encierran una región que se va al infinito por un lado. Este es el ejemplo que conviene tener en la cabeza.

CONEXIÓN: LA MISMA IDEA, EN LAS DOS MITADES DE LA ASIGNATURA

Este resultado es el primer sitio donde la geometría dice algo que solo la topología puede aprovechar del todo, y merece la pena verlo ahora aunque la segunda parte del libro llegue más tarde.
Lo que la proposición permite deducir es que, *si existe una geodésica cerrada y simple* en una superficie con $K \leq 0$, ese lazo no se puede contraer. El signo $K \leq 0$ no garantiza por sí solo su existencia: el plano es un contraejemplo. En el cilindro sí existe: la geodésica cerrada del cilindro no bordea ningún disco, luego no se puede deformar de forma continua hasta un punto sin salirse de la superficie. En el lenguaje de la segunda parte, eso es exactamente decir que su grupo fundamental no es trivial.
El cilindro tiene $\pi_1 \cong \mathbb{Z}$ y su generador es precisamente ese paralelo. La geometría lo detecta con el signo de la curvatura; la topología, contando lazos.

1.4.3 El teorema de Jacobi

LA PREGUNTA: UNA CURVA DE LA ESFERA QUE REPARTE EL ÁREA A PARTES IGUALES

A una curva cerrada del espacio se le puede asociar la curva que dibujan sobre la esfera unidad sus vectores normales principales. Es un objeto construido a base de derivadas, sin ninguna relación aparente con áreas. ¿Por qué esa curva, cuando no se corta a sí misma, parte la esfera en dos trozos exactamente del mismo área, sea cual sea la curva de partida?

Proposición (Jacobi)**.** Sea $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}^3$ una curva cerrada regular con $k \neq 0$. Si su indicatriz esférica de las normales principales es una curva simple, entonces dicha indicatriz divide a la esfera en dos regiones de igual área.

LA IDEA: UNA CURVA QUE SE COMPORTA COMO UN ECUADOR SIN SERLO

Conviene empezar por una circunferencia plana: sus normales principales recorren una circunferencia máxima de la esfera, que la divide en dos hemisferios iguales. El teorema afirma que eso, que parece una casualidad de un caso simétrico, pasa *siempre*: sea cual sea la curva, con tal de que la indicatriz no se corte a sí misma, la reparte a partes iguales.

La imagen que lo predice es esta: *la indicatriz no es una circunferencia máxima, pero para el teorema de Gauss-Bonnet es indistinguible de una*. Una circunferencia máxima es la geodésica de la esfera, es decir, la curva cuya curvatura geodésica es cero en cada punto. La indicatriz no tiene curvatura geodésica nula punto a punto — se retuerce —, pero su curvatura geodésica resulta ser la derivada de una función, y una derivada integrada a lo largo de un circuito cerrado da cero. Se retuerce hacia un lado exactamente lo mismo que hacia el otro. Y a Gauss-Bonnet no le importa la curvatura geodésica punto a punto: solo le importa su integral. En el balance, la indicatriz pasa por geodésica, y a una geodésica cerrada de la esfera solo le cabe encerrar la mitad.

Y quién firma esa cancelación tiene nombre: la función $\arctan(\tau/k)$, cuya derivada respecto del arco de la indicatriz es exactamente esa curvatura geodésica. Que esta función vuelva a su valor al cerrar la curva es lo que permite la cancelación.

Paso 1: derivar la indicatriz dos veces con Frenet. Tomamos s como parámetro natural de α. Como es habitual al hablar de una curva cerrada suave, se supone suavidad también en el empalme de los extremos; no solo $\alpha(0) = \alpha(l)$. Así, k y τ son periódicas. Sea $\beta(s) = \mathbf{n}(s)$ la indicatriz esférica de las normales principales de α y sea σ su parámetro natural. Derivando y usando las ecuaciones de Frenet,

$$\dot{\beta}(\sigma) = \big(-k(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s)\big)\frac{ds}{d\sigma},$$

y volviendo a derivar,

$$\ddot{\beta}(\sigma) = \big(-k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}\big)\frac{d^2s}{d\sigma^2} + \big(-\dot{k}\mathbf{t} + \dot{\tau}\mathbf{b}\big)\Big(\frac{ds}{d\sigma}\Big)^2 - \big(k^2+\tau^2\big)\Big(\frac{ds}{d\sigma}\Big)^2\mathbf{n}.$$

Como β está contenida en S^2, el normal de la esfera a lo largo de β es $\mathbf{N}(\sigma) = \beta(\sigma) = \mathbf{n}(\sigma)$, y por tanto

$$K_g^{\beta}(\sigma) = (\ddot{\beta}, \mathbf{N}, \dot{\beta}) = \big(-\dot{k}\tau + k\dot{\tau}\big)\Big(\frac{ds}{d\sigma}\Big)^3.$$

Paso 2: reconocer una derivada donde parecía haber un revoltijo *(el núcleo de la prueba)*. Ahora bien, $d\sigma = |\dot{\beta}(s)|\,ds = \sqrt{k^2+\tau^2}\,ds$, de modo que

$$K_g^{\beta}(\sigma) = \frac{-\dot{k}\tau + k\dot{\tau}}{k^2+\tau^2}\,\frac{ds}{d\sigma} = \frac{d}{ds}\Big(\arctan\frac{\tau(s)}{k(s)}\Big)\frac{ds}{d\sigma}.$$

Ese cociente no es una expresión cualquiera: es literalmente la derivada de un arcotangente, porque $(k\dot{\tau} - \dot{k}\tau)/(k^2+\tau^2)$ es la regla del cociente aplicada a τ/k y dividida entre $1 + (\tau/k)^2$. Aquí está el teorema entero, y cabe en una frase: **la curvatura geodésica de la indicatriz es una derivada total, y por tanto su integral sobre una curva cerrada es cero.** Lo demás es aplicar Gauss-Bonnet y leer.

Paso 3: aplicar Gauss-Bonnet a media esfera. Se aplica ahora el teorema de Gauss-Bonnet a una de las dos regiones acotadas por β, que llamamos R. Como β es simple, R es una región simple, sin vértices, y en la esfera unidad $K = 1$, luego $\iint_R K\,dA = A(R)$. La versión local da

$$A(R) + \oint_{\partial R} K_g^{\beta}\,d\sigma = 2\pi.$$

Paso 4: cobrar la cancelación. Pero la integral se anula, porque es la de una derivada total sobre una curva cerrada:

$$\oint_{\partial R} K_g^{\beta}(\sigma)\,d\sigma = \int_0^l \frac{d}{ds}\Big(\arctan\frac{\tau}{k}\Big)\,ds = \Big[\arctan\frac{\tau(s)}{k(s)}\Big]_0^l = 0,$$

ya que α es cerrada y por tanto $\tau(0) = \tau(l)$ y $k(0) = k(l)$.
Luego $A(R) = 2\pi$. Como el área de la esfera unidad es 4π, la otra región tiene también área 2π.

Lo que hay que llevarse. Con Frenet se calcula la curvatura geodésica de la indicatriz $\mathbf{n}$ en la esfera, y resulta ser la derivada de $\arctan(\tau/k)$ dividida por $d\sigma/ds$. Integrada sobre la indicatriz cerrada da cero. Gauss-Bonnet en la esfera unidad, con $K = 1$ y sin vértices, dice entonces que cada una de las dos regiones tiene área 2π, la mitad de la esfera.

Observación (Qué papel juega cada hipótesis)**.**
- $k \neq 0$**.** Sin ella no hay normal principal, y por tanto no hay indicatriz que dibujar: el objeto del enunciado ni siquiera existe. Además es lo que permite dividir por k al escribir $\arctan(\tau/k)$.
- α **cerrada.** Es lo único que hace falta para que la primitiva vuelva a su valor. Para un arco abierto la integral deja un término de extremos que no tiene por qué anularse; además, su indicatriz puede no ser cerrada y entonces no delimita las dos regiones del enunciado.
- **La indicatriz es simple.** No interviene en ninguna cuenta, y sin embargo es imprescindible: es lo que garantiza que R sea una región simple, con $\chi(R) = 1$, para poder aplicar la versión local. Si la indicatriz se corta a sí misma no hay «las dos regiones» de las que habla el enunciado, y la frase pierde el sentido antes de perder la verdad.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: CALCULAR DIRECTAMENTE EL ÁREA QUE ENCIERRA LA INDICATRIZ

La alternativa. Demostrar el teorema de Jacobi como parece que habría que demostrarlo: parametrizando la indicatriz esférica, escribiendo el área de una de las dos regiones que determina y comprobando que sale 2π.
Su ventaja. Es directa, no necesita Gauss-Bonnet y responde a la pregunta con el procedimiento que uno esperaría.
Qué la dificulta. Habría que describir la región delimitada por una indicatriz arbitraria antes de integrar sobre ella. Existe una integral de área, pero no disponemos de una parametrización explícita y sencilla de esa región. La demostración que se acaba de dar no calcula el área en ningún momento: observa que la curvatura geodésica de la indicatriz es la derivada de $\arctan(\tau/k)$, que integrada sobre una curva cerrada da cero, y *despeja* el área de la igualdad de Gauss-Bonnet. Es el patrón que se repite en toda la lección: el teorema no sirve para calcular integrales, sino para no tener que calcularlas.

CONEXIÓN: ES UN TEOREMA DE CURVAS DISFRAZADO DE TEOREMA DE SUPERFICIES

Este resultado es el ejemplo más claro de por qué *Geometría local* es prerrequisito. Todo lo que se usa aquí — la indicatriz esférica de las normales principales, las ecuaciones de Frenet, el cambio de parámetro $d\sigma = \sqrt{k^2 + \tau^2}\, ds$, la relación τ/k — es material de la lección de curvas: capítulo 1 de aquel libro, con los cambios de parámetro en la sección 1.2, la curvatura y la torsión en la 1.4 y las ecuaciones de Frenet en la 1.5.
Y la aparición de $\arctan(\tau/k)$ no es casual: ese cociente es el invariante que caracteriza las hélices, y la derivada de su arcotangente aparece siempre que se estudia la indicatriz de las normales principales. Reconocerla ayuda a identificar la derivada.

Qué se ha ganado. La pregunta del péndulo está contestada: lo que se ve girar es el suelo respecto de una dirección que se transporta paralelamente, y en una vuelta gira lo que vale la curvatura encerrada por el paralelo, salvo vueltas enteras; por eso depende de la latitud. Por el camino, la curvatura de Gauss ha recibido una lectura que un habitante de la superficie puede ejecutar, giro por unidad de área, y el signo de K ha dicho algo global: con $K \leq 0$ no hay gajos geodésicos. Queda por ver qué pasa si en vez de integrar curvatura se cuentan los ceros de un campo, y eso es la sección siguiente.

Repaso: aplicaciones

REPASO INTERCALADO: APLICACIONES, PRIMERA RONDA

1. Define ángulo de holonomía y enuncia la igualdad que lo relaciona con la curvatura integral.
2. Enuncia la caracterización de $K(p)$ como límite de holonomías por unidad de área y di qué teorema de *Análisis* se usa en su demostración.
3. ¿Por qué el ángulo de holonomía a lo largo de una geodésica cerrada que bordea una región simple vale 2π y no cero?
4. Enuncia el resultado sobre geodésicas en superficies con $K \leq 0$ y di dónde se usa que dos geodésicas no puedan ser tangentes.
5. Enuncia el teorema de Jacobi.

REPASO INTERCALADO: APLICACIONES, SEGUNDA RONDA, CON MATERIAL ANTERIOR

1. Un compañero afirma que en el cilindro el transporte paralelo a lo largo de un paralelo devuelve el vector girado. ¿Tiene razón? Justifica con el desenrollado. ¿Por qué el corolario para bordes de regiones simples no se aplica directamente a ese paralelo?
2. ¿Puede existir una superficie regular compacta de $\mathbb{R}^3$ con $K < 0$ en todos sus puntos? Usa la existencia de un punto elíptico en una superficie compacta de $\mathbb{R}^3$ y explica por qué el corolario de Gauss-Bonnet no basta por sí solo.
3. En la esfera unidad, transporta un vector a lo largo del triángulo formado por dos meridianos separados un ángulo θ y el ecuador. ¿Cuánto gira? Contesta sin calcular, usando la holonomía y el área del huso.
4. ¿Por qué el argumento del campo constante del ejercicio de la hélice prueba que $K \equiv 0$ y no solo que la curvatura integral de una región concreta se anula?
5. El teorema de Jacobi usa cinco resultados de *Geometría local*. Enuméralos y di dónde

entra cada uno.

6. En una superficie con $K \leq 0$, ¿puede una geodésica cerrada y simple ser frontera de una región simple? Da un ejemplo que ilustre la respuesta.

1.5 Una aplicación destacada: Índice de Campos en Puntos Singulares

LA PREGUNTA: SIEMPRE HAY UN SITIO DONDE NO SOPLA EL VIENTO

Si modelamos el viento horizontal como un campo continuo tangente a una esfera, necesariamente hay algún punto donde se anula. Es una consecuencia del modelo matemático, sin necesidad de conocer el campo concreto. Sobre la superficie de un flotador, en cambio, sí podría soplar viento en todos los puntos a la vez. ¿Qué tiene la esfera que no tiene el toro, y cómo se puede demostrar algo sobre todos los vientos posibles sin conocer ninguno?

LA IDEA: CONTAR REMOLINOS

Un campo de vectores tangente a una superficie es un vector en cada punto: el viento sobre la Tierra, la dirección de los pelos en una cabeza. Casi siempre hay puntos donde el campo se anula, y esos puntos son los interesantes: el ojo del huracán, el remolino de la coronilla.

A cada cero aislado se le puede asignar un número entero, su **índice**, que cuenta cuántas vueltas da el campo al rodear el punto. Un manantial del que salen vectores en todas direcciones tiene índice $+1$; un punto de silla, -1; y hay ceros más complicados con índices -2, -3 y cualquier otro entero.

El teorema de esta sección dice algo que no tiene por qué ser cierto y lo es: **en una superficie compacta sin borde, la suma de los índices de un campo con ceros aislados no depende del campo**. En el modelo esférico, esa suma es 2; se cuentan todos los ceros aislados, incluidos los puntos de silla. Y ese 2 es, otra vez, la característica de Euler-Poincaré.

De ahí sale, sin ningún esfuerzo adicional, el resultado que todo el mundo conoce con otro nombre: no se puede peinar una esfera sin remolinos.

1.5.1 Puntos singulares y su índice

LA PREGUNTA: QUÉ SE PUEDE CONTAR ALREDEDOR DE UN CERO

En la coronilla de casi todo el mundo hay un remolino: el pelo, que en el resto de la cabeza tiene una dirección, en ese punto no tiene ninguna y alrededor de él gira. Los ciclones tienen un ojo en calma con el viento girando alrededor, y en algunos cruces de corrientes el agua se abre desde un punto en todas direcciones. Un campo de vectores tangentes puede anularse en un punto, y alrededor de ese punto las

flechas se organizan de maneras muy distintas: como los radios de una rueda, como un remolino, o cruzándose como en una silla de montar. Se querría un número que distinga esos comportamientos y que no cambie ni al deformar un poco el campo ni al cambiar de coordenadas. ¿Qué se puede contar alrededor del punto que tenga esas dos propiedades a la vez?

Sea M una s.r.. Recuérdese que un campo vectorial tangente y diferenciable V en un abierto $G \subseteq M$ es una correspondencia que a cada $p \in G$ le asigna un vector $V(p) \in T_p(M)$ de modo que, en cualquier p.l. $x = x(u, v)$ entorno de p, las funciones f_1 y f_2 dadas por $V = f_1\mathbf{X}_1 + f_2\mathbf{X}_2$ son diferenciables.

En todo lo que sigue, M está orientada por un campo normal $\mathbf{N}$.

Definición. Dado un campo diferenciable V en M, se dice que $p \in M$ es un **punto singular** de V si $V(p) = 0$. Un punto singular p se dice **aislado** si existe un entorno abierto $\mathcal{V}$ de p en M tal que V no tiene otros puntos singulares en $\mathcal{V}$.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: ADMITIR PUNTOS SINGULARES NO AISLADOS

La alternativa. Definir el índice sin exigir que el cero esté aislado, para que la teoría valga para todos los campos y no solo para los que tienen los ceros sueltos.
Su ventaja. Los campos con ceros no aislados existen y son fáciles de escribir: en el plano, $V(x, y) = (0, y)$ se anula en todo el eje OX. Dejarlos fuera parece una pérdida.
Qué cambia. Esta definición asigna un índice a un cero individual rodeándolo sin incluir otros ceros. Si no está aislado, ya no podemos separarlo así. En el ejemplo del eje, cualquier contorno que encierre uno de sus puntos corta otros ceros y la dirección ni siquiera está definida en todo el contorno.
No toda acumulación impide encontrar contornos libres de ceros: a veces se puede rodear un conjunto entero y definir su índice. Esa es una extensión distinta; no permite sumar sin más índices individuales de puntos no aislados.

Definición. Sean V un campo diferenciable en M, p un punto singular aislado de V y $x : U \to M$ una p.l. con $g_{12} = 0$, $p = x(0, 0)$ y orientación compatible con la de M. Sea $\alpha : [0, l] \to M$ una curva parametrizada, simple, cerrada, regular a trozos y orientada positivamente, con $\alpha([0, l]) \subset x(U)$, que sea la frontera de una región simple $R \subset x(U)$ que contiene a p en su interior como único punto singular de V, con $V \neq 0$ en el borde. Se denota por $V(t)$ la restricción de V a lo largo de α y por $\varphi(t)$ una determinación continua, diferenciable a trozos, del ángulo de $\mathbf{X}_1(t)$ a $V(t)$.

Como α es cerrada, existe un entero $I(V, p)$ tal que

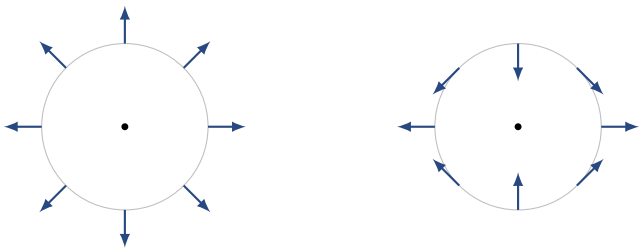
$$2\pi\, I(V, p) = \varphi(l) - \varphi(0) = \int_0^l \frac{d\varphi}{dt}\, dt.$$

El número entero $I(V, p)$ se llama el **índice** de V en p.

LA IDEA: POR QUÉ EL ÍNDICE ES UN ENTERO, Y POR QUÉ CUENTA VUELTAS

La cantidad $\varphi(l) - \varphi(0)$ es la variación total del ángulo que el campo V forma con la primera línea coordenada, al recorrer una vez la curva cerrada α.
Al volver al punto de partida, V vuelve a ser el mismo vector y $\mathbf{X}_1$ también, así que el ángulo entre ellos vuelve a ser el mismo *módulo* 2π. Pero φ es una determinación

continua del ángulo, no un valor módulo 2π: puede haber crecido en un múltiplo entero de 2π. Ese múltiplo es el índice.
Dicho de otra forma: **el índice cuenta cuántas vueltas completas da el campo mientras uno da una vuelta alrededor del punto singular**. Es la misma idea del grado de una aplicación de la circunferencia en sí misma, que reaparecerá en la parte de topología del curso con ese nombre.



$V = (x, y)$: índice $+1$ $V = (x, -y)$: índice -1

El campo sobre la circunferencia unidad, en ocho puntos. En el manantial, la flecha del punto de ángulo polar t apunta en la dirección t: al dar una vuelta antihoraria, la flecha da una vuelta en el mismo sentido. En la silla apunta en la dirección $-t$: da una vuelta en sentido contrario.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: DEFINIR EL ÍNDICE COMO EL GRADO DE UNA APLICACIÓN

La alternativa. Alrededor del punto singular aislado p se toma una curva cerrada pequeña que lo rodee y se considera la aplicación que a cada punto de esa curva le asigna la dirección $V/|V|$, expresada en una base ortonormal orientada definida sobre el disco. Sus dos componentes forman un punto de una circunferencia fija. El índice sería el *grado* de esa aplicación de la circunferencia en sí misma, es decir, el entero que le corresponde en $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$.
Su ventaja. Es conceptualmente más limpia. El índice deja de ser el incremento de un ángulo y pasa a ser un invariante algebraico; su independencia de la curva elegida resulta entonces inmediata, porque dos curvas pequeñas que rodeen a p son homótopas dentro del entorno sin ceros, y no hay que remitir a un libro para la demostración.
Qué la hunde aquí. Solo el orden del temario. Esa definición necesita el grupo fundamental de la circunferencia, que en este libro se calcula en el capítulo 6, en la otra mitad de la asignatura, y usarla en este punto obligaría a adelantar entera la teoría de homotopía. La definición por incremento del ángulo solo pide lo que ya se tiene: una determinación diferenciable del ángulo, que es de la sección 1.2. **Y la alternativa se usa**: es la definición estándar en topología algebraica, y es la que permite extender el índice a campos en dimensiones mayores, donde no hay ángulo que incrementar.

Proposición. La definición de índice no depende de la p.l. elegida ni de la curva α.

LA IDEA: MEDIR EL GIRO CONTRA ALGO QUE NO SEA LA REJILLA

El índice se ha definido contando cuántas vueltas da el campo respecto de $\mathbf{X}_1$, y $\mathbf{X}_1$ es un objeto arbitrario: depende de qué carta se haya elegido. La sospecha razonable es que el número dependa de esa elección, y hay que quitarla.
El truco es el de la brújula. Para saber cuántas vueltas ha dado un objeto no hace falta una referencia absoluta; basta una referencia *cualquiera* que uno sepa comparar con la otra. Aquí se mete en escena un tercer campo, el transportado paralelo W, que tiene la virtud de no depender de ninguna carta. Se mide el giro de V respecto de $\mathbf{X}_1$, se mide

el de W respecto de $\mathbf{X}_1$, y se restan: en la resta $\mathbf{X}_1$ desaparece, porque lo que queda es el giro de V respecto de W, y eso no sabe qué carta se usó. Es exactamente la resta de agujas de la fórmula de Liouville, usada ahora como palanca.

Paso 1: introducir un testigo que no dependa de la carta. Se prueba la independencia de la p.l.. Sean $w_0 \in T_{\alpha(0)}(M)$ un vector unitario y $W(t)$ el transportado paralelo de w_0 a lo largo de α, y sea $\psi(t)$ una determinación continua y diferenciable a trozos del ángulo de $\mathbf{X}_1(t)$ a $W(t)$. Por lo visto en la sección 1.4,

$$\Delta\psi = \iint_R K\,dA.$$

Paso 2: restar, y ver que la carta se va *(el núcleo de la prueba)*. Restando la definición de índice,

$$\iint_R K\,dA - 2\pi\, I(V,p) = \Delta(\psi - \varphi). \tag{1.12}$$

Ahora bien, $\psi - \varphi$ es el ángulo de $V(t)$ a $W(t)$, que **no depende de $\mathbf{X}_1$**: es el ángulo entre dos campos definidos sin referencia a ninguna parametrización. Y el miembro izquierdo de (1.12) tampoco depende de la p.l. salvo por el término del índice. Luego el índice no depende de la p.l..
Dicho en una frase: $\mathbf{X}_1$ **aparece en los dos sumandos y con el mismo peso, así que la resta lo borra**. Y lo que sobrevive a la resta, $\iint_R K\,dA - 2\pi I(V,p)$, es una cantidad geométrica: por eso el índice tiene que serlo también.

Paso 3: la otra mitad. La prueba de que tampoco depende de la curva α puede encontrarse en la sección 4.5 del libro de do Carmo.

Lo que hay que llevarse. Se mide el giro de V contra un testigo que no depende de la carta, un transportado paralelo, cuyo giro respecto de la rejilla es la curvatura encerrada. En la resta, la rejilla desaparece y queda un ángulo entre dos campos geométricos.

Observación. La definición de índice puede aplicarse también a puntos **no** singulares de V, y en ese caso vale cero. En una carta suficientemente pequeña alrededor de un punto donde $V \neq 0$, la continuidad hace que sus direcciones permanezcan en un mismo semicírculo del marco local. El ángulo tiene entonces una determinación continua y univaluada sobre todo ese entorno; al recorrer un contorno cerrado vuelve al mismo valor, de modo que su variación es cero.

Esa observación, que parece un tecnicismo, es la que permite sumar índices sobre una triangulación entera sin preocuparse de en qué triángulo cae cada cero.

1.5.2 El teorema de Poincaré

La idea, en versión intuitiva: un campo hecho a medida de la triangulación

La pregunta de la sección ya dejó claro *qué* dice el teorema: la suma de los índices no depende del campo. Falta ver *por qué* el número que sale es justo $\chi(M)$, y ahí la siguiente imagen anticipa el resultado: un campo construido a la medida de una triangulación permite ver de dónde salen los signos $+1, -1, +1$. Todavía no es una demostración de que la suma sea la misma para todos los campos.
Triangúlese la superficie y constrúyase un campo así: un manantial en cada vértice, un sumidero en el centro de cada cara, y en el punto medio de cada arista un punto de silla, donde el campo sale hacia las dos caras y entra desde los dos vértices. Ese campo existe y se dibuja: es el que iría «de los vértices hacia los centros de las caras». Sus ceros son exactamente los vértices, las aristas y las caras, y sus índices son $+1$, -1 y $+1$ respectivamente. La suma es entonces

$$V - A + C = \chi(M),$$

que es la definición combinatoria de la característica. Para demostrar que cualquier campo con ceros aislados da esa suma, usaremos abajo Gauss-Bonnet; no daremos por probada de antemano la independencia del campo.
Merece la pena ver el parentesco con Gauss-Bonnet, porque los dos teoremas son la misma cuenta leída de dos maneras. Gauss-Bonnet dice que si se integra la curvatura sobre toda la superficie sale $2\pi\chi(M)$; Poincaré dice que si se cuentan las vueltas alrededor de los remolinos sale $\chi(M)$. En los dos casos, un objeto que depende de todo (la métrica, el campo) se integra o se suma y devuelve un número que no depende de nada salvo de la forma de la superficie. De hecho, la demostración de Poincaré que se da a continuación pasa literalmente por Gauss-Bonnet.

Teorema (Teorema de Poincaré)**.** La suma de los índices de un campo vectorial diferenciable con puntos singulares aislados en una superficie compacta, orientada y sin borde es igual a la característica de Euler-Poincaré de dicha superficie:

$$\sum_{k=1}^{n} I(V, p_k) = \chi(M).$$

Paso 1: comprobar que los remolinos son unos pocos. Al ser M compacta, si hubiera infinitos puntos singulares, por el teorema de Bolzano-Weierstrass el conjunto de ellos tendría un punto límite, que sería un punto singular *no aislado*, en contra de la hipótesis. Luego hay una cantidad finita, $p_1, \ldots, p_n$.

Paso 2: trocear tan fino que cada remolino quede solo en su casilla. Sea $\{x_i\}$ un atlas de M compatible con su orientación, con todas las p.l. verificando $g_{12} = 0$, y sea $\mathcal{T}$ una triangulación de M tal que cada triángulo esté contenido en la imagen de alguna p.l. del atlas, contenga a lo más un punto singular en su interior y no tenga ninguno en su frontera. Son dos condiciones que se imponen al elegir la triangulación. Se orienta positivamente la frontera de cada triángulo.

Paso 3: sumar y ver que los bordes se devoran entre sí *(el núcleo de la prueba)*. Aquí está el peso, y es un argumento de contabilidad con frontera. Cada triángulo aporta una cuenta local que mezcla curvatura e índice con un término de borde; al sumar sobre toda la superficie, los bordes se cancelan de dos en dos porque cada lado pertenece a dos triángulos y cada uno lo recorre en sentido contrario. Que *no sobre ningún lado* es exactamente lo que significa que M sea compacta y sin borde: en una superficie con borde quedarían lados huérfanos y el teorema no saldría. En una frase: **lo local se suma sin residuo porque la superficie se cierra sobre sí misma.** Se aplica la ecuación (1.12) a cada triángulo, recordando que en los triángulos sin puntos singulares el índice vale cero, y se suman los resultados. El miembro derecho, $\Delta(\psi - \varphi)$, se cancela por completo. Aunque el campo paralelo W se elija por separado en cada triángulo, la derivada del ángulo de V hacia W es menos el valor algebraico de la derivada covariante de $V/|V|$; no depende del vector inicial de W. Escrito con $U = V/|V|$, que es unitario porque en los bordes V no se anula, la proposición de la diferencia de valores algebraicos y $\left[\frac{DW}{dt}\right] = 0$ dan

$$\frac{d}{dt}(\psi - \varphi) = \left[\frac{DW}{dt}\right] - \left[\frac{DU}{dt}\right] = -\left[\frac{DU}{dt}\right],$$

y, al integrar a lo largo del borde de cada triángulo T,

$$\Delta_{\partial T}(\psi - \varphi) = -\oint_{\partial T} \left[\frac{DU}{dt}\right] dt.$$

El integrando solo depende de V y del lado por el que se pasa: W ha desaparecido. Al invertir un lado, su integral cambia de signo. Cada lado aparece dos veces con orientaciones opuestas y $\partial M = \emptyset$, así que no queda ningún lado sin pareja. Queda

$$\iint_M K\, dA - 2\pi \sum_{k=1}^{n} I(V, p_k) = 0.$$

Paso 4: cambiar la integral de curvatura por la característica. Por el corolario para superficies compactas, $\iint_M K\, dA = 2\pi\chi(M)$, luego

$$\sum_{k=1}^{n} I(V, p_k) = \frac{1}{2\pi} \iint_M K\, dA = \chi(M).$$

Lo que hay que llevarse. En cada triángulo, la igualdad (1.12) compara el giro de un transportado paralelo, que es la curvatura encerrada, con el giro de V, que es 2π por el índice. La diferencia es una integral sobre el borde que solo depende de V, y al sumar sobre una triangulación de una superficie sin borde los lados se cancelan de dos en dos. Queda $\iint_M K\, dA = 2\pi \sum I(V, p_k)$, y Gauss-Bonnet pone $\chi(M)$ en lugar de la integral.

Observación (Qué papel juega cada hipótesis). ▪ M **compacta.** Trabaja tres veces, y conviene no confundir los tres usos. En el paso 1 es lo que impide que haya infinitos ceros. En el paso 2 es lo que permite una triangulación finita. Y en el paso 3, junto con $\partial M = \emptyset$, es lo que hace que no quede ningún lado sin pareja. Si M no es compacta el teorema es falso sin más: el plano tiene $\chi = 1$ y admite el campo constante, que no tiene ningún cero y suma

cero.

- **Singularidades aisladas.** Sin ella el paso 1 se cae y ni siquiera hay una lista de ceros que sumar. Un campo que se anula en una curva entera no tiene índices que contar.
- M **orientable**, implícita en que exista el atlas compatible del paso 2. Es lo que permite usar esta prueba con una normal global. El teorema de Poincaré-Hopf también vale para superficies no orientables; lo que aquí hemos demostrado es su formulación en el contexto orientado del capítulo.
- **Que el teorema de Gauss-Bonnet esté demostrado.** No es una hipótesis, pero conviene señalarlo: esta demostración no prueba Poincaré desde cero, lo *deduce*. Todo el contenido geométrico ya estaba en Gauss-Bonnet, y lo que añade el paso 3 es la contabilidad que lo traduce a índices.

LA IDEA: LO QUE ESTE TEOREMA DICE DE VERDAD

La suma de los índices **no depende del campo**, sino únicamente de la topología de la superficie. Se puede cambiar el campo por otro completamente distinto, mover los ceros, crearlos y destruirlos: la suma de los índices no se mueve.
Es el mismo fenómeno del teorema de Gauss-Bonnet, con otro disfraz. Allí, una integral de curvaturas resultaba depender solo de la topología; aquí, un recuento de remolinos. Y no es casualidad que sean el mismo fenómeno: la demostración que se acaba de ver deduce uno del otro en cuatro líneas.
Merece la pena tener presente la imagen física. Si V es el campo de vientos sobre un modelo esférico de la Tierra y sus ceros son aislados, la suma de los índices de todos ellos es 2. No basta contar ciclones y anticiclones: también pueden aparecer puntos de silla, que contribuyen con signo negativo.

Corolario (Teorema de la bola peluda)**.** En cualquier superficie homeomorfa a la esfera, todos los campos de vectores con singularidades aisladas deben tener la suma de sus índices igual a 2. En particular, tales superficies **no pueden admitir campos vectoriales sin puntos singulares**.

Si el campo no tuviera puntos singulares, la suma de los índices sería una suma vacía, es decir, cero, y el teorema de Poincaré daría $\chi(M) = 0$. Pero $\chi(M) = 2$ por ser homeomorfa a la esfera. Contradicción.

DE DÓNDE VIENE: POR QUÉ SE LLAMA EL TEOREMA DE LA BOLA PELUDA

El enunciado se popularizó con la imagen de una bola cubierta de pelo: no hay forma de peinarla dejando todos los pelos tumbados y sin remolinos. Siempre queda al menos un punto donde el pelo se levanta o se arremolina.
La versión meteorológica usa la misma imagen: un campo de viento horizontal continuo y tangente a una esfera tiene que anularse en algún punto. Las hipótesis de continuidad y tangencia son parte del modelo al que se aplica el teorema.
Obsérvese que el flotador no tiene ese problema, porque su característica es cero: un toro sí se puede peinar. Basta peinar todos los pelos en la dirección de un paralelo.

1.5.3 Problemas de la relación

Ejercicio 1.23. *Cinco índices en el plano*

Probar que $(0,0)$ es un punto singular aislado y calcular el índice de $(0,0)$ de los siguientes campos vectoriales en el plano:

1. $V(x,y) = (x,y)$;
2. $V(x,y) = (-x,y)$;
3. $V(x,y) = (x,-y)$;
4. $V(x,y) = (x^2-y^2,\ -2xy)$;
5. $V(x,y) = (x^3-3xy^2,\ y^3-3x^2y)$.

Resolución. El método. En el plano con la parametrización identidad se tiene $g_{12} = 0$ y $\mathbf{X}_1 = (1,0)$, luego $\varphi(t)$ es el ángulo polar de V. Se rodea el origen con la circunferencia unidad y se cuenta cuántas vueltas da V.

Escribiendo $r = \sqrt{x^2+y^2}$, las normas de los cinco campos son, respectivamente, r, r, r, r^2, r^3. Solo se anulan en el origen, que es por tanto aislado.

1. $V = (x,y)$**.** Sobre la circunferencia, $V = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, cuyo ángulo polar es t. Al variar t de 0 a 2π el ángulo aumenta 2π, luego

$$I(V,0) = +1.$$

Es el **manantial**: todos los vectores apuntan hacia fuera. El campo $(-x,-y)$, el sumidero, tiene el mismo índice: apuntan al revés, pero giran igual.

2. $V = (-x,y)$**.** Sobre la circunferencia, $V = (-\cos t, \operatorname{sen} t)$. Su ángulo polar es $\pi - t$, que *decrece* al crecer t: al dar una vuelta, el ángulo varía -2π. Luego

$$I(V,0) = -1.$$

Es el **punto de silla**: el campo entra por dos lados opuestos y sale por los otros dos.

3. $V = (x,-y)$**.** Sobre la circunferencia, $V = (\cos t, -\operatorname{sen} t)$, de ángulo polar $-t$. Otra vez

$$I(V,0) = -1.$$

Es la misma silla que la anterior girada 90°, y el índice lo confirma: girar el campo no cambia cuántas vueltas da.

4. $V = (x^2-y^2,-2xy)$**.** Identificando el plano con $\mathbb{C}$ mediante $z = x+iy$, se tiene $z^2 = (x^2-y^2)+i(2xy)$, luego

$$V = \left(\operatorname{Re} z^2,\ -\operatorname{Im} z^2\right) = \overline{z^2}.$$

Sobre la circunferencia unidad, $z = e^{it}$ y $\overline{z^2} = e^{-2it}$, cuyo ángulo polar es $-2t$: al dar una vuelta varía -4π. Luego

$$I(V,0) = -2.$$

5. $V = (x^3-3xy^2,\ y^3-3x^2y)$**.** Como $z^3 = (x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$, se reconoce

$$V = \left(\operatorname{Re} z^3,\ -\operatorname{Im} z^3\right) = \overline{z^3},$$

y sobre la circunferencia $\overline{z^3} = e^{-3it}$, de ángulo $-3t$. Luego

$$I(V, 0) = -3.$$

■

Observación (La regla general que se acaba de descubrir)**.** Los dos últimos apartados no son casos sueltos: sugieren una regla que conviene guardar.

Para un entero $n \geq 1$, identificando el plano con $\mathbb{C}$, el campo $V = z^n$ tiene índice $+n$ en el origen, y el campo $V = \overline{z^n}$ tiene índice $-n$. La razón se lee sobre la circunferencia unidad, que es donde se cuenta el índice: ahí $z = e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$, de modo que $z^n = e^{int}$ tiene ángulo polar nt, que al recorrer la circunferencia entera pasa de 0 a $2\pi n$, es decir, da n vueltas en el mismo sentido; y $\overline{z^n} = e^{-int}$ tiene ángulo polar $-nt$, que varía $-2\pi n$, o sea, las mismas n vueltas en el sentido contrario.

Y el primer apartado es el caso $n = 1$ de la primera familia, mientras que el segundo y el tercero son el caso $n = 1$ de la segunda, salvo un giro. **Con esa regla se calcula el índice de cualquiera de estos campos sin hacer ninguna cuenta.**

QUÉ DEJA. El procedimiento en tres pasos: rodear el cero con una curva, escribir el campo sobre ella y contar vueltas del ángulo polar. Y el diccionario complejo, que convierte el cálculo en una lectura: z^n tiene índice n y $\overline{z^n}$ tiene índice $-n$. Guarda también las tres imágenes: manantial $+1$, sumidero $+1$, silla -1.

Ejercicio 1.24. *Solo el toro se puede peinar*

Probar que en una superficie compacta, conexa, orientable y sin borde existe un campo vectorial diferenciable sin puntos singulares si y solo si la superficie es homeomorfa a un toro.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Una implicación es el teorema de Poincaré con una suma vacía.*
2. *Para la otra, exhibe un campo concreto sobre el toro. La parametrización habitual te lo regala.*
3. *Necesitarás saber qué superficies compactas orientables tienen característica* 0*. Eso lo demostrará la parte de topología; acéptalo por ahora.*

Resolución. (⇒) Si existe un campo sin ceros, M **es un toro.** Si V no tiene puntos singulares, la suma de sus índices es una suma vacía, es decir, cero. Por el teorema de Poincaré,

$$\chi(M) = 0.$$

Y por el teorema de clasificación de superficies, que la segunda parte de este libro demostrará, las superficies compactas, conexas y orientables son la esfera y las sumas conexas de n toros, con $\chi = 2 - 2n$. La ecuación $2 - 2n = 0$ da $n = 1$: M es homeomorfa a un toro.

(⇐) En el toro hay un campo sin ceros. Basta exhibirlo. Con la parametrización habitual

$$x(u, v) = \big((b + a\cos u)\cos v,\ (b + a\cos u)\operatorname{sen} v,\ a\operatorname{sen} u\big),$$

se toma $V = \mathbf{X}_2$, el campo tangente a los paralelos. Se tiene $|\mathbf{X}_2|^2 = g_{22} = (b + a\cos u)^2 \geq (b - a)^2 > 0$ porque $b > a$, luego V no se anula en ningún punto. Y está definido globalmente, porque los paralelos cubren el toro entero; su expresión es periódica en ambos parámetros.

Para una superficie M homeomorfa al toro se usa además el hecho de que la clasificación de superficies suaves puede hacerse por difeomorfismos. Si $h : T \to M$ es uno de ellos, el campo $\widetilde{V}(h(p)) = dh_p(V(p))$ es diferenciable y no se anula, porque dh_p es invertible. Así la construcción sirve para todo M del enunciado, no solo para el toro de revolución. ■

LA IDEA: PEINAR EL FLOTADOR

La imagen del campo $\mathbf{X}_2$ es exactamente la de peinar un flotador en la dirección en que se le da la vuelta: todos los pelos tumbados a lo largo de los paralelos, ninguno levantado, ningún remolino. Se puede hacer, y el teorema dice que el toro es la única superficie compacta y orientable en la que se puede.

QUÉ DEJA. El enunciado es un puente entre las dos mitades de la asignatura y conviene verlo así: una pregunta sobre campos de vectores — análisis — se contesta con la característica de Euler — topología — usando Gauss-Bonnet como traductor. La cadena completa es: campo sin ceros ⇒ suma de índices nula ⇒ curvatura integral nula ⇒ característica nula ⇒ toro.

Ejercicio 1.25. *Una curva en la esfera obliga a que haya ceros a los dos lados*

Sea C una curva regular, cerrada y simple en la esfera S^2. Sea V un campo vectorial diferenciable en S^2 tal que las trayectorias de V no sean tangentes a C. Probar que cada una de las dos regiones determinadas por C en S^2 contiene, al menos, un punto singular de V.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *La hipótesis clave es «no tangentes». ¿Qué le impide hacer al ángulo entre V y la tangente de C?*
2. *Si V no tiene ceros en una región simple R, ¿cuánto vale la variación total del ángulo de V a lo largo de ∂R?*
3. *Compara esa variación con la del vector tangente de C, que la conoces por el teorema del índice de rotación.*

Resolución. La idea. Se razona por reducción al absurdo suponiendo que una de las dos regiones, digamos R_1, no contiene ceros de V. Se calcula entonces de dos maneras cuánto gira V al recorrer C: una usando que no hay ceros, otra usando que V nunca es tangente a C. Los dos cálculos no coinciden.

Preparación. Una curva cerrada y simple divide a la esfera en dos regiones, cada una homeomorfa a un disco. Sea R_1 una de ellas, orientada de modo que C sea su frontera positivamente orientada. Elegimos una carta estereográfica cuyo polo esté en el interior de la otra región: contiene todo R_1 y proporciona un marco coordenado ortogonal compatible con la orientación. Sea φ una determinación diferenciable del ángulo de $\mathbf{X}_1$ a V a lo largo de C, y θ la del ángulo de $\mathbf{X}_1$ a $\mathbf{t}$, el tangente unitario de C.

Primer cálculo: no hay ceros en el disco. Bajo la suposición de que V no se anula en R_1, su dirección en el marco elegido se extiende continuamente a todo el disco. El contorno puede contraerse dentro de él sin encontrar ceros; por tanto, el grado de esa dirección sobre el borde es cero. Equivalentemente, se puede elegir un ángulo continuo en todo el disco, que al cerrar C vuelve al mismo valor. Así,

$$\Delta\varphi\big|_C = 0. \tag{1.13}$$

Segundo cálculo: la hipótesis de no tangencia. Sea $\beta(s) = \varphi(s) - \theta(s)$, que es el ángulo de $\mathbf{t}(s)$ a $V(s)$, y no depende de $\mathbf{X}_1$. La hipótesis dice que V nunca es tangente a C, es decir,

que $V(s)$ no es nunca proporcional a $\mathbf{t}(s)$; por tanto $\beta(s)$ no toma nunca los valores 0 ni π módulo 2π.

Al ser β continua sobre la curva conexa C, permanece en una de las dos componentes $(0, \pi)$ o $(-\pi, 0)$ módulo 2π. Como además β es una función continua que al cerrar la curva vuelve a su valor inicial módulo 2π pero no puede haber cruzado ninguna de las dos barreras, su variación total es nula:

$$\Delta\beta\big|_C = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta\varphi\big|_C = \Delta\theta\big|_C.$$

Y $\Delta\theta$ lo da el teorema del índice de rotación: C es una curva cerrada, simple y regular, orientada positivamente y sin vértices, luego

$$\Delta\theta\big|_C = 2\pi.$$

La contradicción. De (1.13) sale $\Delta\varphi = 0$ y del segundo cálculo, $\Delta\varphi = 2\pi$. Imposible. Luego R_1 contiene al menos un punto singular de V.

El mismo argumento, aplicado a R_2 con la orientación que la convierte en la región interior, da que R_2 también contiene al menos uno. ■

Observación (Coherencia con el teorema de Poincaré)**.** Si además los ceros del campo son aislados, el resultado encaja con Poincaré: la suma de sus índices es 2 y cada mitad aporta 1. La demostración anterior no necesita esa hipótesis adicional para garantizar que hay algún cero a cada lado. Es la situación del campo de meridianos de la esfera, que tiene un manantial en el polo norte y un sumidero en el polo sur, cada uno de índice $+1$: si C es el ecuador, cada mitad tiene su cero.

Qué se ha ganado. La pregunta del viento tiene respuesta. Lo que la esfera tiene y el toro no es su característica: la suma de los índices de cualquier campo con ceros aislados vale χ, que es 2 en la esfera y 0 en el toro, y una suma vacía solo puede valer 0. Se ha demostrado algo sobre todos los vientos sin conocer ninguno porque el recuento de remolinos es, a través de Gauss-Bonnet, una integral de curvatura disfrazada. Lo que queda abierto es qué superficies compactas hay con cada característica, y esa es la pregunta que contesta la segunda mitad del libro.

Repaso: índice de campos

REPASO INTERCALADO: ÍNDICE DE CAMPOS, PRIMERA RONDA

1. Define punto singular aislado y índice de un campo en él.
2. ¿Por qué el índice es un número entero?
3. Enuncia el teorema de Poincaré y di en qué paso de su demostración entra Gauss-Bonnet.
4. ¿Cuánto vale el índice de un manantial, de un sumidero y de un punto de silla?
5. Enuncia el teorema de la bola peluda y dedúcelo del de Poincaré en dos líneas.

REPASO INTERCALADO: ÍNDICE DE CAMPOS, SEGUNDA RONDA, CON MATERIAL ANTERIOR

1. ¿Por qué, si todos los puntos singulares de un campo son aislados, en una superficie compacta son necesariamente finitos? ¿Qué teorema de *Análisis* se usa?
2. Calcula, sin hacer cuentas, el índice en el origen de $V = \overline{z^5}$ y de $V = z^4$.

3. Un campo sobre el toro doble tiene tres ceros. ¿Cuánto suman sus índices?
4. ¿Qué relación hay entre el índice de un campo y el ángulo de holonomía? Escribe la igualdad que los liga.
5. El índice cuenta vueltas de un ángulo. ¿Qué concepto de la parte de topología de esta asignatura es exactamente el mismo, con otro nombre?
6. ¿Por qué no hay contradicción entre «el toro admite un campo sin ceros» y «la suma de los índices vale χ»?

CONEXIÓN: LO QUE ESTE CAPÍTULO DEJA PREPARADO

- **La característica de Euler-Poincaré ha dejado de ser un dato y se ha convertido en la respuesta.** En la segunda mitad del libro se calculará para todas las superficies compactas, y entonces el corolario de las superficies compactas dará la curvatura total de cada una sin integrar.
- **La orientabilidad**, que aquí es una hipótesis del corolario compacto, será allí uno de los dos invariantes que clasifican.
- **Los lazos que no bordean un disco**, que aquí aparecen como geodésicas cerradas y simples de superficies con $K \leq 0$, detectarán clases no triviales del grupo fundamental. Por ejemplo, el paralelo del cilindro genera su grupo $\mathbb{Z}$.
- **La triangulación**, que aquí es un artificio técnico de la demostración, será allí la herramienta con la que se demuestra el teorema de clasificación.

Las dos mitades de la asignatura usan las mismas cuatro palabras. Conviene llegar a la segunda sabiéndolo.

CAPÍTULO 2

Material complementario sobre curvas en una superficie

Observación (Qué es este capítulo y por qué va aquí)**.** Junto a la lección de Gauss-Bonnet suele acompañarse un material complementario sobre curvas en una superficie, con cuatro apartados. Este capítulo los recorre en su orden.

Va al final de la parte de geometría porque es el orden habitual de presentación, pero conviene saber que su último resultado — el corolario que permite reparametrizar localmente cualquier superficie para que $g_{12} = 0$ — justifica el uso de coordenadas ortogonales en el lema del triángulo pequeño y en la fórmula de Liouville del capítulo 1. Quien prefiera leerlo antes puede hacerlo sin perder nada: este capítulo no usa Gauss-Bonnet.

ANTES DE LEER

1. Una curva sobre una superficie parametrizada se da por $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$. ¿Cuántos números hacen falta para fijar la *dirección* de la curva en un punto?
2. Las líneas paramétricas de una superficie no suelen cortarse en ángulo recto. ¿Se puede cambiar de coordenadas para que sí lo hagan? ¿Siempre?
3. Una ecuación diferencial $M\,du_1 + N\,du_2 = 0$ y una familia de curvas $f(u_1, u_2) = c$, ¿son dos cosas distintas o la misma escrita de dos maneras?

Las respuestas están en las secciones 2.1, 2.4 y en la caja de conexión sobre el factor integrante.

2.1 Direcciones en un punto de una superficie

LA PREGUNTA: UNA DIRECCIÓN CON UN SOLO NÚMERO

En un plano de carreteras la dirección de un tramo se puede dar con un solo número, su pendiente, y con ese número se calcula todo: ángulos entre tramos, cruces, perpendiculares. El sistema falla en un solo caso, el tramo que va de sur a norte, cuya pendiente sería infinita. Sobre una superficie, una dirección tangente en un punto viene dada por un vector con dos componentes en la base $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$, y dos vectores proporcionales dan la misma dirección, así que sobra información. ¿Se puede codificar una dirección con un solo número real, y qué ocurre con la dirección que ese número no llega a nombrar?

LA IDEA: UN SOLO NÚMERO PARA UNA DIRECCIÓN

Este capítulo explica cómo describir direcciones y familias de curvas. Su resultado final permite escoger coordenadas con $g_{12} = 0$ cerca de cualquier punto. Así queda justificada la hipótesis de coordenadas ortogonales usada en la fórmula de Liouville del capítulo anterior.
La idea es esta. Una curva sobre una superficie parametrizada viene dada por $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$, y su vector tangente es $\alpha' = u_1'\mathbf{X}_1 + u_2'\mathbf{X}_2$. Si $u_1' \neq 0$ se puede dividir por él sin cambiar la dirección, y queda un vector proporcional a

$$\mathbf{X}_1 + \frac{du_2}{du_1}\,\mathbf{X}_2.$$

Es decir: **la dirección de la curva en un punto queda determinada por un solo número**, el valor de du_2/du_1 ahí. Ese número se llama *coordenada de dirección*. Es la pendiente de la curva vista desde el sistema de coordenadas de la superficie.

En todo lo que sigue, $x : U \to \mathbb{R}^3$, $x = x(u_1, u_2)$, es una s.p. que se entenderá que es una p.l. de una s.r..

Para las u_1-curvas la dirección está dada por $\mathbf{X}_1$, luego su coordenada de dirección es 0 en todos los puntos. Para las u_2-curvas la coordenada vale ∞, que es la forma abreviada de decir $du_1/du_2 = 0$.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: TRABAJAR CON EL PAR $(u_1' : u_2')$ EN VEZ DE CON UN SOLO NÚMERO

La alternativa. No dividir por u_1' y quedarse con el par de componentes $(u_1' : u_2')$ entendido como una razón, de modo que dos pares proporcionales representen la misma dirección. Es lo mismo que decir que el conjunto de direcciones tangentes en un punto es una recta proyectiva.
Su ventaja. Es una descripción completa y simétrica. La coordenada $\lambda = du_2/du_1$ deja fuera exactamente una dirección, la de las u_2-curvas, y hay que remendarla con el símbolo ∞ y con manipulaciones formales como multiplicar una igualdad por $1/\mu$ y hacer $1/\mu = 0$; el par no deja fuera ninguna y no necesita remiendos.
Por qué no se usa aquí. Para hacer las cuentas con pendientes habría que elegir coordenadas en esa recta proyectiva. Es posible, pero no simplifica estas ecuaciones. El arreglo que se adopta aquí es el intermedio, y es el que se usa en el resto del capítulo: escribir las familias en la forma $M\,du_1 + N\,du_2 = 0$, que es simétrica y no deja fuera ninguna dirección, y reservar λ

para las cuentas locales donde consta que $u_1' \neq 0$. La descripción proyectiva, por cierto, no desaparece del libro: el espacio de direcciones de $\mathbb{R}^2$ es $P^1\mathbb{R}$, y en el capítulo 3 se comprueba que es homeomorfo a la circunferencia.

Proposición. Dadas dos curvas con un punto en común y coordenadas de dirección finitas λ y μ, sea $\phi \in [0, \pi]$ el ángulo entre sus vectores directores $\mathbf{X}_1 + \lambda\mathbf{X}_2$ y $\mathbf{X}_1 + \mu\mathbf{X}_2$. Entonces

$$\cos\phi = \frac{g_{11} + g_{12}(\lambda+\mu) + g_{22}\lambda\mu}{\sqrt{g_{11} + 2g_{12}\lambda + g_{22}\lambda^2}\,\sqrt{g_{11} + 2g_{12}\mu + g_{22}\mu^2}}.$$

En particular, las curvas son **ortogonales** en el punto si y solo si

$$g_{11} + g_{12}(\lambda+\mu) + g_{22}\lambda\mu = 0. \tag{2.1}$$

No hay nada que no sea la definición de P.F.F.. Los vectores directores son $\mathbf{X}_1 + \lambda\mathbf{X}_2$ y $\mathbf{X}_1 + \mu\mathbf{X}_2$, y su producto escalar se calcula desarrollando por bilinealidad:

$$(\mathbf{X}_1 + \lambda\mathbf{X}_2)\cdot(\mathbf{X}_1 + \mu\mathbf{X}_2) = g_{11} + \mu g_{12} + \lambda g_{12} + \lambda\mu g_{22} = g_{11} + g_{12}(\lambda+\mu) + g_{22}\lambda\mu.$$

Los módulos son el caso particular $\mu = \lambda$ de esa misma cuenta, bajo raíz. Y $\cos\phi$ es el cociente. Estos representantes fijan un sentido para cada dirección: si se invierte solo uno, el ángulo pasa a ser $\pi - \phi$. La ortogonalidad no cambia.

Cómo se lee la fórmula. Es la fórmula de siempre, $\cos\phi = a\cdot b/(|a|\,|b|)$, aplicada a los representantes $a = \mathbf{X}_1 + \lambda\mathbf{X}_2$ y $b = \mathbf{X}_1 + \mu\mathbf{X}_2$. El numerador es su producto escalar y cada raíz del denominador es la longitud de uno de ellos. Lo único nuevo es que esas tres cantidades no se calculan con las pendientes solas: cada producto de pendientes va multiplicado por el g_{ij} que le toca. El término independiente lleva g_{11}, el que tiene $\lambda\mu$ lleva g_{22} y los cruzados llevan g_{12}. Los g_{ij} dicen cuánto mide de verdad un paso por cada eje del papel y qué ángulo forman de verdad los dos ejes.

Un caso a mano: el plano, con dos rejillas. Conviene ver la fórmula donde el resultado se sabe de antemano.

Rejilla cartesiana, $x(u_1, u_2) = (u_1, u_2, 0)$. Aquí $g_{11} = g_{22} = 1$ y $g_{12} = 0$, y la fórmula queda

$$\cos\phi = \frac{1 + \lambda\mu}{\sqrt{1+\lambda^2}\,\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Si θ_1 y θ_2 son los ángulos, entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, que forman las dos direcciones con el eje u_1, entonces $\lambda = \operatorname{tg}\theta_1$, $\mu = \operatorname{tg}\theta_2$ y $\sqrt{1+\lambda^2} = 1/\cos\theta_1$. Sustituyendo, $\cos\phi = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2)$: el ángulo entre las dos direcciones es la diferencia de sus ángulos con el eje, como tenía que ser. La condición de ortogonalidad (2.1) se reduce a $1 + \lambda\mu = 0$, que es la regla escolar del producto de pendientes igual a -1.

Rejilla oblicua, $x(u, v) = (u + v,\ v,\ 0)$. Es el mismo plano con otra cuadrícula. Ahora $\mathbf{X}_1 = (1, 0, 0)$ y $\mathbf{X}_2 = (1, 1, 0)$, de modo que

$$g_{11} = 1, \qquad g_{12} = 1, \qquad g_{22} = 2.$$

Se toman $\lambda = 0$ y $\mu = -1$. En el papel son las direcciones $(1, 0)$ y $(1, -1)$, que forman $45°$, y la regla escolar da $1 + \lambda\mu = 1 \neq 0$: no serían perpendiculares. En la superficie, el numerador vale

$$g_{11} + g_{12}(\lambda + \mu) + g_{22}\lambda\mu = 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 0,$$

y son perpendiculares. Se comprueba sin fórmula: los representantes son $\mathbf{X}_1 = (1, 0, 0)$ y $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2 = (0, -1, 0)$, que son perpendiculares en el espacio. El dibujo en el papel engaña y los g_{ij} lo corrigen. Esta rejilla oblicua volverá en las secciones siguientes, porque en ella todo se puede comprobar a mano.

Cuando una de las dos coordenadas de dirección es ∞, es decir, cuando una de las curvas es una u_2-curva, se multiplica formalmente la igualdad (2.1) por $1/\mu$ y se hace $1/\mu = 0$. Con $\lambda = 0$ para la u_1-curva queda

$$0 = \frac{g_{11}}{\mu} + g_{12}\Big(\frac{\lambda}{\mu} + 1\Big) + g_{22}\lambda = g_{12},$$

que recupera un resultado conocido de *Geometría local* (sección 3.2, apartado *Ángulo*): *las líneas paramétricas son ortogonales en un punto si y solo si g_{12} se anula ahí.*

Por qué el remiendo es legítimo. Multiplicar por $1/\mu$ y hacer $1/\mu = 0$ parece un truco, y no lo es. Si $\mu \neq 0$, dividir el representante $\mathbf{X}_1 + \mu\mathbf{X}_2$ por μ da otro representante de la misma dirección, $\frac{1}{\mu}\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$, y su producto escalar con $\mathbf{X}_1 + \lambda\mathbf{X}_2$ es

$$(\mathbf{X}_1 + \lambda\mathbf{X}_2) \cdot \Big(\tfrac{1}{\mu}\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2\Big) = \frac{g_{11}}{\mu} + g_{12}\Big(\frac{\lambda}{\mu} + 1\Big) + g_{22}\lambda,$$

que es (2.1) dividida por μ. Para una u_2-curva el representante natural es $\mathbf{X}_2$, que es lo que queda al poner $1/\mu = 0$. Así que la regla formal solo dice que se haga la cuenta con $\mathbf{X}_2$. No hay ningún límite escondido.

Qué se ha ganado. La pregunta del principio tiene respuesta. Una dirección tangente se codifica con un solo número, la coordenada de dirección $\lambda = du_2/du_1$, que es la pendiente de la curva vista en el papel de los parámetros. La dirección que ese número no nombra es la de las u_2-curvas. Se le asigna ∞ y se calcula con $\mathbf{X}_2$, o se usa la forma simétrica $M\,du_1 + N\,du_2 = 0$ de la sección siguiente, que no deja ninguna fuera. Lo que el plano de carreteras no tenía es la corrección de la métrica: sobre una superficie, el ángulo entre dos pendientes no se calcula con las pendientes solas, y hacen falta los g_{ij}. Queda abierto cómo manejar de golpe las infinitas curvas de una familia, y no solo dos curvas en un punto.

2.2 Familias de curvas

LA PREGUNTA: MANEJAR INFINITAS CURVAS CON UNA SOLA ECUACIÓN

En una carta esférica que evita los polos, los meridianos llenan la carta y por cada punto pasa exactamente uno. Escribirlos de uno en uno es imposible, y sin embargo hace falta poder hablar de todos a la vez y saber, en cada punto, hacia dónde va el que pasa por allí. ¿Qué clase de ecuación describe de golpe una colección así, y cómo se lee en ella la dirección en cada punto?

Definición. Una **familia de curvas** en la s.p. x es una familia uniparamétrica de curvas regulares tal que por cada punto pasa una única curva de la familia. Trabajamos localmente, en un dominio donde puede representarse por

$$f(u_1, u_2) = c, \tag{2.2}$$

con f diferenciable, $df \neq 0$ y c un parámetro real. Las curvas son las componentes locales de sus niveles; podemos reducir el dominio para que cada nivel no vacío sea una sola curva.

Es decir, las curvas de la familia son las **curvas de nivel** de una sola función f en el dominio de parámetros: cada valor de c da una curva, y por cada punto pasa la que corresponde al valor que f toma ahí, que es uno solo. Los meridianos de la esfera, fuera de los polos y en una carta, son el caso típico: son las curvas $v = c$, con $f(u, v) = v$.

Diferenciando (2.2) se obtiene la forma equivalente

$$f_1\, du_1 + f_2\, du_2 = 0, \qquad f_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}. \tag{2.3}$$

Lo que dice esta segunda forma es que el desplazamiento (du_1, du_2) a lo largo de una curva de la familia anula la diferencial de f, porque moverse por la curva es moverse sin cambiar el valor de f; en el plano de parámetros eso es la perpendicularidad al gradiente, aunque **sobre la superficie el ángulo se mide con los** g_{ij} y no con el producto escalar del papel, como se verá en la sección siguiente. La primera forma da las curvas; la segunda da, en cada punto, la *dirección* de la curva que pasa por ahí, que es lo que hace falta para hablar de ángulos. Recíprocamente, dada una ecuación

$$M(u_1, u_2)\, du_1 + N(u_1, u_2)\, du_2 = 0 \tag{2.4}$$

con M y N diferenciables y no simultáneamente nulas, existe *localmente* un factor integrante $K(u_1, u_2) \neq 0$ tal que $KM\, du_1 + KN\, du_2 = df$. Por tanto, tras reducir el dominio si hace falta, (2.4) representa una familia $f(u_1, u_2) = c$. La equivalencia es local y supone que la ecuación no tiene puntos singulares. Aquí K designa el factor integrante, no la curvatura de Gauss.

Un caso a mano: los rayos. En la parte $u_1 > 0$ del dominio de parámetros se toma la ecuación

$$u_2\, du_1 - u_1\, du_2 = 0, \qquad M = u_2, \quad N = -u_1.$$

No es exacta. Si lo fuera, $M = f_1$ y $N = f_2$ para alguna f, y el teorema de Schwarz obligaría a que $\partial M/\partial u_2 = \partial N/\partial u_1$; pero el primero vale 1 y el segundo -1. Multiplicando por $K = -1/u_1^2$ sí se obtiene una diferencial exacta:

$$-\frac{u_2}{u_1^2}\, du_1 + \frac{1}{u_1}\, du_2 = d\Big(\frac{u_2}{u_1}\Big).$$

La familia es, por tanto, $u_2/u_1 = c$: son los rayos que salen del origen del plano de parámetros. La dirección que la ecuación fija en cada punto es $du_2/du_1 = -M/N = u_2/u_1$, y se lee bien: la pendiente del rayo que pasa por (u_1, u_2) es el cociente de las coordenadas de ese mismo punto.

El factor integrante no es único. Con $K = -1/(u_1^2 + u_2^2)$ sale $d\big(\operatorname{arctg}(u_2/u_1)\big)$, y la familia se escribe $\operatorname{arctg}(u_2/u_1) = c$. Son los mismos rayos, etiquetados por su ángulo en vez de por

su pendiente. Cambian K y f, y no cambian las curvas: lo que la ecuación determina es la familia, no la función que la numera.

Sobre una superficie concreta los rayos se convierten en otras curvas. En el cilindro $x(u,v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$, por ejemplo, las curvas $v = c\,u$ son las hélices $(\cos u, \operatorname{sen} u, c\,u)$, de paso $2\pi c$, y para $c = 0$ el paralelo $v = 0$. Todas salen del origen del papel, es decir, del punto $(1,0,0)$ del cilindro, que queda justo en el borde del dominio.

De dónde sale el factor integrante. La existencia de K no es un acto de fe: se fabrica con la ecuación misma. Donde $N \neq 0$, la ecuación es $du_2/du_1 = -M/N$, con segundo miembro diferenciable. Por cada punto de un segmento pequeño de la recta $u_1 = u_{10}$ pasa una única solución, por existencia y unicidad, y las soluciones dependen diferenciablemente del punto de partida. Se define $f(u_1, u_2)$ como la altura a la que la solución que pasa por (u_1, u_2) corta ese segmento. Es la imagen de etiquetar cada curva por el punto donde cruza una valla transversal. Entonces:

- f es constante sobre cada solución, por construcción. Derivando a lo largo de una solución, $f_1 + f_2\, du_2/du_1 = 0$, es decir, $f_1 N - f_2 M = 0$. Luego (f_1, f_2) es proporcional a (M, N): existe $K = f_2/N$ con $f_1 = KM$ y $f_2 = KN$.
- Sobre la valla, $f(u_{10}, u_2) = u_2$, así que $f_2 = 1$. Por continuidad, $f_2 \neq 0$ cerca, y ahí $K \neq 0$.

Eso es exactamente $KM\,du_1 + KN\,du_2 = df$ con $K \neq 0$. Donde $N = 0$ se tiene $M \neq 0$, y se hace lo mismo con una valla $u_2 =$ cte. La construcción es local porque la valla es corta y porque las soluciones solo se controlan cerca de ella.

CONEXIÓN: EL FACTOR INTEGRANTE ES EL DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Aquí no hay nada nuevo: $M\,du_1 + N\,du_2 = 0$ es una ecuación diferencial de primer orden en forma diferencial, y el factor integrante es exactamente el de primer curso, el que convierte una ecuación no exacta en exacta para poder integrarla. Lo único que cambia es la lectura geométrica: *las soluciones de la ecuación diferencial son las curvas de la familia*, y el teorema de existencia y unicidad es lo que garantiza que por cada punto pasa exactamente una.
Donde $N \neq 0$, la ecuación (2.4) puede escribirse como

$$\frac{du_2}{du_1} = -\frac{M}{N},$$

y así se ve mejor lo que hace: en cada punto de la superficie fija una dirección, que es la de la única curva de la familia que pasa por ahí. Un campo de direcciones diferenciable y una familia regular de curvas son localmente el mismo dato. Si $N = 0$, se tiene $M \neq 0$ y se intercambian las coordenadas para aplicar existencia y unicidad.

Qué se ha ganado. La colección de los meridianos, o cualquier otra familia, se describe de golpe de dos maneras equivalentes. La primera es $f(u_1, u_2) = c$, que da las curvas como niveles de una sola función. La segunda es $M\,du_1 + N\,du_2 = 0$, que da en cada punto la dirección de la curva que pasa por allí, con coordenada $-M/N$. De la primera a la segunda se pasa derivando. De la segunda a la primera se pasa integrando, con un factor integrante que existe localmente y que no es único. Queda por ver qué pasa cuando se ponen dos familias a la vez, que es lo que hace falta para tener una rejilla.

2.3 Sistemas de curvas

LA PREGUNTA: CUÁNDO DOS FAMILIAS FORMAN UNA REJILLA

Dos familias de curvas que se cruzan por todas partes forman una rejilla sobre la superficie, y una rejilla es lo que hace falta para usarlas como sistema de coordenadas. Pero dos familias pueden ser tangentes en algunos puntos, y ahí la rejilla se degenera. ¿Qué condición garantiza que se cruzan de verdad en todos los puntos, y cuál añade además que lo hagan en ángulo recto?

Definición. Un **sistema de curvas** es un par de familias distintas $f = \text{cte.}$, $h = \text{cte.}$, con

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

lo que equivale a que las dos familias no tengan direcciones comunes en ningún punto. Un sistema se dice **ortogonal** si en cada punto las dos curvas que se cortan lo hacen ortogonalmente.

Por qué ese determinante. La dirección de la curva $f = \text{cte.}$ que pasa por un punto es la del desplazamiento (du_1, du_2) que anula $f_1\,du_1 + f_2\,du_2$, y ese desplazamiento es $(f_2, -f_1)$. La de la curva $h = \text{cte.}$ es $(h_2, -h_1)$. Las dos curvas son tangentes en el punto exactamente cuando esos dos vectores son proporcionales, es decir, cuando $-f_2h_1 + f_1h_2 = 0$, que es el determinante de la definición. Pedir que no se anule es pedir que las dos familias se crucen de verdad en todos los puntos, sin tocarse.

Y hay una segunda lectura, que es la que da sentido a la palabra *rejilla*. Esa matriz es la jacobiana de la aplicación $(u_1, u_2) \mapsto (f, h)$. Si su determinante no se anula, el teorema de la función inversa dice que, cerca de cada punto, (f, h) sirven como coordenadas nuevas, y en ellas las líneas paramétricas son justo las curvas del sistema. Un sistema de curvas es, localmente, lo mismo que un sistema de coordenadas. El corolario del final del capítulo usa exactamente esto.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: LA PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL ES EL TRANSPORTADOR

Los tres resultados de esta sección responden a la misma pregunta con tres enunciados distintos, y conviene verlos juntos antes de mirar las fórmulas, porque por separado parecen tres tecnicismos.

La pregunta es esta: sobre una superficie, ¿cómo se decide si dos curvas se cortan perpendicularmente? En el plano bastaría con mirar las pendientes y pedir que el producto valga -1. Sobre una superficie no vale, porque el dibujo en el dominio de parámetros *miente*: dos curvas que en el rectángulo de parámetros se cortan a $90°$ pueden cortarse a cualquier otro ángulo sobre la superficie, y al revés. Por ejemplo, en la parametrización del plano $x(u, v) = (u + v, v, 0)$, los ejes del papel se envían a las direcciones $(1, 0, 0)$ y $(1, 1, 0)$: formaban $90°$ y sus imágenes forman $45°$.

Quien corrige la mentira es la primera forma fundamental. Los coeficientes g_{ij} son el transportador de la superficie: dicen cuánto mide de verdad cada dirección y qué ángulo forman de verdad dos direcciones que en el papel forman uno cualquiera. Por eso todas las fórmulas de esta sección tienen la misma forma: la condición de

perpendicularidad del plano, $\lambda\mu + 1 = 0$ o similar, pero con cada producto pesado por su g_{ij}.
Y de ahí sale, sin cuentas nuevas, la interpretación de los tres enunciados. El primero es esa condición escrita para dos familias dadas por ecuaciones. El segundo la escribe para el caso en que las dos familias vienen dadas de golpe por una única ecuación cuadrática, que es como aparecen las direcciones principales y las asintóticas. Y el tercero le da la vuelta: en lugar de comprobar la ortogonalidad, la impone y despeja, obteniendo la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales de una familia dada. Comprobar, reconocer y construir: tres usos del mismo transportador.

Teorema. El sistema $f = \text{cte.}$, $h = \text{cte.}$ es ortogonal si y solo si

$$g_{11}f_2h_2 - g_{12}(f_2h_1 + f_1h_2) + g_{22}f_1h_1 = 0.$$

La idea, en una línea: leer las dos coordenadas de dirección de las dos ecuaciones y meterlas en la condición de ortogonalidad ya demostrada.
Cuando $f_2h_2 \neq 0$, por (2.3) las coordenadas de dirección son $\lambda = -f_1/f_2$ y $\mu = -h_1/h_2$. Se sustituyen en la condición de ortogonalidad (2.1) y se multiplica por f_2h_2 para quitar denominadores:

$$g_{11}f_2h_2 + g_{12}\big(-f_1h_2 - h_1f_2\big) + g_{22}f_1h_1 = 0,$$

Si algún denominador es nulo, se toman los vectores tangentes $f_2\mathbf{X}_1 - f_1\mathbf{X}_2$ y $h_2\mathbf{X}_1 - h_1\mathbf{X}_2$. Su producto escalar da la misma condición, sin dividir.

Cómo se lee la condición. Su primer miembro es el producto escalar, medido en la superficie, de los dos vectores tangentes $f_2\mathbf{X}_1 - f_1\mathbf{X}_2$ y $h_2\mathbf{X}_1 - h_1\mathbf{X}_2$. Con la rejilla cartesiana del plano, $g_{11} = g_{22} = 1$ y $g_{12} = 0$, se reduce a $f_1h_1 + f_2h_2 = 0$: dos familias de curvas de nivel son perpendiculares cuando lo son sus gradientes, que es lo que se espera. Obsérvese el cruce: g_{11} va con f_2h_2 y g_{22} con f_1h_1. No es una errata. Lo que se multiplica son los tangentes $(f_2, -f_1)$ y $(h_2, -h_1)$, que son los gradientes girados un cuarto de vuelta, y al girar se intercambian las componentes.

Un caso a mano: la rejilla oblicua otra vez. En el plano $x(u, v) = (u + v, v, 0)$, con $g_{11} = 1$, $g_{12} = 1$ y $g_{22} = 2$, se toman las familias $f = u$ y $h = u + 2v$. Entonces $f_1 = 1$, $f_2 = 0$, $h_1 = 1$, $h_2 = 2$, y

$$g_{11}f_2h_2 - g_{12}(f_2h_1 + f_1h_2) + g_{22}f_1h_1 = 1 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot (0 \cdot 1 + 1 \cdot 2) + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 0.$$

El sistema es ortogonal. En el papel no lo parece: $u = c$ son rectas verticales y $u + 2v = c$ son rectas de pendiente $-1/2$, que se cortan formando unos $63{,}4^\circ$. En el espacio se ve por qué es verdad. Las curvas $u = c$ son los puntos $(c + v,\, v,\, 0)$, es decir, las rectas $x - y = c$. Las curvas $u + 2v = c$ son los puntos $(c - v,\, v,\, 0)$, es decir, las rectas $x + y = c$. Son las dos familias de diagonales del plano, que sí son perpendiculares.

Observación (Una trampa de vocabulario)**.** Merece la pena señalarla expresamente. Un sistema de curvas puede ser ortogonal *en* $U \subseteq \mathbb{R}^2$ y no serlo su imagen en $x(U)$, y al revés.

Cuando se habla de ortogonalidad se habla siempre **del sistema en la superficie**, medido con la P.F.F..

El ejemplo que lo enseña es el más sencillo de todos: $u_1 = \text{cte.}$, $u_2 = \text{cte}$. Ese sistema es ortogonal en el plano de parámetros, porque ahí son rectas horizontales y verticales, que se cortan en ángulo recto. Pero sus imágenes son las líneas paramétricas, y los vectores tangentes a ellas son $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$; el ángulo que forman en la superficie se mide con $\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = g_{12}$, de modo que el sistema imagen es ortogonal exactamente donde $g_{12} = 0$. No se puede deducir su ortogonalidad del dibujo en el papel.

Un sistema de curvas puede también darse de una sola vez, multiplicando las dos ecuaciones:

$$(M_1 du_1 + N_1 du_2)(M_2 du_1 + N_2 du_2) = L\,(du_1)^2 + 2M\,du_1 du_2 + N\,(du_2)^2 = 0,$$

y recíprocamente toda ecuación de esa forma con $M^2 - LN > 0$, cuyo primer miembro se factorice en dos formas lineales no proporcionales, representa un sistema de curvas.

Teorema. El sistema $L(du_1)^2 + 2M\,du_1 du_2 + N(du_2)^2 = 0$ es ortogonal si y solo si

$$g_{11}N - 2g_{12}M + g_{22}L = 0.$$

La idea, en una línea: la condición de ortogonalidad solo usa la suma y el producto de las dos coordenadas de dirección, y esos dos números se leen de los coeficientes sin resolver la ecuación. Si $N \neq 0$, las coordenadas de dirección λ y μ son las raíces de la ecuación de segundo grado que se obtiene dividiendo por $(du_1)^2$:

$$N\Big(\frac{du_2}{du_1}\Big)^2 + 2M\,\frac{du_2}{du_1} + L = 0.$$

Por las relaciones de Cardano-Vieta entre coeficientes y raíces,

$$\lambda + \mu = -\frac{2M}{N}, \qquad \lambda\mu = \frac{L}{N}.$$

Sustituyendo en (2.1) y multiplicando por N se obtiene el enunciado. Si $N = 0$, la hipótesis $M^2 - LN > 0$ da $M \neq 0$ y la ecuación se factoriza como $du_1(L\,du_1 + 2M\,du_2) = 0$. Una dirección es la de $\mathbf{X}_2$ y la otra tiene pendiente $\lambda = -L/(2M)$. Son ortogonales si y solo si $g_{12} + g_{22}\lambda = 0$, es decir, $-2g_{12}M + g_{22}L = 0$, la misma condición.

EXPLÍCATE. *La condición $M^2 - LN > 0$ no está de adorno. Di en voz alta qué significa en términos de la ecuación de segundo grado que acaba de aparecer, y qué pasaría geométricamente si fuera igual a cero o negativa.*

Un caso a mano: las dos familias de hélices del cilindro. En el cilindro $x(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$ se tiene $g_{11} = g_{22} = 1$ y $g_{12} = 0$, como se calcula en el ejercicio del final del capítulo. Se toma la ecuación

$$(du)^2 - (dv)^2 = 0, \qquad L = 1, \quad M = 0, \quad N = -1,$$

con $M^2 - LN = 1 > 0$. Su primer miembro se factoriza como $(du - dv)(du + dv)$, así que representa dos familias a la vez: $u - v = c$ y $u + v = c$. Son las hélices que suben hacia un lado y las que suben hacia el otro, las dos con inclinación de 45°. El teorema da

$$g_{11}N - 2g_{12}M + g_{22}L = 1 \cdot (-1) - 0 + 1 \cdot 1 = 0,$$

luego se cortan en ángulo recto en todos los puntos. No ha hecho falta resolver nada: ni factorizar, ni calcular las pendientes ± 1.

Dos familias de *Geometría local*: líneas de curvatura y asintóticas. Las ecuaciones cuadráticas del tipo de este teorema no son un invento del capítulo: son la forma en que aparecen dos familias de curvas importantes de la asignatura anterior. Se reenuncia lo que se usa de ella. Los coeficientes de la segunda forma fundamental son $L_{ij} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{X}_{ij}$, donde $\mathbf{X}_{ij}$ es la derivada segunda de x respecto de u_i y u_j, y la curvatura media y la de Gauss son

$$H = \frac{g_{11}L_{22} + g_{22}L_{11} - 2g_{12}L_{12}}{2g}, \qquad K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g}$$

(*Geometría local*, sección 4.4 y su apartado *Curvatura media, curvatura de Gauss y el teorema egregio de Gauss*). En lo que sigue, L, M y N son los coeficientes de la ecuación del teorema, no los de la segunda forma.

Líneas de curvatura. En un punto no umbílico, la dirección $du_1\mathbf{X}_1 + du_2\mathbf{X}_2$ es principal si y solo si

$$(g_{11}L_{12} - g_{12}L_{11})\,du_1^2 + (g_{11}L_{22} - g_{22}L_{11})\,du_1du_2 + (g_{12}L_{22} - g_{22}L_{12})\,du_2^2 = 0$$

(*Geometría local*, sección 4.5, apartado *Líneas de curvatura*, donde se escribe como un determinante de orden tres). Es una ecuación del tipo del teorema, con $L = g_{11}L_{12} - g_{12}L_{11}$, $2M = g_{11}L_{22} - g_{22}L_{11}$ y $N = g_{12}L_{22} - g_{22}L_{12}$. La hipótesis $M^2 - LN > 0$ se cumple: allí se calcula el discriminante de esta ecuación, y con la notación de aquí da $M^2 - LN = g^2(H^2 - K)$, con $H^2 - K = \frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2 > 0$ en un punto no umbílico. La condición de ortogonalidad del teorema pide que se anule

$$g_{11}(g_{12}L_{22} - g_{22}L_{12}) - g_{12}(g_{11}L_{22} - g_{22}L_{11}) + g_{22}(g_{11}L_{12} - g_{12}L_{11}),$$

y al desarrollar, los seis productos se cancelan dos a dos: $g_{11}g_{12}L_{22}$ con $-g_{12}g_{11}L_{22}$, $-g_{11}g_{22}L_{12}$ con $g_{22}g_{11}L_{12}$, y $g_{12}g_{22}L_{11}$ con $-g_{22}g_{12}L_{11}$. Vale cero siempre. **Las líneas de curvatura forman siempre un sistema ortogonal.** En *Geometría local* esto sale de que el endomorfismo de Weingarten es autoadjunto, con autovalores distintos. Aquí sale de una cuenta de una línea, sin autovalores.

Líneas asintóticas. Una dirección es asintótica si y solo si $L_{11}\,du_1^2 + 2L_{12}\,du_1du_2 + L_{22}\,du_2^2 = 0$, y cerca de un punto con $K < 0$ por cada punto pasan dos líneas asintóticas (*Geometría local*, sección 4.5, apartado *Líneas asintóticas*). Ahora $L = L_{11}$, $M = L_{12}$ y $N = L_{22}$, y la hipótesis del teorema es $L_{12}^2 - L_{11}L_{22} = -gK > 0$, es decir, $K < 0$: la condición algebraica es exactamente que el punto sea hiperbólico. La condición de ortogonalidad es $g_{11}L_{22} - 2g_{12}L_{12} + g_{22}L_{11} = 0$, que es $2gH = 0$. **Las líneas asintóticas se cortan en ángulo recto exactamente donde $H = 0$.**

Con números, en la silla $x(u, v) = (u, v, uv)$: $g_{11} = 1 + v^2$, $g_{12} = uv$, $g_{22} = 1 + u^2$, $L_{11} = L_{22} = 0$ y $L_{12} = 1/\sqrt{1 + u^2 + v^2}$. La ecuación de las asintóticas se queda en $du\,dv = 0$: las asintóticas son las líneas paramétricas, que aquí son las dos familias de rectas contenidas

en la silla. La condición de ortogonalidad es $-2uv/\sqrt{1+u^2+v^2}=0$, que solo se cumple si $uv=0$. Las rectas de la silla solo se cortan perpendicularmente a lo largo de los dos ejes. En el punto $(1,1,1)$, por ejemplo, el coseno del ángulo es $g_{12}/\sqrt{g_{11}g_{22}}=1/2$ y se cortan a 60°. Y en efecto, $H=-uv/(1+u^2+v^2)^{3/2}$, que solo se anula en los ejes.

Qué se ha ganado. La pregunta de la rejilla tiene dos respuestas. Las dos familias se cruzan de verdad en todos los puntos cuando el determinante de la definición no se anula, y entonces sirven localmente de coordenadas. Se cruzan además en ángulo recto cuando se cumple la condición del primer teorema, si vienen dadas por separado, o la del segundo, si vienen juntas en una ecuación cuadrática. Las dos condiciones son la ortogonalidad del plano con cada producto pesado por su g_{ij}. Y como regalo, dos hechos de la asignatura anterior salen en una línea: las líneas de curvatura son siempre ortogonales, y las asintóticas lo son donde $H=0$. Queda abierta la pregunta inversa: dada *una* familia, ¿hay siempre otra que la corte en ángulo recto?

2.4 Trayectorias ortogonales

LA PREGUNTA: CORTAR PERPENDICULARMENTE SOBRE UNA SUPERFICIE CURVA

Sobre un terreno suave, las líneas de máxima pendiente cortan perpendicularmente las curvas de nivel allí donde la altura no tiene un punto crítico. Es la imagen idealizada de seguir el descenso del agua. En el plano se obtienen invirtiendo la pendiente y cambiándole el signo. Sobre una superficie el ángulo recto no se mide así, sino con los coeficientes métricos, y el terreno es una superficie. ¿Qué ecuación queda entonces para las curvas que cortan perpendicularmente a una familia dada, y qué pinta este cálculo en un libro cuyo objetivo es el teorema de Gauss-Bonnet?

Teorema. Dada la familia de curvas $M\,du_1+N\,du_2=0$, sus **trayectorias ortogonales** vienen dadas por la ecuación

$$(g_{11}N-g_{12}M)\,du_1+(g_{12}N-g_{22}M)\,du_2=0.$$

La idea, en una línea: la condición de ortogonalidad es una ecuación de primer grado en μ, así que la dirección perpendicular no hay que buscarla, se despeja.
Donde los denominadores no se anulan, la familia dada tiene coordenada de dirección $\lambda=-M/N$. Se busca μ tal que se cumpla (2.1); despejando,

$$\mu=-\frac{g_{11}+g_{12}\lambda}{g_{12}+g_{22}\lambda}=\frac{g_{12}M-g_{11}N}{g_{12}N-g_{22}M}.$$

Como la familia buscada tiene coordenada de dirección $\mu=du_2/du_1$, basta escribir esa igualdad en la forma $M'du_1+N'du_2=0$ con $-M'/N'=\mu$, y sale el enunciado. La forma final cubre también los casos excluidos por los cocientes: el vector $N\mathbf{X}_1-M\mathbf{X}_2$ es tangente a la familia dada, y su producto escalar con $du_1\mathbf{X}_1+du_2\mathbf{X}_2$ es exactamente el miembro izquierdo de la ecuación buscada.

Cómo se lee la ecuación. La última frase de la prueba es la lectura: la ecuación dice que el desplazamiento $du_1\mathbf{X}_1+du_2\mathbf{X}_2$ es perpendicular, en la superficie, al tangente $N\mathbf{X}_1-M\mathbf{X}_2$

de la familia dada. Con la rejilla cartesiana del plano se queda en $N\,du_1 - M\,du_2 = 0$, es decir, $du_2/du_1 = N/M$. La familia dada tenía pendiente $-M/N$, y la nueva tiene la inversa cambiada de signo: es la regla del plano de la pregunta. Sobre una superficie cualquiera, cada uno de los dos coeficientes mezcla M y N con los pesos g_{ij}, y esa mezcla es la corrección que impone la métrica.

Un caso a mano: rectas horizontales en polares. En el plano con la rejilla polar $x(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 0)$ se tiene $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$ y $g_{22} = r^2$. Las rectas horizontales $y = c$ se escriben $r\,\mathrm{sen}\,\theta = c$, y diferenciando,

$$\mathrm{sen}\,\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta = 0, \qquad M = \mathrm{sen}\,\theta, \quad N = r\cos\theta.$$

El teorema da

$$(1\cdot r\cos\theta - 0)\,dr + (0 - r^2\,\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta = r\left(\cos\theta\,dr - r\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\right) = r\,d(r\cos\theta) = 0,$$

luego $r\cos\theta = c'$: las rectas verticales $x = c'$, como tenía que salir. Si se aplicara la regla del papel, olvidando el r^2, se obtendría $r\cos\theta\,dr - \mathrm{sen}\,\theta\,d\theta = 0$, cuyas soluciones son las curvas $\cos\theta = C\,e^{-r^2/2}$, que no son rectas ni cortan a las horizontales en ángulo recto. El factor $g_{22} = r^2$ es el que lo arregla: un incremento $d\theta$ del papel mide $r\,d\theta$ en el plano de verdad.

Un caso a mano: enderezar la rejilla de la silla. Antes del enunciado general, la construcción que lo demuestra, hecha con números. En la silla $x(u,v) = (u,\ v,\ uv)$ de la sección anterior, $g_{11} = 1 + v^2$, $g_{12} = uv$ y $g_{22} = 1 + u^2$, y las líneas paramétricas, que son las dos familias de rectas de la silla, no son ortogonales fuera de los ejes. Se conserva la familia $u = c$, que es $du = 0$, con $M = 1$ y $N = 0$. Sus trayectorias ortogonales cumplen

$$g_{12}\,du + g_{22}\,dv = uv\,du + (1+u^2)\,dv = 0.$$

Separando variables, $dv/v = -u\,du/(1+u^2)$, de donde $\ln|v| = -\frac{1}{2}\ln(1+u^2) + \text{cte.}$, es decir,

$$f(u,v) = v\sqrt{1+u^2} = c.$$

El factor integrante es $K = 1/\sqrt{1+u^2}$, que no es constante: multiplicado por uv da $\partial f/\partial u$, y multiplicado por $1+u^2$ da $\partial f/\partial v$.

Las curvas tienen una lectura limpia. Sobre la curva $f = c$, el punto de la silla es

$$x\Big(u,\ \frac{c}{\sqrt{1+u^2}}\Big) = \Big(u,\ \frac{c}{\sqrt{1+u^2}},\ \frac{uc}{\sqrt{1+u^2}}\Big),$$

y cumple $y^2 + z^2 = c^2$. Las trayectorias son las curvas de la silla que están a distancia constante $|c|$ del eje x, sus cortes con los cilindros $y^2 + z^2 = c^2$. Es el mapa topográfico de la caja de intuición que viene, con la distancia al eje en el papel de la altura. Cada recta $u = c_0$ pasa por el punto $(c_0, 0, 0)$ del eje y se aleja de él perpendicularmente, así que hace de línea de máxima pendiente, y las curvas de nivel de la distancia la cortan en ángulo recto.

Las coordenadas nuevas son $v_1 = u$ y $v_2 = v\sqrt{1+u^2}$. Deshaciendo el cambio, $u = v_1$ y $v = v_2/\sqrt{1+v_1^2}$, y la silla queda parametrizada por

$$y(v_1,v_2) = \Big(v_1,\ \frac{v_2}{\sqrt{1+v_1^2}},\ \frac{v_1 v_2}{\sqrt{1+v_1^2}}\Big).$$

Derivando y multiplicando se obtiene $g_{12} = 0$, $g_{22} = 1$ y $g_{11} = 1 + v_2^2/(1+v_1^2)^2$. La rejilla es ortogonal, como se quería. El $g_{22} = 1$ también se lee: v_2 es la distancia al eje x, con signo, medida a lo largo de la recta. El determinante jacobiano del cambio es $\partial f/\partial v = \sqrt{1+u^2}$, que no se anula nunca, y en este ejemplo el cambio es biyectivo en todo el plano: la construcción funciona en toda la silla, no solo cerca de un punto. En general no hay tanta suerte, y por eso el enunciado dice *un entorno*.

Y ahora el resultado que justifica la elección local de coordenadas ortogonales.

Corolario (Reparametrización ortogonal)**.** En cualquier punto de una s.p. existe un entorno en el que la superficie puede reparametrizarse regularmente de modo que las nuevas líneas paramétricas sean ortogonales, es decir, de modo que $g_{12} = 0$.

LA IDEA: EL MAPA TOPOGRÁFICO YA TRAE LA REJILLA PUESTA

La imagen que predice el enunciado está en cualquier mapa de montaña. Ahí hay dibujadas unas curvas, las de nivel, y hay otras que no están dibujadas pero se saben: las de máxima pendiente. Fuera de los puntos críticos de la altura, las dos familias se cortan en ángulo recto y proporcionan una rejilla local. En una cumbre o un collado esta construcción con la altura puede fallar; el corolario permite partir de otra familia regular.
El corolario dice exactamente eso, y la construcción es la del mapa. Se conserva una de las dos familias de líneas paramétricas tal cual está, y se tira la otra, sustituyéndola por las trayectorias ortogonales de la primera. La rejilla nueva es ortogonal por construcción, y lo único que hay que comprobar es que las dos familias sirven de verdad como coordenadas, es decir, que no se cortan mal en ningún sitio.

La intuición falsa. Uno imagina que enderezar una rejilla oblicua exige mover las dos familias a la vez, y de ahí saca la impresión de que el resultado tiene que ser difícil y probablemente global. Las dos cosas son falsas. No hay que mover las dos: se conserva una entera, y eso reduce el problema a resolver *una* ecuación diferencial de primer orden. Y no es global: el enunciado dice «en un entorno», y ese entorno puede ser diminuto. Las dos herramientas que se usan — la integración de la ecuación y el teorema de la función inversa — dan garantías locales; no aseguran una carta global. Es una limitación real, no una cautela: por eso en el capítulo 1 el lema se demuestra para triángulos pequeños y hay que triangular para llegar a una región cualquiera.

Paso 1: quedarse con una familia y pedirle a la otra que sea perpendicular. Sea $p = x(u_{10}, u_{20})$. El argumento funciona tanto si g_{12} se anula como si no.
Se toma la familia de curvas $u_1 = \text{cte.}$, que en forma diferencial es $du_1 = 0$, es decir, $M = 1$ y $N = 0$. Por el teorema anterior, sus trayectorias ortogonales cumplen

$$(g_{11}\cdot 0 - g_{12}\cdot 1)\,du_1 + (g_{12}\cdot 0 - g_{22}\cdot 1)\,du_2 = 0, \quad \text{o sea} \quad g_{12}\,du_1 + g_{22}\,du_2 = 0.$$

Paso 2: la familia perpendicular existe *(el núcleo de la prueba)*. La condición decisiva es $g_{22} > 0$: permite escribir $du_2/du_1 = -g_{12}/g_{22}$, una ecuación diferencial regular. El teorema de existencia y unicidad da una curva solución por cada punto cercano; al etiquetarlas por su punto de paso por una pequeña transversal se obtiene una integral

primera f. Es la construcción de la valla explicada en la sección de familias de curvas, al hablar de dónde sale el factor integrante. Así, las direcciones perpendiculares forman una familia de curvas de verdad.
Reduciendo U a un entorno de (u_{10}, u_{20}) si hace falta, esa familia es $f(u_1, u_2) = c$ con

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial u_1} = Kg_{12}, \qquad f_2 = \frac{\partial f}{\partial u_2} = Kg_{22}, \qquad K \neq 0 \text{ en todo } U,$$

donde K es el factor integrante, es decir, la función no nula por la que se multiplica la ecuación para que su primer miembro sea exactamente la diferencial de algo.

Paso 3: usar las dos familias como coordenadas nuevas. Se define ahora $h : U \to \mathbb{R}^2$ por $h(u_1, u_2) = (u_1, f(u_1, u_2))$, que es diferenciable y tiene jacobiana

$$J(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix}, \qquad \det J(h) = f_2 = Kg_{22} \neq 0$$

en todo U, porque $K \neq 0$ y $g_{22} = |\mathbf{X}_2|^2 > 0$ por la condición de regularidad. En particular en (u_{10}, u_{20}).
Por el **teorema de la función inversa** existen un entorno $W \subseteq U$ de (u_{10}, u_{20}) y un entorno V de $h(u_{10}, u_{20})$ tales que $h : W \to V$ es un difeomorfismo. Luego $h^{-1} : V \to W$ es una transformación coordenada para $x|_W$, y $y = x|_W \circ h^{-1}$ es una s.p., reparametrización local de x, con $p \in y(V)$.

Paso 4: comprobar que la rejilla nueva es la que se quería. Escribiendo $y = y(v_1, v_2)$, se tiene $v_1 = u_1$ y $v_2 = f(u_1, u_2)$. Las v_2-curvas son las $u_1 = \text{cte.}$ y las v_1-curvas son las $f = \text{cte.}$, que por construcción son sus trayectorias ortogonales. Luego las líneas paramétricas de y son ortogonales y $g_{12} = 0$ en esta parametrización.

Lo que hay que llevarse. Tres movimientos. (i) Se conservan las curvas $u_1 = \text{cte.}$ y se escriben sus trayectorias ortogonales, $g_{12}\,du_1 + g_{22}\,du_2 = 0$. (ii) Se integran: salen las curvas $f = c$, con df proporcional a (g_{12}, g_{22}) y, por tanto, $f_2 \neq 0$. (iii) Se toman (u_1, f) como coordenadas nuevas: la jacobiana tiene determinante $f_2 \neq 0$ y el teorema de la función inversa hace el resto. Todo descansa en $g_{22} > 0$, que hace regular la ecuación del paso (i) e invertible la jacobiana del paso (iii). En la silla, los tres movimientos son las tres cuentas del caso a mano.

Observación (Qué papel juega cada hipótesis, y qué cuesta cada paso).

- **La regularidad de la s.p.** implica $g_{22} = |\mathbf{X}_2|^2 > 0$. Junto con $K \neq 0$, es lo que hace falta para que el determinante jacobiano del paso 3 no se anule. Si la parametrización degenerara — como la parametrización esférica habitual en los polos —, habría que empezar por otra carta regular.
- **La construcción es local** tanto al integrar como al aplicar el teorema de la función inversa. En algunos casos, como el plano, hay coordenadas ortogonales globales; en otros hay obstáculos topológicos. La esfera, por ejemplo, no admite una sola carta global: una superficie compacta no puede ser homeomorfa a un abierto no vacío de $\mathbb{R}^2$.
- **El factor integrante K no aparece en el resultado.** Merece la pena notarlo: la función f no es única ni pretende serlo, y cualquier otra con las mismas curvas de nivel sirve igual. Lo único que se usa de f es la familia de curvas que define.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: PEDIR COORDENADAS ORTONORMALES EN VEZ DE SOLO ORTOGONALES

La alternativa. Ya que se va a reparametrizar para conseguir $g_{12} = 0$, pedir de paso $g_{11} = g_{22} = 1$. Las fórmulas quedarían reducidas al mínimo: la matriz de la P.F.F. sería la identidad, los ángulos y las longitudes se medirían como en el plano euclídeo, y la fórmula de Liouville perdería entero su primer sumando.
Su ventaja. Sería enorme si fuera posible. Casi toda la dificultad técnica del capítulo 1 desaparecería, porque el término al que hay que aplicar el teorema de Green sería idénticamente nulo.
Qué la impide en general. Esa exigencia restringe la curvatura de la superficie. Una parametrización con $g_{11} = g_{22} = 1$ y $g_{12} = 0$ es una isometría local con el plano, y por el teorema egregio de *Geometría local* (sección 4.4, apartado *Curvatura media, curvatura de Gauss y el teorema egregio*) eso obliga a que $K \equiv 0$: solo las superficies llanas admiten coordenadas así. Pedirlo excluiría todas las regiones con curvatura no nula. Gauss-Bonnet sigue teniendo contenido cuando $K = 0$, pero queremos demostrarlo también para curvatura arbitraria. La ortogonalidad, en cambio, puede conseguirse localmente en cualquier superficie y basta para la fórmula de Liouville. El corolario garantiza esa simplificación sin imponer $g_{11} = g_{22} = 1$.

CONEXIÓN: LOS DOS TEOREMAS DE OTRAS ASIGNATURAS QUE HACEN TODO EL TRABAJO

Merece la pena señalar exactamente dónde está la carne de esta demostración, porque no está en la geometría.
El **factor integrante** viene de *Ecuaciones diferenciales ordinarias*: es lo que garantiza que la ecuación $g_{12}du_1 + g_{22}du_2 = 0$ tiene una integral primera f, o sea, que sus soluciones forman efectivamente una familia de curvas de nivel.
El **teorema de la función inversa** viene de *Diferenciación de funciones de varias variables*, y es lo que convierte una condición puntual sobre un determinante en un difeomorfismo local. Aparece con este mismo papel decenas de veces en las dos asignaturas: es la máquina estándar de fabricar coordenadas a medida.
La geometría solo pone dos cosas: la idea de mirar las trayectorias ortogonales de las curvas $u_1 = \text{cte.}$, y la observación de que $g_{22} > 0$, consecuencia de la regularidad.
Y obsérvese qué clase de resultado es: **estrictamente local**. El corolario da un entorno, no una parametrización global. Por eso la demostración del teorema de Gauss-Bonnet triangula primero y trabaja después triángulo a triángulo: solo en una región suficientemente pequeña queda garantizada esa elección de coordenadas.

Ejercicio 2.1. *Trayectorias ortogonales de las hélices del cilindro*

Se considera el cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$ con la p.l. habitual $x(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$, y en él la familia de hélices $v = u + c$, $c \in \mathbb{R}$.

1. Calcular los coeficientes métricos de esta p.l..
2. Escribir la familia en forma diferencial y hallar sus trayectorias ortogonales.
3. Interpretar el resultado geométricamente.
4. ¿Hacía falta el corolario de reparametrización ortogonal en este caso? ¿Por qué?

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *$\mathbf{X}_1 = \partial x/\partial u$ y $\mathbf{X}_2 = \partial x/\partial v$. Calcula los tres productos escalares y no te asustes de lo sencillo que sale.*
2. *De $v = u + c$, diferencia. Te queda algo de la forma $M\,du + N\,dv = 0$ con M y N constantes.*
3. *Aplica el teorema de las trayectorias ortogonales literalmente, con $u_1 = u$ y $u_2 = v$.*
4. *Para interpretar: con esos coeficientes métricos, ¿a qué se parece la aplicación $(u, v) \mapsto x(u, v)$ en cuanto a*

longitudes y ángulos?

Resolución. La idea. Si la matriz de la P.F.F. resulta ser la identidad, la parametrización desenrolla el cilindro sobre el plano sin deformar nada. Entonces las hélices son, en el papel, rectas de pendiente 1, y sus perpendiculares tienen que ser las rectas de pendiente -1. El teorema de las trayectorias ortogonales solo lo confirma. Lo único que hay que vigilar es leer bien M y N en la ecuación de la familia.

1. Coeficientes métricos. Se deriva:

$$\mathbf{X}_1 = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0), \qquad \mathbf{X}_2 = (0, 0, 1),$$

y de ahí

$$g_{11} = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_1 = \operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1, \qquad g_{12} = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = 0, \qquad g_{22} = \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_2 = 1.$$

La matriz de la P.F.F. es la identidad.

2. Trayectorias ortogonales. Diferenciando $v = u + c$ se obtiene $dv - du = 0$, es decir, $M\,du + N\,dv = 0$ con $M = -1$, $N = 1$. El teorema da

$$(g_{11}N - g_{12}M)\,du + (g_{12}N - g_{22}M)\,dv = (1 \cdot 1 - 0)\,du + (0 - 1 \cdot (-1))\,dv = du + dv = 0,$$

que integrada es $u + v =$ cte., es decir, la familia $v = -u + c'$.

3. Interpretación. Como la matriz de la P.F.F. es la identidad, la parametrización x conserva localmente longitudes y ángulos: enrolla el plano (u, v) sobre el cilindro. Su inversa local lo desenrolla. Ahí las hélices $v = u + c$ son las rectas de pendiente 1, y sus trayectorias ortogonales son las rectas de pendiente -1. Al enrollar de nuevo, esas rectas son las hélices que suben en sentido contrario con la misma inclinación.

Es decir, el resultado no solo es correcto sino obvio *una vez* que se sabe que el cilindro es localmente indistinguible del plano. La cuenta es la comprobación.

4. ¿Hacía falta el corolario? No. El corolario garantiza la existencia de coordenadas con $g_{12} = 0$ cuando no las hay; aquí la p.l. de partida ya las tiene, porque $g_{12} = 0$ de entrada. Es la situación cómoda en la que están casi todas las superficies corrientes: cilindro, esfera, superficies de revolución, superficies regladas ortogonales. El corolario está ahí para poder decir «no hay pérdida de generalidad» localmente en una demostración general; en este problema no hace falta recurrir a él. ■

Otra vía (con el criterio de las coordenadas de dirección). Se puede evitar el teorema y usar directamente (2.1). La coordenada de dirección de las hélices es $\lambda = dv/du = 1$. Se busca μ con

$$g_{11} + g_{12}(\lambda + \mu) + g_{22}\lambda\mu = 1 + 0 + 1 \cdot \mu = 0,$$

luego $\mu = -1$, es decir, $dv/du = -1$ y $v = -u + c'$. Sale en una línea. Este atajo funciona aquí porque ambas direcciones tienen pendiente finita. Si la perpendicular fuera una u_2-dirección, habría que usar la ecuación diferencial sin dividir.

Dónde se falla. (1) Aplicar la regla del papel, invertir la pendiente y cambiarle el signo, sin mirar la métrica. Aquí da bien por suerte, porque la matriz de la P.F.F. es la identidad. En el cilindro de radio a, $x(u, v) = (a\cos u,\ a\operatorname{sen} u,\ v)$, se tiene $g_{11} = a^2$, $g_{12} = 0$ y $g_{22} = 1$, y el teorema aplicado a la misma familia $v = u + c$ da $a^2\,du + dv = 0$, es decir, $v = -a^2u + c'$. La regla del papel daría $v = -u + c'$, que es falsa si $a \neq 1$: su tangente $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$ y el de la

hélice, $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$, tienen producto escalar $a^2 - 1$. Con $a = 2$, las hélices suben unos 26,6° sobre los paralelos, sus trayectorias ortogonales bajan unos 63,4°, y la regla del papel las haría bajar 26,6°. (2) Quedarse en $du + dv = 0$ sin integrarla ni leerla: la respuesta es la familia $u + v = c'$, las hélices que suben en sentido contrario. (3) Creer que el apartado 4 pregunta si el teorema de las trayectorias vale en esta parametrización. El teorema vale en cualquiera; el corolario solo trata de si existen coordenadas con $g_{12} = 0$.

Lo que se aprende es cuándo se puede fiar uno del papel: solo si la matriz de la P.F.F. es, en cada punto, un múltiplo positivo de la identidad. Si un eje del papel se estira respecto del otro, como al pasar de radio 1 a radio a, la perpendicular del papel deja de ser la de la superficie.

QUÉ DEJA. Una familia regular de curvas y un campo diferenciable de direcciones son localmente el mismo dato: pasar de una a otro es derivar, y volver es integrar. El corolario permite además escoger coordenadas ortogonales cerca de cualquier punto. Esa es la justificación que necesitaba la fórmula de Liouville del capítulo 1; descansa en existencia y unicidad de EDO y en el teorema de la función inversa.

Qué se ha ganado. La pregunta del agua tiene respuesta. Las curvas que cortan perpendicularmente a la familia $M\,du_1 + N\,du_2 = 0$ son las soluciones de $(g_{11}N - g_{12}M)\,du_1 + (g_{12}N - g_{22}M)\,du_2 = 0$, que es la regla del plano, invertir la pendiente y cambiarle el signo, corregida por la métrica. Y lo que pinta este cálculo en un libro sobre Gauss-Bonnet es el corolario: cerca de cualquier punto hay coordenadas con $g_{12} = 0$, que son las que usan la fórmula de Liouville y el lema del triángulo pequeño del capítulo 1. Y las tres preguntas del principio del capítulo quedan contestadas: la dirección se fija con un solo número, du_2/du_1; las líneas paramétricas se pueden volver ortogonales siempre, pero solo cerca de cada punto; y una ecuación $M\,du_1 + N\,du_2 = 0$ y una familia $f = c$ son el mismo dato, derivando en un sentido e integrando en el otro.

Repaso del capítulo

REPASO INTERCALADO: CURVAS EN UNA SUPERFICIE

1. Define coordenada de dirección. ¿Cuánto vale para las u_1-curvas y para las u_2-curvas?
2. Escribe la condición de ortogonalidad de dos curvas con coordenadas de dirección λ y μ, y dedúcela en dos líneas de la P.F.F..
3. ¿Qué es una familia de curvas y qué es un sistema de curvas? ¿Qué condición distingue a un sistema?
4. Enuncia el teorema de las trayectorias ortogonales.
5. Enuncia el corolario de reparametrización ortogonal y di qué dos teoremas de otras asignaturas se usan en su demostración.
6. ¿Por qué el corolario es *local* y no global? Da un ejemplo de superficie donde no puede ser global.
7. Un sistema de curvas puede ser ortogonal en $U \subseteq \mathbb{R}^2$ y no serlo su imagen en la superficie. Explica por qué y da el ejemplo más sencillo.
8. Sin calcular: ¿cuáles son las trayectorias ortogonales de los meridianos de una superficie de revolución? ¿Y de las hélices de un cilindro?

CAPÍTULO 3

Introducción

Observación (Empieza la segunda mitad de la asignatura)**.** A partir de aquí cambia todo: el lenguaje, los métodos y hasta el significado de la palabra «superficie». Conviene decirlo antes de empezar.

En la parte de geometría, una superficie era una s.r. de $\mathbb{R}^3$ y las herramientas eran derivadas, integrales y curvaturas. En la parte de topología, una superficie es un espacio topológico cuyos puntos tienen entornos homeomorfos a un disco, sin exigirle que viva dentro de $\mathbb{R}^3$, y no se deriva nada. La botella de Klein y el plano proyectivo son superficies aquí y no lo eran allí.

Un puente central entre las dos mitades es la característica de Euler-Poincaré: allí aparecía en Gauss-Bonnet y aquí, junto con la orientabilidad, permitirá clasificar las superficies compactas, conexas y sin borde. Ese reencuentro llega en el capítulo 8.

ANTES DE LEER

1. Coge un cuadrado de papel y pega el lado izquierdo con el derecho. ¿Qué obtienes? ¿Y si antes de pegar le das media vuelta a uno de ellos?
2. Toma la recta real y declara equivalentes dos números cuando su diferencia sea entera. ¿A qué espacio conocido se parece el cociente?
3. ¿Puede el cociente de un espacio muy razonable ser un espacio horrible? Intenta que el cociente de $\mathbb{R}$ no sea Hausdorff.
4. ¿Qué tienen en común un cono de helado y la esfera?

Las respuestas están en las secciones 3.4, 3.4, 3.4 y 3.5.

Muchos espacios de partida serán subespacios euclídeos, $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Sus cocientes, sin embargo, no tienen por qué serlo. Conviene recordar algunos conceptos generales del curso de *Topología*, que es donde se vieron por primera vez.

3.1 Espacios topológicos

La pregunta: cuánto de la distancia hace falta de verdad

En un espacio métrico se habla de límites, de continuidad y de frontera usando la distancia, pero dos distancias muy distintas pueden dar exactamente las mismas funciones continuas y los mismos límites: en el plano, la euclídea y la del taxi no se distinguen en nada de eso. ¿Cuál es la parte de la información métrica que de verdad se está usando, y se puede escribir sin mencionar ningún número?

Definición. Una **topología** sobre un conjunto X es una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X que verifica:
1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
2. si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$;
3. si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{T}$, entonces $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \mathcal{T}$.

Al par $(X, \mathcal{T})$ se le llama **espacio topológico**. A los conjuntos de $\mathcal{T}$ se les llama **abiertos** y a sus complementarios, **cerrados**.

La idea: la asimetría entre las dos últimas condiciones

Merece la pena fijarse en que la intersección solo se permite **finita** y la unión se permite **arbitraria**. No es un capricho.
En la recta real, los intervalos $(-1/n, 1/n)$ son abiertos para todo n, y su intersección es $\{0\}$, que no lo es. Exigir intersecciones arbitrarias excluiría, por tanto, la topología usual. Si conserváramos todos los abiertos usuales de $\mathbb{R}$ y añadiéramos esa exigencia, cada punto sería abierto y acabaríamos en la topología discreta. Los axiomas no imponen esa exigencia, aunque algunas topologías sí la cumplen.

El camino que no se tomó: axiomatizar por entornos o por clausura

La alternativa. No tomar los abiertos como noción primitiva. Se puede dar en su lugar, para cada punto, la familia de sus *entornos*, con axiomas que dicen que todo entorno contiene al punto, que la intersección de dos entornos es entorno y poco más; o se puede dar un operador de *clausura* $A \mapsto \overline{A}$ sobre los subconjuntos de X, con cuatro axiomas. Las tres axiomáticas son equivalentes: de cada una se recuperan las otras dos.
Su ventaja. La de entornos es la más cercana a la intuición de proximidad, que es de donde viene la topología: dice qué significa «estar cerca de x» sin hablar de conjuntos globales. La de clausura resulta cómoda en contextos donde lo natural son los cerrados y no los abiertos.
Por qué se elige la de abiertos. Por economía. Son tres condiciones cortas sobre una sola colección, sin índices por puntos, y la continuidad se escribe en una línea — una aplicación es continua si la preimagen de todo abierto es abierta —, que es la definición con la que se trabaja todo el curso; con entornos hay que enunciarla y comprobarla punto a punto. Ninguna de las tres es «la buena»: son la misma teoría escrita de tres maneras, y la elección es de comodidad, no de fondo.

Ejemplo. Si (X, d) es un espacio métrico, su topología asociada es

$$\mathcal{T}_d = \{A \subseteq X \mid \forall a \in A \ \exists \varepsilon > 0 \text{ con } B_d(a, \varepsilon) \subseteq A\} \cup \{\emptyset\}.$$

Algunos ejemplos de distancia en el plano:

- la **euclídea**, $d_e((x,y),(x',y')) = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$;
- la **del máximo**, $d_{\text{máx}}((x,y),(x',y')) = \text{máx}\{|x-x'|,|y-y'|\}$;
- la **taxi**, $d_{\text{taxi}}((x,y),(x',y')) = |x-x'|+|y-y'|$.

Las tres inducen la misma topología en $\mathbb{R}^2$, aunque sus bolas tengan formas distintas: círculos, cuadrados y rombos respectivamente.

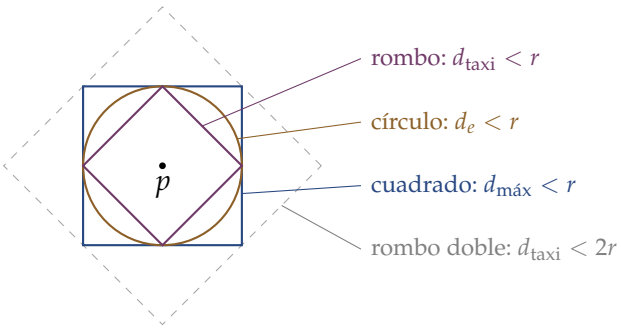
Por qué las tres dan la misma topología. La afirmación del ejemplo contesta la pregunta de la sección, y la comprobación cabe en una línea. Si dos puntos del plano difieren en (a,b),

$$\text{máx}\{|a|,|b|\} \;\le\; \sqrt{a^2+b^2} \;\le\; |a|+|b| \;\le\; 2\,\text{máx}\{|a|,|b|\}.$$

La primera desigualdad dice que la hipotenusa es al menos tan larga como cada cateto. La segunda es la desigualdad triangular: ir en diagonal no es más largo que ir por las dos calles. La tercera dice que cada sumando es a lo sumo el mayor de los dos. Pasada a bolas del mismo centro p, la cadena se lee así:

$$B_{\text{taxi}}(p,r) \subseteq B_e(p,r) \subseteq B_{\text{máx}}(p,r) \subseteq B_{\text{taxi}}(p,2r).$$

El rombo cabe en el círculo, el círculo en el cuadrado y el cuadrado en el rombo de radio doble. Por tanto, alrededor de un punto de un conjunto A cabe una bola pequeña de una de las distancias si y solo si cabe una de cualquiera de las otras: como mucho hay que reducir el radio a la mitad. Las tres distancias dan los mismos abiertos.



Las cuatro bolas de centro p de la cadena anterior, encajadas unas en otras.

Esto es lo que la topología conserva de una distancia. No conserva los números, sino qué conjuntos contienen una bola pequeña alrededor de cada uno de sus puntos. Dos distancias cuyas bolas se encajan así tienen los mismos abiertos, y por eso los mismos límites y las mismas funciones continuas.

Definición. Sean $B \subseteq X$ y $x \in X$. Se dice que x es **punto interior** de B, o que B es un **entorno** de x, si existe $U \in \mathcal{T}$ con $x \in U \subseteq B$. Se dice que x es **adherente** a B si para todo $U \in \mathcal{T}$ con $x \in U$ se tiene $U \cap B \neq \emptyset$.

Proposición. Un conjunto A es abierto si y solo si todos sus puntos son interiores. Un conjunto B es cerrado si y solo si coincide con el conjunto de sus puntos adherentes.

Definición. Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subseteq X$. Se llama **topología restricción** o **relativa** a

$$\mathcal{T}_A = \{G \cap A \mid G \in \mathcal{T}\},$$

y a $(A,\mathcal{T}_A)$ se le llama **subespacio topológico** de $(X,\mathcal{T})$.

Nótese que si A es abierto de X, entonces $\mathcal{T}_A$ está formada por los abiertos de $\mathcal{T}$ contenidos en A.

Definición. Una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ es **continua** si, para todo $A \subseteq X$ y todo x adherente a A en X, $f(x)$ es adherente a $f(A)$ en X'. Es un **homeomorfismo** si es biyectiva, continua y con inversa continua.

Proposición. Si f es continua y U es abierto de X', entonces $f^{-1}(U)$ es abierto de X.

Cómo se lee la definición, y de dónde sale la proposición. Un punto adherente a A es un punto «pegado» a A: todo abierto que lo contiene toca A, aunque el punto no esté en A. En $\mathbb{R}$, el 0 está pegado a $A = \{1/n\,;\, n \geq 1\}$. La definición dice que f no despega nada: si x está pegado a A, su imagen está pegada a la imagen de A. Con el ejemplo, los valores $f(1/n)$ no pueden quedarse lejos de $f(0)$.

La proposición sale de ahí. Sean U abierto de X', $x \in f^{-1}(U)$ y $A = X \setminus f^{-1}(U)$. Si x estuviera pegado a A, la definición diría que $f(x)$ está pegado a $f(A)$. Pero U es un abierto que contiene a $f(x)$ y no toca $f(A)$, porque ningún punto de A va a parar a U. Luego x no está pegado a A: algún abierto contiene a x y no toca A, es decir, está dentro de $f^{-1}(U)$. Todos los puntos de $f^{-1}(U)$ son interiores y, por la proposición anterior, $f^{-1}(U)$ es abierto. El recíproco también es cierto: si $f(x)$ no estuviera pegado a $f(A)$, un abierto $V \ni f(x)$ que no toca $f(A)$ tendría preimagen abierta, con x dentro y sin ningún punto de A. Por eso, en el resto del libro, la continuidad se comprueba con preimágenes de abiertos.

CONEXIÓN: QUÉ SIGNIFICA «EL MISMO ESPACIO» EN CADA ASIGNATURA

Conviene tener presente la escala de finuras con que se comparan espacios, porque esta asignatura la recorre entera.

- En *Geometría local*, dos superficies son «la misma» si hay una isometría entre ellas: conserva longitudes, ángulos y curvatura de Gauss; no necesariamente las curvaturas extrínsecas, como la curvatura media.
- En topología, dos espacios son «el mismo» si hay un **homeomorfismo**: conserva la estructura de abiertos y todas sus consecuencias topológicas. La superficie de un cubo y una esfera son homeomorfas.
- Y aún hay una escala más gruesa, la **equivalencia de homotopía**, que aparecerá en el capítulo 5: ahí un disco y un punto son «el mismo».

El cilindro ofrece un ejemplo que también aparece al distinguir geometría local y global en relatividad. La aplicación

$$q(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$$

conserva la métrica $du^2 + dv^2$: un pequeño trozo de plano se enrolla sin estirarse. Pero $q(u + 2\pi, v) = q(u, v)$, de modo que no es un homeomorfismo del plano sobre el cilindro entero. Los dos tienen curvatura de Gauss cero y, aun así, su topología global difiere. La circunferencia horizontal del cilindro no se puede contraer a un punto dentro de él; en el plano, todo lazo se contrae. El grupo fundamental hará precisa esa diferencia en el capítulo 6. Conocer la métrica en cada entorno no resuelve por sí solo cómo se pegan los entornos para formar todo el espacio. Casi todo el trabajo de la segunda mitad de la asignatura consiste en construir herramientas que distingan espacios en la segunda escala usando invariantes de la tercera.

Qué se ha ganado. La pregunta del principio tiene respuesta. De la distancia solo se usa qué conjuntos son abiertos, y eso se escribe sin números, con los tres axiomas de la definición. Con los abiertos se dicen «entorno», «adherente», «continua» y «homeomorfismo», y la

euclídea, la del máximo y la del taxi dan el mismo espacio. Queda por ver qué propiedades de $\mathbb{R}^n$ sobreviven sin distancia. La sección siguiente se ocupa de que las funciones continuas alcancen su máximo, y la otra, de estar hecho de una sola pieza.

3.2 Compacidad

LA PREGUNTA: QUÉ SUSTITUYE A «CERRADO Y ACOTADO»

En una isla siempre hay un punto más alto; en una llanura que se extendiera sin fin podría no haberlo, con el terreno subiendo indefinidamente sin llegar nunca a una cumbre. Lo que garantiza la cumbre es que la isla se acaba. En $\mathbb{R}^n$ eso se dice «cerrado y acotado», y con ello las funciones continuas alcanzan su máximo, las sucesiones tienen subsucesiones convergentes y todo funciona. Fuera de $\mathbb{R}^n$ no hay «acotado» que valga, porque puede no haber ninguna distancia con la que acotar. ¿Qué propiedad, escrita únicamente con abiertos, hace ese mismo trabajo?

Definición. Un **recubrimiento por abiertos** de $A \subseteq X$ es una colección de abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ con $A \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$. Se dice que A es **compacto** si de todo recubrimiento por abiertos se puede extraer un subrecubrimiento finito.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: DEFINIR LA COMPACIDAD POR SUCESIONES

La alternativa. Llamar compacto a un espacio en el que toda sucesión tiene alguna subsucesión convergente, que es la caracterización que uno usa en análisis y la que sale del teorema de Bolzano-Weierstrass.
Su ventaja. Es muchísimo más manejable. Comprobar que toda sucesión tiene subsucesión convergente es una tarea concreta; comprobar que *todo* recubrimiento por abiertos, que son muchísimos y no se pueden listar, admite un subrecubrimiento finito, no lo es.
Qué la hunde. Que las dos nociones coinciden en espacios métricos pero no en general. En esta asignatura aparecen cocientes que pueden no ser metrizables, aunque muchos sí lo sean. Y sobre todo, el resultado que hace funcionar la mitad topológica del curso — que una biyección continua de un compacto en un Hausdorff es un homeomorfismo, que es el atajo con el que se identifican todos los espacios cociente — se demuestra con recubrimientos y no con sucesiones. La compacidad secuencial no se ha tirado: se sigue usando en análisis, donde los espacios son métricos y las dos definiciones dan lo mismo.

Un caso a mano: $(0,1)$ y $[0,1]$. Los abiertos $U_n = (1/n, 1)$, con $n \geq 2$, recubren $(0,1)$, porque cada $x \in (0,1)$ cae en U_n en cuanto $1/n < x$. Pero una cantidad finita de ellos tiene por unión $U_N = (1/N, 1)$, con N el mayor de los índices, y deja fuera el punto $1/(2N)$. Así que $(0,1)$ no es compacto: el recubrimiento persigue el extremo que le falta al intervalo sin alcanzarlo nunca. Es la llanura sin fin de la pregunta, en pequeño: la función $1/x$ es continua en $(0,1)$ y no tiene máximo.

En $[0,1]$ esos abiertos ya no recubren, porque el 0 no está en ninguno. Cualquier recubrimiento de $[0,1]$ tiene que incluir un abierto que contenga al 0, y ese abierto se traga de golpe un trozo $[0,\varepsilon)$ y, con él, toda la cola de la persecución. Que de todo recubrimiento de $[0,1]$ se pueda extraer uno finito es el teorema de Heine-Borel del curso de *Topología*: **en $\mathbb{R}^n$, un subconjunto es compacto si y solo si es cerrado y acotado**.

Definición. Un espacio X tiene la **propiedad de separación de Hausdorff**, o es T_2, si dados $x \neq y$ en X existen abiertos U, V con $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Si X es compacto, todos sus subconjuntos cerrados son también compactos.

Proposición. En todo espacio con la propiedad de Hausdorff los conjuntos compactos son cerrados.

Por qué son ciertas las dos afirmaciones. Sea K compacto en un Hausdorff y sea $x \notin K$. Para cada $y \in K$ hay abiertos disjuntos $U_y \ni x$ y $V_y \ni y$. Los V_y recubren K, y por compacidad bastan un número finito, $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$. La intersección $U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$ es abierta, por ser finita, contiene a x y no toca $V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n} \supseteq K$. Todo punto de fuera de K tiene, pues, un entorno fuera de K, y K es cerrado. La compacidad convierte infinitas separaciones en una sola, y el mismo argumento reaparece en el ejercicio «Aplastar un compacto conserva la separación». La afirmación anterior a la proposición se ve igual de rápido: a un recubrimiento de un cerrado F de un compacto X se le añade el abierto $X \setminus F$; se obtiene un recubrimiento de X, se extrae uno finito y se quita $X \setminus F$.

LA IDEA: POR QUÉ ESTAS DOS PROPIEDADES VAN SIEMPRE JUNTAS

Compacidad y Hausdorff se citan casi siempre a la vez en esta asignatura, y hay una razón concreta: juntas convierten aplicaciones continuas en homeomorfismos.
El resultado clave, que se usará decenas de veces, es que **una biyección continua de un compacto en un Hausdorff es un homeomorfismo**. La compacidad garantiza que las imágenes de cerrados son compactas; el Hausdorff, que los compactos son cerrados; y una biyección continua que lleva cerrados en cerrados tiene inversa continua.
Ese es el atajo que evita construir inversas a mano, y aparece en la sección siguiente convertido en el criterio práctico para identificar espacios cociente.

Qué se ha ganado. La propiedad que buscaba la pregunta es la compacidad. Hace el trabajo de «cerrado y acotado» porque la imagen continua de un compacto es compacta: si unos abiertos W_α recubren $f(X)$, sus preimágenes recubren X, se extraen unas pocas, y sus imágenes recubren $f(X)$. Para $f : X \to \mathbb{R}$ continua con X compacto, $f(X)$ es un compacto de $\mathbb{R}$, luego cerrado y acotado, y tiene máximo: la isla tiene cumbre. Con la propiedad de Hausdorff al lado, la compacidad da además el atajo de los homeomorfismos, que es lo que necesita la sección del cociente.

3.3 Conexión

LA PREGUNTA: «DE UNA SOLA PIEZA» NO ES UNA DEFINICIÓN

Cualquiera distingue una figura de una sola pieza de otra partida en dos, pero decirlo con precisión cuesta más de lo que parece: hablar de «no poder separarla» obliga a decir quién la separa y con qué. ¿Cómo se escribe eso usando solo abiertos, y es lo mismo que poder ir andando de un punto cualquiera a otro?

Definición. $C \subseteq X$ es **conexo** si dados $A, B \in \mathcal{T}$ con $A \cap B \cap C = \emptyset$ y $C \subseteq A \cup B$, se tiene o bien $C \subseteq A$ o bien $C \subseteq B$.

Cómo se lee la definición. Los abiertos A y B son un intento de partir C: entre los dos lo cubren y no comparten ningún punto de C. La definición dice que todo intento así fracasa, porque uno de los dos se queda con C entero. Con $C = [0,1] \cup [2,3]$ el intento sale bien: $A = (-1, \frac{3}{2})$ y $B = (\frac{3}{2}, 4)$ cubren C, no comparten puntos de C y cada uno se lleva un trozo, así que C no es conexo. Con $C = [0,1]$ no hay manera, y ese es el teorema del curso de *Topología* según el cual los conexos de $\mathbb{R}$ son los intervalos.

Definición. $(X, \mathcal{T})$ es **conexo por caminos** si para todos $x, y \in X$ existe una aplicación continua $\alpha : [0,1] \to X$ con $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$.

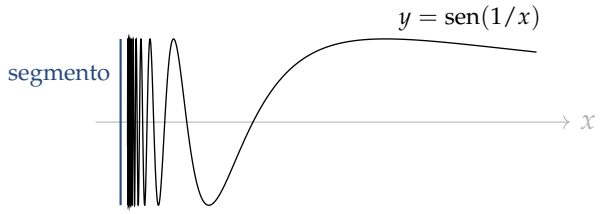
Definición. X es **localmente conexo (por caminos)** si para todo $x \in X$ y todo entorno N de x existe otro entorno $N' \subseteq N$ que es conexo (por caminos).

Proposición. Todo espacio conexo por caminos es conexo. Recíprocamente, todo espacio conexo y localmente conexo por caminos es conexo por caminos.

Por qué, y para qué está la hipótesis local. La primera mitad cabe en una línea. Si A y B partieran un espacio conexo por caminos, un camino α de un punto de A a uno de B partiría $[0,1]$ en $\alpha^{-1}(A)$ y $\alpha^{-1}(B)$, y $[0,1]$ es conexo. La segunda mitad necesita la hipótesis local, y el ejemplo que lo muestra es el *seno del topólogo*:

$$S = \big\{(x, \operatorname{sen}(1/x)) \,;\, 0 < x \leq 1\big\} \,\cup\, \big(\{0\} \times [-1,1]\big).$$

La gráfica oscila cada vez más deprisa al acercarse al eje vertical y se acumula sobre todo el segmento. S es conexo, porque es la adherencia de la gráfica, que es conexa por ser imagen continua de $(0,1]$, y la adherencia de un conexo es conexa. Pero ningún camino une la gráfica con el segmento. Si lo hubiera, sea t_0 el primer instante en que toca el segmento: justo antes de t_0 el camino va por la gráfica con $x \to 0$, y por el teorema de Bolzano su primera coordenada pasa por todos los valores pequeños, también por aquellos en que $\operatorname{sen}(1/x)$ vale 1 y por aquellos en que vale -1. La segunda coordenada tomaría los valores 1 y -1 en instantes tan cercanos a t_0 como se quiera, y no sería continua en t_0.



El seno del topólogo. Es conexo, pero no hay camino desde la gráfica hasta el segmento: cerca de él, la gráfica sube hasta 1 y baja hasta -1 infinitas veces.

Lo que falla es justo la hipótesis local: un entorno pequeño de un punto del segmento corta a S en un trozo del segmento y en infinitos arcos sueltos de la gráfica, y ningún entorno así es conexo por caminos. En una superficie cada punto tiene entornos homeomorfos a discos, que son conexos por caminos, y las dos nociones coinciden siempre.

Definición. Se llama **componente conexa** (por caminos) de x al mayor subespacio conexo (por caminos) de X que contiene a x.

Proposición. Si X es localmente conexo por caminos, la componente conexa de x coincide con su componente conexa por caminos y es un conjunto abierto y cerrado de X.

Definición. Dado $A \subseteq X$ conexo (por caminos), se dice que $x \in A$ es un **punto de corte** si $A \setminus \{x\}$ no es conexo (por caminos). El número de componentes conexas (por caminos, en la segunda versión) de $A \setminus \{x\}$ se llama **orden de corte** de x.

LA IDEA: PARA QUÉ SIRVEN LOS PUNTOS DE CORTE

Es el primer invariante que distingue espacios y el más barato de todos. Un intervalo abierto tiene todos sus puntos de orden de corte 2; una circunferencia no tiene ningún punto de corte; una «Y» tiene un punto de orden 3.
Esto basta para probar, sin ninguna maquinaria, que un intervalo y una circunferencia no son homeomorfos, y que una «Y» y una «X» tampoco lo son entre sí. Merece la pena tenerlo a mano: cuando haya que distinguir dos espacios y el grupo fundamental salga igual, muchas veces la respuesta está en contar puntos de corte.

Qué se ha ganado. «De una sola pieza» tiene dos traducciones precisas: no poder partirse con dos abiertos, que es ser conexo, y poder ir andando de un punto a cualquier otro, que es ser conexo por caminos. La segunda implica la primera. En los espacios localmente conexos por caminos, como todas las superficies, son la misma cosa, y el seno del topólogo muestra que en general no lo son. La conexión da, además, el primer invariante para distinguir espacios: cuántas piezas quedan al quitar un punto.

3.4 Espacio cociente

LA PREGUNTA: PEGAR SIN CONSTRUIR EL RESULTADO

Un cilindro se fabrica pegando dos lados opuestos de una hoja de papel, y el papel pegado existe: se puede coger con la mano. Una botella de Klein se fabrica con el mismo tipo de instrucciones y no cabe en el espacio de tres dimensiones, de modo que no hay ningún objeto que señalar. ¿Se le puede dar sentido a «pegar» sin construir nada dentro de $\mathbb{R}^3$, y quién decide entonces qué conjuntos del resultado son abiertos?

LA IDEA: PEGAR ES LA OPERACIÓN FUNDAMENTAL DE ESTA ASIGNATURA

Aquí empieza el contenido nuevo, y es la herramienta que se va a usar hasta el final del libro.
La idea es la de pegar con pegamento. Se toma un espacio, se declaran iguales unos puntos con otros y se mira qué queda. Un cuadrado con los lados verticales pegados es un cilindro; si además se pegan los horizontales, un toro; si uno de los pegados se hace dando media vuelta, una banda de Möbius o una botella de Klein.
Toda la clasificación de superficies consiste en decir que **cualquier superficie compacta, conexa y sin borde se obtiene pegando los lados de un polígono**, y en dar la lista de los pegados esencialmente distintos. Por eso el espacio cociente es el concepto central.
Lo delicado no es la idea, sino la topología: hay que decir qué conjuntos del espacio pegado son abiertos, y hay que comprobar que el resultado no es un monstruo.

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y R una relación de equivalencia sobre X. Sea $\pi : X \to$

X/R la proyección canónica $\pi(x) = [x]$. Se define

$$\mathcal{T}_\pi = \{G \subseteq X/R \,;\, \pi^{-1}(G) \in \mathcal{T}\},$$

llamada **topología cociente** para la relación R. Al par $(X/R, \mathcal{T}_\pi)$ se le llama **espacio cociente**.

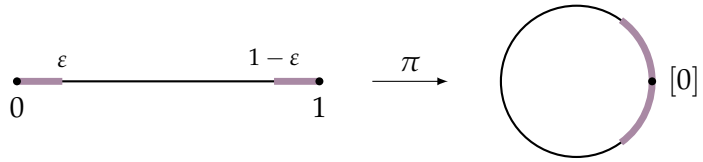
Lema. $\mathcal{T}_\pi$ es una topología sobre X/R.

> *La idea, en una línea: la definición traslada cada condición a X, y la preimagen respeta uniones e intersecciones, así que las tres condiciones se heredan sin tocar nada.*
> Se verifican las tres propiedades, y todas salen de que la preimagen conmuta con las operaciones conjuntistas.
> *Primera.* $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ y $\pi^{-1}(X/R) = X$, los dos abiertos de X, luego $\emptyset$ y X/R están en $\mathcal{T}_\pi$.
> *Segunda.* Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}_\pi$, entonces $\pi^{-1}\big(\bigcap_i A_i\big) = \bigcap_i \pi^{-1}(A_i)$, intersección finita de abiertos de X, luego abierta.
> *Tercera.* Si $\{A_\alpha\} \subseteq \mathcal{T}_\pi$, entonces $\pi^{-1}\big(\bigcup_\alpha A_\alpha\big) = \bigcup_\alpha \pi^{-1}(A_\alpha)$, unión de abiertos, luego abierta.

Observación (Cómo hay que leer la definición)**.** La topología cociente se define «hacia atrás»: un conjunto del cociente es abierto cuando lo es el conjunto de todos los puntos que se proyectan sobre él. Dicho de otra forma, un abierto del cociente es la imagen de un abierto de X que sea **unión de clases enteras**. Un abierto que corte una clase por la mitad no sirve.

Esta es la fuente de casi todas las dificultades con los cocientes y la razón de que puedan salir espacios patológicos.

Un caso a mano: el segmento con los extremos pegados. Sea $X = [0,1]$ y sea R la relación que pega el 0 con el 1 y no toca nada más. Las clases son los $\{t\}$ con $0 < t < 1$ y la clase doble $\{0,1\}$, que en el cociente es un solo punto, $[0]$. ¿Qué conjuntos G del cociente que contienen a $[0]$ son abiertos? G es abierto si y solo si $\pi^{-1}(G)$ es abierto en $[0,1]$, y esa preimagen contiene a la vez el 0 y el 1. Tiene que contener, pues, un trozo $[0, \varepsilon)$ y otro $(1-\varepsilon, 1]$. Un entorno del punto pegado es un arco que cruza la costura, con un trozo a cada lado, que es exactamente lo que es un entorno de un punto en una circunferencia.



Un entorno de la clase pegada. Su preimagen tiene que llevar un trozo junto a cada extremo del segmento, y en el cociente es un arco que cruza la costura.

El conjunto $[0, \frac{1}{2})$ es abierto en $[0,1]$ y, sin embargo, su imagen no es abierta en el cociente. Su preimagen es $[0, \frac{1}{2}) \cup \{1\}$, porque la clase del 0 arrastra al 1, y ese conjunto no es abierto en $[0,1]$: el 1 no tiene ningún entorno dentro de él. Es la advertencia de la observación, con números: $[0, \frac{1}{2})$ corta la clase $\{0,1\}$ por la mitad. El cociente es una circunferencia, como se probará con el criterio compacto-Hausdorff de esta misma sección, y la topología cociente es lo que hace que también lo sea en cuanto a sus abiertos.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: DARLE AL COCIENTE OTRA TOPOLOGÍA

La alternativa. Lo único que hay que exigirle a la topología del cociente es que π sea continua, y esa condición la cumplen muchas. La más económica de todas es la indiscreta, $\{\emptyset, X/R\}$: con ella π es continua sin necesidad de comprobar nada.
Su ventaja. Ninguna que sirva, y por eso el ejemplo vale la pena: enseña que «que la proyección sea continua» no basta para fijar la topología, y que hay una elección detrás de la definición.
Qué la hunde. Con la topología indiscreta solo importaría la cantidad de puntos: una biyección entre dos conjuntos indiscretos es un homeomorfismo. Así se perdería, por ejemplo, la diferencia topológica entre el toro y la esfera. La topología cociente es la *más fina* de todas las que hacen continua a π, es decir, la que conserva la mayor cantidad posible de información del espacio de partida, y esa maximalidad es exactamente lo que se formaliza en la propiedad universal de la subsección siguiente. Elegir la más gruesa sería tirar el espacio de partida; elegir una intermedia obligaría a justificar por qué esa y no otra.

Ejemplo. Dos cocientes del cuadrado $X = [0,1] \times [0,1]$ que conviene tener en la cabeza:
- identificando los lados verticales se obtiene el **cilindro**;
- identificando el borde entero a un punto se obtiene la **esfera**, vista como un casquete cuyo borde se ha cerrado.

3.4.1 Topología final y propiedad universal

Definición. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio, Y un conjunto y $f : X \to Y$ sobreyectiva. Se llama **topología final** de f a $\mathcal{T}_f = \{H \subseteq Y \,;\, f^{-1}(H) \text{ es abierto de } X\}$.

Con $\mathcal{T}_f$, la aplicación f es continua por definición. En particular la topología cociente es la topología final de π, luego π es continua. De hecho, toda topología final es una topología cociente:

Proposición. Dada $f : X \to Y$ sobreyectiva, se define R_f sobre X por $x \, R_f \, x' \iff f(x) = f(x')$. Entonces $(X/R_f, \mathcal{T}_\pi)$ y $(Y, \mathcal{T}_f)$ son homeomorfos.

LA IDEA: TODA APLICACIÓN SOBREYECTIVA ES UN PEGADO

La imagen que predice el enunciado es esta: *una aplicación sobreyectiva no hace nada más que pegar*. Si f manda tres puntos de X al mismo punto de Y, para Y esos tres puntos son uno solo; Y no tiene forma de distinguirlos y no guarda ningún recuerdo de que fueran tres. Salvo por los nombres, Y *es* el espacio que resulta de pegar en X todo lo que f manda al mismo sitio. La proposición dice justamente eso, y añade que el pegado también respeta los abiertos, que es la parte que hay que trabajar.
Hay una condición que no debe perderse: Y lleva la *topología final de* f. Si el espacio de destino ya tiene otra topología, habrá que comprobar que coincide con ella. Construir una suryección continua con las fibras adecuadas da una biyección continua desde el cociente; para obtener un homeomorfismo falta justificar la inversa. El criterio compacto-Hausdorff que viene después resuelve muchos de esos casos.

Se define $\tilde{f}([x]) = f(x)$.

Paso 1: la aplicación entre los dos candidatos está bien definida y es biyectiva. Si

$[x] = [x']$ entonces $f(x) = f(x')$, luego el valor no depende del representante. Es sobreyectiva porque lo es f, e inyectiva porque $\tilde{f}([x]) = \tilde{f}([x'])$ significa $f(x) = f(x')$, es decir, $x\, R_f\, x'$, o sea $[x] = [x']$. La relación R_f se ha definido precisamente para que esto salga: identifica exactamente lo que f ya identificaba, ni un punto más ni uno menos.

Paso 2: $\tilde{f}$ es continua. Sea W abierto de $(Y, \mathcal{T}_f)$; entonces $f^{-1}(W)$ es abierto de X. Ahora bien, $\tilde{f}^{-1}(W)$ es abierto de $\mathcal{T}_\pi$ si y solo si $\pi^{-1}(\tilde{f}^{-1}(W))$ es abierto de X, y como $\tilde{f} \circ \pi = f$, ese conjunto es exactamente $f^{-1}(W)$.

Paso 3: la inversa es continua *(el núcleo de la prueba)*. Este es el único paso que no es contabilidad, porque es el único donde hay que ir en la dirección incómoda: de X/R_f hacia Y, y no al revés. Todo se reduce a una igualdad de conjuntos, y esa igualdad es el corazón del resultado: $\pi^{-1}(\Omega) = f^{-1}(\tilde{f}(\Omega))$, es decir, *tomar un trozo del cociente y subirlo, o bajarlo a Y y luego subirlo, dan lo mismo*. La inyectividad de $\tilde{f}$ es lo único que impide que la segunda ruta recoja puntos de más por el camino.
Sea Ω abierto de $(X/R_f, \mathcal{T}_\pi)$, de modo que $\pi^{-1}(\Omega)$ es abierto de X. Hay que ver que $\tilde{f}(\Omega)$ es abierto de $\mathcal{T}_f$, es decir, que $f^{-1}(\tilde{f}(\Omega))$ es abierto de X. Basta comprobar la igualdad anterior, que se hace por doble inclusión:
$\subseteq$: si $x \in \pi^{-1}(\Omega)$, entonces $[x] \in \Omega$, luego $f(x) = \tilde{f}([x]) \in \tilde{f}(\Omega)$ y por tanto $x \in f^{-1}(\tilde{f}(\Omega))$.
$\supseteq$: si $x \in f^{-1}(\tilde{f}(\Omega))$, entonces $f(x) = \tilde{f}([x]) \in \tilde{f}(\Omega)$; al ser $\tilde{f}$ inyectiva, $[x] \in \Omega$ y por tanto $x \in \pi^{-1}(\Omega)$.

Lo que hay que llevarse. La aplicación $\tilde{f}([x]) = f(x)$ está bien definida y es biyectiva porque R_f pega exactamente lo que f pega. Para su continuidad y la de su inversa se sube todo a X. En Y es abierto lo que tiene preimagen abierta por f, en el cociente lo que la tiene por π, y como $f = \tilde{f} \circ \pi$ con $\tilde{f}$ biyectiva, un conjunto del cociente y su imagen en Y tienen la misma preimagen en X. Por eso los dos espacios tienen los mismos abiertos.

Definición. A R_f se le llama la **relación inducida** por f. En general, una relación $\sim$ sobre X se dice **compatible** con f si $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$.

Proposición (Propiedad universal del cociente)**.** Sea R una relación de equivalencia sobre el espacio topológico X y sea $f : X \to Z$ continua y compatible con R. Entonces $\tilde{f} : X/R \to Z$, definida por $\tilde{f}([x]) = f(x)$, es continua.

La idea, en una línea: la topología cociente está definida como «lo que sea abierto al subirlo a X», así que comprobar la continuidad de $\tilde{f}$ es, literalmente, comprobar la de f.
Sea W abierto de Z. Como f es continua, $f^{-1}(W)$ es abierto de X. Y $\tilde{f}^{-1}(W)$ es abierto de X/R si y solo si $\pi^{-1}(\tilde{f}^{-1}(W))$ es abierto de X; como $f = \tilde{f} \circ \pi$, ese conjunto es $f^{-1}(W)$, que ya sabíamos abierto.

LA IDEA: LA PROPIEDAD UNIVERSAL ES LA HERRAMIENTA DE TRABAJO

Esta proposición parece un tecnicismo y es lo que se usa en todos los ejercicios. Su lectura práctica es:

*Para definir una aplicación continua **desde** un cociente, no hace falta pelearse con la topología cociente: basta definirla sobre el espacio de partida, comprobar que es continua y comprobar que respeta las identificaciones.*
El recíproco también es cierto: si $\tilde{f}$ es continua, entonces $\tilde{f} \circ \pi$ lo es, por composición. Tenemos una equivalencia. Así que la continuidad de una aplicación definida en un cociente *siempre* se comprueba subiendo al espacio de partida.

Proposición (Criterio compacto-Hausdorff)**.** Sea $f : X \to Y$ continua y sobreyectiva y sea R_f la relación inducida. Si Y es Hausdorff y X es compacto, entonces $\tilde{f} : X/R_f \to Y$ es un homeomorfismo.

LA IDEA: LA INVERSA CONTINUA SALE GRATIS, Y POR QUÉ

Este criterio es la herramienta de trabajo del capítulo, y conviene entender qué regala exactamente, porque parece demasiado.
Lo difícil de un homeomorfismo nunca es la ida: es la vuelta. Una biyección continua puede perfectamente tener inversa discontinua; el ejemplo de siempre es enrollar el intervalo $[0, 2\pi)$ sobre la circunferencia, que es continuo y biyectivo y cuya inversa rompe la circunferencia por un punto. Comprobar a mano que la vuelta es continua suele ser tedioso, y el criterio permite evitar ese trabajo en muchos cocientes del curso.
En el intervalo $[0, 2\pi)$ falta el extremo que cerraría la vuelta. Por ejemplo, los puntos de parámetro $2\pi - 1/n$ se acercan en la circunferencia al punto de parámetro 0, pero sus parámetros no se acercan a 0. Ahí falla la inversa. La compacidad y la separación de Hausdorff evitan ese fallo mediante una propiedad precisa: las imágenes de cerrados vuelven a ser cerradas. Esa es la cadena de la prueba.
En una frase: **sobre un compacto y en un Hausdorff, continua más biyectiva ya es homeomorfismo**. El criterio de abajo no es más que esa idea escrita para cocientes.

Paso 1: continuidad de la ida. Por la propiedad universal, ya que R_f es compatible con f. Es decir, no hay que tocar la topología cociente para nada: se hereda de f.

Paso 2: biyectividad. Sobreyectiva porque lo es f; e inyectiva porque $\tilde{f}([x]) = \tilde{f}([x'])$ implica $f(x) = f(x')$, es decir, $x' R_f x$, o sea $[x] = [x']$.

Paso 3: la vuelta, por la cadena compacto-compacto-cerrado *(el núcleo de la prueba)*. Aquí está todo, y es una cadena de tres eslabones que conviene poder recitar. Basta ver que $\tilde{f}$ lleva cerrados en cerrados, porque eso es exactamente decir que la inversa es continua. Sea F cerrado de X/R_f; entonces $\pi^{-1}(F)$ es cerrado de X, que es compacto, luego $\pi^{-1}(F)$ es compacto; al ser f continua, $f(\pi^{-1}(F))$ es compacto; y al ser Y Hausdorff, los compactos son cerrados, luego $\tilde{f}(F) = f(\pi^{-1}(F))$ es cerrado.
La cadena, sin símbolos: **cerrado dentro de un compacto es compacto; la imagen continua de un compacto es compacta; y en un Hausdorff, compacto es cerrado.** Los tres eslabones son de *Topología*, ninguno es de esta asignatura, y sin embargo son lo único que sostiene el método con el que se resuelven casi todos los ejercicios de cocientes del curso.

Observación (Qué papel juega cada hipótesis)**.** No se pueden eliminar sin más del criterio general, aunque algunos homeomorfismos concretos existan sin ellas.

- X **compacto.** Sin ella se cae el primer eslabón. El contraejemplo es el del intervalo enrollado: $f : [0, 2\pi) \to S^1$, $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, es continua, sobreyectiva y ya inyectiva, luego el cociente por R_f es el propio $[0, 2\pi)$; y ese intervalo no es homeomorfo a la circunferencia, porque quitándole un punto interior se rompe en dos trozos y a la circunferencia no le pasa.
- Y **Hausdorff.** Sin ella, un compacto puede no ser cerrado. Por ejemplo, la identidad de dos puntos con topología discreta a esos mismos puntos con topología indiscreta es continua y biyectiva, con dominio compacto, pero no es un homeomorfismo. Merece la pena saber que esta hipótesis casi nunca estorba en la práctica, porque los espacios de destino de esta asignatura viven en algún $\mathbb{R}^n$ y todos los subespacios de $\mathbb{R}^n$ son Hausdorff. La que de verdad hay que vigilar es la compacidad.

Lo que hay que llevarse. Tres pasos, y solo uno con contenido. La ida es continua por la propiedad universal, y es biyectiva porque se usa la relación inducida por f. La vuelta es la cadena de tres eslabones: un cerrado del cociente tiene preimagen cerrada en el compacto X, luego compacta; su imagen por f es compacta; y es cerrada porque Y es Hausdorff. Sin compacidad se rompe el primer eslabón, como en $[0, 2\pi) \to S^1$.

Corolario. Si $f : X \to Y$ es continua y sobreyectiva entre espacios métricos compactos, entonces $\tilde{f} : X/R_f \to Y$ es un homeomorfismo.

LA IDEA: UN MÉTODO PARA RECONOCER COCIENTES

Cuando el espacio de partida es compacto y el destino es Hausdorff, el criterio anterior ofrece un procedimiento que conviene tener a mano:

1. **Adivinar el resultado**: qué espacio conocido Y debería salir.
2. **Construir una** $f : X \to Y$ **continua y sobreyectiva** que haga las identificaciones que uno quiere.
3. **Comprobar que** R_f **es exactamente la relación** R **del enunciado**, es decir, que $f(p) = f(q) \iff p\,R\,q$. Hay que comprobar las dos implicaciones, no solo que se respetan los pegados.
4. **Invocar el criterio**: si X es compacto e Y es Hausdorff, ya está.

Obsérvese que en el paso 4 no se construye ninguna inversa. Ese es todo el ahorro.

3.4.2 Los cocientes fundamentales

Los tres ejemplos siguientes se hacen con el mismo mecanismo, y conviene tenerlo delante antes de mirarlos: se parte del cuadrado $X = [0,1] \times [0,1]$ con una relación que pega lados de su borde; se fabrica una aplicación continua y sobreyectiva f del cuadrado sobre la superficie de $\mathbb{R}^3$ que uno cree que va a salir; se comprueba que la relación inducida R_f — es decir, «f las manda al mismo sitio» — coincide exactamente con la relación de partida; y se invoca el criterio compacto-Hausdorff. Lo único que cambia de un ejemplo a otro es f, y con ella la manera en que se pegan los bordes. Toda la dificultad, cuando la hay, está en el tercer paso.

Ejemplo (Cilindro)**.** Sea $X = [0,1] \times [0,1]$ y R la relación de equivalencia generada por $(0,t) \sim (1,t)$: se pegan los dos lados verticales sin darles la vuelta. Se toma $Y = S^1 \times [0,1]$ y

$$f(t,s) = \big(\cos(2\pi t),\ \operatorname{sen}(2\pi t),\ s\big),$$

que enrolla el segmento horizontal sobre la circunferencia y deja la altura intacta. Entonces $f(p) = f(q)$ equivale a $s = s'$ y, además, a uno de estos casos: $t = t'$, $t = 0, t' = 1$ o $t = 1, t' = 0$; es decir, $R_f = R$: la función solapa exactamente los puntos que la relación manda pegar, ni uno más. Como X es compacto e Y Hausdorff, X/R es homeomorfo al cilindro.

Ejemplo (Toro)**.** La superficie tórica $T \subset \mathbb{R}^3$ generada al girar la circunferencia $(x-2)^2 + z^2 = 1$ alrededor del eje OZ admite las ecuaciones paramétricas

$$x = (2+\cos\theta)\cos\phi, \quad y = (2+\cos\theta)\operatorname{sen}\phi, \quad z = \operatorname{sen}\theta, \qquad 0 \le \theta, \phi \le 2\pi.$$

Con $X = [0,1] \times [0,1]$ y

$$f(t,s) = \big((2+\cos 2\pi t)\cos 2\pi s,\ (2+\cos 2\pi t)\operatorname{sen} 2\pi s,\ \operatorname{sen} 2\pi t\big),$$

que es continua y sobreyectiva sobre el compacto Hausdorff T, la relación inducida identifica los lados opuestos del cuadrado dos a dos, en el mismo sentido. La razón es que f solo depende de t y de s a través de $\cos 2\pi t$, $\operatorname{sen} 2\pi t$, $\cos 2\pi s$ y $\operatorname{sen} 2\pi s$, y esas cuatro funciones no distinguen 0 de 1: el radio $\sqrt{x^2+y^2} = 2 + \cos 2\pi t > 0$ y la altura z recuperan el seno y el coseno de $2\pi t$; al dividir (x,y) por ese radio se recuperan los de $2\pi s$. Por eso no se identifican otros puntos. El cuadrado se enrolla primero en un cilindro (por el parámetro s) y después el cilindro se cierra sobre sí mismo (por el parámetro t). Luego el toro es el cuadrado con los lados opuestos identificados.

Ejemplo (Banda de Möbius)**.** Se parte de la circunferencia $x = 2\cos\theta$, $y = 2\operatorname{sen}\theta$, $z = 0$ y se considera el segmento V_θ centrado en el punto de ángulo θ, de longitud 2, girado un ángulo $\theta/2$ desde la posición vertical. La unión $M = \bigcup_{0\le\theta\le 2\pi} V_\theta$ es la **banda de Möbius**, de ecuaciones

$$x = \cos\theta\Big(2 + \lambda \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\Big), \quad y = \operatorname{sen}\theta\Big(2 + \lambda \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\Big), \quad z = \lambda\cos\frac{\theta}{2},$$

con $0 \le \theta \le 2\pi$, $|\lambda| \le 1$. Tomando sobre el cuadrado

$$f(t,s) = \big((2+(2s-1)\operatorname{sen}\pi t)\cos 2\pi t,\ (2+(2s-1)\operatorname{sen}\pi t)\operatorname{sen} 2\pi t,\ (2s-1)\cos\pi t\big),$$

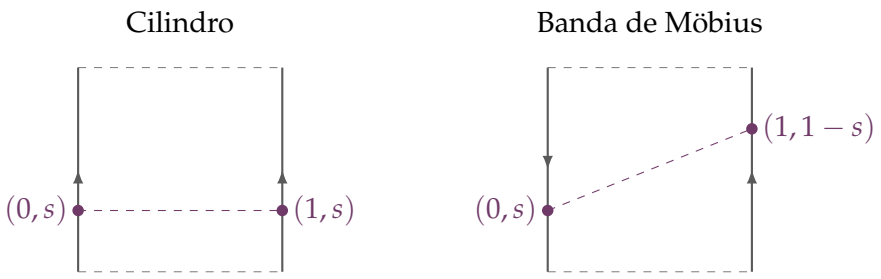
la relación inducida identifica $t = 0$ con $t = 1$ pero **invirtiendo** la segunda coordenada: $(0,s) \sim (1, 1-s)$.

La cuenta que lo comprueba cabe en dos líneas y conviene hacerla, porque es donde se ve aparecer la media vuelta. En $t = 0$ el factor $\operatorname{sen} \pi t$ vale 0 y $\cos \pi t$ vale 1, luego $f(0, s) = (2,\ 0,\ 2s - 1)$. En $t = 1$ ocurre lo mismo con el coseno cambiado de signo: $f(1, s') = (2,\ 0,\ -(2s' - 1))$. Los dos puntos coinciden exactamente cuando $2s - 1 = -(2s' - 1)$, es decir, cuando $s' = 1 - s$. El borde de llegada se pega al de salida boca abajo. Tampoco hay otros solapamientos: el radio horizontal es al menos 1, de modo que el punto imagen determina t módulo 1; fijado t, las componentes radial y vertical determinan $2s - 1$. Así las fibras son exactamente las clases indicadas, y compacto-Hausdorff da el modelo de la banda.

Observación (Un descuido del material de partida)**.** El material de origen escribe la unión como $M = \bigcup_{0 \le \theta \le \pi} V_\theta$ y, dos líneas más abajo, da las ecuaciones paramétricas con $0 \le \theta \le 2\pi$. Las dos cosas no pueden ser: con $\theta \in [0, \pi]$ los segmentos solo barren media circunferencia y lo que se obtiene es un rectángulo torcido, sin ninguna identificación y por tanto sin media vuelta. El recorrido bueno es el segundo, $\theta \in [0, 2\pi]$, y es el que se ha escrito arriba: al llegar a $\theta = 2\pi$ el segmento vuelve a ser el vertical de partida, pero con los dos extremos intercambiados, que es justo lo que produce la banda.

LA IDEA: LA MEDIA VUELTA LO CAMBIA TODO

Los tres ejemplos anteriores se diferencian en un detalle mínimo de la relación y en todo lo demás. En el cilindro se identifica $(0, s)$ con $(1, s)$; en la banda de Möbius, $(0, s)$ con $(1, 1 - s)$.
Ese $1 - s$ es la media vuelta, y es la responsable de que la banda tenga una sola cara, un solo borde y no sea orientable. Cuando en los capítulos siguientes se escriban los pegados con letras, la diferencia entre $a \cdots a^{-1}$ y $a \cdots a$ será exactamente esta.



Los dos pegados del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, con el mismo punto $(0, s)$ del lado izquierdo y su pareja en el derecho. En la banda, el lado de llegada se recorre en sentido contrario: la flecha de la izquierda baja y la de la derecha sube.

Definición. Dados dos espacios disjuntos X e Y y puntos $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, se considera sobre $X \sqcup Y$ la relación que identifica x_0 con y_0 y deja lo demás fijo. El cociente se llama **unión por un punto** o **wedge** y se denota $X \vee Y$.

Ejemplo. $S^1 \vee S^1$ es la figura del ocho, dos circunferencias pegadas por un punto. Aparecerá constantemente: su grupo fundamental es el grupo libre con dos generadores y es el ejemplo básico de grupo fundamental no abeliano.

Ejemplo. En $\mathbb{R}$ se define $x \sim x' \iff x - x' = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Entonces $\mathbb{R}/\sim \cong S^1$, mediante $f(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$: dos números reales van al mismo punto de la circunferencia exactamente cuando se diferencian en un número entero de vueltas, que es lo que dice la relación.

Merece la pena fijarse en que este ejemplo **no** se puede cerrar con el criterio compacto-Hausdorff, porque $\mathbb{R}$ no es compacto: es justamente el caso que el criterio deja fuera. Lo que se usa aquí es la proposición general de más arriba, según la cual $\mathbb{R}/\sim$ es homeomorfo a S^1 *con su topología final* $\mathcal{T}_f$; y esa topología final resulta ser la euclídea porque f manda intervalos abiertos en arcos abiertos, de modo que un subconjunto de S^1 cuya antiimagen sea abierta es él mismo unión de arcos abiertos. Conviene retenerlo: en cuanto el espacio de partida deja de ser compacto, hace falta otra justificación; aquí sirve que la aplicación sea abierta.

Observación (Notación)**.** Si $A \subseteq X$ y R es la relación $x\,R\,y \iff x = y$ o bien $x, y \in A$ — es decir, «aplastar A a un punto» —, se suele escribir X/A en lugar de X/R. Es la notación más habitual en los enunciados.

Qué se ha ganado. La pregunta del principio tiene respuesta. «Pegar» es tomar el cociente por una relación de equivalencia, y no hace falta construir nada en $\mathbb{R}^3$: el resultado es el conjunto de las clases. Los abiertos los decide la regla «hacia atrás», según la cual es abierto lo que, subido al espacio de partida, es abierto. Con eso llegan dos herramientas que se usarán sin parar: la propiedad universal, para definir aplicaciones continuas desde un cociente, y el criterio compacto-Hausdorff, para reconocer un cociente como un espacio conocido. La botella de Klein, que no cabe en $\mathbb{R}^3$, queda descrita por su relación sin necesidad de ningún objeto que señalar. Queda por ver qué pegados dan espacios nuevos, y las tres secciones siguientes presentan los más usados: aplastar las tapas de un cilindro, identificar las direcciones de una recta y leer palabras.

3.5 Suspensión de espacios

LA PREGUNTA: UNA OPERACIÓN QUE SUBA UNA DIMENSIÓN

Multiplicar un segmento por un intervalo da un cuadrado; multiplicar una circunferencia por un intervalo da un cilindro. Se querría una que de la circunferencia saque la esfera, de la esfera la esfera de dimensión tres, y así indefinidamente. ¿Cuál es esa operación, y por qué tiene que ser un cociente en vez de bastar con multiplicar por un intervalo?

La respuesta corta a la pregunta es que multiplicar por un intervalo sube la dimensión pero no cierra nada: $S^1 \times I$ es un cilindro, que sigue teniendo un agujero y dos bordes, y no se parece a la esfera. Lo que hace falta es multiplicar *y después pegar*; la topología cociente permite hacerlo de forma precisa. Antes hay que decir qué topología lleva el producto.

Definición. La **topología producto** sobre $X \times Y$ es

$$\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2 = \{\emptyset\} \cup \{H \subseteq X \times Y : \ \forall (x,y) \in H \ \exists U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2 \text{ con } (x,y) \in U \times V \subseteq H\}.$$

Leída en palabras, la condición dice: *un conjunto es abierto en el producto cuando alrededor de cada uno de sus puntos cabe un rectángulo abierto entero*, con los lados abiertos en cada factor. Es la misma frase que define los abiertos de $\mathbb{R}^2$ con bolas, cambiando «bola» por «rectángulo»; y de hecho, si $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ son las topologías euclídeas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, entonces $\mathcal{T} * \mathcal{T}'$ es la topología euclídea de $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. La comprobación es la de siempre y cabe en dos frases, porque todo se reduce a que bolas y rectángulos se encajan unos en otros. Si H es abierto para la

euclídea y $(x,y) \in H$, hay una bola $B((x,y),\varepsilon) \subseteq H$, y dentro de ella cabe el rectángulo $B(x,\varepsilon/2) \times B(y,\varepsilon/2)$, luego H es abierto en el producto. Y al revés, si dentro de H cabe un rectángulo $U \times V$ alrededor de (x,y), tómense radios r y s con $B(x,r) \subseteq U$ y $B(y,s) \subseteq V$: la bola $B((x,y), \text{mín}\{r,s\})$ queda dentro de $B(x,r) \times B(y,s) \subseteq U \times V \subseteq H$, y H es abierto para la euclídea.

Definición. Se llama **cilindro** de un espacio X a $X \times I$ con la topología producto, siendo I un intervalo. Para el cono y la suspensión tomaremos $I = [0,1]$.

Definición. El **cono** de X, denotado CX, es el cociente de $X \times I$ por la relación

$$(x,t)\, R\, (x',t') \iff \begin{cases} t = t' = 1, \text{ o bien} \\ (x,t) = (x',t'). \end{cases}$$

Es decir, se aplasta a un punto la tapa superior del cilindro.

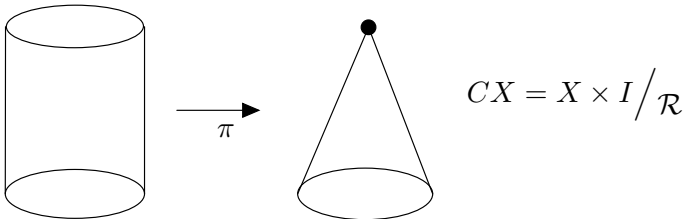


Figura 3.1: El cono colapsa una sola tapa del cilindro en un punto. Esquema original para visualizar el cociente, representado con $X = S^1$ (apuntes de topología, p. 13).

La relación hay que leerla despacio, porque toda la construcción está en el primer renglón: en el nivel $t = 1$, y solo ahí, *todos* los puntos son equivalentes entre sí, sea cual sea x; en cualquier otro nivel no se identifica nada. La tapa de arriba se recoge en un punto y el resto del cilindro se queda como estaba.

Ejemplo. $CS^1 \cong B^2$, el disco cerrado. Se toma $f : S^1 \times I \to B^2$ dada por $f(x,t) = (1-t)x$, que es continua y sobreyectiva, y cuya relación inducida es exactamente R:

$$(1-t)x = (1-t')x' \iff \begin{cases} t = t' = 1, \text{ o bien} \\ x = x',\ t = t'. \end{cases}$$

La aplicación es «encoger la circunferencia hacia el centro»: el factor $1-t$ es el radio, que empieza valiendo 1 y va bajando hasta 0. La equivalencia de la derecha sale de mirar primero los módulos, que dan $1-t = 1-t'$, y con $t = t'$ ya solo puede ser $x = x'$ — salvo cuando el radio se anula, que es cuando todo cae en el origen y es exactamente el caso $t = t' = 1$. Como $S^1 \times I$ es compacto y B^2 es Hausdorff, el criterio cierra el argumento.

Definición. La **suspensión** de X, denotada ΣX, es el cociente de $X \times I$ por la relación que aplasta a un punto la tapa superior y, por separado, a otro punto la tapa inferior:

$$(x,t)\, R\, (x',t') \iff t = t' = 1, \text{ o } t = t' = 0, \text{ o } (x,t) = (x',t') \text{ con } t,t' \neq 0,1.$$

Los dos aplastamientos son independientes: se obtienen *dos* puntos nuevos, uno arriba y otro abajo, y no uno solo. Si se identificaran entre sí el resultado sería otro espacio distinto.

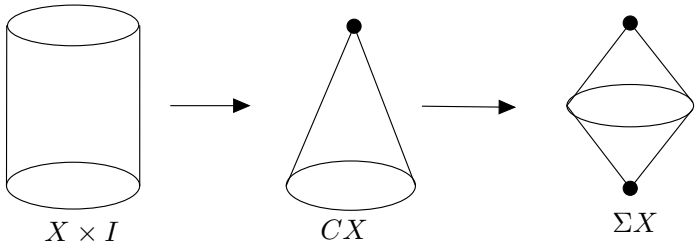
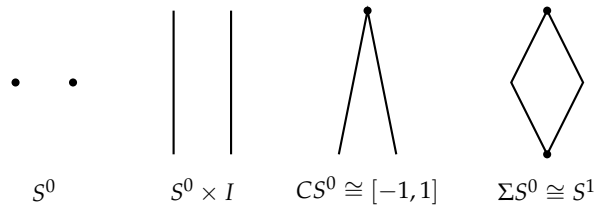


Figura 3.2: Construcción de la suspensión en dos etapas: formar el cono y colapsar su base en un segundo punto. Para $X = S^1$, la superficie lateral del cono doble es homeomorfa a S^2 (original, p. 13).

Un caso a mano: la dimensión cero. Las dos construcciones se ven enteras en el espacio más pequeño que no es un punto, $S^0 = \{-1, 1\}$, la «esfera» de dimensión cero, que son dos puntos. El cilindro $S^0 \times I$ son dos segmentos sueltos. El cono aplasta sus dos extremos superiores en uno solo, y quedan dos segmentos unidos por arriba. La fórmula del cono, $(x, t) \mapsto (1 - t)x$, los lleva sobre $[0, 1]$ y $[-1, 0]$, pegados en el 0: CS^0 es un segmento, $B^1 = [-1, 1]$. La suspensión aplasta además los dos extremos inferiores en otro punto, y quedan dos segmentos unidos por arriba y por abajo. La fórmula del ejemplo siguiente, escrita para S^0, es

$$f(\pm 1, t) = \Big(\pm\sqrt{1 - (2t - 1)^2},\ 2t - 1\Big),$$

y manda cada segmento sobre una semicircunferencia, la derecha y la izquierda, con los extremos en los polos $(0, \pm 1)$: ΣS^0 es la circunferencia S^1.



Cono y suspensión de dos puntos. El punto negro de arriba es la tapa superior aplastada, y el de abajo, en la suspensión, la inferior.

El caso predice todo lo que sigue, porque es el primer peldaño de una escalera. Las fórmulas generales, $CS^n \cong B^{n+1}$ y $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$, empiezan con $n = 0$, y cada suspensión sube un escalón: de los dos puntos a la circunferencia, y de la circunferencia a la esfera.

Ejemplo. $\Sigma S^1 \cong S^2$. Se prueba igual que el cono, con

$$f(x_1, x_2, t) = \Big(\sqrt{1 - (2t - 1)^2}\, x_1,\ \sqrt{1 - (2t - 1)^2}\, x_2,\ 2t - 1\Big).$$

La fórmula es menos opaca de lo que parece. El cambio $t \mapsto 2t - 1$ lleva el intervalo $[0, 1]$ sobre $[-1, 1]$, y esa es la altura del punto en la esfera; el factor $\sqrt{1 - (2t - 1)^2}$ es entonces el radio del paralelo que está a esa altura, por el teorema de Pitágoras. Dicho de otro modo, f manda el nivel t del cilindro sobre el paralelo correspondiente de la esfera, y como en $t = 0$ y en $t = 1$ ese radio vale cero, los dos niveles extremos se aplastan solos en los dos polos, que es justo lo que pide la relación. Las fórmulas se generalizan a dimensiones arbitrarias:

$$CS^n \cong B^{n+1}, \qquad \Sigma S^n \cong S^{n+1}.$$

LA IDEA: EL CONO APLANA Y LA SUSPENSIÓN SUBE DE DIMENSIÓN

Las dos construcciones tienen imágenes muy claras y conviene fijarlas.
Para una circunferencia, el **cono** tiene la imagen habitual de una base unida a un vértice. La definición por cociente extiende esa idea a otros espacios, sin exigir que quepan en tres dimensiones. El cono de un espacio no vacío es *contráctil*, porque todo se puede deslizar hacia el vértice; eso se probará en el capítulo 5 y es la razón de que el cono aparezca tanto.
La **suspensión** es un cono doble: se junta por arriba y por abajo, como un diamante. Y sube la dimensión de las esferas en una unidad: $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$. Esa es su gracia y por eso la construcción tiene nombre propio.

Qué se ha ganado. La operación que pedía la pregunta es la suspensión. Tiene que ser un cociente porque el producto por un intervalo añade dos tapas, que son borde, y lo que cierra el espacio es aplastar cada tapa en un punto. Con una sola tapa aplastada sale el cono, que rellena: $CS^n \cong B^{n+1}$. Con las dos sale la suspensión, que sube la dimensión de las esferas, $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$, empezando por $\Sigma S^0 \cong S^1$. La topología producto que hace falta para plantearlo es la de los rectángulos abiertos, que en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ coincide con la euclídea.

3.6 Espacios proyectivos

LA PREGUNTA: GEOMETRÍA SIN EXCEPCIONES

Los pintores del Renacimiento descubrieron que las dos orillas paralelas de un camino, dibujadas en perspectiva, se cortan en un punto del horizonte: el punto de fuga. En el plano dos rectas se cortan en un punto salvo si son paralelas, y esa excepción estropea todos los enunciados de la geometría elemental; en el cuadro la excepción desaparece porque el horizonte añade los puntos que faltaban. Si en lugar de puntos se toman como objetos las direcciones, las paralelas comparten dirección y la excepción desaparece. ¿Qué espacio topológico resulta de tomar como puntos las direcciones de $\mathbb{R}^{n+1}$, y qué aspecto tiene ese espacio?

Definición. El **espacio proyectivo** $P^n\mathbb{R}$ es el conjunto de direcciones de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$P^n\mathbb{R} = \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right) / \sim, \qquad v \sim w \iff \exists \lambda \neq 0 \text{ con } v = \lambda w,$$

con la topología cociente de la proyección $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to P^n\mathbb{R}$.

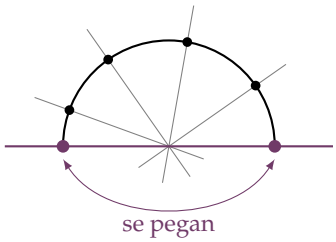
Ejemplo ($P^1\mathbb{R}$)**.** Se define $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to S^1$ por $f(x) = x/|x|$, y sobre S^1 la relación $y \, R \, y' \iff y = \pm y'$. Como

$$f(v) = \frac{v}{|v|} = \frac{\lambda w}{|\lambda w|} = \frac{\lambda}{|\lambda|}\frac{w}{|w|} = \pm f(w),$$

se tiene $v \sim w \iff f(v) \, R \, f(w)$, y de ahí un homeomorfismo $P^1\mathbb{R} \cong S^1/R$. Para justificar la continuidad en ambos sentidos, la normalización induce una aplicación entre cocientes y la inclusión $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ induce su inversa: normalizar no cambia la recta representada. Ambas son continuas por la propiedad universal.

Y $S^1/R \cong S^1$: basta tomar $h : S^1 \to S^1$ con $h(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$, cuya relación inducida identifica exactamente los puntos antípodas. Luego $P^1\mathbb{R} \cong S^1$: **la recta proyectiva real es una circunferencia**.

Una segunda lectura de $P^1\mathbb{R}$, en un dibujo. Cada punto de $P^1\mathbb{R}$ es una recta de $\mathbb{R}^2$ que pasa por el origen. Casi todas esas rectas cortan la semicircunferencia superior cerrada en un solo punto, y ese punto las representa sin ambigüedad. La excepción es la recta horizontal, que la corta en sus dos extremos, $(1,0)$ y $(-1,0)$. Así que $P^1\mathbb{R}$ es la semicircunferencia superior con los dos extremos pegados, que es una circunferencia: el resultado del ejemplo, ahora visto.



Cada recta por el origen deja un solo punto en la semicircunferencia superior, salvo la horizontal, que deja los dos extremos. Pegados esos dos, sale una circunferencia.

El dibujo se generaliza sin cambiar una palabra, y es el que conviene retener. En $\mathbb{R}^3$, cada recta por el origen corta la semiesfera superior cerrada en un solo punto, salvo las horizontales, que la cortan en dos puntos antípodas del ecuador. Por eso $P^2\mathbb{R}$ va a ser la semiesfera, que es un disco, con los antípodas del borde pegados.

Ejemplo ($P^2\mathbb{R}$)**.** El primer paso se repite palabra por palabra, y lo único que cambia es la dimensión: la aplicación $f(x) = x/|x|$, ahora de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ en S^2, sigue cumpliendo $f(v) = \pm f(w)$ exactamente cuando $v \sim w$, y de ahí $P^2\mathbb{R} \cong S^2/R$ con $x\,R\,y \iff x = \pm y$.

Lo que *no* se traslada es el segundo paso, y conviene decirlo porque es justo donde la analogía se rompe: en la circunferencia, el cociente por antípodas volvía a ser una circunferencia gracias a $e^{i\theta} \mapsto e^{2i\theta}$, que enrolla S^1 sobre sí misma dos veces. El cociente de la esfera por antípodas, en cambio, **no** es una esfera; la clasificación posterior permitirá distinguirlos. Necesitamos estudiar este nuevo espacio. Por eso hace falta otra descripción, y hay una mucho más útil: llamando E^+ a la semiesfera superior y R' a la relación $x\,R'\,y \iff x = y$ o bien $x, y \in S^1$ con $x = \pm y$, se tiene

$$P^2\mathbb{R} \cong S^2/R \cong E^+/R'.$$

La inclusión $k : E^+ \hookrightarrow S^2$ induce una aplicación continua entre los cocientes. Para construir la inversa hay que elegir el representante del hemisferio superior: un punto p de abajo se sustituye por $-p$, no por su reflejo en el ecuador. Si $q : E^+ \to E^+/R'$ es la proyección, definimos

$$H(p) = \begin{cases} q(p), & p \in E^+, \\ q(-p), & p \text{ en la semiesfera inferior.} \end{cases}$$

En el ecuador las dos expresiones coinciden, pues $q(p) = q(-p)$. Por el lema de pegado en los dos hemisferios cerrados, H es continua. Además, $H(p) = H(-p)$, de modo que induce una aplicación continua desde S^2/R. Esta y la inducida por k son inversas: cada par de antípodas queda representado arriba, con la identificación indicada en el borde.

Como E^+ es homeomorfa a la bola cerrada B^2, se obtiene la descripción que se usará siempre: **el plano proyectivo es un disco cerrado en cuyo borde se identifican los puntos antípodas.** En general

$$P^n\mathbb{R} \cong B^n / \sim, \qquad p \sim q \iff p = q \text{ o } p, q \in S^{n-1},\ p = -q,$$

y en el borde de la bola vuelve a aparecer $P^{n-1}\mathbb{R}$.

LA IDEA: POR QUÉ EL PLANO PROYECTIVO ES TAN ESCURRIDIZO

El plano proyectivo es la superficie que más cuesta imaginar, y hay una razón precisa: **no cabe en** $\mathbb{R}^3$. Cualquier intento de dibujarlo en el espacio tiene que cortarse a sí mismo.
Por eso conviene no intentar «verlo» y trabajar siempre con uno de sus dos modelos: el disco con el borde antípoda-identificado, o la esfera con los antípodas identificados. Los dos son manejables y los dos se usan continuamente.
Merece la pena registrar también que $P^2\mathbb{R}$ sí cabe en $\mathbb{R}^4$, lo que se comprueba con una aplicación explícita indicada entre los problemas de este capítulo.

Qué se ha ganado. El espacio de las direcciones de $\mathbb{R}^{n+1}$ es el proyectivo $P^n\mathbb{R}$, un cociente en el que cada recta por el origen es un punto. Tiene dos modelos de trabajo: la esfera con los antípodas pegados y la bola con los antípodas del borde pegados. En dimensión uno sale una circunferencia. En dimensión dos sale una superficie compacta que no cabe en $\mathbb{R}^3$, y esa es la respuesta a la pregunta de qué aspecto tiene. En el modelo del disco, los puntos del borde son las direcciones horizontales, las que el pintor sitúa en el horizonte. Cada una se pega con su antípoda porque una dirección no distingue hacia delante de hacia atrás.

3.7 Modelos topológicos

LA PREGUNTA: UNA SUPERFICIE DESCRITA CON UN DIBUJO PLANO

La botella de Klein no cabe en $\mathbb{R}^3$ y, sin embargo, se describe por completo con un cuadrado y cuatro flechas dibujadas en sus lados: la instrucción es finita y cabe en un renglón. ¿Basta con eso para determinar la superficie sin ambigüedad, y pueden dos descripciones que se ven distintas referirse al mismo objeto?

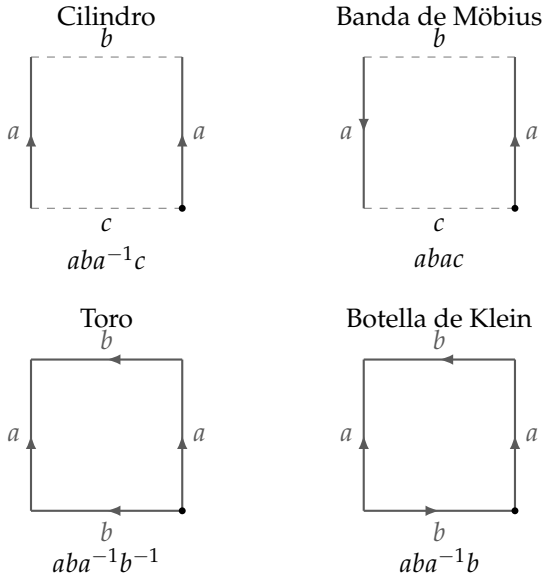
Antes de la clasificación de superficies conviene familiarizarse con los modelos que se usan para representarlas. Un modelo es una especie de «instrucciones» sobre cómo se construye la superficie, y resulta especialmente importante cuando la superficie no puede representarse en tres dimensiones.

Un **modelo** es un polígono con sus lados etiquetados por letras y flechas. Cada letra de pegado aparece exactamente dos veces, y ambas apariciones se pegan respetando las flechas. Para modelos con borde también se permiten lados libres, sin pareja. Recorriendo el borde en un sentido fijo se obtiene una **palabra**, en la que una letra a indica que los puntos del lado aparecen en el sentido del giro y a^{-1} que aparecen en el opuesto.

Ejemplo. Estos son los modelos básicos. Salvo el dígono aa^{-1} de la esfera, se presentan sobre

cuadrados; en los dos primeros, b y c son lados libres:

Cilindro:	$aba^{-1}c$ (solo se pegan dos lados)
Banda de Möbius:	$abac$ (dos lados pegados en el mismo sentido)
Toro:	$aba^{-1}b^{-1}$
Botella de Klein:	$aba^{-1}b$
Plano proyectivo:	$abab$
Esfera:	aa^{-1} o $abb^{-1}a^{-1}$

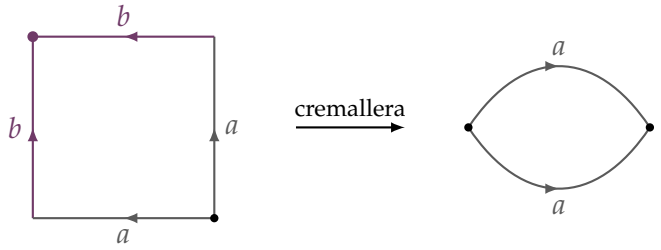


Las flechas indican cómo emparejar los lados con la misma letra; los lados punteados quedan libres. Para leer cada palabra, empieza en el punto negro, sube por el lado derecho y continúa en sentido antihorario. Escribe la letra sin exponente si sigues su flecha, y con -1 si vas contra ella. En los lados libres b y c no se hace ningún pegado.

Observación (Distintos modelos pueden representar el mismo objeto)**.** Es el hecho central de todo lo que viene después. Dos palabras diferentes pueden dar espacios homeomorfos, y el teorema de clasificación consiste precisamente en dar un procedimiento para decidirlo: normalizar la palabra hasta llevarla a una de dos formas canónicas.

Por eso el problema típico consiste en dar una palabra larga y pedir que se clasifique: lo que se pone a prueba es el manejo de ese procedimiento.

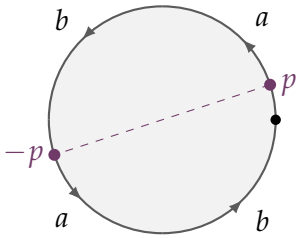
Un caso a mano: dos palabras para la esfera. La tabla da dos palabras para la esfera, aa^{-1} y $abb^{-1}a^{-1}$, y conviene ver por qué son la misma. En el dígono aa^{-1}, los dos lados van, según sus flechas, del vértice de la izquierda al de la derecha, uno por arriba y otro por abajo. Pegarlos es cerrar un monedero con cremallera: cada punto del arco de arriba se junta con el que tiene debajo, el borde desaparece y queda una bolsa cerrada, que es una esfera. En el cuadrado $abb^{-1}a^{-1}$, las dos b son lados seguidos y sus flechas apuntan al vértice que comparten. Se pueden cerrar también como una cremallera, empezando por ese vértice: el punto de un lado a distancia d del vértice común se junta con el del otro lado a la misma distancia. Las dos b quedan cosidas en una costura interior, los otros dos extremos de las b se juntan, y lo que queda del borde son dos lados, a y a^{-1}: el dígono de antes.



Las dos b del cuadrado apuntan a su vértice común (en color) y se cierran como una cremallera. Queda el dígono aa^{-1}, cuyos dos lados van del vértice de la izquierda al de la derecha.

Este es el primer movimiento del procedimiento de clasificación del capítulo 4: una pareja xx^{-1} de letras seguidas se cierra como una cremallera y desaparece de la palabra, siempre que queden otras letras. La palabra aa^{-1} ya no se reduce más: es la esfera.

Un caso a mano: de dónde sale *abab*. El modelo del disco del plano proyectivo, con los antípodas del borde pegados, se convierte en palabra partiendo el borde. Se corta la circunferencia en cuatro arcos iguales, por los ángulos 0, $\pi/2$, π y $3\pi/2$. El giro de media vuelta $\theta \mapsto \theta + \pi$, que es lo que lleva cada punto a su antípoda, manda el primer arco sobre el tercero y el segundo sobre el cuarto, y conserva el sentido de giro. Recorriendo el borde en sentido antihorario, los dos arcos de cada pareja se recorren en el mismo sentido que su flecha, y la palabra es *abab*, la de la tabla. Con solo dos arcos, las dos mitades de la circunferencia, sale *aa*, que es otro modelo del plano proyectivo. Para pasar al cuadrado basta deformar el disco llevando los cuatro arcos a los cuatro lados.



El borde del disco, en cuatro arcos. El antípoda $-p$ de un punto p del primer arco está en el tercero, en la misma posición relativa: por eso los dos llevan la misma letra y la misma flecha.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: DESCRIBIR LAS SUPERFICIES POR SU FORMA EN $\mathbb{R}^3$

La alternativa. Prescindir de palabras y polígonos y describir cada superficie como lo hace la primera mitad de este libro: por una parametrización o por una ecuación implícita en $\mathbb{R}^3$.
Su ventaja. Es concreta y se ve. Y permite calcular: sobre una superficie dada por ecuaciones se miden áreas, curvaturas y geodésicas, cosa que sobre una palabra no.
Qué la hunde. Que deja fuera la mitad del teorema de clasificación. El plano proyectivo y la botella de Klein son superficies compactas perfectamente legítimas — son cocientes de un cuadrado, igual que el toro — y no admiten ninguna descripción en $\mathbb{R}^3$ sin autointersecciones. Una teoría que solo hable de superficies de $\mathbb{R}^3$ no puede ni enunciar la clasificación, porque le faltan precisamente los objetos de tipo II. La palabra, en cambio, es finita, no necesita espacio ambiente y se manipula con reglas de reescritura. Las superficies compactas y sin borde de $\mathbb{R}^3$ son orientables; la banda de Möbius sí cabe porque tiene borde.

Qué se ha ganado. Las dos preguntas del principio tienen respuesta. Un polígono con los lados emparejados y orientados determina la superficie sin ambigüedad, porque es un cociente del polígono, y la palabra, que se lee recorriendo el borde, lo guarda todo en un renglón. Y dos descripciones distintas pueden dar el mismo objeto: aa^{-1} y $abb^{-1}a^{-1}$ son la esfera, y aa y $abab$ son el plano proyectivo. Decidir en general cuándo dos palabras dan la misma superficie es el teorema de clasificación del capítulo siguiente.

3.8 Problemas de la relación

La primera relación de problemas tiene veintidós ejercicios sobre espacios cociente, cono, suspensión y proyectivos, y varios de ellos vienen con solucionario. Se recorren aquí los que enseñan algo; los que repiten una técnica ya vista se citan al final indicando a cuál se parecen.

Ejercicio 3.1. *Las clases de la relación «estar unidos por un camino»*

En un espacio X se define la relación $x\,R\,y$ si existe un subespacio conexo por caminos $C \subseteq X$ con $x, y \in C$. ¿Cuáles son las clases de equivalencia?

Resolución. Es una relación de equivalencia. Reflexiva: $C = \{x\}$ sirve. Simétrica: el mismo C sirve en los dos órdenes. Transitiva: si $x, y \in C_1$ e $y, z \in C_2$ con C_1, C_2 conexos por caminos, entonces $C_1 \cup C_2$ es conexo por caminos, porque comparten el punto y y cualquier par de puntos se une pasando por él; y contiene a x y a z.

Las clases. La clase de x es el mayor subespacio conexo por caminos que contiene a x, es decir, **la componente conexa por caminos de** x.

En efecto, $[x]$ contiene a todo conexo por caminos que contenga a x, por definición de la relación. Y $[x]$ es conexo por caminos: dados $y, z \in [x]$, existen conexos por caminos $C_y \ni x, y$ y $C_z \ni x, z$, y $C_y \cup C_z$ es conexo por caminos y contiene a y y z. ■

Ejercicio 3.2. *Cuándo la proyección al cociente es abierta o cerrada*

Probar que si R es una relación de equivalencia sobre un espacio X, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) la aplicación $\pi : X \to X/R$ es cerrada (respectivamente, abierta);
(b) para todo cerrado (abierto) $A \subseteq X$, la unión de todas las clases de equivalencia que cortan a A es cerrado (abierto) de X;
(c) para todo abierto (cerrado) $A \subseteq X$, la unión de todas las clases de equivalencia contenidas en A es abierto (cerrado) de X.

Resolución. La idea. Las tres condiciones hablan del mismo conjunto visto de tres maneras: la imagen de A en el cociente, subida otra vez a X. Todo se reduce a escribir esa subida.

La identidad clave. La imagen $\pi(A) = \{[x] : x \in A\}$ es un conjunto de puntos del cociente. Al volver a X, cada uno de esos puntos da una clase entera:

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{x \in A} \pi^{-1}(\{[x]\}) = \bigcup_{x \in A} [x].$$

Es precisamente **la unión de todas las clases que cortan a** A, llamada saturación de A. Con esa lectura, (a) y (b) dicen casi lo mismo.

(a) ⇒ (b). Sea A cerrado. Por hipótesis $\pi(A)$ es cerrado, y entonces $\pi^{-1}(\pi(A))$ también lo es, por definición de la topología cociente. Y ese conjunto es la unión de las clases que cortan a A.

(b) ⇒ (a). Sea A cerrado. Se sabe que $\pi(A)$ es cerrado si y solo si $\pi^{-1}(\pi(A))$ lo es; y ese conjunto es cerrado por hipótesis.

(b) ⇒ (c). Sea ahora A abierto. Como $X \setminus A$ es cerrado, (b) dice que la unión de todas las clases que cortan a $X \setminus A$ es cerrada. Su complementario, que por tanto es abierto, es la unión de todas las clases que *no* cortan a $X \setminus A$, es decir, las clases contenidas en A.

(c) ⇒ (b). Es el mismo paso al revés. Si A es cerrado, $X \setminus A$ es abierto, y (c) dice que la unión de las clases contenidas en $X \setminus A$ es abierta. Su complementario es la unión de las clases que no caben en $X \setminus A$, es decir, de las que cortan a A, y es cerrado. La versión entre paréntesis, con π abierta, se prueba con las mismas líneas intercambiando «abierto» y «cerrado». ■

QUÉ DEJA. La identidad $\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{x \in A} [x]$, que se llama la *saturación* de A. Y una regla de trabajo: *para decidir si algo es abierto en el cociente, se sube a X y se mira su saturación*.

Ejercicio 3.3. *Aplastar un compacto conserva la separación*

Sea X un espacio T_2 y $K \subseteq X$ compacto. Probar que X/K es un espacio T_2.

Resolución. Qué está pasando. Aplastar un conjunto a un punto puede estropear la separación — el cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ no es T_2 —, pero si lo que se aplasta es compacto y el espacio es T_2, no pasa nada. La compacidad es exactamente lo que permite pasar de infinitos pares de abiertos a uno solo.

Si $K = \emptyset$, el cociente es X y no hay nada que probar. Para $K \neq \emptyset$, se denota $[K]$ la clase de K en el cociente; el resto de clases son unitarias y su único elemento pertenece a $X \setminus K$.

Caso 1: dos clases unitarias $[x]$, $[y]$ con $x, y \notin K$. Como X es T_2, existen abiertos disjuntos $U \ni x$ y $V \ni y$. Como K es compacto y X es T_2, K es cerrado, luego $X \setminus K$ es abierto y

$$A = U \cap (X \setminus K), \qquad B = V \cap (X \setminus K)$$

siguen siendo abiertos disjuntos que separan x e y. Y ahora viene el paso que hay que cuidar: como A y B son disjuntos con K, todas sus clases son unitarias y por tanto $A = \pi^{-1}(\pi(A))$ y $B = \pi^{-1}(\pi(B))$; es decir, **son saturados**. Luego $\pi(A)$ y $\pi(B)$ son abiertos del cociente, contienen respectivamente a $[x]$ e $[y]$ y son disjuntos.

Caso 2: separar $[K]$ de $[x]$ con $x \notin K$. Para cada $y \in K$, la propiedad T_2 da abiertos $U_y \ni x$ y $V_y \ni y$ disjuntos. Los V_y recubren K, que es compacto, luego se extrae un subrecubrimiento finito $\{V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}\}$. Se toman

$$U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}, \qquad V = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}.$$

U es abierto por ser intersección **finita**, contiene a x y es disjunto de V, que es abierto y contiene a K. Los dos son saturados — U no corta a K y V lo contiene entero —, luego $\pi(U)$ y $\pi(V)$ son abiertos disjuntos del cociente que separan $[x]$ y $[K]$. ■

Observación (Dónde se usa la compacidad, exactamente)**.** En el primer caso se usa que un compacto de un espacio Hausdorff es cerrado. En el segundo permite quedarse con una intersección *finita* de los U_y: una intersección infinita de abiertos no tiene por qué ser abierta.

Dónde se falla. En olvidar que los abiertos del cociente vienen de abiertos *saturados*. Con $X = \mathbb{R}$ y $K = [0,1]$, el intervalo $U = (-1, \frac{1}{2})$ es abierto y contiene al 0, pero su imagen no es abierta en $\mathbb{R}/K$: la preimagen de $\pi(U)$ es $U \cup K = (-1,1]$, que no es abierto. Por eso en el caso 1 se recortan U y V fuera de K, y en el caso 2 se exige que V contenga a K entero. Son las dos maneras de que un abierto sea saturado: no tocar K o contenerlo.

Ejercicio 3.4. *Tres cocientes que parecen iguales y no lo son*

Indíquese cuáles de los siguientes espacios son homeomorfos entre sí:

(a) $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$;

(b) el subespacio $K \subseteq \mathbb{R}^2$ formado por la unión de las circunferencias C_k con centro $(\pm 1/k, 0)$ y radio $1/k$, con $k \geq 1$;

(c) $[-1,1]/A$, con $A = \{\pm 1/k \,;\, k \geq 1\}$.

Resolución. Aquí $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ significa **aplastar todos los enteros a un solo punto**, dejando los demás puntos separados. No es el cociente por traslaciones enteras, que identifica x con $x + n$ y da una circunferencia.

Qué está pasando. Los tres espacios recuerdan a un ramo infinito de circunferencias, pero **los tres son distintos**. Para distinguirlos bastan dos invariantes: compacidad y separación.

Los espacios (b) y (c) son compactos.

Para K: es acotado, pues todos sus puntos tienen norma a lo sumo 2. También es cerrado. Si $x_j \in K$ converge a x, elige una circunferencia que contenga a cada x_j. Si sus índices k_j son acotados, una subsucesión está en una misma circunferencia cerrada, y su límite x pertenece a ella. Si no son acotados, hay una subsucesión con $k_j \to \infty$; como $|x_j| \leq 2/k_j$, su límite es $x = 0 \in K$. Por Heine–Borel, K es compacto.

Para $[-1,1]/A$: es imagen continua del compacto $[-1,1]$, luego compacto.

El espacio (a) no es compacto. Se exhibe un recubrimiento sin subrecubrimiento finito. Se consideran los abiertos de $\mathbb{R}$

$$B = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k - \tfrac{1}{2},\, k + \tfrac{1}{2}\right), \qquad B_n = \left(\tfrac{n}{2} - \tfrac{1}{3},\, \tfrac{n}{2} + \tfrac{1}{3}\right), \quad n \in 2\mathbb{Z} + 1.$$

Como $\pi^{-1}(\pi(B)) = B$ y $\pi^{-1}(\pi(B_n)) = B_n$ — los dos son saturados, porque $\mathbb{Z}$ es una sola clase y B la contiene entera mientras que B_n no la corta cuando n es impar —, sus imágenes son abiertas del cociente. Recubren $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Y para todo entero impar n, la clase $[n/2]$ solo está contenida en el abierto $\pi(B_n)$. Luego no se puede extraer subrecubrimiento finito.

Por tanto $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ **no es homeomorfo a ninguno de los otros dos**.

Y (b) y (c) tampoco son homeomorfos. K es un subespacio del plano, luego es T_2. Se ve que $[-1,1]/A$ no lo es: las clases $[0]$ y $[A]$ no se pueden separar.

En efecto, supóngase por reducción al absurdo que existe un entorno abierto U de $[0]$ que no contiene a $[A]$. Como U es abierto del cociente, $\pi^{-1}(U)$ es un entorno abierto de 0 en $[-1,1]$, y por tanto contiene algún $1/k$ con k suficientemente grande. Esto implica $\pi(1/k) \in U$; pero $1/k \in A$, luego $\pi(1/k) = [A] \in U$, contra lo supuesto.

Conclusión: los tres espacios son dos a dos no homeomorfos. ■

La idea: por qué el pendiente hawaiano no es un ramo de circunferencias

El espacio K del apartado (b) es el llamado *pendiente hawaiano*: infinitas circunferencias tangentes en un punto, con radios que tienden a cero. Es compacto y T_2.
El espacio $[-1,1]/A$ parece lo mismo — también «cierra» infinitos segmentos en un punto — pero al aplastar *todos* los puntos $\pm 1/k$ a un único punto se destruye la separación: ese punto está infinitamente cerca de 0 sin ser 0.
En $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, el recubrimiento construido obliga a elegir un abierto distinto para cada semientero. Esa es la razón de la falta de compacidad; no basta con que el espacio de partida no sea compacto (por ejemplo, $\mathbb{R}/\mathbb{R}$ es un punto).
La moraleja general, que vale para todos los ejercicios de cocientes: **el dibujo engaña**. Hay que decidir con invariantes: compacidad, separación, conexión, puntos de corte.

Dónde se falla. En el recubrimiento de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. La tentación es usar las imágenes de los intervalos $(k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})$, una por entero, pero ninguna es abierta. La preimagen de $\pi\big((k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})\big)$ es ese intervalo más todos los demás enteros, que son puntos sueltos, y ese conjunto no es abierto. Por eso el abierto B junta de una vez entornos de todos los enteros: la clase $\mathbb{Z}$ tiene que estar entera dentro de un solo abierto saturado. La otra trampa es leer $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ como el cociente por traslaciones enteras, que da una circunferencia y cambia el problema.

Ejercicio 3.5. *Un cociente que no es Hausdorff*

Probar que $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ no es T_2 y, por tanto, no puede ser metrizable.

Resolución. La relación es $x\,R\,y \iff x = y$ o bien $x, y \in \mathbb{Q}$; es decir, se aplastan todos los racionales a un punto y se dejan los irracionales sueltos.

La idea. El punto $[\mathbb{Q}]$ está pegado a todo. Cualquier abierto no vacío del cociente lo contiene, porque su preimagen es un abierto no vacío de $\mathbb{R}$ y contiene algún racional. Dos abiertos no vacíos comparten, pues, ese punto, y no pueden ser disjuntos.

Se razona por reducción al absurdo. Sean $[x], [y] \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ separados por abiertos disjuntos $U \ni [x]$ y $V \ni [y]$. Por definición de la topología cociente, $\pi^{-1}(U)$ y $\pi^{-1}(V)$ son abiertos de $\mathbb{R}$, y son no vacíos. Además, de $U \cap V = \emptyset$ se sigue $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) = \pi^{-1}(U \cap V) = \emptyset$.

Ahora se usa la densidad de $\mathbb{Q}$: todo abierto no vacío de $\mathbb{R}$ contiene algún racional. Luego existe $q \in \mathbb{Q} \cap \pi^{-1}(U)$, y por tanto $[q] \in U$; y existe $q' \in \mathbb{Q} \cap \pi^{-1}(V)$, con $[q'] \in V$. Pero $[q] = [q']$, porque todos los racionales son la misma clase. Luego $[q] \in U \cap V$, contra la disjunción.

Como todo espacio metrizable es T_2, $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ no es metrizable. ■

Qué hemos aprendido. El fenómeno es general y dice cuándo aplastar un conjunto rompe la separación. Sea $A \subseteq X$ no cerrado y sea x un punto de su adherencia que no está en A. Todo abierto saturado que contiene a x corta a A, luego contiene a A entero, y su imagen contiene a $[A]$: las clases $[x]$ y $[A]$ no se separan en X/A. Por tanto, **para que X/A sea Hausdorff hace falta que A sea cerrado**, y en un espacio Hausdorff basta con que A sea compacto, por el ejercicio «Aplastar un compacto conserva la separación». $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ y el cociente $[-1,1]/A$ del ejercicio anterior son dos casos del mismo fallo. Ni $\mathbb{Q}$ ni $\{\pm 1/k\}$ son cerrados, y los puntos de su adherencia que quedan fuera, todos los irracionales en el primer caso y el 0 en el segundo, se quedan pegados a la clase aplastada.

Ejercicio 3.6. *Tres cocientes del plano, dibujados en el espacio*

Indíquense subespacios de $\mathbb{R}^3$ homeomorfos a los siguientes espacios cociente:
(a) $\mathbb{R}^2/D^2$, donde D^2 es la bola unidad cerrada;
(b) $\mathbb{R}^2/S^1$;
(c) $\mathbb{R}^2/(\mathbb{R}^2 \setminus B^2)$, donde B^2 es la bola abierta unidad.

Resolución. La idea. Los tres apartados siguen el mismo camino. Primero se adivina el modelo preguntando qué puntos sobreviven sin tocar y cuáles se juntan en uno. Después se fabrica una aplicación continua y sobreyectiva sobre el modelo cuyas fibras sean exactamente las clases. Y al final se comprueba que es una identificación: con compacto-Hausdorff si se puede y, si no, viendo que es cerrada.

(a) $\mathbb{R}^2/D^2 \cong \mathbb{R}^2$**.** Aplastar un disco cerrado a un punto no cambia el tipo topológico del plano: se puede «reabsorber» el disco desplazando radialmente el exterior. La aplicación explícita es

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \le 1, \\ \dfrac{|x|-1}{|x|}\, x & \text{si } |x| \ge 1, \end{cases}$$

que es continua — las dos expresiones coinciden en $|x| = 1$ —, sobreyectiva sobre $\mathbb{R}^2$, y cuya relación inducida es exactamente la del enunciado: $f(x) = f(y)$ con $x \neq y$ obliga a que los dos estén en D^2. Falta comprobar la topología: f es cerrada. Si F es cerrado y $f(x_j) \in f(F)$ converge, entonces $|f(x_j)| = \max(|x_j| - 1, 0)$ hace que (x_j) sea acotada. Una subsucesión converge a un punto $x \in F$, y su imagen es el límite buscado. Por tanto $f(F)$ es cerrado. Al ser continua, sobreyectiva y cerrada, f es una identificación y da el homeomorfismo anunciado.

(b) $\mathbb{R}^2/S^1$**: un plano con una esfera tangente.** Ahora se aplasta solo la circunferencia, no el disco que encierra. El disco interior, con todo su borde reducido a un punto, se convierte en una **esfera**; y el exterior, con su borde reducido al mismo punto, se convierte en un plano. El modelo es la unión del plano $z = 0$ y la esfera de radio 1 y centro $(0, 0, 1)$, que se tocan solo en el origen.

Para comprobar el pegado, escribe $r = |x|$ y, sobre el disco cerrado, define

$$S(x) = \big(2\sqrt{1-r^2}\, x_1,\ 2\sqrt{1-r^2}\, x_2,\ 2 - 2r^2\big).$$

Su imagen es esa esfera: $|S(x) - (0, 0, 1)| = 1$; la altura recorre $[0, 2]$, y cada paralelo se recorre entero. El borde va al origen, y en el interior la altura recupera r y las primeras coordenadas recuperan x. Ahora define

$$F(x) = \begin{cases} S(x), & r \le 1, \\ ((r-1)x_1/r, (r-1)x_2/r, 0), & r \ge 1. \end{cases}$$

Las expresiones coinciden en $r = 1$, de modo que F es continua y sobreyectiva sobre el modelo. Su única fibra no unitaria es la circunferencia aplastada. Es cerrada por el mismo argumento de sucesiones del apartado (a): una sucesión con imágenes convergentes tiene radios acotados, pues fuera del disco $|F(x)| = r - 1$. Por tanto induce el homeomorfismo.

(c) $\mathbb{R}^2/(\mathbb{R}^2 \setminus B^2) \cong S^2$**.** Aquí B^2 denota la bola *abierta*, como indica el enunciado. Usa $S(x)$ dentro del disco cerrado y el valor 0 en todo su exterior. La aplicación resultante es continua, sobreyectiva sobre la misma esfera y aplasta exactamente el conjunto indicado.

El cociente es compacto: todas sus clases tienen representante en el disco cerrado, así que es imagen continua de ese disco compacto. La biyección inducida hacia la esfera es continua por la propiedad universal; al ser el cociente compacto y la esfera Hausdorff, es un homeomorfismo. ■

Observación (La regla que unifica los tres)**.** En (a) se aplasta un disco entero y se obtiene de nuevo un plano. En (b), el interior del disco se conserva y solo se aplasta su borde: así aparece la esfera, unida al plano exterior por un punto. En (c) también desaparece el exterior, y queda solo la esfera. Lo decisivo es distinguir qué puntos se conservan y cuáles se identifican; las aplicaciones anteriores verifican la topología.

Dónde se falla. En dos sitios. (1) En confundir (a) con (b): aplastar el disco entero y aplastar solo su borde dan espacios distintos, un plano en el primer caso y un plano con una esfera pegada en el segundo. (2) En invocar compacto-Hausdorff en (a) y (b), donde el espacio de partida, $\mathbb{R}^2$, no es compacto; por eso allí se comprueba a mano que la aplicación es cerrada. En (c) el criterio sí sirve, pero aplicado al cociente, que es compacto porque todas sus clases tienen representante en el disco cerrado.

QUÉ DEJA. La construcción más utilizada de toda la asignatura: $B^n/S^{n-1} \cong S^n$. Y su lectura: una esfera es un disco al que se le ha cerrado el borde. Volverá en el capítulo 4 como la palabra aa^{-1} y en el capítulo 7 al calcular $\pi_1(S^2)$.

Ejercicio 3.7. *El cociente de las parábolas*

En $\mathbb{R}^2$ se define la relación $(x, y)\, R\, (u, v)$ si $y + x^2 = v + u^2$. ¿A qué subespacio euclídeo es homeomorfo $\mathbb{R}^2/R$?

Resolución. La idea. Cuando las clases son las curvas de nivel de una función continua f, el cociente es, salvo comprobar la topología, la imagen de f: cada clase se nombra por su valor. Lo que queda es ver que f es una identificación.

Las clases son parábolas. La condición $y + x^2 = v + u^2$ dice que los dos puntos están en la misma curva de nivel de $f(x, y) = y + x^2$. Esas curvas de nivel son las parábolas $y = c - x^2$, una por cada $c \in \mathbb{R}$, y cubren el plano sin cortarse.

El cociente es $\mathbb{R}$. Se toma $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y + x^2$, que es continua y sobreyectiva, y cuya relación inducida es exactamente R.

Falta comprobar que la topología final de f es la euclídea de $\mathbb{R}$, y aquí no se puede usar el criterio compacto-Hausdorff porque $\mathbb{R}^2$ no es compacto. Se usa en su lugar que f **es abierta**: la bola $B((x_0, y_0), \varepsilon)$ contiene el segmento vertical $(x_0, y_0 + t)$, $|t| < \varepsilon$, cuyas imágenes son $f(x_0, y_0) + t$. Así, su imagen contiene un intervalo abierto alrededor de la imagen del centro. Una aplicación continua, sobreyectiva y abierta es una identificación, luego

$$\mathbb{R}^2/R \cong \mathbb{R}.$$

■

Observación (Los dos criterios de identificación)**.** Conviene tener los dos, porque se usan los dos:

- **Compacto-Hausdorff**: f continua y sobreyectiva de un compacto en un Hausdorff es una identificación. Es el que se usa casi siempre.

- **Abierta o cerrada**: f continua, sobreyectiva y abierta — o cerrada — es una identificación. Es el que salva los casos no compactos.

Dónde se falla. En dar el cociente por identificado en cuanto las fibras de f son las clases. Eso solo da una biyección continua desde el cociente, y la de $[0, 2\pi)$ sobre S^1 muestra que su inversa puede no ser continua. Hace falta, además, uno de los dos criterios de la observación.

Ejercicio 3.8. *Hausdorff en el cociente y cerrado en el producto*

1. Probar que si X/R es T_2, entonces R es cerrado en $X \times X$.
2. Probar que si además $\pi : X \to X/R$ es abierta, entonces vale el recíproco: X/R es T_2 si y solo si R es cerrado en $X \times X$.
3. Deducir que el espacio proyectivo $P^2\mathbb{R}$ es un espacio T_2.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *R, como subconjunto de $X \times X$, es la preimagen de algo por la aplicación $\pi \times \pi$. ¿De qué?*
2. *Un espacio es T_2 si y solo si su diagonal es cerrada en el producto.*
3. *Para el recíproco, si $(x, y) \notin R$ y R es cerrado, hay un rectángulo abierto $U \times V$ disjunto de R.*

Resolución. 1. La observación decisiva es que

$$R = (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta), \qquad \Delta = \{([x], [x])\} \subseteq (X/R) \times (X/R),$$

porque $(x, y) \in R$ equivale a $[x] = [y]$. Si X/R es T_2, su diagonal Δ es cerrada; y $\pi \times \pi$ es continua, luego R es cerrado en $X \times X$. ■

2. Falta la implicación contraria bajo la hipótesis de que π sea abierta. Sea R cerrado y sean $[x] \neq [y]$ dos clases distintas, de modo que $(x, y) \notin R$. Como R es cerrado, su complementario es abierto en $X \times X$ y contiene a (x, y); por definición de la topología producto existen abiertos $U \ni x$ y $V \ni y$ con

$$(U \times V) \cap R = \emptyset.$$

Como π es abierta, $\pi(U)$ y $\pi(V)$ son abiertos del cociente, y contienen a $[x]$ e $[y]$ respectivamente. Y son disjuntos: si hubiera $[u] = [v]$ con $u \in U$ y $v \in V$, entonces $(u, v) \in R \cap (U \times V)$, que es vacío. ■

3. Se aplica lo anterior a $\pi : S^2 \to P^2\mathbb{R}$, con la relación $x\,R\,y \iff x = \pm y$.

π es abierta. Para $U \subseteq S^2$ abierto, su saturación es $\pi^{-1}(\pi(U)) = U \cup (-U)$, unión de dos abiertos, luego abierta; y por definición de la topología cociente eso significa que $\pi(U)$ es abierto.

R es cerrado. Se considera $g : S^2 \times S^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = |x - y| \cdot |x + y|$, que es continua. Entonces $R = g^{-1}(\{0\})$, porque $g(x, y) = 0$ equivale a $x = y$ o $x = -y$. Preimagen de un cerrado por una continua, luego cerrado.

Por el apartado 2, $P^2\mathbb{R}$ es T_2. ■

Ejercicio 3.9. *El cono y la suspensión de una esfera*

1. Probar que CS^{n-1} es homeomorfo a B^n para $n \geq 1$.
2. Probar que ΣS^{n-1} es homeomorfo a S^n, $n \geq 1$, usando la aplicación $f(x, t) = \left(\sqrt{1 - (2t-1)^2}\, x,\ 2t - 1\right)$.

3. Probar que CX y ΣX son conexos por caminos para todo espacio X.
4. Probar que S^2 es homeomorfo a $(S^1 \times S^1)/(S^1 \vee S^1)$.

Resolución. 1. Se toma $f : S^{n-1} \times I \to B^n$ dada por $f(x,t) = (1-t)x$. Es continua y sobreyectiva, y su relación inducida es

$$(1-t)x = (1-t')x' \iff \begin{cases} t = t' = 1, \text{ o bien} \\ x = x',\ t = t', \end{cases}$$

que es exactamente la relación del cono. Como $S^{n-1} \times I$ es compacto y B^n es Hausdorff, el criterio da el homeomorfismo. ■

2. Con la f del enunciado, la comprobación es la misma. Cuando $t = 0$ el primer factor se anula y queda el polo sur $(0, \dots, 0, -1)$, independientemente de x; cuando $t = 1$, el polo norte. En el resto, f es inyectiva. Esa es la relación de la suspensión, y otra vez compacto-Hausdorff. ■

3. Si $X = \emptyset$, ambos cocientes son vacíos y la condición de unir cualquier par de puntos es vacua. Supongamos $X \neq \emptyset$. En CX, todo punto $[x,t]$ se une al vértice $v = [x,1]$ por el camino $s \mapsto [x, (1-s)t + s]$, que es continuo. Luego CX es conexo por caminos.

En ΣX, todo punto se une igual al polo superior. Luego también. ■

4. En el modelo del toro como cuadrado con la palabra $aba^{-1}b^{-1}$, el subespacio $S^1 \vee S^1$ formado por las dos circunferencias generadoras es exactamente **la imagen del borde del cuadrado**. En efecto, tras las identificaciones, los cuatro lados dan dos circunferencias a y b, y los cuatro vértices se identifican en un solo punto, que es el punto de unión.

Por tanto

$$(S^1 \times S^1)/(S^1 \vee S^1)$$

es el cuadrado con *todo* su borde aplastado a un punto. Y el cuadrado es homeomorfo al disco B^2 llevando el borde en el borde, luego el cociente es $B^2/S^1 \cong S^2$ por el apartado del ejercicio anterior. ■

LA IDEA: EL TORO CON LAS ASAS CORTADAS

El último apartado tiene una imagen muy clara. Un toro se puede cortar por sus dos circunferencias generadoras y abrirlo hasta convertirlo en un cuadrado. Aplastar esas dos circunferencias a un punto es lo mismo que cerrar el cuadrado por su borde, y eso da una esfera.

El corte produce cuatro lados, y aplastarlos todos es distinto de volver a pegarlos por parejas: el primer procedimiento da la esfera y el segundo reconstruye el toro. No hay que confundir esas dos operaciones.

Ejercicio 3.10. *Dos cocientes de un cubo*

Sea el cubo $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, -1 \leq x,y,z \leq 1\}$.

1. Describir el espacio cociente $T^3 = C/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada por
$$(-1,y,z) \sim (1,y,z), \qquad (x,-1,z) \sim (x,1,z), \qquad (x,y,-1) \sim (x,y,1).$$

2. Determinar el espacio cociente $M = C/\sim$ cuando $\sim$ es la generada por

$$(1, y, z) \sim (-1, -y, z), \qquad (x, 1, z) \sim (x, -1, z).$$

Resolución. Primer apartado: es el toro de dimensión tres.

Se empieza por una dimensión. Sea $e : [-1, 1] \to S^1$ dada por $e(t) = (\cos \pi t, \operatorname{sen} \pi t)$. Es continua y sobreyectiva, y

$$e(t) = e(t') \iff t - t' \in 2\mathbb{Z} \iff t = t' \text{ o } \{t, t'\} = \{-1, 1\},$$

porque $t, t' \in [-1, 1]$ y la única diferencia par no nula posible en ese intervalo es ± 2.

Se define ahora

$$F : C \to S^1 \times S^1 \times S^1, \qquad F(x, y, z) = \big(e(x), e(y), e(z)\big),$$

continua por serlo cada componente y sobreyectiva por serlo e.

Las fibras de F son exactamente las clases. La relación generada por las tres identificaciones del enunciado es la siguiente: $(x, y, z) \sim (x', y', z')$ si y solo si en cada coordenada, o los dos valores coinciden, o son -1 y 1 en algún orden. Y eso es exactamente lo que dice $F(x, y, z) = F(x', y', z')$, por la caracterización de e.

Se concluye con el criterio compacto-Hausdorff. El cubo C es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^3$, luego compacto; el producto de tres circunferencias es Hausdorff, por ser subespacio de $\mathbb{R}^6$. Una aplicación continua y sobreyectiva de un compacto en un Hausdorff es cerrada, luego es identificación, y por tanto la biyección inducida

$$\overline{F} : C/\sim \longrightarrow S^1 \times S^1 \times S^1$$

es un homeomorfismo.

Conviene quedarse con la lectura geométrica: **identificar las caras opuestas de un cubo por traslación da el toro de dimensión tres**, igual que identificar los lados opuestos de un cuadrado da el toro de dimensión dos. Es el modelo con el que se piensan los universos periódicos: quien sale por una cara entra por la opuesta.

Segundo apartado: la botella de Klein por un intervalo.

Lo primero es observar que *ninguna de las dos identificaciones toca a la coordenada z*: las dos relacionan puntos con la misma z. Escribiendo $C = Q \times [-1, 1]$ con $Q = [-1, 1]^2$ el cuadrado de las dos primeras coordenadas, la relación es de la forma $\sim' \times \mathrm{Id}$, donde $\sim'$ actúa solo sobre Q mediante

$$(1, y) \sim' (-1, -y), \qquad (x, 1) \sim' (x, -1).$$

El cociente de un producto por una relación que solo afecta a un factor es el producto de los cocientes, siempre que el otro factor sea localmente compacto y Hausdorff — es el mismo resultado que se usa para bajar homotopías a un cociente —, y $[-1, 1]$ lo es. Luego

$$M \cong (Q/\sim') \times [-1, 1].$$

Qué es $Q/\sim'$. Se lee la palabra del cuadrado recorriendo su borde en sentido antihorario a partir de $(-1, -1)$:

- **Lado inferior**, de $(-1, -1)$ a $(1, -1)$, con x creciente. Se le llama b.

- **Lado derecho**, de $(1,-1)$ a $(1,1)$, con y creciente. Se le llama a.
- **Lado superior**, recorrido de $(1,1)$ a $(-1,1)$, es decir, con x *decreciente*. La identificación $(x,1) \sim' (x,-1)$ empareja el lado superior con el inferior respetando x, de modo que este trozo es b recorrido al revés: b^{-1}.
- **Lado izquierdo**, recorrido de $(-1,1)$ a $(-1,-1)$, es decir, con la segunda coordenada decreciente. La identificación $(1,y) \sim' (-1,-y)$ empareja el punto $(1,y)$ del lado derecho con el punto $(-1,-y)$ del izquierdo; cuando y crece de -1 a 1 — el sentido de a —, el punto correspondiente del lado izquierdo baja de $(-1,1)$ a $(-1,-1)$, que es justamente el sentido en que lo estamos recorriendo. Luego este trozo es a, no a^{-1}.

La palabra es, pues, $b\,a\,b^{-1}a$, que salvo permutación cíclica es $a\,b\,a\,b^{-1}$.

La letra a aparece dos veces con el mismo exponente, luego la superficie es no orientable y tiene que ser de tipo II. Cuál exactamente se decide con el abelianizado de su grupo fundamental, que se calcula en el capítulo 8: la presentación es $\langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha\beta^{-1} \rangle$ y al abelianizar la relación queda $2\alpha = 0$, de donde

$$\left(\pi_1\right)_{ab} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2,$$

que es el abelianizado de N_2. Además, los cuatro vértices del cuadrado se identifican todos entre sí — $(1,1) \sim' (-1,-1)$ y $(1,-1) \sim' (-1,1)$ por la primera relación, y $(1,1) \sim' (1,-1)$ por la segunda —.

Luego $Q/\sim'$ es la **botella de Klein** y

$$\boxed{M \cong K \times [-1,1]},$$

una botella de Klein «engordada», que es una variedad de dimensión tres con borde: su borde son las dos copias $K \times \{-1\}$ y $K \times \{1\}$.

Dónde se falla. En leer el lado izquierdo como a^{-1}. La relación $(1,y) \sim' (-1,-y)$ invierte la segunda coordenada, y al recorrer el borde en sentido antihorario el lado izquierdo se baja: las dos inversiones se compensan y la letra sale sin exponente. Con a^{-1} la palabra sería $bab^{-1}a^{-1}$, la del toro, y la respuesta, $T^2 \times [-1,1]$, sería falsa. Lo seguro es lo que se ha hecho arriba: seguir un punto concreto del lado derecho hasta su pareja del izquierdo y mirar si, al recorrer el borde, se avanza en el mismo sentido que él.

Observación (Una advertencia sobre el enunciado)**.** En el enunciado de partida, el segundo apartado incluye una tercera condición sobre las caras horizontales que aparece escrita como $(x,y,-1) \sim (x,y,-1)$, es decir, la identidad, que no identifica nada. El enunciado de arriba recoge las dos condiciones que sí tienen contenido, y la respuesta es la que se ha dado.

Si se hubieran identificado también las dos caras horizontales, $(x,y,1) \sim (x,y,-1)$, el efecto sería pegar los dos extremos del intervalo y el resultado sería $K \times S^1$ en lugar de $K \times [-1,1]$: la misma superficie multiplicada por una circunferencia, ahora sin borde. El cotejo con el PDF original confirma que allí está escrita la identidad, no este pegado adicional.

Ejercicio 3.11. *Proyección abierta y relación no abierta*

Sea $X = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ x \geq 0\}$. Se considera sobre X la relación de equivalencia R definida por la partición $\{\{a, \frac{1}{a}\}\}_{a>0} \cup \{\{0\}\}$. Demostrar que $p : X \to X/R$ es abierta, pero que R no es abierto en $X \times X$.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Para probar que p es abierta hay que ver que el* saturado *de un abierto es abierto. Escríbelo: ¿qué conjunto es $p^{-1}(p(U))$?*
2. *La aplicación $a \mapsto 1/a$ es un homeomorfismo de $(0,\infty)$ en sí mismo.*
3. *Para lo segundo, dibuja R dentro del primer cuadrante. ¿Cuántos puntos tiene su intersección con una recta vertical?*

Resolución. La proyección es abierta. Sea $\iota : (0,\infty) \to (0,\infty)$ la inversión $\iota(a) = 1/a$, que es continua, biyectiva y coincide con su propia inversa: es un homeomorfismo.

Sea $U \subseteq X$ abierto. Por definición de topología cociente, $p(U)$ es abierto si y solo si lo es su saturado $p^{-1}(p(U))$, que es la unión de todas las clases que cortan a U. Como la clase de $a > 0$ es $\{a, 1/a\}$ y la de 0 es $\{0\}$,

$$p^{-1}\big(p(U)\big) = U \cup \iota\big(U \cap (0,\infty)\big).$$

Ahora bien, $U \cap (0,\infty)$ es abierto de $(0,\infty)$, y su imagen por el homeomorfismo ι es abierta en $(0,\infty)$, que a su vez es abierto en X. Luego el saturado es unión de dos abiertos de X y es abierto. Por tanto $p(U)$ es abierto y p es una aplicación abierta. ■

R no es abierto en $X \times X$. Aquí «R» se ve como el subconjunto

$$R = \{(x,y) \in X \times X\ ;\ x\,R\,y\} = \Delta \cup \Big\{\big(a, \tfrac{1}{a}\big)\ ;\ a > 0\Big\},$$

donde Δ es la diagonal.

Basta observar que R tiene interior vacío. En efecto, sea $(x,y) \in R$ y sea W un entorno suyo en $X \times X$; W contiene un producto $I_1 \times I_2$ de intervalos relativos con $x \in I_1$, $y \in I_2$, y I_2 contiene infinitos puntos. Pero para cada x fijo, el conjunto $\{y\ ;\ (x,y) \in R\}$ es la clase de x, que tiene **a lo sumo dos elementos**. Luego $I_1 \times I_2 \not\subseteq R$, y (x,y) no es interior a R.

Como ningún punto de R es interior, R no es abierto. ■

Otra vía (qué es en realidad este cociente). Merece la pena identificarlo, porque explica de un vistazo todo lo anterior y conecta con el ejercicio «Hausdorff en el cociente y cerrado en el producto».

La clase de $a > 0$ queda determinada por $\max(a, 1/a) \in [1,\infty)$, y la clase de 0 es un punto aparte. Se comprueba que los entornos básicos de $[0]$ son las imágenes de los intervalos $[0,\varepsilon)$, cuyo saturado es $[0,\varepsilon) \cup (1/\varepsilon,\infty)$: es decir, **un entorno de $[0]$ contiene todas las clases con** máx **suficientemente grande**. El punto $[0]$ se comporta, pues, como un punto en el infinito.

Formalmente, sea $[1,+\infty]$ el intervalo compactificado, homeomorfo a $[1,2]$ mediante $t \mapsto 2 - 1/t$, y sea

$$f : X \to [1,+\infty], \qquad f(a) = \max\big(a, \tfrac{1}{a}\big)\ \ (a > 0), \qquad f(0) = +\infty.$$

Es continua — en $(0,\infty)$ por ser el máximo de dos continuas, y en 0 porque $\max(a, 1/a) = 1/a \to +\infty$ —, sobreyectiva, y cumple $f(x) = f(y)$ si y solo si $x\,R\,y$. Induce, por tanto, una

biyección continua $\bar{f}$ desde el cociente. Su inversa es $g(t) = p(1/t)$, con $1/(+\infty) = 0$, y es continua por ser composición de $t \mapsto 1/t$ con p. Luego

$$X/R \;\cong\; [1, +\infty] \;\cong\; [1, 2].$$

En particular X/R **sí** es Hausdorff, y por ese ejercicio eso equivale, dado que p es abierta, a que R sea *cerrado* en $X \times X$. Y en efecto lo es: si $(a_n, 1/a_n) \to (u, v)$ con $a_n > 0$, entonces $u > 0$ — porque si $a_n \to 0$ entonces $1/a_n \to \infty$ y no habría límite — y por continuidad $v = 1/u$.

QUÉ DEJA. Que «p abierta» y «R abierto en $X \times X$» no son equivalentes. Si R es abierto, cada clase es abierta (es una sección de R), así que todos los saturados son abiertos y p es abierta. Este ejemplo muestra que el recíproco falla. La condición que caracteriza aquí a un cociente Hausdorff es otra: con p abierta, equivale a que R sea *cerrado*.

Ejercicio 3.12. *Adjunciones: conexión, compacidad y separación*

Sean X e Y espacios topológicos, $A \subseteq X$ cerrado y $f : A \to Y$ continua. Se llama **adjunción de X a Y por f**, y se escribe $X \cup_f Y$, al cociente de la unión disjunta $X \sqcup Y$ por la relación generada por $a \sim f(a)$ para $a \in A$. Probar que si X e Y son conexos por caminos y $A \neq \emptyset$, entonces $X \cup_f Y$ es conexo por caminos; y que si los dos son compactos, $X \cup_f Y$ es compacto. Probar que si X e Y son Hausdorff y X es compacto, entonces $X \cup_f Y$ es Hausdorff.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Las dos primeras propiedades salen de que el cociente es imagen continua de $X \sqcup Y$. Para la conexión por caminos hace falta además que las dos piezas se toquen.*
2. *Para la separación, describe primero quiénes son las clases: los puntos de $X \setminus A$ van solos, y cada punto $y \in Y$ arrastra consigo a $f^{-1}(y)$.*
3. *Un conjunto del cociente es abierto si y solo si su preimagen lo es. Así que hay que fabricar abiertos* saturados, *y ahí es donde se usa que A sea cerrado y que X sea compacto.*
4. *Separar dos puntos que vienen de Y es el caso difícil. Las fibras $f^{-1}(y)$ y $f^{-1}(y')$ son compactos disjuntos de X: sepáralos primero allí.*

Resolución. La idea. La compacidad y la conexión por caminos pasan a cualquier imagen continua, así que las dos primeras afirmaciones salen de $X \sqcup Y$ casi sin trabajo. La separación no pasa a las imágenes: hay que fabricar a mano abiertos *saturados* que separen, y ahí se usan que A es cerrado y que X es compacto. El caso difícil es el de dos puntos de Y, cuyas clases arrastran fibras enteras de X.

Se escribe $\pi : X \sqcup Y \to Z = X \cup_f Y$ para la proyección. Conviene tener presentes las clases de equivalencia:

- si $x \in X \setminus A$, su clase es $\{x\}$;
- si $y \in Y$, su clase es $\{y\} \cup f^{-1}(y)$, que puede reducirse a $\{y\}$ cuando $y \notin f(A)$.

En particular π es inyectiva sobre $X \setminus A$ y sobre Y, y $Z = \pi(X \setminus A) \sqcup \pi(Y)$ como conjuntos.

Dos observaciones que se usan sin parar:

- $\pi(X \setminus A)$ **es abierto en** Z, porque su preimagen es $X \setminus A$, abierto en X por ser A cerrado, y por tanto abierto en $X \sqcup Y$.
- **Un subconjunto** $S \subseteq X \sqcup Y$ **es saturado** si contiene, con cada punto, toda su clase; es decir, si $f(S \cap A) \subseteq S$ y $f^{-1}(S \cap Y) \subseteq S$. Los abiertos de Z son exactamente las imágenes de los abiertos saturados.

Compacidad. La unión disjunta de dos compactos es compacta: dado un recubrimiento por abiertos, se extrae uno finito de cada sumando y se juntan. Y $Z = \pi(X \sqcup Y)$ es imagen continua de un compacto, luego compacto. ■

Conexión por caminos. Los conjuntos $\pi(X)$ y $\pi(Y)$ son imágenes continuas de espacios conexos por caminos, luego lo son, y su unión es Z. Para que la unión de dos conjuntos conexos por caminos lo sea hace falta que se corten, y aquí se cortan siempre que $A \neq \emptyset$: tomando $a \in A$, el punto $\pi(a) = \pi(f(a))$ está en los dos.

Dados entonces $p, q \in Z$, se une cada uno con ese punto común dentro de la pieza que lo contiene, y se yuxtaponen los dos caminos. ■

EXPLÍCATE. *¿Qué pasa si $A = \emptyset$? Escribe quién es Z en ese caso y comprueba que la conclusión de conexión por caminos puede fallar: toma X e Y con un punto cada uno. La definición de adjunción admite $A = \emptyset$; la hipótesis adicional es para esa conclusión y faltaba en el enunciado original.*

Separación. Supóngase X compacto y Hausdorff e Y Hausdorff, y sean $p \neq q$ en Z. Se distinguen tres casos.

Caso 1: los dos vienen de $X \setminus A$. Sean $x, x' \in X \setminus A$ con $\pi(x) = p$ y $\pi(x') = q$; son distintos porque π es inyectiva ahí. Como X es Hausdorff hay abiertos disjuntos $U \ni x$ y $U' \ni x'$ en X, y se pueden sustituir por $U \cap (X \setminus A)$ y $U' \cap (X \setminus A)$, que siguen siendo abiertos de X y no cortan a A. Un abierto de X disjunto de A es saturado, porque sus puntos van solos en su clase. Luego $\pi(U)$ y $\pi(U')$ son abiertos disjuntos de Z que separan p de q.

Caso 2: uno viene de $X \setminus A$ y el otro de Y. Sea $p = \pi(x)$ con $x \in X \setminus A$ y $q = \pi(y)$ con $y \in Y$. Como X es compacto y Hausdorff es regular, y A es cerrado con $x \notin A$: existen abiertos disjuntos $U \ni x$ y $W \supseteq A$ en X. Entonces:

- U es disjunto de A, luego es saturado y $\pi(U)$ es abierto y contiene a p;
- $W \sqcup Y$ es saturado, porque $A \subseteq W$ hace que $f^{-1}(Y) = A \subseteq W$ y $f(W \cap A) \subseteq Y$; es abierto, y $\pi(W \sqcup Y)$ contiene a q.

Y son disjuntos: un punto de $\pi(U)$ es la clase $\{u\}$ de un $u \in U \subseteq X \setminus A$, y esa clase no corta a $W \sqcup Y$ porque $u \notin W$.

Caso 3: los dos vienen de Y. Sean $p = \pi(y)$, $q = \pi(y')$ con $y \neq y'$ en Y. La compacidad de X, usada ya en el caso 2, interviene aquí en tres pasos.

Paso 1: separar las fibras dentro de X. Los conjuntos $f^{-1}(y)$ y $f^{-1}(y')$ son cerrados en A —preimágenes de puntos, que son cerrados por ser Y Hausdorff —, luego cerrados en X y por tanto compactos; y son disjuntos. Un espacio compacto y Hausdorff es normal: dados dos compactos disjuntos K y L, para cada $x \in K$ se separan x y L por abiertos disjuntos usando Hausdorff y la compacidad de L, y después se extrae un subrecubrimiento finito de K. Existen, pues, abiertos disjuntos G_0 y G_0' de X con $f^{-1}(y) \subseteq G_0$ y $f^{-1}(y') \subseteq G_0'$. Obsérvese que el argumento vale igual si alguna de las dos fibras es vacía, tomando el abierto vacío.

Paso 2: encoger los entornos en Y para que sus fibras entren en G_0 y G_0'. El conjunto $A \setminus G_0$ es cerrado en el compacto A, luego compacto, y su imagen $f(A \setminus G_0)$ es un compacto de Y que **no contiene a** y, pues todo punto de $f^{-1}(y)$ está en G_0. Como Y es Hausdorff, un punto y un compacto que no lo contiene se separan por abiertos disjuntos; en particular existe $V \ni y$ abierto con $V \cap f(A \setminus G_0) = \emptyset$, lo que equivale a $f^{-1}(V) \subseteq G_0$. El mismo párrafo, cambiando y por y' y G_0 por G_0' — y nada más, porque los dos puntos juegan papeles simétricos y de G_0' solo se ha usado que es abierto y contiene a $f^{-1}(y')$ —, da un $V' \ni y'$ abierto con $f^{-1}(V') \subseteq G_0'$. Y se pueden encoger V y V' para que además sean disjuntos, intersecándolos con dos abiertos disjuntos que separen y de y' en Y.

Paso 3: construir los abiertos saturados. Sea $D = f^{-1}(Y \setminus V)$, que es cerrado en A y por tanto

en X, y se define

$$G = G_0 \setminus D, \qquad G' = G_0' \setminus D', \qquad D' = f^{-1}(Y \setminus V').$$

Son abiertos de X y disjuntos, por estar contenidos en G_0 y G_0'. Además

$$G \cap A = (G_0 \cap A) \setminus D \subseteq A \setminus D = f^{-1}(V),$$

y al revés $f^{-1}(V) \subseteq G_0$ y $f^{-1}(V) \cap D = \emptyset$, luego $f^{-1}(V) \subseteq G$. Es decir, $G \cap A = f^{-1}(V)$ exactamente, y lo mismo para G'.

Con eso, $G \sqcup V$ es saturado: $f(G \cap A) = f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ y $f^{-1}(V) \subseteq G$. Es abierto, y $\pi(G \sqcup V)$ contiene a p. Lo mismo con $G' \sqcup V'$ y q.

Finalmente, $G \sqcup V$ y $G' \sqcup V'$ son disjuntos y saturados. Si sus imágenes tuvieran una clase en común, esa clase estaría contenida entera en ambos conjuntos, contradiciendo su disjunción. Por tanto sus imágenes son abiertos disjuntos que separan p y q.

Los tres casos agotan las posibilidades, luego Z es Hausdorff. ■

Lo que hay que llevarse. Con dos puntos de Y se hacen tres cosas. Primero se separan sus fibras dentro de X, que son compactos disjuntos. Después se encogen los entornos de los puntos en Y para que sus fibras caigan dentro de esos abiertos, usando que $f(A \setminus G_0)$ es compacto y no contiene al punto. Por último se recortan los abiertos de X para que corten a A exactamente en esas fibras. Así, cada par formado por un abierto de X y uno de Y es saturado, y los dos pares son disjuntos.

Observación (Los problemas que no se detallan aquí)**.** Por no repetir técnica, se citan en una línea:

- **Problema 3** (inmersión de B/A en X/A con A cerrado): mismo argumento de saturados que el problema 2.
- **Problema 9** (cociente de un cociente): se resuelve con la propiedad universal aplicada dos veces, igual que la caracterización de la topología final.
- **Problema 10** (componentes conexas del cociente): la hipótesis es que cada clase esté contenida en una componente conexa de X. Para probar que las imágenes son componentes, se usan la conexión de las imágenes y la separación mediante conjuntos cerrados saturados.
- **Problema 11** ($B^n/S^{n-1} \cong S^n$): es el apartado (c) del problema de los tres cocientes del plano en dimensión n: la misma fórmula $x \mapsto (2\sqrt{1-|x|^2}\,x, 2-2|x|^2)$ sobre la bola cerrada aplasta solo su borde y parametriza una esfera de dimensión n.
- **Problema 18** (inmersiones de X en CX y en ΣX): comprobación directa de que $x \mapsto [x, 0]$ y $x \mapsto [x, \frac{1}{2}]$ son inmersiones cerradas.
- **Un ejercicio importante** ($P^2\mathbb{R}$ se sumerge en $\mathbb{R}^4$ mediante $f(x,y,z) = (xy, yz, xz, x^2 + 2y^2 + 3z^2)$): la comprobación de que $f(p) = f(q) \iff p = \pm q$ se hace por casos según cuántas coordenadas se anulan, y después se aplica compacto-Hausdorff. Merece la pena hacerlo: es la prueba de que el plano proyectivo, que no cabe en $\mathbb{R}^3$, sí cabe en $\mathbb{R}^4$.

Repaso del capítulo

REPASO INTERCALADO: INTRODUCCIÓN, PRIMERA RONDA

1. Define topología cociente. ¿Cuándo es abierto un conjunto del cociente?
2. Enuncia la propiedad universal del cociente y di para qué se usa en la práctica.
3. Enuncia el criterio compacto-Hausdorff y escribe los cuatro pasos del método que se deriva de él.
4. Define cono y suspensión de un espacio. ¿Cuánto valen CS^n y ΣS^n?
5. Describe los dos modelos del plano proyectivo.
6. Escribe las palabras del toro, la botella de Klein, el plano proyectivo, la esfera y la banda de Möbius.

REPASO INTERCALADO: INTRODUCCIÓN, SEGUNDA RONDA, CON MATERIAL ANTERIOR

1. ¿Qué diferencia hay entre el cilindro y la banda de Möbius *en la relación de equivalencia*? Escríbela con fórmulas.
2. Da un ejemplo de cociente de un espacio Hausdorff que no sea Hausdorff.
3. ¿Por qué la intersección en la definición de topología solo se permite finita? Da el contraejemplo.
4. En la parte de geometría se dijo que una región simple es «homeomorfa a un disco». Con las definiciones de este capítulo, ¿qué significa exactamente?
5. El cilindro apareció en las dos mitades de la asignatura. ¿Qué es en cada una y en qué se diferencian los dos objetos?
6. ¿Por qué el plano proyectivo no puede ser una s.r. de $\mathbb{R}^3$ y sí es una superficie en el sentido de esta parte del curso?

CAPÍTULO 4

Clasificación de superficies I

ANTES DE LEER

1. Haz una lista de todas las superficies compactas que se te ocurran. ¿Cuántas hay?
2. Pega dos toros quitándole un disco a cada uno y cosiendo por el borde. ¿Qué sale?
3. ¿Qué crees que sale al pegar dos bandas de Möbius por su borde?
4. ¿Qué es exactamente lo que hace que una superficie sea orientable?

Las respuestas están en las secciones 4.1, 4.2, 4.1 y 4.4.

LA IDEA: QUÉ SIGNIFICA CLASIFICAR

En topología, clasificar la familia de espacios que cumplen una propiedad topológica P — es decir, invariante por homeomorfismos — consiste en alcanzar dos objetivos:

1. **Encontrar modelos** $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ de forma que todo espacio con la propiedad P sea homeomorfo a algún X_i. Esto es la *lista*.
2. **Dar un método de distinguibilidad**, es decir, un procedimiento que decida cuándo dos espacios con la propiedad P *no* son homeomorfos. Para eso basta distinguir los modelos entre sí.

Sin el segundo objetivo el primero no vale nada: una lista con repeticiones no clasifica. Las propiedades conocidas desde el curso de *Topología* que sirven para distinguir son la compacidad, la conexión, el número de componentes conexas y el número y orden de los puntos de corte. Con ellas no basta para las superficies, y por eso hace falta el grupo fundamental. Este capítulo consigue el primer objetivo; el segundo tendrá que esperar al capítulo 8.

4.1 Teorema de clasificación de superficies

Salvo cuando se hable expresamente de borde, la clasificación de este capítulo se refiere a superficies **compactas, conexas y sin borde**.

LA PREGUNTA: CABEN TODAS LAS SUPERFICIES EN UNA LISTA

Las superficies compactas parecen infinitamente variadas: esferas, toros, roscas de varios agujeros, botellas de Klein, cocientes de polígonos que uno ni sabe dibujar. ¿Es posible que todas ellas se reduzcan a una lista gobernada por un solo número entero y una sola distinción cualitativa, y que dos objetos distintos de esa lista no sean nunca el mismo?

Ya se han visto los modelos de la esfera y del plano proyectivo como espacios cociente: la esfera es el cuadrado con palabra $abb^{-1}a^{-1}$ y el plano proyectivo el disco con los antípodas del borde identificados, es decir, la palabra $abab$. El siguiente teorema proporciona modelos para todas las demás.

LA IDEA: TODA SUPERFICIE ES UN POLÍGONO DE PAPEL CON INSTRUCCIONES DE PEGADO

La imagen que predice el teorema es la de un patrón de costura. Una superficie compacta, por complicada que sea, se puede cortar hasta dejarla plana: se le van dando tijeretazos, por arcos y curvas adecuados, hasta obtener un disco que se representa sobre la mesa. Lo que queda es un polígono de papel, y en el borde están escritas las instrucciones para volver a coserlo: qué lado va con qué lado y en qué sentido. Esas instrucciones son la palabra.

A partir de ahí el problema deja de ser geométrico y se vuelve de escritura. Dos patrones distintos pueden dar la misma superficie, porque se puede cortar el polígono por una diagonal y volver a pegarlo por otro lado, y eso cambia la palabra sin cambiar el objeto cosido. La demostración del teorema — que no se hace aquí — consiste en dar una lista de esos cortes y pegados y comprobar que, aplicándolos con paciencia, cualquier palabra se reduce a una de las dos formas normales del enunciado. Es un algoritmo de limpieza, no una iluminación: se van agrupando letras hasta que solo quedan bloques $aba^{-1}b^{-1}$ o bloques aa.

La intuición falsa que hay que quitarse de en medio. Uno mira la lista de superficies imaginables — esferas, roscas, botellas, cocientes ilegibles de polígonos de doce lados — y concluye que la variedad es inagotable. La variedad es real, pero está toda en el *orden de las letras*, y el orden de las letras es exactamente lo que los cortes y pegados pueden reorganizar. Lo que sobrevive a esa reorganización es muy poco: el género de la forma normal y la orientabilidad. El número de letras de una palabra cualquiera puede cambiar con los cortes; no es por sí solo un invariante.

Y el corazón, en una frase. El tipo topológico de una superficie compacta, conexa y sin borde queda determinado por un entero y su orientabilidad. Todo lo demás que uno cree ver en ella — el tamaño, los bultos, cómo está metida en el espacio — no es de la superficie, es del dibujo.

Teorema (Clasificación, primera parte)**.** Una superficie compacta, conexa y sin borde distinta

de S^2 y $P^2\mathbb{R}$ es homeomorfa a un espacio cociente de alguno de los dos tipos siguientes.

Tipo I (M_n). El resultado de identificar los lados de un polígono de $4n$ lados, con $n \geq 1$, llamado **polígono fundamental**, de acuerdo con el código

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ \cdots \ a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}.$$

Tipo II (N_n). El resultado de identificar los lados de un polígono de $2n$ lados, con $n \geq 2$, por el código

$$a_1 a_1 \, a_2 a_2 \ \cdots \ a_n a_n.$$

Recuérdese que el código significa lo siguiente: fijado un sentido de giro sobre el polígono, las aristas indicadas con la misma letra se identifican de manera que a_i indica que los puntos de la arista van apareciendo en el sentido del giro, mientras que esos mismos puntos en a_i^{-1} se ven aparecer en el sentido opuesto.

El caso $n = 1$ del tipo I es el **toro**, con palabra $aba^{-1}b^{-1}$.

Un caso a mano: las cuatro esquinas del toro. Antes de hablar de todos los modelos a la vez conviene ver en el más sencillo qué pasa con los vértices, porque es donde se decide si un cociente es una superficie. Se numeran los vértices del cuadrado P_0, P_1, P_2, P_3 en el sentido de giro, y se llama e_i al lado que va de P_i a P_{i+1}, con índices módulo 4. La palabra $aba^{-1}b^{-1}$ dice cómo va cada letra:

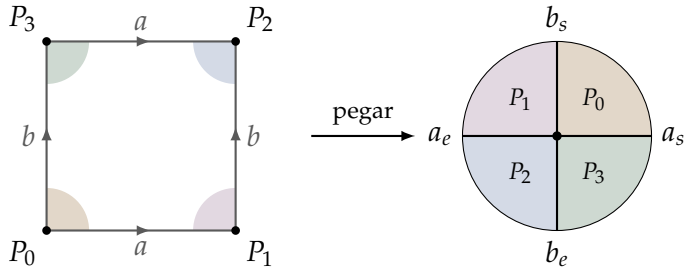
- e_0 es a, recorrida de P_0 a P_1;
- e_1 es b, de P_1 a P_2;
- e_2 es a^{-1}, de modo que esa a va de P_3 a P_2;
- e_3 es b^{-1}, de modo que esa b va de P_0 a P_3.

Pegar las dos a junta origen con origen y extremo con extremo: $P_0 \sim P_3$ y $P_1 \sim P_2$. Pegar las dos b hace lo mismo con las suyas: $P_1 \sim P_0$ y $P_2 \sim P_3$. Encadenando, las cuatro esquinas son **un solo punto** P del toro.

Falta ver que alrededor de P hay un disco. En cada esquina del cuadrado hay un cuarto de disco, limitado por dos radios que van a lo largo de los lados. Cada radio se nombra por la letra y por si esa letra *sale* de P o *llega* a P: a_s, a_e, b_s, b_e. Mirando la lista de arriba,

$$P_0 : \ a_s - b_s, \qquad P_1 : \ b_s - a_e, \qquad P_2 : \ a_e - b_e, \qquad P_3 : \ b_e - a_s.$$

El cuarto de P_0 comparte el radio b_s con el de P_1; este comparte a_e con el de P_2; este, b_e con el de P_3; y este, a_s con el de P_0. Los cuatro cuartos se cierran en *una sola vuelta*, y forman un disco entero alrededor de P, con las cuatro direcciones en el orden a_s, b_s, a_e, b_e: sale a, sale b, llega a, llega b. Es el cruce de las dos circunferencias a y b que se ven dibujadas sobre el toro.



$aba^{-1}b^{-1}$ leída desde P_0 entorno de P en el toro

Los cuatro cuartos de disco de las esquinas (cada uno de un color) se pegan por los radios que comparten y dan una vuelta completa alrededor del punto P.

Observación (Todos los vértices son el mismo punto)**.** Tanto en los modelos de tipo I como en los de tipo II, los vértices del polígono representan un mismo punto. Los entornos pequeños de ese punto son el resultado de pegar las esquinas del polígono, y al pegarlas se obtiene un entorno del plano euclídeo.

Este es el punto delicado al comprobar que un cociente es una superficie: hay que verificar que los vértices, al identificarse, dan lugar a un entorno homeomorfo a un disco, y no a dos discos pegados por un punto o cosas peores.

Contar sin dibujar: $\chi = 1 - k + v$. El recuento de las esquinas da, sin triangular nada, la característica de Euler-Poincaré del cociente, que es el número que va a distinguir unos modelos de otros. Un polígono de $2k$ lados pegados por parejas es un complejo con una sola cara, que es el interior del polígono; con k aristas, porque cada pareja de lados se ha convertido en una sola arista y hay tantas como letras distintas; y con v vértices, uno por cada clase de esquinas. Luego

$$\chi = C - A + V = 1 - k + v.$$

Se lee así: la cara aporta uno, cada letra resta uno y cada punto distinto al que van a parar las esquinas suma uno. Con los cuatro cuadrados que ya han salido:

Palabra	clases de esquinas	v	$\chi = 1 - 2 + v$
toro, $aba^{-1}b^{-1}$	$\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$	1	0
esfera, $abb^{-1}a^{-1}$	$\{P_0\}$, $\{P_2\}$, $\{P_1, P_3\}$	3	2
plano proyectivo, $abab$	$\{P_0, P_2\}$, $\{P_1, P_3\}$	2	1
botella de Klein, $aba^{-1}b$	$\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$	1	0

Las cuatro palabras tienen el mismo número de letras y dan tres características distintas: el número de letras no decide nada por sí solo, y lo que hay que contar es v. Que el resultado no dependa del polígono elegido es la invariancia de la característica, que se enuncia en la sección 8.4.

En los modelos del teorema todas las esquinas van a parar a un solo punto, como dice la observación, así que $v = 1$ y la fórmula da de una vez

$$\chi(M_n) = 1 - 2n + 1 = 2 - 2n, \qquad \chi(N_n) = 1 - n + 1 = 2 - n.$$

Son los dos números que se usan en todo lo que sigue. La tabla enseña también por qué la característica sola no basta: el toro y la botella de Klein dan los dos 0, y lo que los separa es la orientabilidad (sección 4.4).

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: CLASIFICAR SALVO EQUIVALENCIA HOMOTÓPICA

La alternativa. Renunciar al homeomorfismo, que es una relación muy fina y muy difícil de decidir, y clasificar las superficies salvo *equivalencia homotópica*, es decir, considerando iguales dos espacios que se deforman continuamente el uno en el otro.
Su ventaja. La equivalencia homotópica conserva el grupo fundamental. Si dos modelos tienen grupos no isomorfos, no pueden ser homotópicamente equivalentes ni homeomorfos. Esta herramienta bastará para distinguir los modelos de la lista; no es un criterio completo de equivalencia homotópica para espacios arbitrarios.
Qué se pierde con ella, y qué no. Para superficies compactas, conexas y sin borde, nada: dos de

ellas son homotópicamente equivalentes si y solo si son homeomorfas, y por eso la estrategia de este libro — distinguirlas por su grupo fundamental — demuestra de verdad lo que se quiere demostrar. Conviene saber que esa coincidencia es una particularidad de la dimensión dos y que no se puede generalizar: en dimensiones mayores hay espacios homotópicamente equivalentes que no son homeomorfos, y allí la clasificación homotópica es estrictamente más amplia. Aquí el atajo es legítimo; lo que no es legítimo es olvidar que se ha tomado un atajo.

Ejemplo (La botella de Klein es N_2)**.** La botella de Klein tiene por palabra $aba^{-1}b$ sobre un cuadrado. ¿Dónde aparece en el teorema de clasificación?

La respuesta es que **la botella de Klein se obtiene al unir dos bandas de Möbius por el borde**. Cortando el cuadrado por la diagonal adecuada y reagrupando las piezas se ve que el modelo $aba^{-1}b$ se transforma en $a_1a_1a_2a_2$, que es exactamente N_2.

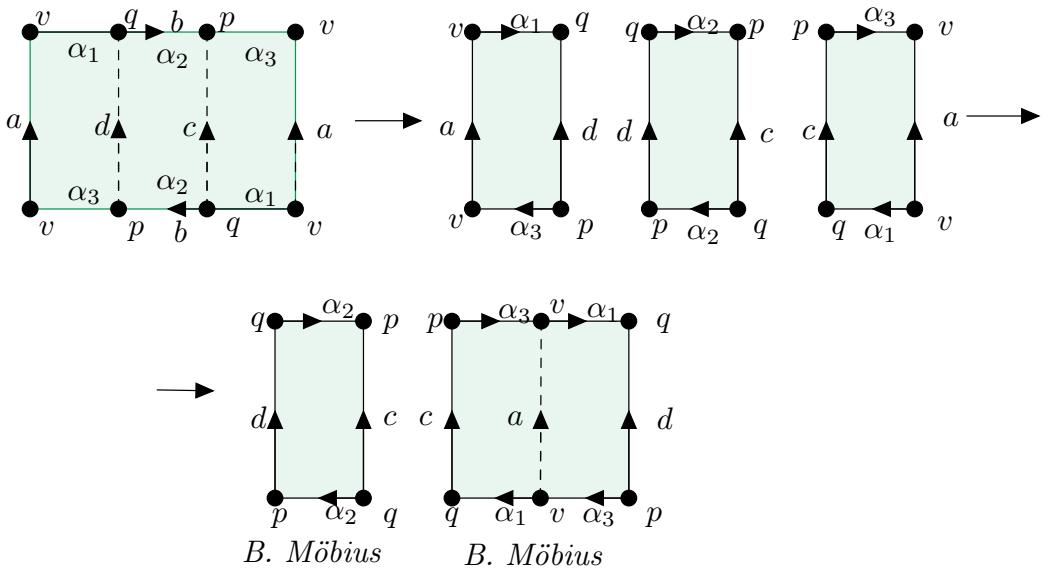


Figura 4.1: Cortes del modelo de Klein que separan dos bandas de Möbius. Se corta por c y d y se pegan los lados a de las dos tiras exteriores. Los pares α_i indican los pegados; los cortes c, d forman el borde por el que se reúnen las dos bandas (original, p. 22).

La transformación cabe en tres líneas y conviene hacerla, porque es el primer ejemplo de las tijeras con las que se demuestra el teorema. Se corta el cuadrado por la diagonal que va del origen del primer lado al final del segundo, y se llama c a esa diagonal, de modo que c sustituye al recorrido ab y formalmente $b = a^{-1}c$. El corte da dos triángulos, con bordes abc^{-1} y $ca^{-1}b$. Al pegarlos por los lados b, respetando sus flechas, el nuevo borde es $aac^{-1}c^{-1}$. Leyéndolo al revés y cambiando el punto inicial se obtiene $a^{-1}a^{-1}cc$. Así se justifica geométricamente la cuenta abreviada:

$$aba^{-1}b = a\,(a^{-1}c)\,a^{-1}\,(a^{-1}c) = c\,a^{-1}a^{-1}\,c = c\,a^{-2}\,c.$$

Una palabra de identificación se puede leer empezando por donde uno quiera, porque solo importa el orden cíclico de las letras alrededor del polígono; pasando la c de delante al final y escribiendo $d = a^{-1}$ queda

$$c\,a^{-2}\,c \;\sim\; a^{-2}\,c\,c \;=\; d\,d\,c\,c,$$

que es el modelo $a_1a_1a_2a_2$ de tipo II con $n = 2$. El recuento lo confirma: $k = 2$ letras y una sola clase de vértices (la última fila de la tabla de arriba: las a juntan $P_0 \sim P_3$ y $P_1 \sim P_2$, y las b, $P_1 \sim P_3$ y $P_2 \sim P_0$) dan $\chi = 1 - 2 + 1 = 0$, y $\chi(N_2) = 2 - 2 = 0$.

Y N_2 también es la unión por el borde de dos planos proyectivos con un agujero. Esas dos descripciones son la misma, gracias a la observación que sigue.

Observación (Importante)**. El plano proyectivo con un agujero es una banda de Möbius**, cuyo borde es el borde del agujero.

Es el hecho más útil de toda esta parte del curso y conviene entenderlo bien. El plano proyectivo es un disco con los antípodas del borde identificados. Si se le quita un disco abierto del centro, queda una corona con los antípodas del borde exterior identificados; y esa corona, al hacer la identificación, es una banda de Möbius.

De aquí sale que *toda superficie de tipo II contiene una banda de Möbius*, que es la caracterización práctica de la no orientabilidad.

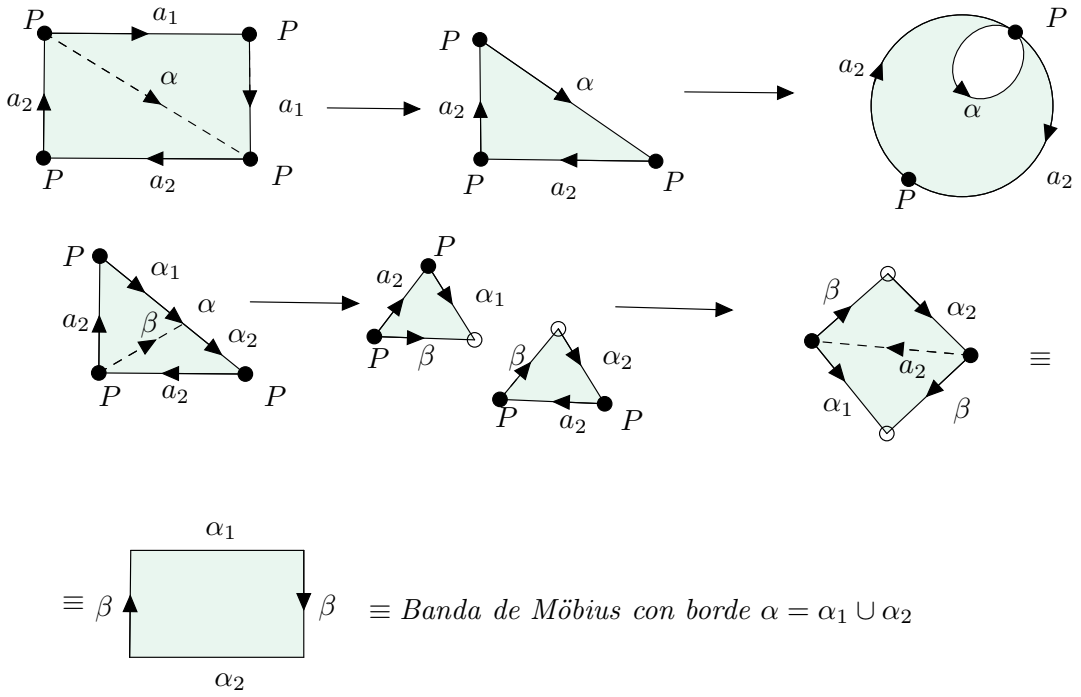


Figura 4.2: Arriba: la mitad triangular del modelo N_2 se reconoce como un plano proyectivo con un agujero. Abajo: el corte β y el nuevo pegado producen una banda de Möbius, cuyo borde es $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$. Las flechas conservan las identificaciones durante cada operación (original, pp. 22–23).

Un caso a mano: la corona con los antípodas pegados. La figura ve el hecho cortando polígonos. La observación lo dice de otra manera — una corona con los antípodas del borde exterior pegados es una banda de Möbius —, y con coordenadas polares se comprueba en tres pasos. Sea la corona $A = \{\frac{1}{2} \leq r \leq 1\}$, con la única identificación $(1, \theta) \sim (1, \theta + \pi)$ en el borde exterior; el borde interior, $r = \frac{1}{2}$, queda libre, y es el borde del agujero.

Paso 1: cortar por dos radios. Se corta A por los radios $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Quedan dos medias coronas, la de arriba, U, con $0 \leq \theta \leq \pi$, y la de abajo, L, con $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Cada una es un

rectángulo en las coordenadas (θ, r).

Paso 2: pegar por el borde exterior. La identificación de antípodas lleva el arco exterior de L sobre el de U por $\theta \mapsto \theta - \pi$, y conserva el sentido. Se pone L encima de U, dada la vuelta para que su arco exterior quede abajo, y se pegan por ese arco. Sale un rectángulo $R = [0, \pi] \times [0, 1]$, con U en la mitad de abajo y L en la de arriba:

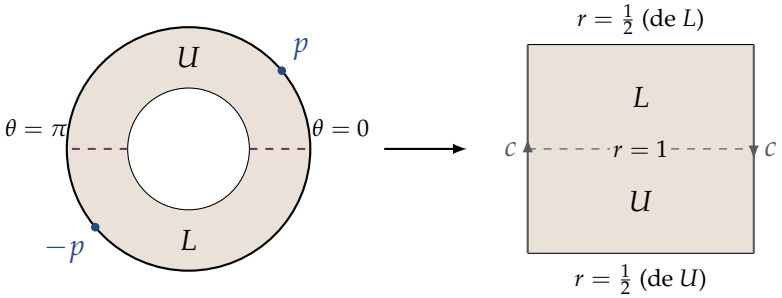
$$(x, y) \in R \longmapsto \begin{cases} \theta = x, \ \ r = \frac{1}{2} + y & \text{si } y \leq \frac{1}{2} \ \ (\text{en } U), \\ \theta = x + \pi, \ \ r = \frac{3}{2} - y & \text{si } y \geq \frac{1}{2} \ \ (\text{en } L). \end{cases}$$

En la línea del medio, $y = \frac{1}{2}$, las dos fórmulas dan $r = 1$ y ángulos que difieren en π: son puntos antípodas, que es justo lo que se ha pegado.

Paso 3: los radios cortados (el núcleo). Lo que queda por pegar son los dos radios del paso 1, cada uno visto desde las dos piezas. El punto $(0, y)$ del lado izquierdo de R, con $y \leq \frac{1}{2}$, es el punto $\theta = 0$, $r = \frac{1}{2} + y$ de U; en L ese mismo punto tiene $\theta = 2\pi$ y $r = \frac{3}{2} - y'$, luego $y' = 1 - y$, y está en el lado derecho de R, a la altura $1 - y$. Con el otro radio pasa lo mismo, cambiando $\theta = 0$ por $\theta = \pi$ y empezando en el lado derecho. En los dos casos,

$$(0, y) \sim (\pi, 1 - y) :$$

el lado izquierdo se pega con el derecho *dándole la vuelta*. Un rectángulo con dos lados opuestos pegados así es la banda de Möbius. Su borde lo forman los lados $y = 0$ e $y = 1$ de R, que son la circunferencia interior $r = \frac{1}{2}$, y la línea del medio, que es la circunferencia exterior después de pegar los antípodas, es el alma de la banda.



corona: $p \sim -p$ en el borde exterior; se corta por dos radios

R: $(0, y) \sim (\pi, 1 - y)$, la banda de Möbius

A la izquierda, la corona con los antípodas del borde exterior pegados y los dos radios por los que se corta. A la derecha, las dos medias coronas pegadas por el borde exterior (línea discontinua): los lados c llevan flechas opuestas, y el rectángulo es una banda de Möbius cuyo borde es la circunferencia interior.

Qué se ha ganado. La mitad de la pregunta del principio tiene respuesta: todas las superficies compactas, conexas y sin borde caben en una lista, la esfera, el plano proyectivo y los modelos M_n y N_n, y cada modelo es un polígono con una palabra de una de dos formas. Además se sabe leer una palabra sin dibujar: las clases de esquinas dicen si alrededor de cada vértice hay un disco, y $\chi = 1 - k + v$ da un número que no ve ni el tamaño ni los bultos. Queda abierta la otra mitad, que dos modelos distintos de la lista no sean la misma superficie. La sección siguiente empieza por ver cómo se fabrican unos modelos a partir de otros.

4.2 Suma conexa

LA PREGUNTA: SUMAR SUPERFICIES

Si las superficies van a formar una lista ordenada por un entero, debería existir una operación que las fabrique unas de otras, igual que los números naturales se fabrican sumando unos. ¿Hay alguna manera de «sumar» dos superficies que dé otra superficie, y depende el resultado del sitio por donde se peguen?

Definición. La **suma conexa** de dos superficies S y S' es una nueva superficie $S \# S'$ que resulta al eliminar el interior de un disco cerrado contenido en cada superficie y pegar las circunferencias resultantes mediante un homeomorfismo. Si se trabaja con superficies con borde, los discos se eligen en su interior.

LA IDEA: LA SUMA CONEXA ES «HACER UN TÚNEL»

La imagen es la de dos globos a los que se les hace un agujero y se les pega un tubo corto que los comunica. El resultado es una sola superficie.
Lo importante para la clasificación es que la suma conexa es una **operación algebraica** sobre las clases de homeomorfismo de superficies conexas: es conmutativa, asociativa y tiene elemento neutro. Ese punto de vista convierte la clasificación en un problema de aritmética.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: PEGAR POR UN PUNTO EN VEZ DE POR UN DISCO

La alternativa. Definir la suma de dos superficies como la *suma puntual*: se elige un punto en cada una y se identifican, sin quitar nada.
Su ventaja. Es muchísimo más simple. No hay que elegir discos, ni comprobar que el resultado no depende de cuáles se hayan elegido, ni elegir un homeomorfismo entre las dos circunferencias de borde, que es el punto delicado de la definición buena.
Qué la hunde. Que el resultado no es una superficie. En el punto de unión, cualquier entorno pequeño es la unión de dos discos pegados por su centro, y eso no es homeomorfo a un disco: al quitarle el punto central, un disco sigue siendo conexo y esta figura se parte en dos. La operación se sale del terreno de juego en el primer paso, y toda la clasificación trata de superficies. **Pero se usa**: la suma puntual es una construcción estándar y aparece en este mismo libro, porque la suma puntual de n circunferencias es el espacio al que se retrae una superficie a la que se le ha quitado un disco, y con ella calcula el capítulo 8 todos los grupos fundamentales.

La cuenta de la suma conexa: $\chi(S \# S') = \chi(S) + \chi(S') - 2$. Antes de ver qué superficies salen al sumar, conviene saber qué le pasa al número que distingue los modelos. La fórmula del título se usa en los ejercicios del final del capítulo, y sale de contar vértices, aristas y caras en dos pasos.

Paso 1: quitar un disco resta uno. La definición deja elegir el disco, y se elige bien: se triangula S y se toma como disco uno de sus triángulos. Quitar su interior no toca ni vértices ni aristas y suprime una cara, así que la superficie con el agujero tiene característica $\chi(S) - 1$. Lo mismo con S', que se queda en $\chi(S') - 1$.

Paso 2: pegar por la circunferencia no cuesta nada (el núcleo). Los dos bordes son ahora triángulos, con tres vértices y tres aristas cada uno, y el homeomorfismo de pegado se toma de modo que lleve vértices en vértices. Al pegar, la circunferencia común se cuenta una sola

vez en lugar de dos: desaparecen tres vértices y tres aristas, y el saldo es $-3+3=0$, que es la característica de una circunferencia. Luego

$$\chi(S\,\#\,S') = \big(\chi(S)-1\big) + \big(\chi(S')-1\big) - \chi(S^1) = \chi(S)+\chi(S')-2.$$

Se lee así: *el* -2 *son los dos discos quitados*, y la costura no resta nada porque lo que se comparte es una circunferencia, de característica cero. Es la regla de aditividad que usa el capítulo 8, $\chi(A\cup B)=\chi(A)+\chi(B)-\chi(A\cap B)$, con $A\cap B = S^1$.

Tres comprobaciones a mano, con los números de la sección anterior:

- dos toros: $0+0-2=-2$, y el octógono de M_2, con $k=4$ letras y un solo vértice, da por su lado $1-4+1=-2$;
- dos planos proyectivos: $1+1-2=0$, que es la característica de la botella de Klein, y en efecto la botella es N_2;
- una esfera y cualquier S: $2+\chi(S)-2=\chi(S)$, como corresponde a un elemento neutro.

4.2.1 Tipo I

Considerando el modelo $M_2 = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}$ y cortando el octógono por una diagonal se obtienen dos toros con un agujero, pegados por el borde del agujero. Es decir,

$$M_1\,\#\,M_1 = M_2.$$

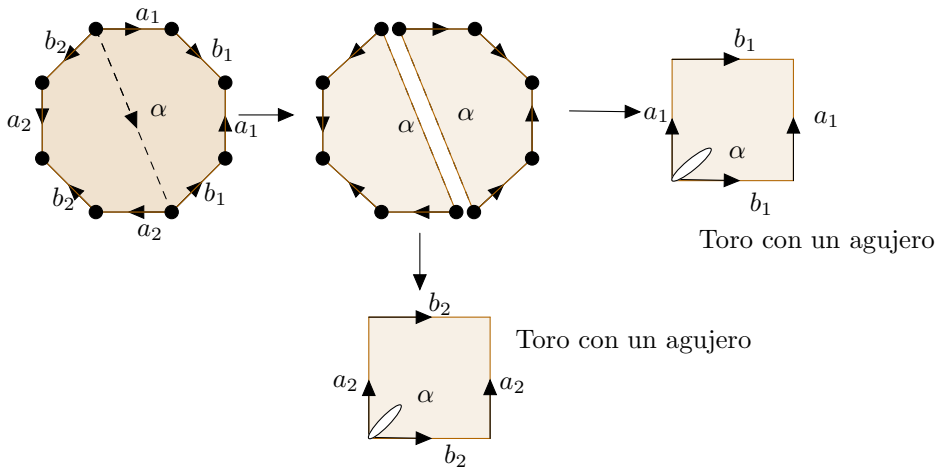


Figura 4.3: El corte α del octógono deja dos toros con un agujero. El borde libre de cada pieza es una copia de α; al volver a pegarlas se recupera M_2 (original, p. 23).

Por qué cada mitad es un toro con un agujero. Se numeran las esquinas del octógono $P_0,\dots,P_7$ y se corta por la diagonal α que va de P_0 a P_4. A un lado queda un pentágono con palabra $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\alpha$, donde α es un lado libre. Sus cinco esquinas van a parar a un solo punto, con la misma cuenta que en el toro de la sección anterior: llamando $Q_0,\dots,Q_4$ a las esquinas del pentágono, las dos a_1 juntan $Q_0\sim Q_3$ y $Q_1\sim Q_2$, y las dos b_1 juntan $Q_1\sim Q_4$ y $Q_2\sim Q_3$. Así que α empieza y acaba en el mismo punto y, una vez pegado, es una circunferencia: el borde del agujero.

Para ver qué superficie tiene ese agujero, se tapa. Taparlo es pegar un disco cuyo borde es α, es decir, un polígono de un solo lado. Pegar dos polígonos por un lado común borra ese lado y junta las dos palabras, como en el ejemplo de la botella de Klein, y aquí lo que queda es $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$: el toro. El pentágono es, pues, un toro al que le falta un disco. Su característica lo confirma: una cara, tres aristas (a_1, b_1 y α) y un vértice dan $1 - 3 + 1 = -1 = \chi(T) - 1$. Al otro lado de α pasa lo mismo con $a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$.

Iterando, M_n es el resultado de pegar M_{n-1} con un agujero y M_1 con un agujero por el borde, de donde

$$M_n = \underbrace{M_1 \# \cdots \# M_1}_{n \text{ veces}}.$$

La cuenta del principio de la sección cuadra en cada paso:

$$\chi(M_{n-1}) + \chi(M_1) - 2 = \big(2 - 2(n-1)\big) + 0 - 2 = 2 - 2n = \chi(M_n).$$

4.2.2 Tipo II

Se hace lo mismo, y lo único que cambia es la pieza que se separa. En el polígono de $2n$ lados $a_1a_1\,a_2a_2\cdots a_na_n$ se corta por la diagonal α que une el principio de la primera a_1 con el final de la segunda. A un lado queda un *triángulo* de palabra $a_1a_1\alpha$; al otro, un polígono de $2n-1$ lados con palabra $\alpha^{-1}a_2a_2\cdots a_na_n$.

El triángulo. Si sus esquinas son Q_0, Q_1, Q_2, la primera a_1 va de Q_0 a Q_1 y la segunda de Q_1 a Q_2; los orígenes juntan $Q_0 \sim Q_1$ y los extremos $Q_1 \sim Q_2$, así que las tres esquinas son un solo punto y α vuelve a ser una circunferencia. Al taparla con un disco queda la palabra a_1a_1: un disco cuyo borde se parte en dos arcos que se pegan recorriéndolos en el mismo sentido, es decir, el disco con los antípodas del borde identificados, que es el plano proyectivo. El triángulo es, por tanto, un plano proyectivo con un agujero, es decir, *una banda de Möbius*, por la observación de la sección anterior. Donde en el tipo I salía un toro con un agujero, aquí sale una banda de Möbius. La característica cuadra: una cara, dos aristas y un vértice dan $0 = \chi(P^2\mathbb{R}) - 1$.

El resto. Al tapar α en el otro polígono queda $a_2a_2\cdots a_na_n$, que es N_{n-1}. Luego, con $N_1 = P^2\mathbb{R}$,

$$N_n = N_{n-1} \# N_1 = \underbrace{N_1 \# \cdots \# N_1}_{n \text{ veces}},$$

y la cuenta vuelve a cuadrar, igual que en el tipo I:

$$\chi(N_{n-1}) + \chi(N_1) - 2 = \big(2-(n-1)\big) + 1 - 2 = 2 - n = \chi(N_n).$$

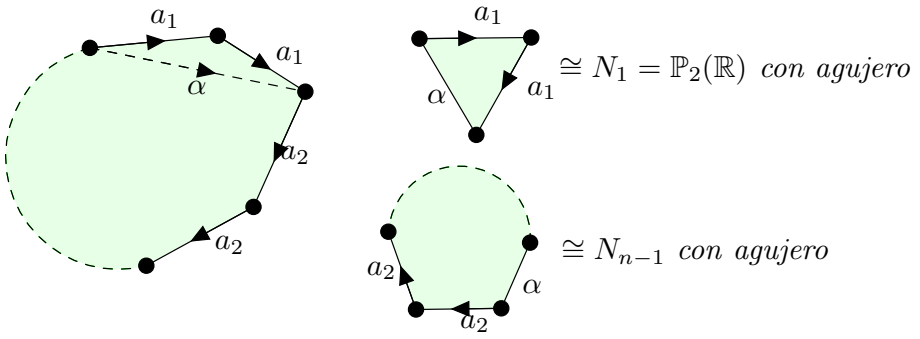


Figura 4.4: La misma operación en un polígono de tipo II separa N_1 con un agujero del resto, N_{n-1} con un agujero. El arco α pasa a ser el borde libre de ambas piezas (original, p. 24).

Observación. La esfera S^2 actúa como **elemento neutro** de la suma conexa: si M es una superficie, $M \# S^2$ es homeomorfa a M, ya que la esfera con un agujero es homeomorfa a un disco y pegar un disco por el borde del agujero es taparlo.

Qué se ha ganado. La primera pregunta de la sección tiene respuesta: sí hay una suma, y con ella toda la lista se fabrica con dos piezas, el toro y el plano proyectivo, con la esfera como cero: M_n es la suma de n toros y N_n la de n planos proyectivos. La cuenta de la característica dice cuánto cuesta cada pieza: un toro resta dos y un plano proyectivo resta uno.

La segunda pregunta, si el resultado depende de por dónde se pegue, también queda contestada, aunque la respuesta se apoya en lo que falta por demostrar. La suma $S \# S'$ es

otra superficie compacta, conexa y sin borde. Su característica, por la cuenta de arriba, solo depende de $\chi(S)$ y $\chi(S')$. Y es orientable exactamente cuando S y S' lo son:

- si una de las dos contiene una banda de Möbius, el disco se quita fuera de ella y la banda sigue dentro de la suma;
- si las dos son orientables, se orientan de modo que las orientaciones inducidas en la circunferencia de pegado se enfrenten, cambiando la de S' si hace falta.

Como la característica y la orientabilidad deciden el modelo (capítulo 8), da igual qué discos se quiten y cómo se pegue. Queda por ver qué pasa al mezclar las dos piezas.

4.3 Mezclando tipos

LA PREGUNTA: QUÉ SALE AL MEZCLAR LOS DOS TIPOS

Si a un toro se le añade un plano proyectivo, el resultado no puede ser orientable, luego tiene que estar en la lista de tipo II. Pero el toro «vale» dos letras del código y el plano proyectivo una sola, de modo que no está claro cuántas quedan. ¿Cuál es exactamente el resultado, y por qué un asa deja de contar como asa en cuanto hay un gorro cruzado?

Queda una pregunta natural: ¿qué superficie es $P^2\mathbb{R} \# T$, es decir, $N_1 \# M_1$?
La respuesta es, y merece la pena subrayarla porque desconcierta la primera vez,

$$\boxed{P^2\mathbb{R} \# T = N_1 \# M_1 = N_3 = \text{botella de Klein } \# \ P^2\mathbb{R}}$$

Se obtiene con una sucesión de cortes y pegados sobre el polígono: se corta por una diagonal, se vuelve a pegar por otro lado, y la palabra $abab\,cdc^{-1}d^{-1}$ se normaliza a $ee\,ff\,gg$.

Conviene comprobar el resultado con Euler. Los códigos $abab$ y $cdc^{-1}d^{-1}$ describen los polígonos de las superficies cerradas; no son el borde del agujero que se abre en cada una para hacer la suma conexa. La concatenación da el modelo octogonal de la suma, y

$$\chi = 1 - k + v = 1 - 4 + 2 = -1,$$

porque el octógono tiene $k = 4$ letras y sus vértices caen en dos clases. Las dos clases se cuentan como en la sección 4.1. Con las esquinas $P_0, \ldots, P_7$, las letras a y b juntan $P_0 \sim P_2 \sim P_4$ y $P_1 \sim P_3$: son las dos clases del plano proyectivo $abab$, solo que en el cuadrado P_4 era la misma esquina que P_0 y aquí es otra. Las letras c y d juntan $P_4 \sim P_7 \sim P_6 \sim P_5 \sim P_0$, que es la única clase del toro. Como P_0 y P_4 están en los dos bloques, la clase de P_0 del primero se funde con la del segundo, y quedan $\{P_0, P_2, P_4, P_5, P_6, P_7\}$ y $\{P_1, P_3\}$. Como alguna letra aparece dos veces con el mismo exponente, la superficie es no orientable, y de $\chi = 2 - n = -1$ sale $n = 3$:

$$\boxed{\chi\big(P^2\mathbb{R} \# T\big) = -1 \implies N_3}$$

La existencia de los modelos de la clasificación hace el resto: la superficie es algún N_n, y $\chi(N_n) = 2 - n = -1$ obliga a $n = 3$.

Concatenar palabras es sumar superficies. Lo que acaba de pasar con el octógono pasa siempre. Si w_1 y w_2 son palabras sin letras comunes, de superficies S_1 y S_2, el polígono de

palabra $w_1 w_2$ representa $S_1 \# S_2$. La diagonal α que separa los dos bloques lo corta en dos polígonos, $w_1\alpha$ y $\alpha^{-1}w_2$, y cada uno es S_i con un agujero, por el mismo argumento de la sección anterior: al tapar α vuelve la palabra w_i. Y el recuento lo refleja.

- Las letras de w_1 juntan el primer vértice de su bloque con el último. En el polígono de w_1 solo, esos dos eran una misma esquina, y la cadena de esquinas que da la vuelta a su vértice, como la del toro de la sección 4.1, sale por un lado de esa esquina y vuelve por el otro. Al abrir la esquina en dos, la cadena las sigue uniendo.
- Lo mismo hacen las letras de w_2 en su bloque.
- Los dos bloques comparten esos dos vértices, y sus dos clases se funden en una.

Luego $v = v_1 + v_2 - 1$ y

$$\chi = 1 - (k_1 + k_2) + (v_1 + v_2 - 1) = (1 - k_1 + v_1) + (1 - k_2 + v_2) - 2 = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

El vértice que se pierde al concatenar es el -2 de la suma conexa. En el octógono salen $v = 2 + 1 - 1 = 2$ y $\chi = 1 + 0 - 2 = -1$.

La normalización por cortes y pegados es otra demostración del resultado. Las figuras 4.5 y 4.6 recuperan la secuencia original: usan el modelo aa para el plano proyectivo y $bcb^{-1}c^{-1}$ para el toro. Las letras de los cortes cambian la descripción del borde, pero cada corte seguido del pegado indicado conserva la superficie.

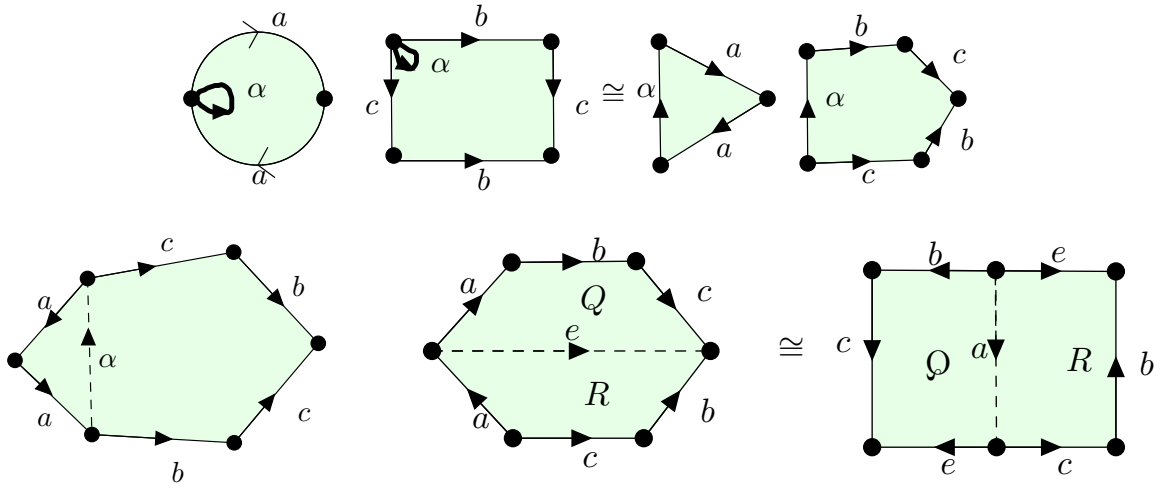
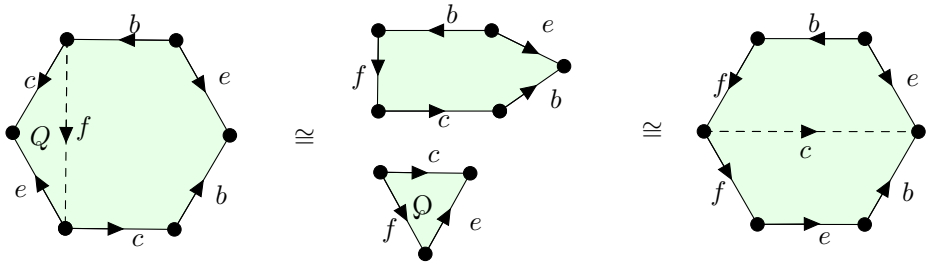


Figura 4.5: Preparación de $P^2\mathbb{R} \# T$ (arriba). Abajo, paso 1 a la izquierda: abrir por α y unir las piezas; paso 2 a la derecha: cortar por e y pegar por a. En el nuevo contorno, las dos apariciones de b mantienen el mismo sentido (original, pp. 24–25).

- 3er paso:



- 4° paso:

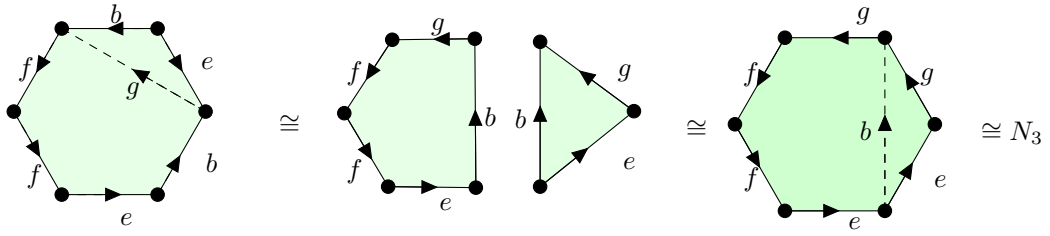


Figura 4.6: Pasos 3–4: cortar por f y pegar por c; cortar por g y pegar por b. El último polígono tiene tres parejas de lados con el mismo sentido: es N_3. Cada flecha de equivalencia representa el corte y el pegado que se ve a sus lados (original, p. 26).

LA IDEA: POR QUÉ UN ASA Y UN GORRO CRUZADO NO SE SUMAN

La igualdad $N_1 \# M_1 = N_3$ dice algo más fuerte de lo que parece: **en presencia de una sola pieza no orientable, un asa vale por dos gorros cruzados**.
La imagen es esta. Un asa es un tubo pegado por sus dos extremos, y el tubo se puede recorrer «por fuera» o «por dentro». En una superficie orientable esas dos formas de pegar dan resultados distintos. Pero si la superficie ya contiene una banda de Möbius, se puede pasear el tubo por ella, darle la vuelta y volver: las dos formas de pegar pasan a ser la misma, y el asa se descompone.
La consecuencia práctica es que las mezclas no producen una tercera familia: si hay un gorro cruzado, el resultado es no orientable. Para que la lista no tenga repeticiones también hay que distinguir los modelos dentro de cada familia.

Observación (La regla práctica)**.** De la igualdad anterior se deduce la regla que resuelve varios de los ejercicios de este capítulo: en una suma conexa, si aparece al menos un plano proyectivo, cada toro se puede sustituir por dos planos proyectivos. Es decir,

$$M_m \# N_n \;=\; N_{2m+n} \qquad \text{siempre que } n \geq 1.$$

Por qué es cierta, y para qué está $n \geq 1$. Se cambia un toro cada vez. Como la suma conexa es conmutativa y asociativa, de $M_m \# N_n$ se puede separar un toro y un plano proyectivo:

$$M_m \# N_n = M_{m-1} \# \left(T \# P^2\mathbb{R}\right) \# N_{n-1} = M_{m-1} \# N_3 \# N_{n-1} = M_{m-1} \# N_{n+2}.$$

Hay un toro menos, dos planos proyectivos más y sigue habiendo al menos uno, así que el paso se repite. Tras m pasos no queda ningún toro y sale N_{n+2m}. La hipótesis $n \geq 1$ es la que

permite dar el primer paso. Sin ningún plano proyectivo la suma es M_m, que es orientable, y la regla daría N_{2m}, que no lo es: para $m = 1$ diría que el toro es la botella de Klein, que tiene la misma característica, 0, pero no es orientable. La característica da la misma respuesta por el otro camino: $(2-2m)+(2-n)-2 = 2-(2m+n) = \chi(N_{2m+n})$, y la suma es no orientable porque contiene la banda de Möbius de N_n.

Qué se ha ganado. Mezclar no amplía la lista. Cualquier suma finita de toros y planos proyectivos es un M_m, si no hay ningún plano proyectivo, o un N_{2m+n}, si hay alguno. Para operar con las dos piezas basta una regla nueva, $T \# P^2\mathbb{R} = P^2\mathbb{R} \# P^2\mathbb{R} \# P^2\mathbb{R}$. Y la cuenta de la concatenación da un método sin figuras: se escriben las palabras una detrás de otra, se cuentan letras y clases de vértices, y sale χ. Falta saber en qué familia cae cada palabra, que es la orientabilidad.

4.4 Orientabilidad. Asas y gorros cruzados

LA PREGUNTA: LEER LA ORIENTABILIDAD EN LA PALABRA

Al pasear una normal por una banda de Möbius se vuelve al punto de partida con ella dada la vuelta; por un cilindro, no. Es una distinción cualitativa que ningún recuento de agujeros detecta y que separa en dos la lista de superficies. ¿Se puede decidir mirando únicamente la palabra del polígono, sin dibujar nada y sin pasear ninguna normal?

4.4.1 Orientabilidad en las superficies de tipo I y II

Definición. Una superficie es **orientable** si admite un atlas cuyas cartas tienen orientaciones compatibles: los cambios de coordenadas preservan la orientación del plano. Equivale a poder elegir de forma continua una orientación local en cada punto.

Para una superficie regular de $\mathbb{R}^3$, esto equivale a que exista un campo normal unitario global y continuo. La normal puede variar de dirección a lo largo de una curva; lo que no ocurre es que, al continuarla alrededor de una curva cerrada, regrese con el signo cambiado.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: DEFINIR ORIENTABLE COMO «NO CONTIENE UNA BANDA DE MÖBIUS»

La alternativa. Tomar como definición de superficie orientable la de que no contenga ninguna banda de Möbius.
Su ventaja. Es visual y, sobre todo, no menciona vectores normales. Eso importa aquí más de lo que parece: una superficie abstracta, definida como cociente de un polígono, no está metida en $\mathbb{R}^3$ y no tiene ningún vector normal que pasear, de modo que una definición basada solo en normales no sirve para las superficies abstractas. La definición mediante orientaciones locales evita esa dificultad.
Qué la hunde como definición de trabajo. Que es una condición negativa sobre todos los subconjuntos posibles: aplicarla exigiría revisar que ningún trozo de la superficie es una banda de Möbius, y no hay forma directa de hacer esa revisión. Lo que sí se puede hacer, y es lo que hace el teorema que viene a continuación, es leer la respuesta en la palabra: la superficie es no orientable exactamente cuando alguna letra aparece dos veces con el mismo exponente, y eso se decide de un vistazo. Las dos formulaciones son equivalentes — el propio teorema afirma que toda superficie de tipo II contiene una banda de Möbius —, y la que se usa para calcular es

la de la palabra.

LA IDEA: LA BANDA DE MÖBIUS ESTÁ ESCRITA EN LA PALABRA

La imagen que predice el enunciado cabe en un trozo de polígono. Supóngase que en la palabra aparece una letra dos veces **con el mismo exponente**, como en $\dots a \dots a \dots$. Eso significa que los dos lados marcados con a se cosen recorriéndolos *en el mismo sentido de giro* del polígono, es decir, enfrentados con media vuelta. Recórtese ahora una tira estrecha de papel que vaya de uno de esos lados al otro por dentro del polígono, y cósase. Lo que sale, con esa media vuelta, es literalmente una banda de Möbius. No hay que buscarla: se lee.
Y al revés, en un bloque $aba^{-1}b^{-1}$ cada letra aparece una vez en cada sentido, de modo que los dos lados se cosen enfrentados sin girar y la tira sale plana, como un cilindro. Por eso la distinción entre las dos familias no es un accidente de la lista, sino la misma distinción de siempre entre pegar recto y pegar con media vuelta, escrita en forma de exponentes.

La intuición falsa. Uno da por supuesto que para decidir la orientabilidad hay que pasear una normal por la superficie, como se hace en la parte de geometría. En las superficies de tipo II eso ni siquiera se puede hacer, porque no viven en $\mathbb{R}^3$ y no tienen ninguna normal que pasear. La orientabilidad no es una propiedad del vector normal: el vector normal era solo la forma de detectarla cuando la superficie estaba metida en el espacio. La propiedad de fondo es si existe o no un trozo que se cierre sobre sí mismo dando media vuelta, y eso se decide con los exponentes, sin dibujar nada.

La otra mitad: si ninguna letra repite exponente, la superficie es orientable. La intuición ha visto por qué una letra con el mismo exponente dos veces fabrica una banda de Möbius. Falta ver por qué, si eso no pasa nunca, no hay ninguna, y se ve en el toro.

- Se orienta el interior del cuadrado con el giro contrario a las agujas del reloj. Esa orientación induce en el borde el sentido de recorrido $P_0 \to P_1 \to P_2 \to P_3$.
- La letra a aparece una vez con exponente $+1$, y el borde la recorre en el sentido de su flecha, y otra con exponente -1, y el borde la recorre al revés. Lo mismo b.
- Al coser, los dos lados se juntan con los sentidos inducidos enfrentados. Esa es justamente la condición para que dos trozos orientados se peguen conservando la orientación: la misma que, en la demostración del teorema de Gauss-Bonnet global del capítulo 1, hacía que cada lado interno de una triangulación se recorriera dos veces en sentidos opuestos.

Así, la orientación del interior del polígono se prolonga a través de cada costura. En el vértice, los cuartos de disco de las esquinas se juntan con el mismo giro, que es la vuelta a_s, b_s, a_e, b_e de la sección 4.1. Ningún camino vuelve con la orientación cambiada, y la superficie es orientable. El argumento no usa nada del toro salvo que cada letra aparece una vez con cada exponente, así que vale para cualquier palabra así.

Con el mismo exponente pasa lo contrario. El borde recorre los dos lados en el mismo sentido, al coserlos los sentidos inducidos coinciden en vez de enfrentarse, y la orientación que llega por un lado de la costura es la opuesta a la que había al otro. La tira que cruza esa costura es la banda de Möbius de la intuición.

Teorema. Para superficies compactas, conexas y sin borde, incluyendo $M_0 = S^2$ y $N_1 = P^2\mathbb{R}$,

se tienen las dos caracterizaciones siguientes:

1. Una superficie es de tipo I si y solo si es orientable.
2. Una superficie es de tipo II si y solo si es no orientable. Además, toda superficie de este tipo contiene al menos una banda de Möbius.

Leer una palabra, con la tabla delante. Las cuatro palabras de la sección 4.1 y dos hexágonos, con los exponentes de cada letra, las clases de esquinas y la característica:

Palabra	exponentes	v	χ	superficie
$abb^{-1}a^{-1}$	a: $+-$, b: $+-$	3	2	esfera, M_0
$aba^{-1}b^{-1}$	a: $+-$, b: $+-$	1	0	toro, M_1
$abab$	a: $++$, b: $++$	2	1	plano proyectivo, N_1
$aba^{-1}b$	a: $+-$, b: $++$	1	0	botella de Klein, N_2
$abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$	todas $+-$	2	0	toro, M_1
$abcabc$	todas $++$	3	1	plano proyectivo, N_1

En los dos hexágonos, cada lado se pega con el opuesto. En $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$ las esquinas se reparten en las clases $\{P_0, P_2, P_4\}$ y $\{P_1, P_3, P_5\}$, y sale otra vez el toro: un hexágono con los lados opuestos pegados por traslación. En $abcabc$ se reparten en $\{P_0, P_3\}$, $\{P_1, P_4\}$ y $\{P_2, P_5\}$, y sale el plano proyectivo: es el disco con los antípodas del borde pegados, con el borde partido en seis arcos en vez de en cuatro. El número de lados no decide nada; lo deciden los exponentes y las clases.

La regla no depende de por dónde se empiece a leer ni del sentido. Empezar en otra esquina solo gira la palabra. Leerla al revés invierte el orden y cambia *todos* los exponentes a la vez: $aba^{-1}b^{-1}$ leída al revés es $bab^{-1}a^{-1}$. Dos exponentes iguales siguen siendo iguales y dos opuestos siguen siendo opuestos.

Qué se ha ganado: leer una palabra en tres pasos. Con lo visto en este capítulo, una palabra en la que cada letra aparece dos veces se reconoce sin dibujar:

1. *Es una superficie.* Cada dirección de salida de un vértice, como a_s, está en exactamente dos esquinas, las dos en que empieza una a. Así, al ir pasando de una esquina a la siguiente por la dirección que comparten, la cadena no se bifurca nunca: se cierra en una sola vuelta que recorre la clase entera, como en el toro, y alrededor de cada vértice hay un disco. Si alguna letra aparece tres veces, ya no es una superficie; el hexágono del último ejercicio del capítulo lo muestra.
2. *La familia, por los exponentes.* Si alguna letra repite exponente, es de tipo II; si ninguna lo hace, de tipo I.
3. *El número, por la característica.* Se cuentan las clases de esquinas v, se calcula $\chi = 1 - k + v$ y se despeja: M_n con $n = (2 - \chi)/2$ o N_n con $n = 2 - \chi$.

Por ejemplo, $abcabc$ tiene alguna letra repetida con el mismo exponente y $\chi = 1 - 3 + 3 = 1$, luego es N_1. El paso 3 usa que la característica no depende del polígono, que se enuncia en la sección 8.4.

CONEXIÓN: LA ORIENTABILIDAD EN LAS DOS MITADES DE LA ASIGNATURA

La palabra «orientable» apareció en la parte de geometría como hipótesis del corolario del teorema de Gauss-Bonnet para superficies compactas, y allí significaba que existíera un campo normal unitario global. La orientación local extiende esa misma propiedad a superficies abs-

> tractas y se convierte en un invariante *clasificador*. Es también la orientación que se necesita para integrar formas de grado máximo y aplicar Stokes.
> Y hay una consecuencia que cierra el círculo: como las superficies de tipo II no caben en $\mathbb{R}^3$, en la parte de geometría **todas** las superficies compactas y sin borde eran orientables, y por eso allí la característica bastaba para clasificar. Aquí no basta, y la orientabilidad es el segundo invariante que hace falta.

4.4.2 Asas y gorros cruzados

Teorema. La superficie de tipo I M_n es el resultado de pegar n **asas** a S^2.

Pegar un asa significa hacer dos agujeros en la esfera y pegar en ellos los bordes de un cilindro. Un toro es una esfera con un asa; el toro doble, con dos; y así sucesivamente.

Teorema. La superficie de tipo II N_k es el resultado de pegar k **gorros cruzados** a S^2.

Observación. Un gorro cruzado representa la banda de Möbius $P^2\mathbb{R} \setminus B$, donde B es un disco abierto, con la circunferencia del borde colocada en un plano. La intersección aparente del gorro cruzado desaparece si se retuerce el borde del disco B, pero entonces no se puede pegar B a ese borde retorcido y quedarse a la vez en el espacio tridimensional sin introducir una intersección aparente.

Debido a la imposibilidad de embeber $P^2\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$, una representación tridimensional completa de $P^2\mathbb{R}$ no puede ser inyectiva. Esto no excluye una inmersión suave con autointersecciones: embeber exige además representar la superficie sin identificar puntos distintos. Lo mismo ocurre con el resto de superficies de tipo II: la representación habitual de la botella de Klein tiene una circunferencia de autointersección que es un artefacto del dibujo, no de la superficie.

Por qué un asa es un toro, y un gorro cruzado un plano proyectivo. Los dos teoremas son la suma conexa de la sección 4.2 vista de otra manera.

- *El asa.* Se toma en S un disco que contenga los dos agujeros. Ese disco agujereado es una esfera con tres agujeros, un pantalón, y al pegarle el cilindro por dos de sus bordes queda una pieza orientable con un solo borde y característica $-1+0=-1$. Tapando ese borde con un disco sale una superficie cerrada, orientable y de característica 0, que es el toro; la pieza es, pues, un toro con un agujero. Pegar un asa a una superficie S es, por tanto, quitar un disco y pegar un toro con un agujero, es decir, $S \# T$. Y $M_n = S^2 \# T \# \cdots \# T$.
- *El gorro cruzado.* Pegar un gorro es quitar un disco y pegar por su borde una banda de Möbius, que es un plano proyectivo con un agujero (sección 4.1). Es $S \# P^2\mathbb{R}$, y N_k es la esfera con k gorros.

Hay una precisión que el enunciado da por supuesta. El cilindro del asa se pega de modo que las orientaciones inducidas en los bordes se enfrenten, como en el ejercicio de la forma normal. Si uno de sus extremos se pega con media vuelta, sale un *asa torcida*, la pieza deja de ser orientable, y la esfera con un asa torcida es la botella de Klein, con la misma característica 0 que el toro.

El asa torcida explica también la intuición de la sección anterior. Si S ya tiene un gorro cruzado, un extremo de un asa recta se puede deslizar a lo largo de la banda de Möbius y volver a su sitio dado la vuelta: el asa recta se ha convertido en torcida. Por eso $T \# P^2\mathbb{R}$ es lo mismo que la botella de Klein sumada con $P^2\mathbb{R}$, que es $N_2 \# N_1 = N_3$.

LA IDEA: EL RESUMEN QUE HAY QUE LLEVARSE

Toda superficie compacta, conexa y sin borde es una esfera a la que se le han pegado o bien n asas, o bien k gorros cruzados. Nada más. Y las dos familias no se solapan porque las primeras son orientables y las segundas no.
Lo que falta para cerrar la clasificación es probar que dentro de cada familia los modelos son distintos entre sí, es decir, que M_n y M_m no son homeomorfas si $n \neq m$. Eso lo hará el grupo fundamental en el capítulo 8.

4.5 Problemas de la relación

Ejercicio 4.1. *Mezclas de toros y planos proyectivos*

Sea M la suma conexa de n toros y N la suma conexa de n planos proyectivos. ¿Qué superficie es $M \# N$? ¿Y si N es la suma conexa de n botellas de Klein?

Resolución. Primer movimiento: decidir el tipo. Tomamos $n \geq 1$. La superficie N contiene una banda de Möbius. El disco que se quita para hacer la suma conexa puede elegirse fuera de esa banda, que permanece en $M \# N$. Luego $M \# N$ **no es orientable** y es de tipo II. Solo queda contar cuántos gorros cruzados tiene.

El recuento. $M = M_n$ es la suma conexa de n toros, y $N = N_n$ la de n planos proyectivos, de modo que

$$M \# N = \underbrace{T \# \cdots \# T}_{n} \# \underbrace{P^2\mathbb{R} \# \cdots \# P^2\mathbb{R}}_{n}.$$

Aplicando n veces la regla $T \# P^2\mathbb{R} = P^2\mathbb{R} \# P^2\mathbb{R} \# P^2\mathbb{R}$, cada toro se convierte en dos planos proyectivos adicionales:

$$M \# N = N_{2n+n} = N_{3n}.$$

Si N es la suma conexa de n botellas de Klein. Cada botella de Klein es N_2, luego $N = N_{2n}$, y ahora

$$M \# N = M_n \# N_{2n} = N_{2n+2n} = N_{4n}.$$

■

Otra vía (contando características). Se puede comprobar con la característica de Euler-Poincaré, que es aditiva bajo suma conexa en la forma $\chi(S \# S') = \chi(S) + \chi(S') - 2$. Con $\chi(M_n) = 2 - 2n$ y $\chi(N_n) = 2 - n$:

$$\chi(M_n \# N_n) = (2 - 2n) + (2 - n) - 2 = 2 - 3n = \chi(N_{3n}). \quad \checkmark$$

Y como $M \# N$ es no orientable, la característica basta para identificarla dentro de la familia de tipo II.

Dónde se falla. En empezar por la característica. Para $n = 2$, $\chi(M_2 \# N_2) = -2 + 0 - 2 = -4$, que es también la característica de M_3. Quien cuenta primero y no mira la orientabilidad contesta «la suma de tres toros», y la respuesta es N_6. El otro fallo es usar la regla práctica de la sección «Mezclando tipos» sin ningún plano proyectivo; aquí no hay problema, porque N es la suma de $n \geq 1$ planos proyectivos o botellas.

QUÉ DEJA. La regla de reescritura $T \# P^2\mathbb{R} = P^2\mathbb{R} \# P^2\mathbb{R} \# P^2\mathbb{R}$, que es la única que hace falta para operar con sumas conexas, y el orden correcto de trabajo: *primero se decide la orientabilidad, que fija la familia; después se cuenta*. Los dos datos se complementan; contar solo χ puede dejar dos posibilidades.

Ejercicio 4.2. *Si la suma conexa es una esfera, los sumandos también*

Probar que si A y B son dos superficies compactas tales que $A \# B \cong S^2$, entonces $A \cong B \cong S^2$.

Resolución. La idea. La suma conexa nunca «mejora» una superficie: añadir algo a una esfera solo puede bajar la característica. Si el resultado es una esfera, es que no se ha añadido nada.

El argumento. Los sumandos son conexos: cualquier componente ajena al disco usado en la suma seguiría separada, pero el resultado es una esfera. Por la aditividad de la característica,

$$\chi(A \# B) = \chi(A) + \chi(B) - 2.$$

Si $A \# B \cong S^2$, entonces $\chi(A \# B) = 2$ y por tanto

$$\chi(A) + \chi(B) = 4.$$

Ahora bien, la característica de una superficie compacta y conexa es siempre $\chi \leq 2$, con igualdad únicamente para la esfera: en efecto, $\chi(M_n) = 2 - 2n \leq 2$ y $\chi(N_n) = 2 - n \leq 1$, y el valor 2 solo lo alcanza $M_0 = S^2$.

De $\chi(A) \leq 2$, $\chi(B) \leq 2$ y $\chi(A) + \chi(B) = 4$ se sigue que $\chi(A) = \chi(B) = 2$, luego las dos son esferas. ■

Otra vía (con orientabilidad, sin características). Se puede razonar sin contar. Si A o B fuese no orientable, contendría una banda de Möbius, y esa banda seguiría dentro de $A \# B$, que sería no orientable; pero la esfera es orientable. Luego las dos son orientables, es decir, de tipo I, digamos $A = M_p$ y $B = M_q$. Y $M_p \# M_q = M_{p+q}$, que es la esfera solo si $p + q = 0$, es decir, $p = q = 0$.

Dónde se falla. En olvidar el -2 de la fórmula. Sin él, dos planos proyectivos darían $1 + 1 = 2$, y se «demostraría» que $P^2\mathbb{R} \# P^2\mathbb{R}$ es la esfera, cuando es la botella de Klein, de característica 0.

Qué hemos aprendido. La suma conexa no tiene inversos. Como $\chi \leq 2$ para toda superficie compacta y conexa, $\chi(A \# B) = \chi(A) + \chi(B) - 2 \leq \chi(A)$: sumar nunca sube la característica, y lo que se añade no se quita añadiendo otra cosa. Es la misma aritmética que la de los números naturales, donde $a + b = 0$ obliga a $a = b = 0$.

Ejercicio 4.3. *Superficies representables en un polígono dado*

1. Dar, justificadamente, seis superficies compactas que se puedan representar en un pentágono. ¿Hay alguna más?
2. Probar que si una superficie cerrada M se puede representar en un decágono, entonces $\chi(M) \geq -3$. ¿Puede representarse la suma conexa de tres toros en un decágono? ¿Y la de tres planos proyectivos?

Resolución. La cuenta que resuelve los dos apartados. Un modelo sobre un polígono de $2k$ lados, con los lados identificados dos a dos, da un complejo con

$$C = 1 \text{ cara}, \qquad A = k \text{ aristas}, \qquad V = v \text{ clases de vértices},$$

luego

$$\chi = C - A + V = 1 - k + v.$$

Todo depende, pues, de v: cuántas clases de vértices quedan tras las identificaciones.

1. El pentágono. Usamos el convenio de identificar lados completos por parejas, permitiendo lados libres y sin subdividirlos. Un pentágono tiene cinco lados, que es impar, así que no se pueden identificar todos dos a dos: siempre queda al menos un lado libre y la superficie tiene **borde**. Llamando k al número de pares identificados y $f = 5 - 2k$ al de lados libres, hay $E = k + f$ aristas, una cara y v clases de vértices, luego $\chi = v - k - f + 1$, y solo caben tres casos: $k = 0$, $k = 1$ y $k = 2$.

$k = 0$. No se identifica nada: la superficie es el propio pentágono, es decir, un **disco**, con $\chi = 1$.

$k = 1$, *tres lados libres.* Identificar un solo par junta a lo sumo dos parejas de vértices, luego $v \geq 3$ y $\chi = v - 4 + 1 \geq 0$; y como $\chi \leq 1$ siempre, solo salen $\chi = 1$ (otra vez el disco) y $\chi = 0$. Con $\chi = 0$ hay exactamente dos superficies según su orientabilidad: el **cilindro**, con dos componentes de borde, y la **banda de Möbius**, con una. Los códigos de abajo realizan ambos casos.

$k = 2$, *un lado libre.* Ahora $E = 3$ y $\chi = v - 2$, y el borde tiene una sola componente, porque hay un solo lado libre. Con $v = 1$ queda $\chi = -1$, y hay dos superficies compactas con $\chi = -1$ y un borde: el **toro con un agujero**, si el código es orientable, y la **botella de Klein con un agujero**, si no lo es. Los valores $v = 2$ y $v = 3$ devuelven la banda de Möbius y el disco.

Así que la lista completa tiene **cinco** superficies: disco, cilindro, banda de Möbius, toro con un agujero y botella de Klein con un agujero. No hay ninguna más: enumerando los pares de lados y los dos sentidos posibles para cada identificación no aparece nada distinto. La enumeración es corta. Sin pares hay una manera; con un par, diez elecciones de los dos lados por dos sentidos, veinte; con dos pares, quince elecciones (el lado libre y cómo se emparejan los otros cuatro) por cuatro sentidos, sesenta. De esas 81 palabras, 16 dan el disco, 35 la banda de Möbius, 5 el cilindro, 5 el toro con un agujero y 20 la botella de Klein con un agujero.

Para comprobar que las cinco se obtienen realmente, sirven los códigos

disco	$abcde$
cilindro	$aba^{-1}cd$
banda de Möbius	$abacd$
toro con un agujero	$aba^{-1}b^{-1}c$
botella de Klein con un agujero	$aba^{-1}bc$

Las letras que aparecen una sola vez representan lados libres.

Observación (El enunciado pide seis)**.** El enunciado pide seis superficies. Con el convenio anterior hay cinco tipos de homeomorfismo. Añadir «el plano proyectivo con un agujero» no da una sexta: es la banda de Möbius, ya incluida.

2. El decágono. Con $2k = 10$, es decir $k = 5$,

$$\chi = 1 - 5 + v = v - 4.$$

Como $v \geq 1$ — siempre queda al menos una clase de vértices —, se obtiene

$$\chi(M) \geq 1 - 4 = -3.$$

¿Tres toros? $\chi(M_3) = 2 - 6 = -4 < -3$. **No** se puede representar en un decágono: harían falta al menos doce lados, y en efecto M_3 tiene modelo canónico en un polígono de $4 \cdot 3 = 12$ lados.

¿Tres planos proyectivos? $\chi(N_3) = 2 - 3 = -1 \geq -3$. **Sí** se puede. Su modelo canónico $a_1a_1a_2a_2a_3a_3$ tiene seis lados; para llevarlo a diez basta añadir dos pares cancelables, por ejemplo escribiendo $a_1a_1a_2a_2a_3a_3\, bb^{-1}\, cc^{-1}$, que representa la misma superficie porque cada par xx^{-1} adyacente equivale a hacer la suma conexa con una esfera. Es la concatenación de la sección «Mezclando tipos»: la palabra xx^{-1} sola es la esfera, con dos clases de esquinas, y añadirla suma una clase. El recuento lo confirma: $k = 5$ letras y $v = 1 + (2-1) + (2-1) = 3$ clases dan $\chi = 1 - 5 + 3 = -1 = \chi(N_3)$. ■

Dónde se falla. En el pentágono, en usar $\chi = 1 - k + v$ olvidando los lados libres: cada lado libre es una arista más del complejo, y la cuenta buena es $\chi = v - (k + f) + 1$. En el decágono, en tomar la cota por una construcción: $\chi \geq -3$ dice que N_3 no está prohibida, pero para ver que se representa hay que dar una palabra de diez lados, y la canónica tiene seis.

Observación (La cota $\chi \geq 1 - k$ y para qué sirve)**.** La desigualdad $\chi \geq 1 - k$ para un polígono de $2k$ lados es una herramienta de imposibilidad muy barata. Su lectura: *un polígono con pocos lados no puede representar una superficie con muchos agujeros*.

Y la cota se alcanza exactamente cuando todos los vértices se identifican en uno solo, que es lo que ocurre en los modelos canónicos del teorema de clasificación.

QUÉ DEJA. La fórmula $\chi = 1 - k + v$ para un modelo sobre un polígono de $2k$ lados, que es la forma más rápida de calcular la característica de una palabra sin dibujar nada: se cuentan las letras distintas y las clases de vértices, y ya está. Se usará en todos los ejercicios de clasificación del capítulo 8.

Ejercicio 4.4. *La forma normal de Möbius por sumas de esferas con agujeros*

Una superficie compacta, conexa, orientable y sin borde puede describirse cortándola por una familia de planos paralelos suficientemente próximos: los trozos que quedan son esferas con agujeros, y la superficie se representa como una **suma formal** de símbolos $(a_1a_2\ldots a_n)$, donde el símbolo representa una esfera con n agujeros y las letras nombran las componentes de su borde. La suma indica que dos trozos se pegan por la componente del borde que tienen en común, de modo que cada letra aparece exactamente dos veces en la suma. Los pegados se hacen de forma compatible con la orientación: las orientaciones inducidas en los bordes se enfrentan.

1. Interpretar geométricamente la superficie dada por la suma formal
$$(a) + (abc) + (bcd) + (def) + (f) + (eg) + (g).$$
2. Comprobar que $(xa_1a_2\ldots) + (xb_1b_2\ldots)$ y $(a_1a_2\ldots b_1b_2\ldots)$ son homeomorfas, siendo x y todas las demás letras distintas entre sí.
3. Comprobar que toda superficie compacta, conexa, orientable y sin borde se puede expresar, salvo homeomorfismo, como $(a_1a_2\ldots a_n) + (a_1a_2\ldots a_n)$, que es su **forma normal**, con $n \geq 1$. Hallar la forma normal de la superficie del primer apartado.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *La característica de una esfera con n agujeros vale $2-n$: es la esfera, con $\chi=2$, a la que se le han quitado n discos, y cada disco quitado resta una unidad.*
2. *¿Cuánto vale la característica de una circunferencia? Contesta eso y sabrás cómo se comporta χ al pegar dos trozos por un borde común.*
3. *Una superficie compacta, conexa y orientable está determinada por un solo número. Basta calcularlo.*
4. *En el tercer apartado, piensa en el toro doble apoyado sobre una mesa y córtalo por el plano horizontal que lo parte en dos mitades simétricas. ¿Cuántas circunferencias aparecen en el corte y qué es cada mitad?*

Resolución. La herramienta: la característica es aditiva al pegar por circunferencias. Si dos trozos A y B se pegan a lo largo de una curva cerrada simple C, entonces

$$\chi(A\cup B)=\chi(A)+\chi(B)-\chi(C)=\chi(A)+\chi(B),$$

porque $\chi(S^1)=0$: una circunferencia se triangula con n vértices y n aristas y ninguna cara, luego $V-E+T=n-n+0=0$. Lo mismo vale si se pegan por varias circunferencias disjuntas, restando cero cada vez.

Y la característica de una esfera con n agujeros es $2-n$: quitar un disco abierto de una superficie triangulada equivale a suprimir una cara, lo que baja χ en una unidad.

Primer apartado. Se cuentan las características de los siete trozos:

$$\begin{array}{lll}(a):\ \chi=1, & (abc):\ \chi=-1, & (bcd):\ \chi=-1, \quad (def):\ \chi=-1,\\ (f):\ \chi=1, & (eg):\ \chi=0, & (g):\ \chi=1.\end{array}$$

Cada letra a,b,c,d,e,f,g aparece exactamente dos veces en la suma, de modo que todas las componentes de borde quedan pegadas y el resultado es una superficie **cerrada**. Y la pieza está conectada: (a) se pega a (abc) por a; (abc) a (bcd) por b y por c; (bcd) a (def) por d; (def) a (f) por f y a (eg) por e; y (eg) a (g) por g.

Sumando y sin restar nada, por lo dicho arriba,

$$\chi=1-1-1-1+1+0+1=0.$$

Una superficie compacta, conexa, orientable y con $\chi=2-2n=0$ tiene $n=1$: es un **toro**.

Conviene ver de dónde sale el asa. Los trozos (abc) y (bcd) se pegan por *dos* circunferencias a la vez, b y c; pegar dos pantalones por dos de sus bordes es exactamente construir un tubo que vuelve sobre sí mismo, es decir, un asa. Todos los demás pegados son por una sola circunferencia y no añaden género.

Segundo apartado. Sea $P=(xa_1\dots a_p)$, una esfera con $p+1$ agujeros, y $Q=(xb_1\dots b_q)$, una esfera con $q+1$ agujeros, y sea $S=P+Q$ el resultado de pegarlas por el borde x.

S es conexa, orientable y compacta, con borde formado por las $p+q$ circunferencias $a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_q$. Su característica es

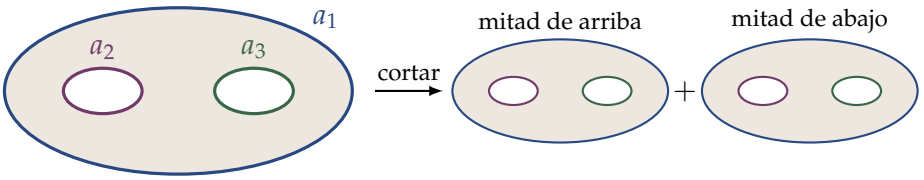
$$\chi(S)=\big(2-(p+1)\big)+\big(2-(q+1)\big)=2-(p+q),$$

que es exactamente la de una esfera con $p+q$ agujeros. Y dos superficies compactas, conexas, orientables, con el mismo número de componentes de borde y la misma característica son homeomorfas: tapando cada componente de borde con un disco se obtienen dos superficies cerradas, orientables y con la misma característica — en los dos casos $2-(p+q)+(p+q)=2$ —, es decir, dos esferas, y el homeomorfismo entre ellas se puede elegir llevando los discos añadidos en los discos añadidos.

Luego $S \cong (a_1 \dots a_p b_1 \dots b_q)$: **pegar dos esferas con agujeros por una sola circunferencia vuelve a dar una esfera con agujeros**, y los agujeros que sobreviven son los que no se han usado para pegar. ■

Tercer apartado. Sea S una superficie orientable, compacta, conexa y sin borde, de género g, es decir, con $\chi = 2 - 2g$.

Se toma el modelo estándar de S simétrico respecto de un plano: la frontera de una región plana con g agujeros engrosada en la dirección perpendicular (redondeando las esquinas). El plano medio corta la superficie en $g + 1$ circunferencias: el borde exterior de la región plana y los g bordes interiores. Las dos mitades son conexas y se corresponden por la reflexión. En el toro doble, con $g = 2$, se ve así:



el toro doble visto desde arriba; el plano medio lo corta en a_1, a_2 y a_3

cada mitad es una esfera con tres agujeros: $(a_1 a_2 a_3) + (a_1 a_2 a_3)$

Cada mitad es compacta, conexa, orientable, con $g + 1$ componentes de borde, y su característica es la mitad de la de S, porque las dos se pegan a lo largo de circunferencias:

$$\chi(\text{mitad}) = \tfrac{1}{2}\chi(S) = 1 - g = 2 - (g + 1),$$

que es la característica de una esfera con $g + 1$ agujeros. Por el criterio del apartado anterior, cada mitad *es* una esfera con $g + 1$ agujeros. Luego

$$S = (a_1 a_2 \dots a_{g+1}) + (a_1 a_2 \dots a_{g+1}),$$

que es la forma normal anunciada, con $n = g + 1$.

El recíproco se comprueba con la característica, y son tres líneas que conviene escribir. La suma $(a_1 \dots a_n) + (a_1 \dots a_n)$ pega dos esferas con n agujeros a lo largo de sus n circunferencias de borde, de modo que el resultado es compacto, conexo, orientable y esta vez *sin* borde, porque no queda ninguna circunferencia libre. Las características se suman sin corrección, porque lo que se comparte son circunferencias y $\chi(S^1) = 0$:

$$\chi = (2 - n) + (2 - n) = 4 - 2n = 2 - 2(n - 1).$$

Y una superficie cerrada, conexa y orientable está determinada por su característica, que vale $2 - 2g$ en género g; comparando, $g = n - 1$.

La forma normal del primer apartado. Como allí salió $g = 1$, la forma normal es

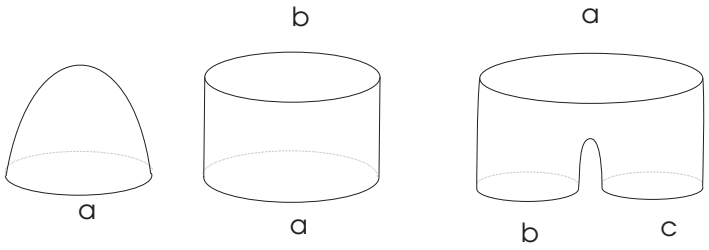
$$(a_1 a_2) + (a_1 a_2),$$

es decir, dos cilindros pegados por sus dos circunferencias de borde. Y en efecto: dos tubos pegados por sus dos extremos forman un toro. ■

Dónde se falla. En el índice de la forma normal: la superficie de género g lleva $n = g + 1$ letras, no g. Con una sola letra, $(a) + (a)$ son dos discos pegados por el borde, que es la esfera; el toro necesita dos, y el toro doble tres, que son las tres circunferencias de la figura. Y en el

primer apartado, en restar algo por cada pegado: las circunferencias tienen característica cero y no se resta nada.

Observación. Los tres trozos básicos se dibujan así: (a), (ab) y (abc) son un disco, un cilindro y un pantalón, respectivamente. Son esferas con uno, dos y tres agujeros; las letras nombran sus componentes de borde, no aristas de un polígono.



De izquierda a derecha: (a), (ab) y (abc).

QUÉ DEJA. Una manera de manejar superficies que no pasa por polígonos ni por palabras: se descomponen en piezas sencillas y se lleva la cuenta de la característica, que es aditiva porque las circunferencias por las que se pega tienen característica nula. Es exactamente el mismo mecanismo que en la parte de geometría permitía trocear una región en triángulos sin que la cuenta cambiara, y es el que está detrás de la fórmula $\chi(S \# S') = \chi(S) + \chi(S') - 2$ de la suma conexa.

Ejercicio 4.5. *Un hexágono que no da una superficie*

Describir cómo son los entornos de cada punto en el espacio cociente obtenido a partir de un hexágono cuyas aristas del borde quedan identificadas según la sucesión $aabba^{-1}b$. A los espacios triangulables en los que todo punto tiene un entorno de uno de esos tipos, aun no siendo superficies, se les llama *falsas superficies*.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Cuenta cuántas veces aparece cada letra. En un modelo de superficie cada letra aparece exactamente dos veces; aquí no.*
2. *Un punto interior de una arista tiene un entorno formado por tantos semidiscos pegados por su diámetro como aristas se hayan identificado.*
3. *Para el vértice, identifica primero cuántos vértices distintos quedan. Después dibuja el* enlace*: el grafo cuyos vértices son las direcciones de salida a lo largo de las aristas y cuyas aristas son los sectores del hexágono.*
4. *En un punto de superficie el enlace tiene que ser una circunferencia. Comprueba si lo es.*

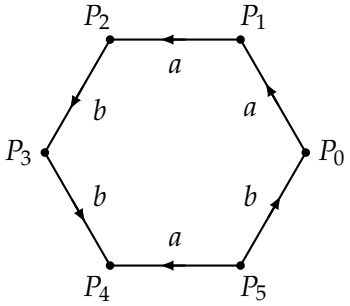
Resolución. La idea. Ser superficie es una propiedad local: se mira qué entorno tiene cada punto. Los puntos del cociente son de tres clases — interiores, de arista y vértices —, y en cada una se decide con el recurso del toro de la sección 4.1: contar qué trozos del polígono se juntan alrededor del punto y cómo se enlazan. Si cada letra apareciera dos veces saldría siempre un disco; aquí no.

Lo primero: cada letra aparece tres veces. En la palabra $a\,a\,b\,b\,a^{-1}\,b$ la letra a aparece en las posiciones primera, segunda y quinta, y la letra b en la tercera, cuarta y sexta. Eso ya descarta que el cociente sea una superficie, y es lo que hay que cuantificar.

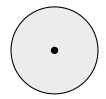
Se numeran los vértices del hexágono $P_0, \ldots, P_5$ y las aristas e_i de P_i a P_{i+1}, con índices

módulo 6, recorriendo el borde en un sentido fijo:

$$e_0 = a, \quad e_1 = a, \quad e_2 = b, \quad e_3 = b, \quad e_4 = a^{-1}, \quad e_5 = b.$$



la palabra $aabba^{-1}b$ leída desde P_0



interior: un disco



arista: tres hojas
(sección transversal)

Que e_4 lleve exponente -1 significa que, como arista de tipo a, se recorre de P_5 a P_4 y no al revés.

Tipo 1: puntos interiores del hexágono. No se identifican con nada, luego tienen un entorno homeomorfo a un disco abierto del plano. Son puntos de superficie.

Tipo 2: puntos interiores de una arista. Un punto interior de una arista de tipo a se identifica con sendos puntos interiores de las otras dos aristas de tipo a. Un entorno suyo en el hexágono es un semidisco; al identificar, quedan **tres semidiscos pegados por su diámetro común**. Ese espacio — un «libro de tres hojas» — no es homeomorfo a un disco: su enlace tiene dos vértices unidos por tres arcos, mientras que el enlace de un punto interior de superficie es una circunferencia. En la línea común se juntan tres hojas, en vez de las dos mitades de un disco. Lo mismo ocurre con las aristas de tipo b.

Tipo 3: el vértice. Se calcula primero cuántos vértices distintos quedan.

La identificación de las aristas de tipo a empareja sus orígenes entre sí y sus extremos entre sí. Los orígenes de e_0, e_1 y e_4 son P_0, P_1 y P_5; los extremos, P_1, P_2 y P_4. Luego

$$P_0 \sim P_1 \sim P_5, \qquad P_1 \sim P_2 \sim P_4.$$

La de tipo b empareja los orígenes de e_2, e_3 y e_5, que son P_2, P_3 y P_5, y sus extremos, P_3, P_4 y P_0. Luego $P_2 \sim P_3 \sim P_5$.

Juntando todo, los seis vértices caen en una **sola clase**. Con eso se puede ya contar la característica: $V = 1$ vértice, $E = 2$ aristas — las clases a y b — y $T = 1$ cara, de modo que $\chi = 1 - 2 + 1 = 0$.

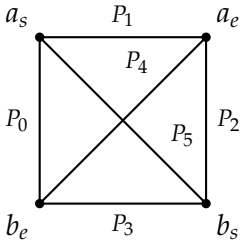
Para describir el entorno del vértice se dibuja su **enlace**, es decir, el grafo que se obtiene tomando un arco pequeño en cada esquina del polígono y pegando sus extremos según las identificaciones de los lados. Sus vértices son las direcciones distintas en que se puede salir a lo largo de una arista, y sus aristas son los sectores del hexágono que llegan al punto.

Las direcciones de salida son cuatro, porque cada clase de aristas aporta dos: el extremo inicial y el final. Se les llama a_s, a_e, b_s, b_e. Cada esquina P_i del hexágono es un sector limitado por dos de esas direcciones, y mirando la lista de aristas se obtiene

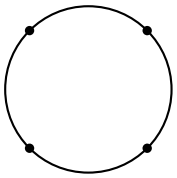
$$\begin{aligned} &P_0 : \ b_e - a_s, \quad P_1 : \ a_e - a_s, \quad P_2 : \ a_e - b_s, \\ &P_3 : \ b_e - b_s, \quad P_4 : \ b_e - a_e, \quad P_5 : \ a_s - b_s. \end{aligned}$$

EXPLÍCATE. *Comprueba dos de esas filas tú mismo. Por ejemplo, la esquina P_4 está entre e_3, que es una b que* termina *ahí, y e_4, que como arista de tipo a también* termina *en P_4 por llevar exponente -1. De ahí sale $b_e - a_e$.*

El enlace es entonces un grafo con cuatro vértices y seis aristas en el que cada vértice tiene grado tres: a_s aparece en P_0, P_1 y P_5; a_e en P_1, P_2 y P_4; b_s en P_2, P_3 y P_5; y b_e en P_0, P_3 y P_4. Cuatro vértices, cada uno unido a los otros tres: es el grafo completo K_4. El cruce de las diagonales en el dibujo no es un vértice del grafo.



enlace del vértice:
K_4, grado tres



enlace de un punto de superficie:
una circunferencia

En un punto de superficie el enlace tiene que ser una **circunferencia**, porque el entorno es un disco. Aquí es K_4, que no lo es — tiene vértices de grado tres y una circunferencia es un grafo de grado dos —, luego el entorno del vértice es el **cono sobre** K_4 y el punto no es de superficie.

Resumen. El cociente tiene exactamente tres tipos de puntos:
1. los interiores, con entorno un disco;
2. los de las dos aristas, con entorno tres semidiscos pegados por su diámetro;
3. el único vértice, con entorno el cono sobre el grafo completo de cuatro vértices.

Es, pues, una falsa superficie y no una superficie. ■

QUÉ DEJA. El criterio local que decide si un cociente de un polígono es una superficie sin borde, y que casi siempre se aplica sin nombrarlo: **cada letra tiene que aparecer exactamente dos veces** — si aparece más, los puntos de esa arista tienen entornos de «libro» — y **el enlace del vértice tiene que ser una sola circunferencia**. Esa segunda condición es la que se comprueba, aun sin decirlo, cuando se verifica que al pegar las esquinas del polígono sale un entorno del plano; y el ejemplo del hexágono enseña que puede fallar aunque la característica salga un número perfectamente respetable. Para superficies con borde se permiten lados libres y enlaces homeomorfos a un intervalo en los puntos del borde.

Repaso del capítulo

REPASO INTERCALADO: CLASIFICACIÓN I, PRIMERA RONDA

1. Enuncia el teorema de clasificación con los dos códigos, de tipo I y de tipo II.
2. Define suma conexa. ¿Cuál es su elemento neutro y por qué?
3. ¿Qué superficie es $P^2\mathbb{R} \# T$? Escribe la regla general.
4. Define superficie orientable y enuncia la caracterización por tipos.
5. ¿Qué es un gorro cruzado? ¿Y un asa?
6. Escribe $\chi(M_n)$ y $\chi(N_n)$.

REPASO INTERCALADO: CLASIFICACIÓN I, SEGUNDA RONDA, CON MATERIAL ANTERIOR

1. ¿Por qué la botella de Klein es N_2 y no un tipo nuevo?
2. El plano proyectivo con un agujero es una banda de Möbius. Explica por qué y para qué sirve.
3. En la parte de geometría se afirmó que dos superficies regulares compactas y conexas con la misma característica son homeomorfas. Da el contraejemplo que este capítulo proporciona y explica por qué no contradice aquello.
4. ¿Cuántas superficies compactas, conexas y sin borde hay con $\chi = 0$? ¿Y con $\chi = 1$?
5. Calcula la característica de la palabra $abca^{-1}dc^{-1}$ mediante $\chi = V - E + 1$, contando las clases de vértices a mano. Aquí b y d son lados libres: ¿cuántas aristas quedan en total?
6. Una superficie compacta orientable tiene curvatura integral -8π. ¿Cuántas asas tiene? Enlaza con el corolario del capítulo 1.

CAPÍTULO 5

Teoría de homotopía

ANTES DE LEER

1. Un disco y un punto no son homeomorfos. Pero en cierto sentido son «casi lo mismo». ¿En qué sentido?
2. Dibuja un lazo sobre la superficie de una rosquilla que no se pueda encoger hasta un punto sin salirse de ella. ¿Cuántos lazos esencialmente distintos hay?
3. Si a un lazo se le da la vuelta y después se recorre otra vez, ¿qué sale? ¿Suena eso a alguna estructura algebraica conocida?

Las respuestas están en las secciones 5.1, 5.3 y 5.2.

LA IDEA: LA ESCALA DE FINURA CORRECTA

Distinguir espacios por homeomorfismo es difícil y a menudo innecesario. La topología algebraica introduce una escala más gruesa, la **homotopía**, en la que dos espacios son «el mismo» si uno se puede deformar de forma continua en el otro.

En esa escala, un disco es lo mismo que un punto, un cilindro es lo mismo que una circunferencia, y $\mathbb{R}^2$ menos un punto es lo mismo que una circunferencia. Se pierde información, pero se gana algo decisivo: en esa escala sí se pueden construir invariantes calculables.

El invariante que se construye en este capítulo es el **grupo fundamental**, que mide cuántos lazos esencialmente distintos tiene un espacio. Y como es un invariante de homotopía, y todo homeomorfismo es una equivalencia de homotopía, sirve también para distinguir por homeomorfismo: *si dos espacios conexos por caminos tienen grupos fundamentales no isomorfos, no son homeomorfos*. Ese es el uso que se le dará en el resto del libro.

5.1 Homotopía

LA PREGUNTA: CUÁNDO DOS APLICACIONES SON «LA MISMA»

Dos aplicaciones continuas pueden ser distintas en todos los puntos y sin embargo deformarse la una en la otra sin romper nada, como se deforma una taza en un donut. Esa idea de deformación está detrás de todo lo que viene después, y tal como se acaba de enunciar es demasiado vaga para trabajar con ella. ¿Cómo se escribe con precisión, y qué relación de equivalencia produce?

Definición. Sean $f, g : X \to Y$ continuas y sea $I = [0,1]$. Se dice que f y g son **homotópicas**, y se escribe $f \simeq g$, si existe $H : X \times I \to Y$ continua con

$$H(x,0) = f(x), \qquad H(x,1) = g(x).$$

A H se le llama **homotopía** entre f y g. Si $A \subseteq X$, se dice que f y g son homotópicas **relativamente a** A si además $H(a,t) = f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$ y todo t.

LA IDEA: LA HOMOTOPÍA ES UNA PELÍCULA

La variable t es el tiempo. Una homotopía entre f y g es una película continua que en el instante 0 muestra f y en el instante 1 muestra g, sin saltos. Y la continuidad se exige **conjuntamente** en x y en t: no basta con que cada fotograma sea continuo.
Cuando la homotopía es relativa a A, hay puntos clavados: los de A no se mueven durante toda la película. Es lo que se necesitará para los lazos, donde el punto base tiene que quedarse quieto.

Lema. Ser homotópicas es una relación de equivalencia, y también lo es serlo relativamente a un conjunto.

La idea, en una línea: si la homotopía es una película, reflexiva es la película congelada, simétrica es pasarla al revés y transitiva es pegar dos películas seguidas proyectando cada una al doble de velocidad.
Reflexiva: $f \simeq f$ mediante $H(x,t) = f(x)$.
Simétrica: si $f \simeq g$ mediante H, entonces $g \simeq f$ mediante $\widetilde{H}(x,t) = H(x,1-t)$, que cumple $\widetilde{H}(x,0) = g(x)$ y $\widetilde{H}(x,1) = f(x)$, y es continua por serlo composición de continuas.
Transitiva: si $f \simeq g$ por F y $g \simeq h$ por G, entonces $f \simeq h$ por

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ G(x,2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Está bien definida en $t = \frac{1}{2}$ porque $F(x,1) = g(x) = G(x,0)$, y es continua por el lema del pegado, al estar definida por trozos sobre dos cerrados que cubren el dominio.

Lema. La relación de homotopía es compatible con la composición. Es decir:
1. si $f, g : X \to Y$ y $h : Y \to Z$ son continuas y $f \simeq g$, entonces $h \circ f \simeq h \circ g$;
2. si $h : Z \to X$ y $f, g : X \to Y$ son continuas con $f \simeq g$, entonces $f \circ h \simeq g \circ h$;

3. si $f \simeq g$ y $h \simeq h'$, entonces $f \circ h \simeq g \circ h'$.

> *La idea, en una línea: si se proyecta una película y se filma la pantalla con otra aplicación continua, o se filma antes de proyectar, en los dos casos sale otra película.*
> Para (1), si H es una homotopía entre f y g, entonces $h \circ H$ lo es entre $h \circ f$ y $h \circ g$. Para (2), $H \circ (h \times \mathrm{Id})$ sirve. Y (3) se obtiene componiendo: $f \circ h \simeq f \circ h' \simeq g \circ h'$ y usando la transitividad.

Definición. Una aplicación continua $f : X \to Y$ se dice **equivalencia de homotopía** si existe $g : Y \to X$ continua con $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$ y $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X$. Entonces X e Y se dicen **homotópicamente equivalentes** o **del mismo tipo de homotopía**.

Todo homeomorfismo es una equivalencia de homotopía, con su inversa como g. El recíproco es falso, y esa es justamente la utilidad del concepto.

Un caso a mano: el cilindro y la circunferencia. La introducción del capítulo afirmaba que, en esta escala, un cilindro es lo mismo que una circunferencia. Se comprueba con la definición. Sean $X = S^1 \times I$, la inclusión de la base $i : S^1 \to X$, $i(z) = (z, 0)$, y la proyección $p : X \to S^1$, $p(z, s) = z$. Una de las dos composiciones es la identidad sin más: $p(i(z)) = p(z, 0) = z$. La otra, $i \circ p$, aplasta el cilindro sobre su base, $(z, s) \mapsto (z, 0)$. No es la identidad, pero es homótopa a ella mediante la película que baja cada punto por su generatriz:

$$H\big((z, s), t\big) = \big(z, (1 - t)s\big).$$

En $t = 0$ es la identidad, en $t = 1$ es $i \circ p$, y no se sale del cilindro porque $(1 - t)s$ sigue en I. Así que $S^1 \times I$ y S^1 tienen el mismo tipo de homotopía, y sin embargo no son homeomorfos: al quitarle dos puntos, la circunferencia se parte en dos arcos y el cilindro sigue de una pieza.

Ejemplo. $\mathbb{R}^n$ y un punto $\{p\}$ son homotópicamente equivalentes. Sea $c : \mathbb{R}^n \to \{p\}$ la constante y $f : \{p\} \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(p) = 0$. Entonces $c \circ f = \mathrm{Id}_{\{p\}}$, y $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \simeq f \circ c$ mediante $H(x, t) = (1 - t)x$.

La misma homotopía prueba que todo espacio vectorial normado es homotópicamente equivalente a un punto.

La homotopía rectilínea. La fórmula del ejemplo es un caso particular de una construcción que se usará en todo el libro, siempre que el espacio de llegada sea convexo. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo, es decir, que contiene el segmento que une dos cualesquiera de sus puntos, y sean $f, g : X \to C$ continuas. Entonces

$$H(x, t) = (1 - t)\, f(x) + t\, g(x)$$

es una homotopía entre f y g dentro de C. Se lee así: cada punto $f(x)$ viaja en línea recta, a velocidad constante, hasta $g(x)$. Hay tres cosas que comprobar, y cada una ocupa una línea. H es continua, porque se obtiene sumando y multiplicando funciones continuas. $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$. Y $H(x, t) \in C$, porque es un punto del segmento entre $f(x)$ y $g(x)$, que está en C por convexidad. Además, si f y g coinciden en los puntos de un conjunto A, entonces $H(a, t) = f(a)$ para todo t: la homotopía es relativa a A.

De ahí salen tres consecuencias que se usan constantemente:

- todo convexo es contráctil, tomando g constante; con $C = \mathbb{R}^n$ y $g = 0$ sale el ejemplo anterior;

- dos caminos de un convexo con los mismos extremos son equivalentes, porque coinciden en $\{0,1\}$ y la homotopía rectilínea es relativa a ese conjunto;
- en particular, en el cuadrado $I \times I$, que es convexo, dos caminos cualesquiera con los mismos extremos son equivalentes. Este hecho, tan modesto, es el núcleo de dos demostraciones del capítulo: la de cómo actúa una homotopía sobre el grupo fundamental y la de las clases libres de lazos de la circunferencia.

Dónde falla. Lo único que puede fallar es la convexidad, y falla justo en los espacios que interesan. En $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, el segmento que va de x a $-x$ pasa por el origen en $t = \frac{1}{2}$, así que la fórmula rectilínea entre la identidad y la aplicación $x \mapsto -x$ se sale del espacio. Las dos aplicaciones sí son homótopas, por la rotación de ángulo πt: lo que falla es la fórmula, no la conclusión. Por eso, cada vez que se usa una fórmula rectilínea fuera de un convexo hay que comprobar que el segmento no toca lo que se ha quitado. Es lo que se hace más abajo con la retracción radial.

Por qué se piden las dos composiciones. Con una sola no basta. Sean la inclusión $i : S^1 \to \mathbb{R}^2$ y la aplicación constante $c : \mathbb{R}^2 \to S^1$ de valor $(1,0)$. La composición $i \circ c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es constante, y la homotopía rectilínea la une con la identidad del plano. La otra, $c \circ i : S^1 \to S^1$, es la constante de la circunferencia, y el capítulo siguiente probará que no es homótopa a Id_{S^1}: si lo fuera, la circunferencia sería contráctil y su grupo fundamental sería trivial, en vez de $\mathbb{Z}$. Sin la segunda condición, la circunferencia y el plano «serían» del mismo tipo, y el plano no tiene ningún agujero. Cada composición vigila un lado: $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X$ dice que ir a Y y volver no pierde nada de X, y $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$, que no se pierde nada de Y. Aquí, el viaje de ida y vuelta $S^1 \to \mathbb{R}^2 \to S^1$ aplasta la circunferencia en un punto y pierde su agujero.

Definición. Un espacio X se dice **contráctil** si es homotópicamente equivalente a un punto.

Ejemplo. El cono CX de cualquier espacio no vacío X es contráctil. Si $[x,t] \in CX$ es la clase de (x,t), se define

$$H([x,t],s) = [x,(1-s)t+s],$$

que cumple $H([x,t],0) = [x,t]$ y $H([x,t],1) = [x,1] = v$, el vértice. Para comprobar la continuidad, la fórmula continua sobre $X \times I \times I$ es constante en las fibras de $q \times \mathrm{Id}_I$, donde $q : X \times I \to CX$ es la proyección. Este producto sigue siendo una identificación porque I es localmente compacto y Hausdorff; por la propiedad universal, H es continua.

Ejemplo. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es homotópicamente equivalente a S^1. Sea i la inclusión y $r(x) = x/|x|$. Entonces $r \circ i = \mathrm{Id}_{S^1}$ y $\mathrm{Id} \simeq i \circ r$ mediante

$$H(x,t) = (1-t)x + t\frac{x}{|x|},$$

que nunca pasa por el origen porque los dos vectores son positivamente proporcionales.

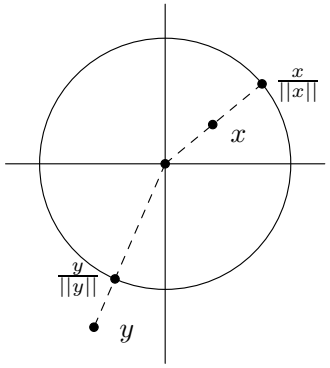


Figura 5.1: La retracción radial lleva hacia la circunferencia tanto los puntos interiores como los exteriores. Cada punto recorre un segmento de su propio rayo y nunca pasa por el origen; los puntos de S^1 permanecen fijos (original, p. 31).

5.1.1 Retractos

Definición. Si $A \subseteq X$, se dice que A es un **retracto** de X si existe $r : X \to A$ continua con $r(a) = a$ para todo $a \in A$, es decir, $r \circ i = \mathrm{Id}_A$ con $i : A \hookrightarrow X$ la inclusión. Se dice **retracto de deformación** si además $i \circ r \simeq \mathrm{Id}_X$, y **retracto de deformación fuerte** si esa homotopía puede tomarse relativa a A.

LA IDEA: LOS TRES NIVELES, Y POR QUÉ IMPORTAN

Conviene tener clara la escala, porque los tres niveles se confunden con facilidad y dicen cosas muy distintas.

- **Retracto**: existe una forma continua de aplastar X sobre A dejando A quieto. Eso no garantiza que A y X tengan el mismo tipo de homotopía.
- **Retracto de deformación**: además, ese aplastamiento es homotópico a no hacer nada. Entonces A y X *tienen el mismo tipo de homotopía* y, en particular, el mismo grupo fundamental.
- **Retracto de deformación fuerte**: además, durante todo el aplastamiento los puntos de A no se mueven.

En la práctica, casi todos los cálculos de grupos fundamentales consisten en encontrar un retracto de deformación fuerte sencillo. Por eso es el concepto más utilizado del capítulo.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: CONFORMARSE CON EL RETRACTO, SIN DEFORMACIÓN

La alternativa. Quedarse con la primera de las tres nociones, el retracto a secas, y usarla para comparar espacios. Es la más débil y, por tanto, la que más ejemplos admite.
Su ventaja. Se comprueba exhibiendo una sola aplicación continua r que deje fijo A, sin construir ninguna homotopía.
Su límite. No garantiza la equivalencia de homotopía. Un punto cualquiera es retracto de cualquier espacio no vacío, sin más que tomar la aplicación constante: si el retracto bastara para comparar, todos los espacios serían «iguales» a un punto y la teoría no distinguiría nada. Lo que hace falta es que el aplastamiento sea además homótopo a no hacer nada, y eso es exactamente lo que añade la condición de deformación: esta garantiza que A y X tengan grupos

> fundamentales isomorfos. **El retracto a secas no sobra**: es la noción con la que se enuncia el teorema de no retracción del capítulo 6, donde lo interesante es precisamente que *no* exista ninguno.

Ejemplo. S^1 es retracto de deformación fuerte de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$: la homotopía del ejemplo anterior cumple $H(a,t) = a$ para todo $a \in S^1$.

Cómo se comprueba un retracto de deformación fuerte. La definición habla de una homotopía entre $i \circ r$ y Id_X, y conviene desplegarla, porque en los problemas lo que se escribe es una fórmula $H(x,t)$ y hay que saber qué comprobar sobre ella. Que A sea retracto de deformación fuerte de X equivale a dar una $H : X \times I \to X$ continua que pase cuatro controles:

1. $H(x,0) = x$ para todo $x \in X$: la película empieza en la identidad;
2. $H(x,1) \in A$ para todo $x \in X$: termina dentro de A, y entonces $r(x) = H(x,1)$ es la retracción;
3. $H(a,t) = a$ para todo $a \in A$ y todo t: los puntos de A no se mueven. Si solo se pide $H(a,1) = a$, que dice que r deja fijo A, se tiene un retracto de deformación a secas;
4. $H(x,t) \in X$ para todo x y todo t: la película no se sale del espacio.

El cuarto control es el que se olvida, porque no está escrito en ninguna parte: va dentro de «$H : X \times I \to X$». Y es el que falla cuando X tiene agujeros. En el ejemplo, con $H(x,t) = (1-t)x + t\,x/|x|$, los cuatro se ven así. (1) $H(x,0) = x$. (2) $H(x,1) = x/|x|$ tiene norma 1. (3) Si $|a| = 1$, $H(a,t) = (1-t)a + ta = a$. (4) $H(x,t)$ es x multiplicado por el número positivo $(1-t) + t/|x|$, de modo que

$$|H(x,t)| = (1-t)|x| + t > 0,$$

y la película nunca pasa por el origen. Es lo que hay que escribir en cada apartado del primer problema del capítulo, con otra H.

Ejemplo. $S^1 \times \{y_0\}$ es un retracto del toro $S^1 \times S^1$ mediante $(x,y) \mapsto (x,y_0)$, pero **no** es retracto de deformación. Se probará en el capítulo siguiente, cuando se disponga del grupo fundamental: si lo fuera, habría un homomorfismo inyectivo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, que no existe.

Ejemplo (Un retracto de deformación que no es fuerte)**.** Sea

$$X = (I \times \{0\}) \cup (\{0\} \times I) \cup \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tfrac{1}{n}\} \times I \Big) \subseteq \mathbb{R}^2,$$

el «peine con infinitas púas». El punto $p = (0,1)$, en el extremo de la púa del eje, es retracto de deformación de X mediante la homotopía que primero baja todos los puntos al eje horizontal, después los recoge en el origen y por último los sube por el eje vertical hasta p.

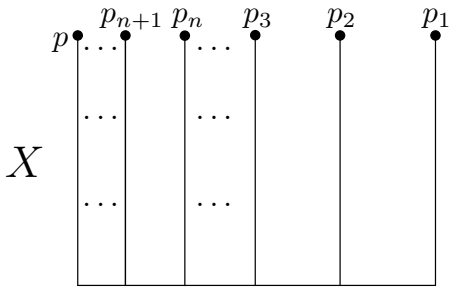


Figura 5.2: El peine y la sucesión $p_n \to p$. Para ir de p_n a p dentro del peine hay que bajar hasta la base y volver a subir; esa necesidad impide una contracción que mantenga p fijo (original, p. 32).

Pero **no es retracto de deformación fuerte**. La razón, y merece la pena entenderla porque es el contraejemplo estándar: la sucesión $p_n = (1/n, 1)$ converge a p, y cualquier homotopía que lleve p_n hasta p tiene que bajar por su púa hasta el eje horizontal, cruzar y volver a subir. Si p tuviera que quedarse quieto, tomando límites se concluiría que p también está en el eje horizontal, lo cual es falso.

Con detalle: si existiera F relativa a $\{p\}$, cada $F|_{\{p_n\}\times I}$ sería un camino de p_n a p, que por conexión debe pasar por $I \times \{0\}$; tomando t_n con $F(p_n, t_n) \in I \times \{0\}$ y una subsucesión convergente $t_{n_k} \to t_0$, la continuidad de F y la compacidad de $I \times \{0\}$ darían $p = F(p, t_0) \in I \times \{0\}$, contradicción.

Qué se ha ganado. La pregunta de la sección tiene respuesta: deformar una aplicación en otra es dar una homotopía, una película continua en las dos variables a la vez, y ser homótopas es una relación de equivalencia que respeta la composición. Con ella se construye una escala más gruesa que el homeomorfismo, la equivalencia de homotopía, en la que el cilindro, el plano sin un punto y la circunferencia son lo mismo, y el plano, el cono y el punto también. Y hay una manera práctica de reconocerla, el retracto de deformación, que se comprueba con cuatro controles. Queda abierta la pregunta contraria, que es la importante: cómo se demuestra que dos espacios *no* son equivalentes, por ejemplo que la circunferencia no es contráctil. Ninguna película que se ensaye lo prueba; hace falta un invariante. La sección siguiente prepara su materia prima, los caminos y su producto.

5.2 Caminos y equivalencia de caminos

LA PREGUNTA: UN PRODUCTO QUE NO ES ASOCIATIVO

Una misma pieza musical tocada a dos tempos distintos es la misma pieza, aunque como funciones del tiempo sean distintas. Se quiere fabricar un grupo con los lazos de un espacio, y el candidato obvio a producto es recorrer primero uno y después el otro. Pero ese producto no es asociativo: recorrer $(\alpha * \beta) * \gamma$ y recorrer $\alpha * (\beta * \gamma)$ pasa por los mismos puntos a velocidades distintas, y en general son aplicaciones distintas; y por la misma razón el camino constante no es neutro. ¿Hay manera de arreglarlo sin renunciar al grupo, admitiendo que dos recorridos a distinto tempo son «el mismo»?

Un **camino** entre x e y en X es una aplicación continua $\alpha : I \to X$ con $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Se dice que α es un **lazo** si $\alpha(0) = \alpha(1)$.

Definición. Dados $\alpha, \beta : I \to X$ con $\alpha(1) = \beta(0)$, se llama **yuxtaposición** al camino

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: HACER ASOCIATIVA LA YUXTAPOSICIÓN CAMBIANDO LOS CAMINOS

La alternativa. El estorbo es que la yuxtaposición obliga a recorrer cada mitad al doble de velocidad, y por eso $(\alpha * \beta) * \gamma$ y $\alpha * (\beta * \gamma)$ no coinciden. Se arregla permitiendo que los caminos tengan dominios de longitud variable, $\alpha : [0, r] \to X$, y definiendo la yuxtaposición por concatenación sin reescalar: así el producto es asociativo de manera exacta, no solo salvo homotopía.
Su ventaja. El conjunto de lazos sería ya un monoide asociativo antes de pasar al cociente: la asociatividad y el neutro (el camino de duración cero) serían exactos. El inverso seguiría requiriendo pasar a clases de homotopía: recorrer un camino y volver por él no es literalmente quedarse quieto.
Qué la hunde aquí. Que obliga a rehacer las definiciones de camino y de homotopía de caminos con dominios variables, y se pierde la comodidad de trabajar siempre en $I = [0, 1]$, que es lo que permite escribir homotopías explícitas por fórmulas sobre el cuadrado $I \times I$, como se hace una y otra vez en los problemas. Y al final no se gana nada: el grupo que resulta es el mismo, porque reparametrizar un camino lo deja en su misma clase. **La construcción se usa** en contextos donde la asociatividad exacta importa por sí misma; en un primer curso, el precio no compensa.

Definición. Dos caminos con los mismos extremos se dicen **equivalentes**, y se escribe $\alpha \sim \beta$, si son homotópicos relativamente a $\{0, 1\}$; es decir, si existe $H : I \times I \to X$ continua con $H(t, 0) = \alpha(t)$, $H(t, 1) = \beta(t)$, $H(0, s) = x_0$ y $H(1, s) = x_1$ para todo s.

LA IDEA: POR QUÉ HAY QUE CLAVAR LOS EXTREMOS

Si no se exigiera que la homotopía sea relativa a $\{0, 1\}$, todos los caminos de un espacio conexo por caminos serían equivalentes y el concepto no distinguiría nada: bastaría deslizar un extremo hasta el otro.
Clavando los extremos, lo que se mide es *qué obstáculos hay en el espacio entre un camino y otro*. Dos caminos con los mismos extremos en el plano son siempre equivalentes; en el plano menos un punto, no lo son si pasan por lados distintos del agujero. Ahí es donde aparece la información.

Lema. La yuxtaposición es compatible con la equivalencia de caminos: si $\alpha \sim \alpha'$ y $\beta \sim \beta'$ y los extremos permiten yuxtaponerlos, entonces $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$.

La idea, en una línea: se deforman los dos tramos a la vez, cada uno con su propia película, y las dos peliculas encajan en el empalme porque ahí los extremos están clavados.

Si H es la homotopía entre α y α' y G la de β y β', ambas relativas a $\{0,1\}$, se define

$$F(t,s) = \begin{cases} H(2t,s) & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ G(2t-1,s) & \frac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases}$$

que está bien definida en $t = \frac{1}{2}$ porque $H(1,s) = y = G(0,s)$, y cumple $F(t,0) = (\alpha * \beta)(t)$, $F(t,1) = (\alpha' * \beta')(t)$, $F(0,s) = x$ y $F(1,s) = z$. Es continua por el lema del pegado en los dos rectángulos cerrados.

LA IDEA: CAMBIAR EL HORARIO Y DESHACER EL RECORRIDO

Antes de mirar las fórmulas conviene tener la imagen, porque la imagen hace las tres homotopías evidentes y sin ella parecen tres artificios.
Un camino es dos cosas a la vez: un *trazado* y un *horario*. El trazado es por dónde se pasa; el horario es en qué instante se está en cada sitio. La equivalencia de caminos no distingue horarios: se puede ir más deprisa por un tramo y más despacio por otro, y el camino sigue siendo el mismo salvo equivalencia, porque cambiar el horario *es* deformar continuamente el camino sin mover los extremos.
Con eso, las tres propiedades dejan de necesitar demostración para creerse:

- La **asociatividad** falla como igualdad estricta solo por el horario: los dos caminos recorren α, β y γ en el mismo orden y por el mismo sitio, y únicamente discrepan en cuánto tiempo dedican a cada tramo. Uno reparte $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ y el otro $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$.
- El **neutro** es quedarse parado un rato al principio. Un rato de estar parado no añade trazado; basta ir acortándolo hasta que dure cero.
- El **inverso** es ir y volver por el mismo sitio. Basta ir cada vez menos lejos antes de darse la vuelta, hasta no salir.

En la asociatividad y el neutro solo cambia el horario. En el inverso cambia también el trazado: se recorre un tramo cada vez más corto, de ida y de vuelta.

La intuición falsa. Uno lee «el grupo fundamental es un grupo» y espera que la yuxtaposición sea asociativa sin más, como lo es componer funciones. No lo es: $(\alpha * \beta) * \gamma$ y $\alpha * (\beta * \gamma)$ son en general caminos distintos como funciones, y un camino no tiene inverso de verdad, porque ir y volver no es lo mismo que no haberse movido. El grupo no existe en los caminos: existe en sus *clases*. Pasar al cociente no es un tecnicismo previo, es lo único que hace que haya grupo.

Proposición. La yuxtaposición verifica, salvo equivalencia de caminos:
1. **asociatividad**: $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$;
2. **elemento neutro**: si c_x es el camino constante x, entonces $c_x * \alpha \sim \alpha \sim \alpha * c_y$;
3. **elemento inverso**: si $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ es el camino opuesto, entonces $\alpha * \bar{\alpha} \sim c_x$ y $\bar{\alpha} * \alpha \sim c_y$.

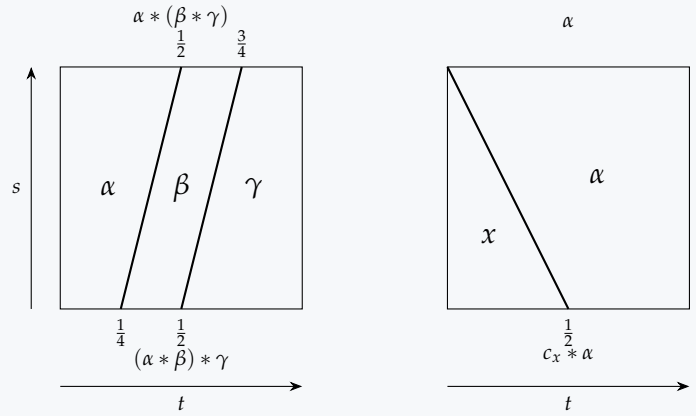
Escribimos las tres homotopías: las dos primeras cambian el horario y la tercera acorta la ida y vuelta.

Paso 1: asociatividad, deslizando los cortes *(el núcleo de la prueba)*. Es la única de las tres cuya fórmula no se explica sola, y es la que hay que entender: los dos caminos son

el mismo trazado con dos horarios, y la homotopía no es más que **interpolar entre los dos horarios**. Los dos caminos recorren α, β y γ en el mismo orden, pero repartiendo el tiempo de forma distinta: uno usa los cortes $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ y el otro $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$. La homotopía desliza los cortes:

$$F(t,s) = \begin{cases} \alpha\big(\frac{4t}{s+1}\big) & 0 \le t \le \frac{s+1}{4}, \\ \beta\big(4t-(s+1)\big) & \frac{s+1}{4} \le t \le \frac{s+2}{4}, \\ \gamma\big(\frac{4t-s-2}{2-s}\big) & \frac{s+2}{4} \le t \le 1. \end{cases}$$

Cómo se lee. Para cada s fijo, $F(\cdot, s)$ es un camino que recorre α en el intervalo $[0, \frac{s+1}{4}]$, β en $[\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}]$ y γ en el resto. Las tres fórmulas salen de una sola regla, que conviene tener porque permite escribir cualquier homotopía de este tipo sin tanteos: *recorrer un camino σ a velocidad constante durante el intervalo $[a,b]$ es evaluar $\sigma\big(\frac{t-a}{b-a}\big)$*, porque ese cociente vale 0 en $t=a$, vale 1 en $t=b$ y crece linealmente entre medias. Con $[a,b] = [0, \frac{s+1}{4}]$ sale $\frac{4t}{s+1}$; con $[\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}]$, que mide $\frac{1}{4}$, sale $4t-(s+1)$; y con $[\frac{s+2}{4}, 1]$, que mide $\frac{2-s}{4}$, sale $\frac{4t-s-2}{2-s}$. En $s=0$ los cortes están en $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$, que son los de $(\alpha * \beta) * \gamma$; en $s=1$, en $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$, que son los de $\alpha * (\beta * \gamma)$; y a mitad de película, en $s=\frac{1}{2}$, en $\frac{3}{8}$ y $\frac{5}{8}$. Los cortes se deslizan en línea recta, como muestra la figura.



El cuadrado $I \times I$ de la película: el tiempo t del camino en horizontal y el tiempo s de la película en vertical. A la izquierda, la asociatividad: en cada franja se recorre un camino entero, y los cortes pasan de $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ (abajo) a $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ (arriba). A la derecha, el neutro: la espera en x ocupa la franja izquierda y se acorta hasta desaparecer.

Paso 2: neutro, acortando la espera. Para $c_x * \alpha \sim \alpha$ basta ir acortando el tramo constante:

$$F(t,s) = \begin{cases} x & 0 \le t \le \frac{1-s}{2}, \\ \alpha\big(\frac{2t+s-1}{s+1}\big) & \frac{1-s}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Es la misma regla: la espera dura $\frac{1-s}{2}$ y α ocupa el resto, $[\frac{1-s}{2}, 1]$, de donde sale el argumento $\frac{2t+s-1}{s+1}$. En $s=0$ se espera medio tiempo, que es $c_x * \alpha$; en $s=1$ la espera dura cero y queda α.

Paso 3: inverso, llegando cada vez menos lejos. La homotopía

$$F(t,s)=\begin{cases}\alpha\big(2t(1-s)\big) & 0\le t\le \tfrac{1}{2},\\ \alpha\big((2-2t)(1-s)\big) & \tfrac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

va recorriendo cada vez menos camino antes de darse la vuelta, hasta quedarse en el punto de partida.
En las tres fórmulas, las piezas son continuas sobre cerrados que cubren I^2 y coinciden en los empalmes; los denominadores son positivos. El lema del pegado da la continuidad conjunta. Al sustituir $s=0,1$ aparecen los caminos anunciados, y al sustituir $t=0,1$ se comprueba que los extremos permanecen fijos.
Faltan los dos casos simétricos, y lo que cambia en ellos es poco. Para $\alpha * c_y \sim \alpha$ la espera va al final: α ocupa $[0,\frac{1+s}{2}]$ y el resto del tiempo se está parado en y, de modo que la regla da

$$F(t,s)=\begin{cases}\alpha\big(\frac{2t}{1+s}\big) & 0\le t\le \frac{1+s}{2},\\ y & \frac{1+s}{2}\le t\le 1.\end{cases}$$

Y $\bar\alpha * \alpha \sim c_y$ no necesita fórmula nueva: es el paso 3 aplicado al camino $\bar\alpha$, que sale de y, porque el opuesto de $\bar\alpha$ es α.

Lo que hay que llevarse. Las tres homotopías son películas sobre el cuadrado $I\times I$, con el tiempo del camino en horizontal y el de la película en vertical. La asociatividad y el neutro solo cambian el horario: se marcan los cortes de abajo y los de arriba, se unen con segmentos, y en cada franja se recorre el camino que toca con la regla $\sigma\big(\frac{t-a}{b-a}\big)$. El inverso cambia el trazado: en el instante s se llega hasta $\alpha(1-s)$ y se vuelve. La continuidad sale siempre del lema del pegado, y los extremos fijos, de sustituir $t=0$ y $t=1$.

Qué se ha ganado. El producto de caminos no era asociativo, ni tenía neutro ni inversos; pero todo eso se cumple *salvo equivalencia*, y la equivalencia es compatible con la yuxtaposición. Al pasar a clases, las tres propiedades se vuelven igualdades, que es lo que pedía la pregunta de la sección. Queda una última restricción: dos caminos solo se pueden yuxtaponer si el primero acaba donde empieza el segundo. Quedarse con los lazos de un mismo punto, que se pueden yuxtaponer todos con todos, es lo que da un grupo, y es la sección siguiente.

5.3 Grupo fundamental

LA PREGUNTA: CONTAR AGUJEROS CON LAZOS

Un lazo que rodea un agujero no se puede encoger hasta un punto sin salirse del espacio, y uno que no rodea nada sí. Parece entonces que contando cuántas clases de lazos hay se contarían los agujeros. ¿Es tan sencillo, y por qué lo que sale de contarlas no es un número sino un grupo, que además puede no ser conmutativo?

Sea $\Omega(X,x_0)$ el conjunto de lazos en x_0, es decir, $\{\alpha: I\to X \text{ continua};\ \alpha(0)=\alpha(1)=x_0\}$. Se define el conjunto cociente

$$\pi_1(X,x_0)=\Omega(X,x_0)/\sim$$

por la relación de equivalencia de caminos, con el producto de clases $[\alpha][\alpha'] = [\alpha * \alpha']$, que está bien definido por el lema de compatibilidad.

Proposición. $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo.

> *La idea, en una línea: la proposición anterior ya dio los tres axiomas de grupo «salvo equivalencia», y pasar al cociente por esa equivalencia es exactamente quitarle el «salvo».*
> Es la traducción directa de la proposición anterior: la asociatividad da la asociatividad del producto, el camino constante $[c_{x_0}]$ es el neutro y $[\bar{\alpha}]$ es el inverso de $[\alpha]$.

Definición. A $\pi_1(X, x_0)$ se le llama **grupo fundamental** de X en x_0.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: PRESCINDIR DEL PUNTO BASE

La alternativa. Molesta tener que arrastrar un punto base x_0 y demostrar después que cambiarlo no altera el grupo. Lo natural parece considerar todos los lazos del espacio, sin exigir que empiecen en ningún sitio concreto, y tomar sus clases de homotopía libre.
Su ventaja. El objeto que resulta es un invariante del espacio sin ninguna elección arbitraria de por medio, y no hay que probar ningún teorema de cambio de base.
Qué la hunde. Que se queda sin producto. Para multiplicar dos lazos hay que recorrer uno y después el otro, y eso exige que el segundo empiece donde termina el primero: dos lazos cualesquiera del espacio no se pueden yuxtaponer. Lo que queda es un conjunto sin operación, y con conjuntos pelados se distinguen muy pocos espacios. El punto base es el precio que se paga por tener un grupo, y la subsección siguiente demuestra que ese precio es pequeño. **Y el objeto sin base tampoco se tira**: si X es conexo por caminos, resulta ser el conjunto de clases de conjugación de $\pi_1(X, x_0)$, que es justo lo que hace falta cuando se clasifican aplicaciones de la circunferencia en un espacio.

Proposición. Sea $f : X \to Y$ continua. Entonces f induce un homomorfismo de grupos

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0)), \qquad f_*[\alpha] = [f \circ \alpha].$$

> *La idea, en una línea: una aplicación continua transporta películas a películas, así que respeta tanto la equivalencia de caminos como la yuxtaposición, que es lo único que hay que comprobar.*
> *Bien definido*: la relación de homotopía relativa a $\{0, 1\}$ es compatible con la composición, luego $\alpha \sim \alpha'$ implica $f\alpha \sim f\alpha'$.
> *Homomorfismo*: la yuxtaposición también es compatible con la composición, de donde $f \circ (\alpha * \alpha') = (f\alpha) * (f\alpha')$ y por tanto $f_*([\alpha][\alpha']) = f_*[\alpha]\, f_*[\alpha']$.

Proposición. Se cumplen $(g \circ f)_* = g_* f_*$ y $\mathrm{Id}_* = \mathrm{Id}$.

> Son dos igualdades de una línea, que se comprueban sobre un lazo cualquiera α en x_0: $(g \circ f)_*[\alpha] = [g \circ f \circ \alpha] = g_*[f \circ \alpha] = g_*\big(f_*[\alpha]\big)$, y $\mathrm{Id}_*[\alpha] = [\mathrm{Id} \circ \alpha] = [\alpha]$.

Corolario. Si $f : X \to Y$ es homeomorfismo, entonces f_* es isomorfismo.

> *La idea, en una línea: el paso a f_* respeta composiciones e identidades, luego convierte inversas en inversas.*

Aplicando lo anterior a f y f^{-1},

$$f_* \circ (f^{-1})_* = (f \circ f^{-1})_* = \mathrm{Id}, \qquad (f^{-1})_* \circ f_* = \mathrm{Id},$$

luego f_* es biyectivo con inversa $(f^{-1})_*$.

LA IDEA: EL MECANISMO QUE SE VA A USAR CIEN VECES

Esta consecuencia es la que convierte el grupo fundamental en una herramienta y conviene tenerla en la forma en que se usa, que es la contrarrecíproca:

Si X e Y son conexos por caminos y $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$ no son isomorfos, entonces X e Y no son homeomorfos.

Y hay una versión refinada, la que resuelve los problemas de retractos: si A es retracto de X, entonces $r \circ i = \mathrm{Id}_A$ implica $r_* \circ i_* = \mathrm{Id}$, de donde i_* es **inyectivo**. Así que basta encontrar un obstáculo algebraico a la inyectividad para probar que no hay retracción.

5.3.1 Cambio de punto base

Proposición. Sea $\gamma : I \to X$ un camino entre x_0 y x_1. Entonces existe un isomorfismo

$$\gamma_\sharp : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0), \qquad \gamma_\sharp([\alpha]) = [(\gamma * \alpha) * \bar{\gamma}].$$

Además, si γ es equivalente a γ', entonces $\gamma_\sharp = \gamma'_\sharp$.

LA IDEA: IR, DAR LA VUELTA Y VOLVER POR DONDE SE VINO

La imagen que predice el enunciado es la de un excursionista que vive en x_0 y quiere hacer un lazo que está en x_1. Lo único que puede hacer es ir hasta x_1 por un camino γ, dar allí la vuelta que quería dar, y volver a casa *deshaciendo exactamente* el camino de ida. El resultado es un lazo en x_0. Recuperamos la clase original aplicando el cambio de base por $\bar{\gamma}$; esa reversibilidad es lo que da el isomorfismo. No se pueden cancelar directamente γ y $\bar{\gamma}$ a través del lazo intermedio.
Eso es todo el enunciado, y explica de paso por qué la fórmula tiene esa forma de bocadillo, $\gamma * \alpha * \bar{\gamma}$: es la **conjugación** de siempre, la misma que en teoría de grupos, y por la misma razón. Cambiar de punto base es cambiar de sistema de referencia, y para cambiar de referencia se va, se actúa y se vuelve.

La intuición falsa, y es importante porque se usa mal. De este resultado se concluye, con razón, que en un espacio conexo por caminos el grupo fundamental no depende del punto base; y de ahí se salta, sin razón, a que se puede olvidar el punto base por completo. El grupo es el mismo salvo isomorfismo, pero *el isomorfismo depende del camino elegido*. Dos caminos no equivalentes pueden dar identificaciones distintas, y por eso «el» lazo que representa a un generador concreto no está bien definido sin decir por dónde se ha ido. La coletilla desaparece solo cuando el grupo es abeliano.

Paso 1: está bien definido. Si $\alpha \sim \alpha'$, entonces $\gamma * \alpha * \bar{\gamma} \sim \gamma * \alpha' * \bar{\gamma}$, por el lema de compatibilidad de la yuxtaposición, aplicado dos veces con γ y $\bar{\gamma}$ fijos (cada camino es equivalente a sí mismo). Los paréntesis no importan: por la asociatividad salvo equivalencia, $(\gamma * \alpha) * \bar{\gamma} \sim \gamma * (\alpha * \bar{\gamma})$, y por eso en lo que sigue se escribe sin ellos.

Paso 2: es homomorfismo, y aquí está el mecanismo *(el núcleo de la prueba)*. Todo se apoya en una sola cancelación: al poner dos lazos conjugados uno detrás de otro, en el medio queda un $\bar{\gamma} * \gamma$, que es ir y volver, y eso se borra. En una frase: **el viaje de vuelta de la primera y el de ida de la segunda se anulan, y lo que queda es la conjugación del producto**. Usando $\bar{\gamma} * \gamma \sim c_{x_1}$,

$$\gamma_\sharp([\alpha][\alpha']) = [\gamma * \alpha * \underbrace{\bar{\gamma} * \gamma}_{\sim c} * \alpha' * \bar{\gamma}] = [(\gamma * \alpha * \bar{\gamma}) * (\gamma * \alpha' * \bar{\gamma})] = \gamma_\sharp[\alpha]\,\gamma_\sharp[\alpha'].$$

Paso 3: es isomorfismo. Se comprueba que $\bar{\gamma}_\sharp$ es su inversa, cancelando de la misma forma: deshacer el viaje es hacerlo al revés. Como $\bar{\gamma}$ va de x_1 a x_0 y su opuesto es γ, se tiene $\bar{\gamma}_\sharp[\beta] = [\bar{\gamma} * \beta * \gamma]$ para cada lazo β en x_0, y

$$\bar{\gamma}_\sharp\big(\gamma_\sharp[\alpha]\big) = [\bar{\gamma} * \gamma * \alpha * \bar{\gamma} * \gamma] = [c_{x_1} * \alpha * c_{x_1}] = [\alpha].$$

Con los papeles de γ y $\bar{\gamma}$ cambiados sale $\gamma_\sharp\big(\bar{\gamma}_\sharp[\beta]\big) = [\beta]$.

Paso 4: no depende del representante de γ. Si $\gamma \sim \gamma'$, también $\bar{\gamma} \sim \bar{\gamma}'$, porque basta pasar al revés el tiempo del camino en la homotopía, $H(1-t,s)$. El lema de compatibilidad da entonces $\gamma * \alpha * \bar{\gamma} \sim \gamma' * \alpha * \bar{\gamma}'$ para cada α, es decir, $\gamma_\sharp = \gamma'_\sharp$.

Lo que hay que llevarse. Cambiar de punto base es conjugar por un camino: ir por γ, dar la vuelta y volver por $\bar{\gamma}$. Todo sale de una sola cancelación, $\bar{\gamma} * \gamma \sim c_{x_1}$: puesta entre dos lazos conjugados da el homomorfismo, y aplicada a los dos lados da la inversa $\bar{\gamma}_\sharp$. Lo que no hay es independencia del camino: el isomorfismo solo depende de la clase de γ, y dos caminos no equivalentes pueden dar isomorfismos distintos.

Observación (Consecuencia práctica)**.** En un espacio conexo por caminos, el grupo fundamental no depende del punto base salvo isomorfismo, y por eso se escribe simplemente $\pi_1(X)$.

Cuidado, sin embargo: el isomorfismo depende del camino elegido, y caminos no equivalentes pueden dar isomorfismos distintos. Solo cuando $\pi_1(X)$ es abeliano el isomorfismo es independiente del camino; ese es el contenido del concepto de espacio 1-simple, que aparece entre los problemas de este capítulo.

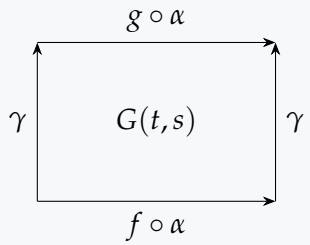
Proposición. Sea $H : X \times I \to Y$ una homotopía entre $f, g : X \to Y$. Dado $x_0 \in X$, sea $\gamma(t) = H(x_0, t)$, camino de $f(x_0)$ a $g(x_0)$. Entonces el diagrama formado por f_*, g_* y $\gamma_\sharp$ es conmutativo:

$$f_* = \gamma_\sharp \circ g_*, \qquad \gamma_\sharp : \pi_1(Y, g(x_0)) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x_0)).$$

LA IDEA: LA PELÍCULA ARRASTRA EL PUNTO BASE

Si la homotopía H dejara quieto x_0, cada lazo $f \circ \alpha$ se deformaría en $g \circ \alpha$ sin mover el punto base, y se tendría $f_* = g_*$ sin más. En general no es así: durante la película el punto x_0 se transforma en $H(x_0, t)$, que recorre el camino γ desde $f(x_0)$ hasta $g(x_0)$. Los lazos $f \circ \alpha$ y $g \circ \alpha$ viven en puntos base distintos, y por tanto en grupos distintos, y no se pueden comparar directamente. El enunciado dice que se comparan en cuanto se trae $g \circ \alpha$ de vuelta a $f(x_0)$ por el camino que ha seguido el punto base: ir por γ, dar la vuelta $g \circ \alpha$ y volver. Es el cambio de base de la subsección anterior, con el camino que la propia película ha dibujado.
Y todo se reduce a un hecho del cuadrado: el lazo y la película forman juntos una aplicación del cuadrado $I \times I$, y en un cuadrado da igual por qué borde se vaya de una esquina a otra.

Paso 1: el cuadrado y sus cuatro lados. Para un lazo α en x_0, miramos el cuadrado $G(t,s) = H(\alpha(t), s)$, que es continuo por ser composición de continuas. Abajo, $G(t,0) = f(\alpha(t))$; arriba, $G(t,1) = g(\alpha(t))$; y a los lados, como $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, $G(0,s) = G(1,s) = H(x_0, s) = \gamma(s)$. Es decir, sus lados tienen las imágenes indicadas:



Paso 2: en el cuadrado da igual por qué borde se vaya *(el núcleo de la prueba)*. En el cuadrado, el lado inferior y el recorrido que sube por la izquierda, cruza por arriba y baja por la derecha son homotópicos con extremos fijos (por la homotopía rectilínea de la sección 5.1, porque el cuadrado es convexo y los dos caminos van de $(0,0)$ a $(1,0)$).

Paso 3: se lleva a Y. Componiendo con G, una equivalencia de caminos en el cuadrado se convierte en una equivalencia en Y. La imagen del lado inferior es $f \circ \alpha$, y la del otro recorrido es γ, después $g \circ \alpha$ y después γ al revés. Obtenemos

$$f \circ \alpha \sim \gamma * (g \circ \alpha) * \bar{\gamma},$$

que es precisamente $f_*[\alpha] = \gamma_\sharp(g_*[\alpha])$.

Lo que hay que llevarse. El lazo α y la película H forman una aplicación del cuadrado, $G(t,s) = H(\alpha(t), s)$, cuyos lados son $f \circ \alpha$ abajo, $g \circ \alpha$ arriba y la traza γ del punto base a los dos lados. En el cuadrado, ir por abajo o dar la vuelta por arriba es lo mismo, y eso da $f \circ \alpha \sim \gamma * (g \circ \alpha) * \bar{\gamma}$. Si la homotopía deja quieto x_0, el camino γ es constante y queda $f_* = g_*$: *dos aplicaciones homótopas relativamente al punto base inducen el mismo homomorfismo.*

Corolario. Si $f : X \to Y$ es una equivalencia de homotopía, entonces $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ es un isomorfismo.

La idea, en una línea: aquí las composiciones no dan la identidad sino un cambio de punto base, y como un cambio de punto base ya se sabe que es isomorfismo, sirve igual de bien para concluir.
Sea g una inversa homotópica de f. Para no confundir grupos con distinto punto base, escribimos $f_{*,x}$ para el homomorfismo inducido con base $x \in X$.

Paso 1: $g_* \circ f_*$ no es la identidad, sino un cambio de base. Sea K una homotopía de $g \circ f$ a Id_X y, para cada x, sea $\delta(t) = K(x,t)$ el camino que recorre x durante ella, de $g(f(x))$ a x. La proposición anterior, aplicada a K, da $(g \circ f)_{*,x} = \delta_\sharp \circ (\mathrm{Id}_X)_{*,x} = \delta_\sharp$. Es decir, la composición

$$g_{*,f(x)} \circ f_{*,x} : \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(X, g(f(x)))$$

es un cambio de base y, por tanto, un isomorfismo. En particular, $f_{*,x}$ es inyectivo para todo x, porque si una composición es inyectiva, lo es la primera aplicación que actúa.

Paso 2: lo mismo por el otro lado. Con los papeles de f y g cambiados, la homotopía $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$ hace de $f_{*,g(y)} \circ g_{*,y}$ un cambio de base en Y, y por la misma razón $g_{*,y}$ es inyectivo para todo y.

Paso 3: la sobreyectividad, con la inyectividad de g_* *(el núcleo de la prueba)*. Falta la sobreyectividad de $f_{*,x}$. Dado $b \in \pi_1(Y, f(x))$, la sobreyectividad de la composición anterior proporciona $a \in \pi_1(X,x)$ con

$$g_{*,f(x)}(f_{*,x}(a)) = g_{*,f(x)}(b).$$

Como $g_{*,f(x)}$ es inyectivo, $f_{*,x}(a) = b$. Luego $f_{*,x}$ es biyectivo, en particular para $x = x_0$.

Lo que hay que llevarse. La tentación es escribir $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = \mathrm{Id}_* = \mathrm{Id}$, y el segundo paso es falso: $g \circ f$ solo es homótopa a la identidad, la homotopía mueve el punto base y lo que resulta es un cambio de base, que es isomorfismo pero no la identidad. Con eso basta: de que $g_* f_*$ sea biyectiva sale f_* inyectiva; del otro lado, g_* inyectiva; y las dos cosas juntas dan f_* sobreyectiva. Respecto al caso del homeomorfismo, lo único nuevo es la proposición anterior.

Corolario. Si $A \subseteq X$ es retracto de deformación fuerte de X y $x_0 \in A$, la inclusión induce un isomorfismo $i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$. En particular, los lazos que representan generadores de $\pi_1(A, x_0)$ representan también generadores de $\pi_1(X, x_0)$.

La inclusión es una equivalencia de homotopía con r como inversa, porque $r \circ i = \mathrm{Id}_A$ e $i \circ r \simeq \mathrm{Id}_X$. El corolario anterior da que i_* es isomorfismo, y como i_* lleva la clase de cada lazo de A a la clase del mismo lazo visto en X, los generadores van a generadores. Para esto basta un retracto de deformación; lo que añade «fuerte» es que la homotopía deja quieto x_0, de modo que el isomorfismo inverso es directamente r_*, sin cambio de base: $r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = \mathrm{Id}$ e $i_* \circ r_* = (i \circ r)_* = \mathrm{Id}$, esta última por la proposición anterior con γ constante.

Corolario. Si X es contráctil, entonces $\pi_1(X, x_0) \cong \{1\}$.

Si X es contráctil, la aplicación constante $X \to \{p\}$ es una equivalencia de homotopía, y el corolario de las equivalencias da $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(\{p\}, p)$. En un punto hay un solo lazo, el constante, así que ese grupo es trivial.

Qué da cada nivel en el grupo fundamental. Con estos corolarios, los tres niveles de retracto de la sección 5.1 se traducen en tres afirmaciones algebraicas sobre la inclusión $i : A \hookrightarrow X$ y la retracción r, con $x_0 \in A$:

Si A es…	entonces…	porque…
retracto	i_* inyectivo y r_* sobreyectivo	$r_* \circ i_* = \mathrm{Id}$
retracto de deformación	i_* isomorfismo	i es una equivalencia
…fuerte	y su inverso es r_*	la homotopía fija x_0

La tabla se usa del revés, para probar que algo *no* ocurre. Si i_* no puede ser inyectivo, A no es retracto de X; si no puede ser biyectivo, o si los dos grupos no son isomorfos, A no es retracto de deformación.

El toro, con los números puestos. Sea $A = S^1 \times \{y_0\}$ dentro del toro $X = S^1 \times S^1$, con la retracción $r(x, y) = (x, y_0)$. Anticipando $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ del capítulo siguiente, y con la proposición del producto de más abajo, $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y los homomorfismos son $i_*(n) = (n, 0)$ y $r_*(m, n) = m$. Se comprueba la primera fila: $r_*(i_*(n)) = n$, e i_* es inyectivo. Pero no es sobreyectivo, porque $(0, 1)$, la clase de la otra circunferencia $\{x_0\} \times S^1$, no está en su imagen. Así que A es retracto y no es retracto de deformación. Y la misma tabla, con la circunferencia dentro del disco, donde $i_* : \mathbb{Z} \to \{1\}$ no puede ser inyectivo, dice que la circunferencia no es retracto del disco: es el teorema de no retracción del capítulo siguiente.

Definición. Si X es conexo por caminos y $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$, se dice que X es **simplemente conexo**.

Proposición. Para espacios cualesquiera,

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

La idea, en una línea: un lazo en un producto no es más que un par de lazos recorridos a la vez, y una homotopía en el producto, un par de homotopías simultáneas; el isomorfismo consiste en mirar cada componente por separado.
Sean p_1, p_2 las proyecciones y

$$\psi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0), \qquad \psi[\alpha] = \big([p_1\alpha], [p_2\alpha]\big),$$

que es homomorfismo por serlo cada p_{i*}.
Sobreyectiva: dados lazos ε en X y η en Y, el par $(\varepsilon, \eta)(t) = (\varepsilon(t), \eta(t))$ es un lazo en el producto con $\psi[(\varepsilon, \eta)] = ([\varepsilon], [\eta])$.
Inyectiva: si $\psi[\alpha] = \psi[\beta]$, hay homotopías F y G entre las proyecciones, y $H(t, s) = (F(t, s), G(t, s))$ es una homotopía entre α y β, continua para la topología producto.

Ejemplo. Anticipando el cálculo $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ del capítulo siguiente, la proposición da de inmediato el grupo fundamental del **toro**:

$$\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Los dos generadores son los dos lazos canónicos, el meridiano y el paralelo.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: CONTAR AGUJEROS CON GRUPOS ABELIANOS

La alternativa. En lugar de lazos, contar los agujeros de un espacio con los llamados *grupos de homología*, que se construyen a partir de una triangulación viendo qué combinaciones de aristas cierran un ciclo y cuáles de esos ciclos son el borde de un trozo de superficie.
Su ventaja. Es enorme y conviene reconocerla, porque explica por qué la homología es tan útil en topología algebraica. Los grupos de homología son abelianos y, para un complejo finito, se calculan mediante matrices enteras por un procedimiento que termina. Existen en todas las dimensiones; el grupo fundamental se construye con lazos y sus homotopías, y puede ser no conmutativo y difícil de identificar.
Qué la hunde como única herramienta. Que ve menos. El grupo fundamental determina la homología de dimensión uno en espacios conexos por caminos — es su abelianizado, cosa que este libro usa explícitamente en el capítulo 8 —, pero no al revés: al abelianizar se tira información. Para superficies compactas, conexas y sin borde la pérdida no importa, porque la homología basta para clasificarlas; en dimensión tres, en cambio, existen espacios con exactamente los mismos grupos de homología que la esfera y que no son homeomorfos a ella, y el grupo fundamental permite distinguirlos. La homología no está en este temario, pero conviene saber que existe y qué relación guarda con lo que sí está.

Qué se ha ganado. La pregunta de la sección tiene respuesta. Contar clases de lazos no da un número sino un grupo, porque los lazos de un punto se multiplican recorriéndolos seguidos; y el grupo puede no ser conmutativo, porque recorrer α y después β no tiene por qué equivaler a hacerlo al revés. En un espacio conexo por caminos ese grupo no depende del punto base salvo isomorfismo, las aplicaciones continuas lo transportan y es un invariante del tipo de homotopía: dos espacios con grupos fundamentales no isomorfos no son equivalentes, y menos aún homeomorfos. Queda por hacer lo que justifica todo, que es calcular uno que tenga más de un elemento. Hasta aquí, cada grupo que ha salido se reduce al neutro (convexos, contráctiles) o se ha dejado para el capítulo siguiente, que calcula $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ y, con él, el del toro, el de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y los de la tabla de retractos que viene a continuación.

5.4 Problemas de las relaciones

Ejercicio 5.1. *Retractos de deformación que hay que tener catalogados*

Probar que S^{n-1} es retracto de deformación de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Encontrar retractos de deformación compactos de los siguientes espacios:
1. $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$;
2. $S^1 \times S^1$ menos un punto, es decir, el toro menos un punto;
3. $\mathbb{R}^3$ menos el eje OZ, y $\mathbb{R}^3 \setminus (S^1 \vee S^1)$, con el ocho habitual contenido en el plano $z = 0$;
4. la banda de Möbius, y la banda de Möbius menos un punto;
5. $\mathbb{R}^3 \setminus (OZ \cup S^1)$;
6. el complementario de un disco en el plano proyectivo;
7. el complementario en $\mathbb{R}^3$ de dos rectas paralelas.

Resolución. La idea. Todos los apartados se hacen con el mismo movimiento: se empuja cada punto a lo largo de un rayo o de un segmento hasta un subespacio más pequeño, cuidando

de que la película no pase nunca por lo que se ha quitado, que es el cuarto control de la sección 5.1. Lo que queda suele ser un grafo, una superficie o una circunferencia, y de ahí se lee el tipo de homotopía. Conviene no mezclar dos cosas: el retracto de deformación es un subespacio concreto de X, con todos sus arcos si es un grafo; el tipo de homotopía es la clase de los espacios equivalentes a él, y se describe con un modelo más sencillo que no tiene por qué estar dentro de X.

El caso base. S^{n-1} es retracto de deformación fuerte de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mediante $r(x) = x/|x|$ y $H(x,t) = (1-t)x + t\,x/|x|$, que nunca se anula porque los dos sumandos son positivamente proporcionales.

1. El plano menos k puntos distintos. Un retracto compacto fácil de construir es un disco grande con k discos abiertos pequeños quitados. Se eligen los discos pequeños disjuntos, centrados en los p_i y contenidos en el grande. Primero se recoge radialmente el exterior del disco grande sobre su borde; después, cada disco pequeño sin su centro se recoge sobre su circunferencia. Estas deformaciones fijan los bordes, así que se pegan con la identidad.

Ese disco con agujeros se puede deformar a un grafo formado por k circunferencias conectadas mediante un árbol de arcos. Al contraer el árbol se obtiene el tipo de homotopía $S^1 \vee \cdots \vee S^1$. Conviene distinguir el grafo dibujado (con sus arcos de unión) de la unión puntual que describe su tipo de homotopía.

2. El toro menos un punto se retrae a $S^1 \vee S^1$. Se ve mejor en el modelo cuadrado: una traslación del toro permite situar el punto quitado en el interior del cuadrado; el cuadrado agujereado se retrae sobre su borde, y el borde del cuadrado, tras las identificaciones $aba^{-1}b^{-1}$, es exactamente una unión puntual de dos circunferencias.

3. $\mathbb{R}^3$ menos el eje OZ se retrae a S^1: se aplasta primero sobre el plano $z = 0$ y después radialmente.

Para el complementario del ocho plano $K = S^1 \vee S^1$, se toma un **doble toro macizo** Y que sea un engrosamiento pequeño de K. Los dos huecos de Y en el plano $z = 0$ se tapan con discos D_1, D_2, como dos membranas. El retracto compacto buscado es

$$\partial Y \cup D_1 \cup D_2 : \quad \text{una superficie de dos asas con dos membranas.}$$

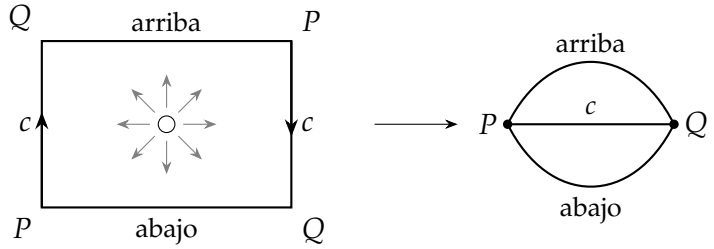
La deformación se hace en dos pasos. Dentro de Y, se empuja $Y \setminus K$ sobre ∂Y alejándose del grafo central. Fuera de Y, se baja o sube verticalmente hasta tocar ∂Y o el plano $z = 0$. Quedan la superficie, las dos membranas y la región exterior del plano. Por último se recoge esta región sobre la curva exterior de $\partial Y \cap \{z = 0\}$. Los pasos fijan las zonas de contacto y no atraviesan K. Esta es la construcción de la solución original; las membranas no son dos esferas independientes.

4. La banda de Möbius se retrae a su **circunferencia central**, la que la recorre por el medio: basta empujar cada segmento transversal hacia su punto medio. Luego la banda de Möbius tiene el mismo tipo de homotopía que S^1, y $\pi_1 = \mathbb{Z}$.

Para la **banda de Möbius menos un punto**, la posición del punto importa:

- Si está en el interior, se sitúa dentro del rectángulo que representa la banda y se retrae radialmente el rectángulo perforado sobre su perímetro. Tras identificar los lados, queda un grafo con dos vértices y tres aristas entre ellos (un grafo Θ). Es compacto y tiene el tipo de homotopía de $S^1 \vee S^1$.
- Si está en el borde, permanece un retracto de deformación S^1. Puede verse directamente en el modelo $[0,1] \times [-1,1]$ con $(0,u) \sim (1,-u)$: la homotopía $[v,u] \mapsto [v,(1-t)u]$ lleva a la

circunferencia central. Para $t > 0$ su imagen está en el interior, de modo que nunca pasa por el punto del borde eliminado.



La banda de Möbius sin un punto interior. A la izquierda, el rectángulo con los lados c pegados con media vuelta, $(0, u) \sim (1, -u)$, y el agujero, desde el que todo se empuja hacia el perímetro. Las cuatro esquinas quedan en dos puntos, P y Q, y los tres lados que sobreviven, abajo, arriba y c, van cada uno de P a Q: a la derecha, el grafo Θ.

5. $\mathbb{R}^3 \setminus (OZ \cup S^1)$, con la circunferencia unidad del plano xy enlazada con el eje: se retrae al **toro**. En coordenadas cilíndricas $r > 0$, el espacio es

$$S^1 \times \big(((0,\infty) \times \mathbb{R}) \setminus \{(1,0)\}\big).$$

El cambio $(r, z) \mapsto (\log r, z)$ identifica el segundo factor con $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Al retraerlo radialmente a una circunferencia y dejar fijo el primer factor, resulta $S^1 \times S^1$. Así se ve también por qué aparecen dos direcciones independientes para los lazos.

6. El complementario de un disco en el plano proyectivo. Si se quita el interior de un disco cerrado embebido, queda una banda de Möbius compacta; si se quita también su borde, queda el interior de esa banda. En los dos casos la contracción transversal lleva a la circunferencia central. Luego el grupo fundamental es $\mathbb{Z}$.

7. El complementario de dos rectas paralelas en $\mathbb{R}^3$ se retrae a $S^1 \vee S^1$: aplastando sobre un plano perpendicular a las rectas queda el plano menos dos puntos, que es el apartado 1 con $k = 2$. ■

Observación (La tabla que conviene construir)**.** Merece la pena guardar el resultado en forma de tabla, porque estos espacios reaparecen en casi todos los ejercicios de los capítulos siguientes:

Espacio	Tipo de homotopía
$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$	S^{n-1}
$\mathbb{R}^2$ menos k puntos	k circunferencias unidas por un punto
Toro menos un punto	dos circunferencias unidas por un punto
Banda de Möbius	una circunferencia
$P^2\mathbb{R}$ menos un disco	una circunferencia
$\mathbb{R}^3$ menos una recta	una circunferencia
$\mathbb{R}^3$ menos dos rectas paralelas	dos circunferencias unidas por un punto

Contar las circunferencias de un grafo. Varios apartados terminan en un grafo, y hace falta saber cuántas circunferencias tiene su tipo de homotopía sin dibujar la contracción. La regla: un grafo finito y conexo con V vértices y A aristas tiene el tipo de homotopía de una

unión por un punto de $A - V + 1$ circunferencias. La razón, en dos líneas: se elige un árbol que pase por todos los vértices, que tiene $V - 1$ aristas y se contrae a un punto, como en el apartado 1; cada una de las $A - (V - 1)$ aristas que no están en el árbol tiene entonces sus dos extremos en ese punto y se convierte en una circunferencia. Con los números puestos: el grafo Θ de la banda de Möbius perforada tiene $V = 2$ y $A = 3$, luego $3 - 2 + 1 = 2$; el borde del cuadrado del toro tras las identificaciones $aba^{-1}b^{-1}$ tiene $V = 1$ y $A = 2$, luego 2; y el grafo del apartado 1, con k circunferencias de un vértice cada una unidas en cadena por $k - 1$ arcos, tiene $V = k$ y $A = 2k - 1$, luego k. El número $A - V + 1$ es uno menos la característica $V - A$ del grafo, la misma cuenta del capítulo 4 en dimensión uno.

Dónde se falla. En tres sitios.

- En el cuarto control: una película que parece razonable atraviesa un punto quitado. En $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$, con $p = (-1, 0)$ y $q = (1, 0)$, empujar todo radialmente desde el origen hasta la circunferencia de radio 3 lleva el punto $(\frac{1}{2}, 0)$ por el eje hasta $(3, 0)$, y por el camino pasa por q. Por eso el apartado 1 empuja cada disco pequeño desde su propio centro, que es precisamente el punto quitado.
- En confundir el retracto con su tipo: si se pide un retracto de deformación compacto, la respuesta es el grafo dibujado dentro del espacio, con sus arcos de unión; la unión por un punto de circunferencias es solo su tipo de homotopía, y para llegar a ella se contrae un árbol, lo que ya no es una deformación dentro de X.
- En la banda de Möbius sin un punto: la respuesta cambia según dónde esté el punto, y quien empuja hacia el alma sin mirar obtiene S^1 en los dos casos. Si el punto es interior, esa película pasa por él: los puntos de su mismo segmento transversal que están más lejos del alma lo atraviesan al bajar.

QUÉ DEJA. El repertorio de retractos, que es lo que de verdad se usa: casi ningún grupo fundamental se calcula desde la definición, sino reconociendo una equivalencia de homotopía o un retracto de deformación de la tabla. En el plano menos k puntos aparecen k circunferencias; no es una regla universal para cualquier «agujero»: $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ se retrae a una esfera.

Ejercicio 5.2. *Un retracto de un espacio contráctil es contráctil*

Probar que un retracto de un espacio contráctil es contráctil. Probar también que X es homotópicamente equivalente a un punto si y solo si Id_X es homotópica a la aplicación constante x_0 para algún $x_0 \in X$.

Resolución. La idea. Ser contráctil es poder deformar la identidad en una constante; es la caracterización que se prueba primero. Si X tiene esa película y $r : X \to A$ es una retracción, basta proyectarla con r: lo que se ve en A es otra película, que empieza en la identidad de A porque r deja fijo A, y termina en un punto.

La caracterización.

($\Rightarrow$) Por hipótesis existen $f : \{p\} \to X$ y $c : X \to \{p\}$ con $c \circ f \simeq \mathrm{Id}_{\{p\}}$ — de hecho son iguales — y $f \circ c \simeq \mathrm{Id}_X$. Sea $f(p) = x_1$ y H una homotopía entre Id_X y $f \circ c$, es decir, entre la identidad y la constante x_1. Entonces $\mathrm{Id}_X \simeq \mathrm{cte}_{x_1}$. Además, $t \mapsto H(x, t)$ une cada x con x_1, por lo que X es conexo por caminos. Concatenando la homotopía con un camino de x_1 a x_0 se obtiene la contracción a cualquier x_0.

($\Leftarrow$) Si $\mathrm{Id}_X \simeq \mathrm{cte}_{x_0}$, se toman $f : X \to \{p\}$ la constante y $g : \{p\} \to X$ con $g(p) = x_0$.

Entonces $f \circ g = \mathrm{Id}_{\{p\}}$ y $g \circ f = \mathrm{cte}_{x_0} \simeq \mathrm{Id}_X$. ■

El retracto. Sea X contráctil y $r : X \to A$ una retracción, con $i : A \hookrightarrow X$ la inclusión, de modo que $r \circ i = \mathrm{Id}_A$.

Por la caracterización, existe $H : X \times I \to X$ con $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = x_0$ para todo x. Se define

$$G : A \times I \xrightarrow{i \times \mathrm{Id}} X \times I \xrightarrow{H} X \xrightarrow{r} A,$$

que es continua por ser composición de continuas, y cumple

$$G(a,0) = r(H(a,0)) = r(a) = a, \qquad G(a,1) = r(H(a,1)) = r(x_0) =: a_0 \in A.$$

Luego $\mathrm{Id}_A \simeq \mathrm{cte}_{a_0}$ y, por la caracterización, A es contráctil. ■

Dónde se falla. En restringir la película a A sin proyectarla. $H(a,t)$ es un punto de X que puede no estar en A. Si X es el disco cerrado y A un diámetro, que es retracto por la proyección ortogonal, la contracción rectilínea hacia el punto $(0, \frac{1}{2})$ saca del diámetro todos sus puntos en cuanto $t > 0$; componer con r los devuelve a él. Y no vale cualquier subespacio: la circunferencia está dentro del disco, que es contráctil, y no es contráctil, como se verá en el capítulo siguiente. Lo que le falta es ser retracto.

Ejercicio 5.3. *Todo lazo define una aplicación de la circunferencia*

Probar que todo lazo α en $x_0 \in X$ define una aplicación continua $f_\alpha : S^1 \to X$ con $f_\alpha((1,0)) = x_0$, y recíprocamente. Más aún, si $\alpha \sim \alpha'$ entonces $f_\alpha \simeq f_{\alpha'}$ relativamente a $(1,0)$.

Resolución. La idea. Un lazo es un camino que empieza y acaba en el mismo punto, es decir, una aplicación $I \to X$ que identifica los dos extremos del intervalo. Y el intervalo con los extremos identificados *es* la circunferencia. Así que un lazo y una aplicación de la circunferencia son el mismo objeto visto de dos maneras.

La construcción. Sea $q : I \to S^1$ dada por $q(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$. Es continua, sobreyectiva, y su relación inducida identifica exactamente 0 con 1. Como I es compacto y S^1 es Hausdorff, el criterio compacto-Hausdorff dice que $S^1 \cong I/\{0 \sim 1\}$.

Dado un lazo α, se tiene $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, luego α es compatible con esa identificación, y por la propiedad universal induce una aplicación continua $f_\alpha : S^1 \to X$ con $f_\alpha \circ q = \alpha$. En particular $f_\alpha((1,0)) = f_\alpha(q(0)) = \alpha(0) = x_0$.

Recíprocamente, dada $f : S^1 \to X$ continua con $f((1,0)) = x_0$, la composición $\alpha = f \circ q$ es un lazo en x_0.

La compatibilidad con la homotopía. Si H es una homotopía entre α y α' relativa a $\{0,1\}$, entonces H es compatible con la identificación en cada tiempo s. El producto $q \times \mathrm{Id}_I$ es una identificación (es una sobreyección continua de un compacto a un Hausdorff), y su propiedad universal produce una homotopía $\widetilde{H} : S^1 \times I \to X$ entre f_α y $f_{\alpha'}$, relativa a $(1,0)$ porque $H(0,s) = H(1,s) = x_0$ para todo s. ■

Dónde se falla. En leer el enunciado sin el «relativamente a $(1,0)$». Si f_α y $f_{\alpha'}$ son homótopas por una homotopía libre, que mueve el punto $(1,0)$, no se sigue que $\alpha \sim \alpha'$: el punto base viaja durante la película, y lo que se obtiene es que $[\alpha]$ y $[\alpha']$ son conjugados. Es el último problema del capítulo, el de los espacios 1-simples. La correspondencia exacta entre lazos y aplicaciones de la circunferencia solo vale con el punto clavado.

QUÉ DEJA. La identificación «lazo = aplicación de la circunferencia», que es el punto de vista con el que se define el *grado* en el capítulo siguiente. Y el uso canónico de la propiedad universal: para definir algo sobre un cociente, se define arriba y se comprueba la compatibilidad.

Ejercicio 5.4. *Un retracto es cerrado, y extiende aplicaciones*

Probar que todo retracto de un espacio métrico es un subespacio cerrado. Probar también que $A \subseteq X$ es retracto de X si y solo si toda aplicación continua de A en un espacio arbitrario Z admite una extensión continua a X.

Resolución. Primera parte: el retracto es cerrado. Sea (X, d) un espacio métrico y $r : X \to A$ una retracción, es decir, continua y con $r(a) = a$ para todo $a \in A$.

La observación que resuelve el problema es que

$$A = \{x \in X \,;\, r(x) = x\}.$$

En efecto, si $x \in A$ entonces $r(x) = x$ por ser r retracción; y si $r(x) = x$ entonces $x = r(x) \in A$ porque la imagen de r está en A.

Ahora se fabrica una función continua que se anule exactamente en ese conjunto. Se define $\phi : X \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(x) = d\big(x, r(x)\big).$$

Es continua: la aplicación $x \mapsto (x, r(x))$ es continua de X en $X \times X$ porque lo son sus dos componentes, y la distancia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es continua; ϕ es la composición de las dos.

Y $\phi(x) = 0$ si y solo si $x = r(x)$, es decir, si y solo si $x \in A$. Luego $A = \phi^{-1}(\{0\})$ es la preimagen de un cerrado por una aplicación continua, y por tanto es cerrado. ■

Segunda parte, ida. Supóngase que A es retracto de X, con retracción r, y sea $f : A \to Z$ continua. Se define $F = f \circ r : X \to Z$, que es continua por serlo las dos. Para $a \in A$ se tiene $F(a) = f(r(a)) = f(a)$, luego F extiende a f.

Segunda parte, vuelta. Supóngase que toda aplicación continua de A en cualquier espacio se extiende a X. Se aplica la hipótesis al caso $Z = A$ y $f = \mathrm{Id}_A$, que es continua porque la preimagen de un abierto de A es él mismo. Existe entonces $F : X \to A$ continua con $F|_A = \mathrm{Id}_A$, es decir, $F(a) = a$ para todo $a \in A$. Eso es exactamente una retracción. ■

Otra vía (sin métrica: basta con que X sea Hausdorff). La primera parte no necesita distancia. Sea X Hausdorff y $r : X \to A$ una retracción; se prueba que $X \setminus A$ es abierto. Sea $x \notin A$, de modo que $r(x) \neq x$. Por Hausdorff existen abiertos disjuntos $U \ni x$ y $V \ni r(x)$. El conjunto $W = U \cap r^{-1}(V)$ es abierto — intersección de dos abiertos, pues r es continua — y contiene a x. Y para todo $y \in W$ se tiene $y \in U$ y $r(y) \in V$, con $U \cap V = \emptyset$, luego $r(y) \neq y$ y por tanto $y \notin A$. Así $W \subseteq X \setminus A$, que resulta abierto.

Merece la pena quedarse con la versión general: solo requiere Hausdorff, sin elegir ni construir una métrica. Muchos cocientes del capítulo 3 sí son metrizables, pero aquí basta esa hipótesis más débil.

Dónde se falla. En aplicar la primera parte sin ninguna hipótesis de separación. Sin Hausdorff es falsa. En $X = \{a, b\}$ con la topología indiscreta, cuyos únicos abiertos son $\emptyset$ y X, el subconjunto $A = \{a\}$ es retracto: la aplicación constante $r = a$ es continua, porque la preimagen de cada abierto de A es $\emptyset$ o X. Pero A no es cerrado, porque su complementario

$\{b\}$ no es abierto. En el argumento, lo que falla es separar $x = b$ de $r(x) = a$ con dos abiertos disjuntos.

QUÉ DEJA. Dos cosas. La primera, la caracterización $A = \{x\,;\, r(x) = x\}$, que convierte «ser retracto» en una igualdad entre dos aplicaciones continuas y permite usar el argumento estándar de que el conjunto donde coinciden dos continuas es cerrado si el codominio es Hausdorff. La segunda, la lectura de un retracto como *extensor*: A es retracto de X exactamente cuando todo lo definido sobre A se puede prolongar a X. Esa es la forma en que la noción aparece en el teorema de no retracción del capítulo 6: decir que no hay retracción de B^2 sobre S^1 es decir que la identidad de S^1 no se extiende al disco.

Ejercicio 5.5. *Retractos de deformación: en producto y en cadena*

Probar que si A es retracto de deformación de X y B lo es de Y, entonces $A \times B$ es retracto de deformación de $X \times Y$. Probar que si A es retracto de deformación de X y B lo es de A, entonces B lo es de X.

Resolución. La idea. Las dos partes repiten la teoría. En el producto se pasan las dos películas a la vez, cada una en su componente. En la cadena se pasa una detrás de otra, al doble de velocidad, como en la transitividad de la homotopía; lo único nuevo es decidir qué hace en la segunda mitad un punto que no está en A.

Se fija la notación. Que A sea retracto de deformación de X significa que existen una retracción $r : X \to A$ y una homotopía $H : X \times I \to X$ con

$$H(x,0) = x, \qquad H(x,1) = r(x) \quad \text{para todo } x \in X,$$

donde en la segunda igualdad se está viendo $r(x)$ como punto de X a través de la inclusión.

El producto. Sean $r_1 : X \to A$ con homotopía H, y $r_2 : Y \to B$ con homotopía G. Se define

$$r = r_1 \times r_2 : X \times Y \to A \times B, \qquad r(x,y) = \big(r_1(x), r_2(y)\big),$$

continua porque lo son sus dos componentes, y que deja fijo cada punto de $A \times B$ porque cada r_i deja fijos los suyos. Es, pues, una retracción.

Para la homotopía se define $K : (X \times Y) \times I \to X \times Y$ por

$$K\big((x,y),t\big) = \big(H(x,t),\, G(y,t)\big).$$

Es continua por serlo cada componente — cada una es una composición de H o G con proyecciones —, y cumple

$$K\big((x,y),0\big) = (x,y), \qquad K\big((x,y),1\big) = \big(r_1(x), r_2(y)\big) = r(x,y).$$

Luego $A \times B$ es retracto de deformación de $X \times Y$. Si las dos deformaciones de partida eran *fuertes*, es decir, si $H(a,t) = a$ para $a \in A$ y $G(b,t) = b$ para $b \in B$, entonces $K((a,b),t) = (a,b)$ y la del producto también lo es.

La cadena. Sean $B \subseteq A \subseteq X$, con $r_1 : X \to A$ y H para el primer par, y $r_2 : A \to B$ y G para el segundo.

La retracción es $r = r_2 \circ r_1 : X \to B$, continua por composición. Deja fijo B: si $b \in B$, entonces $b \in A$ y $r_1(b) = b$, luego $r(b) = r_2(b) = b$.

La homotopía se define por trozos:

$$K(x,t) = \begin{cases} H(x,2t), & 0 \le t \le \tfrac{1}{2}, \\ G\big(r_1(x),\, 2t-1\big), & \tfrac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Hay tres cosas que comprobar.

Que las dos fórmulas coinciden en $t = \frac{1}{2}$. Por arriba sale $H(x,1) = r_1(x)$; por abajo, $G(r_1(x),0) = r_1(x)$, porque G empieza en la identidad de A. Coinciden.

Que K es continua. Los conjuntos $X \times [0,\frac{1}{2}]$ y $X \times [\frac{1}{2},1]$ son cerrados en $X \times I$ y lo recubren; en cada uno la fórmula correspondiente es continua — la de arriba por serlo H y la reparametrización $t \mapsto 2t$; la de abajo por serlo G, r_1 y $t \mapsto 2t-1$ —; y en la intersección coinciden. El **lema del pegado** da la continuidad de K. Aquí es esencial que los dos trozos sean *cerrados*: con dos abiertos que se solapan valdría igual, pero con un cerrado y un abierto disjuntos la continuidad no queda garantizada.

Que empieza y acaba donde debe. $K(x,0) = H(x,0) = x$, y $K(x,1) = G(r_1(x),1) = r_2(r_1(x)) = r(x)$.

Luego B es retracto de deformación de X. ■

Dónde se falla. En la segunda mitad de la cadena, en escribir $G(x,2t-1)$ en vez de $G(r_1(x),2t-1)$. La homotopía G solo está definida sobre $A \times I$, y un punto de X que no esté en A no tiene película propia en la segunda mitad: la que sigue es la de $r_1(x)$, que es donde lo dejó la primera. Y si las dos deformaciones son fuertes, la de la cadena también lo es: para $b \in B$, que está en A, se tiene $H(b,2t) = b$ y $G(r_1(b),2t-1) = G(b,2t-1) = b$.

Otra vía (lo que se obtiene con menos esfuerzo, y por qué no basta). Ser retracto de deformación implica tener el mismo tipo de homotopía, y el tipo de homotopía se conserva por composición y por productos. De ahí sale, sin construir nada, que $A \times B$ y $X \times Y$ son homotópicamente equivalentes, y que B y X también.

Pero eso es estrictamente menos de lo que se pide. «Ser retracto de deformación de» es una relación entre un subespacio y el espacio que lo contiene, no una relación de equivalencia entre espacios: dice además que la equivalencia está realizada por la inclusión. El ejercicio siguiente muestra dos subespacios homeomorfos del mismo espacio de los que solo uno es retracto de deformación, y con el argumento del tipo de homotopía no habría manera de distinguirlos.

Ejercicio 5.6. *Dos subespacios homeomorfos, y solo uno es retracto de deformación*

Dar un ejemplo de un espacio X y de dos subconjuntos A y B homeomorfos entre sí tales que A sea retracto de deformación de X y B no lo sea.

Resolución. La idea. Un retracto tiene que recibir todo X de forma continua, y una aplicación continua no puede separar los puntos de un trozo conexo, porque la imagen de un conexo es conexa. Así que basta tomar dos pares de puntos, homeomorfos entre sí como lo son dos espacios discretos de dos puntos, pero colocados de forma distinta: uno con cada punto en un trozo, el otro con los dos puntos en el mismo trozo.

El ejemplo. Se toma

$$X = [0,1] \cup [2,3] \subseteq \mathbb{R},$$

con la topología usual, y los subconjuntos

$$A = \{0, 2\}, \qquad B = \{0, \tfrac{1}{2}\}.$$

Los dos son espacios de dos puntos con la topología discreta, luego son homeomorfos entre sí: cualquier biyección entre ellos es un homeomorfismo.

A **sí lo es, y además de manera fuerte.** La retracción es

$$r(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1], \\ 2, & x \in [2,3], \end{cases}$$

continua porque $[0,1]$ y $[2,3]$ son abiertos y cerrados en X y en cada uno es constante. La homotopía es la que desliza cada punto hasta el extremo izquierdo de su intervalo:

$$H(x,t) = \begin{cases} (1-t)x, & x \in [0,1], \\ (1-t)x + 2t, & x \in [2,3]. \end{cases}$$

Es continua en cada trozo y los trozos son abiertos y cerrados, cumple $H(x,0) = x$, $H(x,1) = r(x)$, y deja quietos los puntos de A: $H(0,t) = 0$ y $H(2,t) = 2$.

B **no lo es, y de hecho no es ni retracto.** Supóngase que existiera una retracción $\rho : X \to B$, con $\rho(0) = 0$ y $\rho(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. El intervalo $[0,1]$ es conexo y ρ es continua, luego $\rho([0,1])$ es un subconjunto conexo de B. Pero B es discreto con dos puntos, así que sus únicos subconjuntos conexos son los puntos y el vacío. Luego ρ es constante sobre $[0,1]$, lo cual contradice que valga 0 en 0 y $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2}$, que son puntos distintos de $[0,1]$.

No hay, pues, ninguna retracción de X sobre B, y con más razón ningún retracto de deformación. ■

Otra vía (el mismo obstáculo en un espacio conexo). También se puede distinguir la posición de dos circunferencias homeomorfas mediante el grupo fundamental.

Se toma $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, y en él

$$A = S^1 = \{p \,;\, |p| = 1\}, \qquad B = \{p \,;\, |p - (5,0)| = 1\},$$

la circunferencia unidad y una circunferencia de radio 1 centrada en $(5,0)$, que no rodea al origen. Las dos son homeomorfas a S^1.

Que A es retracto de deformación fuerte de X es el ejemplo estándar del capítulo, con $H(p,t) = (1-t)p + t\, p/|p|$.

Que B no lo es se ve con el grupo fundamental, anticipando el cálculo $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ del capítulo 6. Si B fuese retracto de deformación, la inclusión $j : B \hookrightarrow X$ sería una equivalencia de homotopía y j_* sería un isomorfismo. Pero B está contenido en el semiplano $x > 0$, que es convexo y no contiene al origen; dentro de él todo lazo se contrae a su propio punto base mediante la homotopía rectilínea. Luego j_* lleva todo al neutro, mientras que $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$ no se reduce al neutro. Contradicción. De hecho, j_* tampoco es inyectivo, pues $\pi_1(B) \cong \mathbb{Z}$: B no es siquiera retracto de X.

Qué hemos aprendido. Ser retracto, o retracto de deformación, no es una propiedad del subespacio sino de cómo está colocado dentro de X. Los dos ejemplos usan la misma obstrucción a dos niveles: en el primero, la conexión, porque una aplicación continua no separa un intervalo; en el segundo, el grupo fundamental, porque una circunferencia que no rodea el agujero tiene j_* trivial.

Ejercicio 5.7. *Aplicaciones desde un contráctil, y los dos extremos de la topología*

Probar que si X es contráctil e Y conexo por caminos, dos aplicaciones continuas cualesquiera de X en Y son homotópicas. Indicar después cuántos elementos tiene el conjunto de las clases de homotopía de aplicaciones continuas de $(S^1, \{1\})$ en $(X, *)$ relativas a $\{1\}$ en los dos casos siguientes: cuando X tiene la topología discreta y cuando tiene la indiscreta.

Resolución. La idea. Si X es contráctil, toda aplicación que sale de X se puede deformar en una constante, arrastrando la contracción; y en un Y conexo por caminos, dos constantes se unen por un camino. En la segunda parte, los dos extremos de la topología dejan el mismo resultado por razones opuestas.

Primera parte. Sea $H : X \times I \to X$ con $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = x_1$ para todo x, y sean $f, g : X \to Y$ continuas.

La composición $f \circ H : X \times I \to Y$ es continua y cumple $(f \circ H)(x,0) = f(x)$ y $(f \circ H)(x,1) = f(x_1)$. Luego $f \simeq \mathrm{cte}_{f(x_1)}$. Por el mismo argumento, $g \simeq \mathrm{cte}_{g(x_1)}$.

Falta unir las dos constantes. Como Y es conexo por caminos, existe un camino $\gamma : I \to Y$ con $\gamma(0) = f(x_1)$ y $\gamma(1) = g(x_1)$. La aplicación $G : X \times I \to Y$ dada por $G(x,t) = \gamma(t)$ es continua — es la composición de la proyección sobre I con γ — y es una homotopía entre $\mathrm{cte}_{f(x_1)}$ y $\mathrm{cte}_{g(x_1)}$.

Por transitividad de la homotopía, $f \simeq g$. ■

EXPLÍCATE. *¿Dónde se ha usado que Y sea conexo por caminos, y qué pasaría sin esa hipótesis? Constrúyete un contraejemplo con $X = \{p\}$ y Y formado por dos puntos aislados.*

Segunda parte, topología discreta. Sea X discreto y $* \in X$. Una aplicación continua $f : S^1 \to X$ tiene imagen conexa, porque S^1 es conexo; y los únicos subconjuntos conexos no vacíos de un espacio discreto son los puntos. Luego f es constante, y como debe cumplir $f(1) = *$, la única aplicación posible es la constante $*$.

Hay entonces **una sola aplicación** y, por tanto, una sola clase: el conjunto tiene **un elemento**. Dicho en el lenguaje del capítulo, $\pi_1(X, *)$ es el grupo trivial para todo espacio discreto.

Segunda parte, topología indiscreta. Sea ahora X indiscreto, es decir, con $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Aquí ocurre lo contrario: *toda* aplicación de cualquier espacio en X es continua, porque las preimágenes de los dos únicos abiertos son $\emptyset$ y el total. Hay, pues, muchas aplicaciones $S^1 \to X$; lo que pasa es que también hay muchas homotopías.

Sean $f, g : S^1 \to X$ con $f(1) = g(1) = *$. Se define $H : S^1 \times I \to X$ por

$$H(z,t) = \begin{cases} f(z), & t \leq \frac{1}{2}, \\ g(z), & t > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

cuya continuidad no exige comprobar el empalme: cualquier aplicación con codominio indiscreto es continua. Y cumple $H(z,0) = f(z)$, $H(z,1) = g(z)$ y $H(1,t) = *$ para todo t, luego es una homotopía relativa a $\{1\}$.

Así que todas las aplicaciones están en la misma clase y el conjunto vuelve a tener **un elemento**. ■

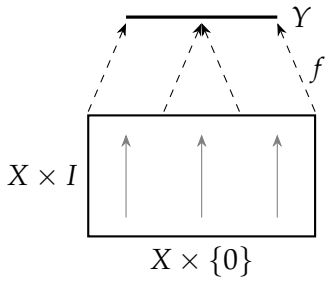
Qué hemos aprendido. Los dos extremos de la topología dan grupo fundamental trivial por razones opuestas. En la discreta hay tan pocos abiertos que desde un conexo solo salen aplicaciones constantes. En la indiscreta todas las aplicaciones son continuas, pero también

todas las homotopías, y dos lazos cualesquiera se unen por una. En los dos casos la topología no ve ningún agujero, y el grupo fundamental tampoco.

Ejercicio 5.8. *El cilindro de una aplicación*

Sea $f : X \to Y$ continua. Sobre la unión disjunta $(X \times I) \sqcup Y$ se considera la relación de equivalencia generada por $(x, 1) \sim f(x)$. El espacio cociente resultante se llama **cilindro** de la aplicación f y se denota M_f. Probar que Y es retracto de deformación de M_f.

Resolución. La idea. El cilindro de f es el cilindro $X \times I$ con la tapa $X \times \{1\}$ pegada a Y siguiendo f. La deformación sube cada punto por su segmento $\{x\} \times I$ hasta la tapa, que ya es un punto de Y, y deja quieto Y. Todo el trabajo técnico consiste en comprobar que esa película, escrita arriba, en $(X \times I) \sqcup Y$, baja bien al cociente.



El cilindro de f: la tapa $X \times \{1\}$ se pega a Y siguiendo f (flechas discontinuas), que puede juntar varios puntos en uno. La deformación sube cada punto por su segmento vertical hasta la tapa, es decir, hasta Y.

Sea $\pi : (X \times I) \sqcup Y \to M_f$ la proyección al cociente. Se identifica Y con su imagen $\pi(Y) \subseteq M_f$; obsérvese que π es inyectiva sobre Y, porque la relación solo identifica puntos de $X \times \{1\}$ con puntos de Y y nunca dos puntos de Y entre sí.

La retracción. Se define $R : (X \times I) \sqcup Y \to Y$ por

$$R(x, s) = f(x) \quad \text{para } (x, s) \in X \times I, \qquad R(y) = y \quad \text{para } y \in Y.$$

Es continua en cada sumando — en el primero es f compuesta con la proyección, en el segundo la identidad —, y una aplicación desde una unión disjunta es continua exactamente cuando lo es en cada sumando.

R es compatible con la relación: el punto $(x, 1)$ va a $f(x)$ y el punto $f(x)$ va a $f(x)$, luego los dos elementos que se identifican tienen la misma imagen. Por la propiedad universal del cociente, R induce una aplicación continua $r : M_f \to Y$ con $r \circ \pi = R$.

Y r es retracción: para $y \in Y$, $r(\pi(y)) = R(y) = y$. Esto justifica además la identificación de Y con el subespacio $\pi(Y)$: $\pi|_Y$ es continua e inyectiva, y su inversa es la restricción de r.

La homotopía. Se define $\widetilde{K} : \big((X \times I) \sqcup Y\big) \times I \to M_f$ por

$$\widetilde{K}\big((x, s), t\big) = \pi\big(x, (1 - t)s + t\big), \qquad \widetilde{K}(y, t) = \pi(y).$$

Es continua en cada sumando por serlo π y las fórmulas. Y es compatible con la relación: para $s = 1$,

$$\widetilde{K}\big((x, 1), t\big) = \pi\big(x, (1 - t) + t\big) = \pi(x, 1) = \pi\big(f(x)\big) = \widetilde{K}\big(f(x), t\big),$$

donde la tercera igualdad es precisamente la identificación que define M_f.

Queda un punto técnico que conviene no saltarse: para bajar $\widetilde{K}$ a $M_f \times I$ hace falta saber que $\pi \times \mathrm{Id}_I$ vuelve a ser una identificación. Eso es cierto porque I es compacto y Hausdorff, y el producto de una identificación por la identidad de un espacio localmente compacto y Hausdorff sigue siendo una identificación. Es el mismo resultado utilizado en la contracción del cono.

Se obtiene así $K : M_f \times I \to M_f$ continua, con

$$K\big(\pi(x,s),0\big) = \pi(x,s), \qquad K\big(\pi(x,s),1\big) = \pi(x,1) = \pi\big(f(x)\big),$$

y $K(\pi(y),t) = \pi(y)$ para todo t.

Es decir: K empieza en la identidad de M_f, termina en la inclusión de r y deja quietos todos los puntos de Y. Luego Y es retracto de deformación **fuerte** de M_f. ■

Qué hemos aprendido. Toda aplicación continua es, salvo equivalencia de homotopía, una inclusión. La aplicación $j(x) = \pi(x,0)$ lleva X a la base del cilindro, M_f se retrae sobre Y, y la retracción compuesta con j es f, porque $r(\pi(x,0)) = R(x,0) = f(x)$. Es el recurso que permite tratar cualquier aplicación como si fuera la inclusión de un subespacio.

Ejercicio 5.9. *El functor $[X,-]$ y la caracterización de las equivalencias*

Probar que toda aplicación continua $f : Y_0 \to Y_1$ da lugar a una aplicación $f_* : [X,Y_0] \to [X,Y_1]$ entre conjuntos de clases de homotopía, con las propiedades siguientes: si $f' \simeq f$ entonces $f'_* = f_*$; $(\mathrm{Id}_Y)_*$ es la identidad; $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$; y si f es equivalencia de homotopía, f_* es biyectiva. Probar después el recíproco: si f_* es biyectiva para todo X, entonces f es una equivalencia de homotopía.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Lo primero es comprobar que f_* está bien definida: que no depende del representante que se elija de la clase.*
2. *Las tres propiedades algebraicas son una línea cada una. La cuarta sale de las tres anteriores sin tocar ningún espacio.*
3. *Para el recíproco, el único recurso disponible es **elegir bien el** X. Como vale para todos, se puede tomar $X = Y_1$ y $X = Y_0$.*

Resolución. La idea. Una equivalencia de homotopía tiene inversa *salvo homotopía*, y pasar a los conjuntos $[X,-]$ convierte «salvo homotopía» en igualdad: la inversa salvo homotopía se vuelve una inversa de verdad entre conjuntos. Para el recíproco, lo único que se tiene es la libertad de elegir X, y dos elecciones bastan.

Se escribe $[X,Y]$ para el conjunto de clases de homotopía libre de aplicaciones continuas de X en Y.

f_* **está bien definida.** Se pone $f_*[u] = [f \circ u]$. Si $u \simeq u'$ mediante $H : X \times I \to Y_0$, entonces $f \circ H : X \times I \to Y_1$ es continua y es una homotopía entre $f \circ u$ y $f \circ u'$. Luego $[f \circ u] = [f \circ u']$ y la definición no depende del representante.

Si $f \simeq f'$ entonces $f_* = f'_*$. Sea $K : Y_0 \times I \to Y_1$ una homotopía entre f y f', y sea $u : X \to Y_0$ continua. La aplicación

$$X \times I \xrightarrow{u \times \mathrm{Id}_I} Y_0 \times I \xrightarrow{K} Y_1$$

es continua y en $t = 0$ vale $f(u(x))$, en $t = 1$ vale $f'(u(x))$. Luego $f \circ u \simeq f' \circ u$ y las dos aplicaciones inducidas coinciden sobre $[u]$.

Identidad y composición. $(\mathrm{Id}_Y)_*[u] = [\mathrm{Id} \circ u] = [u]$. Y

$$(g \circ f)_*[u] = [g \circ f \circ u] = g_*[f \circ u] = g_*\big(f_*[u]\big),$$

que es la igualdad pedida, válida sobre cada clase y por tanto como aplicaciones.

Si f es equivalencia de homotopía, f_* es biyectiva. Sea $g : Y_1 \to Y_0$ con $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_{Y_0}$ y $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_{Y_1}$. Aplicando las tres propiedades anteriores en este orden — composición, invariancia por homotopía, identidad —,

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (\mathrm{Id}_{Y_0})_* = \mathrm{Id}, \qquad f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (\mathrm{Id}_{Y_1})_* = \mathrm{Id}.$$

Luego f_* es biyectiva, con inversa g_*. Obsérvese que aquí no se ha vuelto a mirar ningún espacio: es álgebra pura sobre las tres propiedades. ■

El recíproco. Supóngase que $f_* : [X, Y_0] \to [X, Y_1]$ es biyectiva para todo espacio X. Hay que fabricar una inversa homotópica de f, y lo único que se tiene es la libertad de elegir X.

Primer paso: se elige $X = Y_1$. La sobreyectividad de $f_* : [Y_1, Y_0] \to [Y_1, Y_1]$ aplicada a la clase $[\mathrm{Id}_{Y_1}]$ da una aplicación continua $u : Y_1 \to Y_0$ con

$$f_*[u] = [\mathrm{Id}_{Y_1}], \qquad \text{es decir,} \qquad f \circ u \simeq \mathrm{Id}_{Y_1}.$$

Segundo paso: se elige $X = Y_0$. Se calcula la imagen por f_* de la clase $[u \circ f]$:

$$f_*[u \circ f] = [f \circ u \circ f] = [(f \circ u) \circ f].$$

Como $f \circ u \simeq \mathrm{Id}_{Y_1}$, componiendo por la derecha con f se obtiene $(f \circ u) \circ f \simeq f$, luego

$$f_*[u \circ f] = [f] = [f \circ \mathrm{Id}_{Y_0}] = f_*[\mathrm{Id}_{Y_0}].$$

La *inyectividad* de $f_* : [Y_0, Y_0] \to [Y_0, Y_1]$ da entonces $[u \circ f] = [\mathrm{Id}_{Y_0}]$, es decir, $u \circ f \simeq \mathrm{Id}_{Y_0}$.

Las dos condiciones juntas dicen que f es una equivalencia de homotopía con inversa u. ■

Otra vía (el enunciado dual). El mismo problema tiene una versión con las flechas al revés: toda $g : X_0 \to X_1$ induce $g^* : [X_1, Y] \to [X_0, Y]$ por $g^*[v] = [v \circ g]$, con las tres propiedades análogas — obsérvese que ahora $(h \circ g)^* = g^* \circ h^*$, con el orden invertido —, y si g^* es biyectiva para todo Y, entonces g es una equivalencia de homotopía. La demostración es la misma con los papeles cambiados: se toma $Y = X_0$ y la sobreyectividad da v con $v \circ g \simeq \mathrm{Id}_{X_0}$; después $Y = X_1$ y la inyectividad cierra.

Ejercicio 5.10. *Equivalencias de homotopía: criterios, productos y componentes*

Probar que toda aplicación continua homotópica a una equivalencia de homotopía es una equivalencia de homotopía, y que lo es toda aplicación continua entre espacios contráctiles. Probar que si $f_1 \simeq g_1$ y $f_2 \simeq g_2$ entonces $f_1 \times f_2 \simeq g_1 \times g_2$, y deducir que $X \times Y$ es contráctil si y solo si lo son X e Y. Finalmente, sea $\Pi_0(X)$ el conjunto de las componentes conexas por caminos de X y sea $f_* : \Pi_0(X) \to \Pi_0(Y)$ la aplicación que lleva la componente de x en la de $f(x)$; probar que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, que $f \simeq g$ implica $f_* = g_*$, y que si f es equivalencia de homotopía entonces f_* es biyectiva.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Para el primer apartado necesitas que la homotopía sea compatible con la composición por los dos lados. Ya lo has usado en el ejercicio anterior.*

2. *Para las aplicaciones entre contráctiles, no hay que construir nada: sirve el primer apartado del ejercicio sobre aplicaciones desde un contráctil.*
3. *Para el producto, otra vez las dos homotopías a la vez y con el mismo parámetro.*
4. *Para la vuelta de «$X \times Y$ contráctil», ¿de quién es retracto X dentro de $X \times Y$?*
5. *En Π_0, todo se reduce a una idea: una homotopía entre f y g da, para cada x, un camino entre $f(x)$ y $g(x)$.*

Resolución. La idea. Todo sale de dos hechos ya probados: la homotopía es compatible con la composición por los dos lados, y una homotopía entre f y g da, para cada punto x, un camino de $f(x)$ a $g(x)$. El primero da los criterios y el producto; el segundo, las componentes.

Homotópica a una equivalencia. Sea $f \simeq f'$ con f' equivalencia de homotopía y sea g una inversa homotópica de f'. La homotopía es compatible con la composición: si $h \simeq h'$ y k es continua, entonces $k \circ h \simeq k \circ h'$ — basta componer la homotopía con k — y $h \circ k \simeq h' \circ k$ — basta precomponer con $k \times \mathrm{Id}_I$ —. Por tanto

$$g \circ f \simeq g \circ f' \simeq \mathrm{Id}, \qquad f \circ g \simeq f' \circ g \simeq \mathrm{Id},$$

y f es equivalencia de homotopía con la misma inversa g.

Entre contráctiles. Sean X e Y contráctiles y $f : X \to Y$ continua cualquiera. Se elige $g : Y \to X$ también cualquiera, por ejemplo una constante. Los dos espacios son contráctiles y en particular conexos por caminos, porque $\mathrm{Id} \simeq$ cte proporciona, para cada punto, un camino hasta el punto de la constante. Se aplica ahora el resultado del ejercicio anterior sobre aplicaciones desde un contráctil, con dominio contráctil y codominio conexo por caminos:

- $g \circ f$ y Id_X son dos aplicaciones de X contráctil en X conexo por caminos, luego son homotópicas;
- $f \circ g$ y Id_Y son dos aplicaciones de Y contráctil en Y conexo por caminos, luego son homotópicas.

Así que f es equivalencia de homotopía, sea cual sea. ■

El producto. Sean $H_i : X_i \times I \to Y_i$ homotopías de f_i a g_i. La aplicación

$$H\big((x_1, x_2), t\big) = \big(H_1(x_1, t),\, H_2(x_2, t)\big)$$

es continua por serlo cada componente, y es una homotopía de $f_1 \times f_2$ a $g_1 \times g_2$.

De ahí, si f_1 y f_2 son equivalencias con inversas u_1 y u_2, entonces

$$(u_1 \times u_2) \circ (f_1 \times f_2) = (u_1 \circ f_1) \times (u_2 \circ f_2) \simeq \mathrm{Id}_{X_1} \times \mathrm{Id}_{X_2} = \mathrm{Id}_{X_1 \times X_2},$$

y simétricamente para la otra composición. Luego $f_1 \times f_2$ es equivalencia de homotopía.

$X \times Y$ **contráctil si y solo si lo son los dos.**

($\Leftarrow$) Si X e Y son contráctiles, las aplicaciones constantes $X \to \{p\}$ e $Y \to \{q\}$ son equivalencias de homotopía; por lo recién probado, su producto $X \times Y \to \{(p, q)\}$ también lo es, luego $X \times Y$ es contráctil.

($\Rightarrow$) Sea $X \times Y$ contráctil, con $Y \neq \emptyset$, y fíjese $y_0 \in Y$. La inclusión $i : X \to X \times Y$, $i(x) = (x, y_0)$, y la proyección $p_1 : X \times Y \to X$ son continuas y cumplen $p_1 \circ i = \mathrm{Id}_X$: es decir, $i(X)$ es un *retracto* de $X \times Y$, homeomorfo a X. Y ya se ha probado en este capítulo que un retracto de un espacio contráctil es contráctil. Luego X lo es, y por simetría Y también.

Las componentes conexas por caminos. Primero hay que ver que f_* está bien definida: si x y x' están en la misma componente, hay un camino α de x a x', y $f \circ \alpha$ es un camino de $f(x)$ a $f(x')$, luego $f(x)$ y $f(x')$ están en la misma componente y $C_{f(x)} = C_{f(x')}$.

Composición. $(g \circ f)_*(C_x) = C_{g(f(x))} = g_*(C_{f(x)}) = g_*(f_*(C_x))$.

Invariancia por homotopía. Si H es una homotopía de f a g, entonces para cada x la aplicación $t \mapsto H(x,t)$ es un camino continuo de $f(x)$ a $g(x)$. Luego $C_{f(x)} = C_{g(x)}$, es decir, $f_* = g_*$.

Equivalencias. Si u es inversa homotópica de f, las dos propiedades anteriores más $(\mathrm{Id})_* = \mathrm{Id}$ dan $u_* \circ f_* = \mathrm{Id}$ y $f_* \circ u_* = \mathrm{Id}$, luego f_* es biyectiva.

Y más todavía: la componente C_x tiene el mismo tipo de homotopía que $C_{f(x)}$. En efecto, $f(C_x) \subseteq C_{f(x)}$ y, como $C_{u(f(x))} = (u \circ f)_*(C_x) = C_x$, también $u(C_{f(x)}) \subseteq C_x$; además, si H es la homotopía de $u \circ f$ a Id_X, para cada $z \in C_x$ el camino $t \mapsto H(z,t)$ va de $u(f(z))$ a z y por tanto no sale de $C_z = C_x$, de modo que H se restringe a $C_x \times I \to C_x$. Lo mismo con la otra homotopía. Luego $f|_{C_x}$ y $u|_{C_{f(x)}}$ son inversas homotópicas la una de la otra. ■

Ejercicio 5.11. *La propiedad de extensión de homotopía*

Se dice que el par (X, A) tiene la **propiedad de extensión de homotopía**, o PEH, si para toda aplicación continua $f : X \to Y$ en un espacio arbitrario Y y toda homotopía $F : A \times I \to Y$ de $f|_A$ existe una homotopía $G : X \times I \to Y$ que extiende a la vez a F y a f. Probar que si A es cerrado, el par (X, A) tiene la PEH si y solo si $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ es retracto de $X \times I$.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Llama $Z = (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ y dibújalo: es el fondo del cilindro $X \times I$ más la pared que se levanta sobre A.*
2. *Un par formado por una aplicación en X y una homotopía en A es exactamente una aplicación definida sobre Z. Comprueba dónde hace falta que A sea cerrado.*
3. *Para la implicación que va de la PEH a la retracción, hay que elegir un Y concreto. Como en el ejercicio del functor, el candidato es el propio Z.*

Resolución. La idea. Los datos de la PEH, una aplicación en el fondo del cilindro $X \times I$ y una homotopía en la pared que se levanta sobre A, son lo mismo que una aplicación definida en Z, el fondo más la pared. Extenderlos a todo el cilindro es extender una aplicación desde Z, y el ejercicio de los retractos como extensores dice que poder extender siempre es lo mismo que ser retracto. La resolución escribe esa traducción con detalle.

Se escribe $Z = (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \subseteq X \times I$.

Observación previa: los datos de la PEH son una aplicación sobre Z. Dada $f : X \to Y$ y dada $F : A \times I \to Y$ con $F(a,0) = f(a)$, se define $\Phi : Z \to Y$ por

$$\Phi(x,0) = f(x) \ \ (x \in X), \qquad \Phi(a,t) = F(a,t) \ \ (a \in A,\ t \in I).$$

Está bien definida porque en el solapamiento $A \times \{0\}$ las dos fórmulas coinciden, que es justamente la condición $F(a,0) = f(a)$.

Y es continua: $X \times \{0\}$ es cerrado en $X \times I$, y $A \times I$ también lo es **porque A es cerrado en X**; sus intersecciones con Z son cerradas en Z, lo recubren, y sobre cada uno la fórmula es continua. El lema del pegado para dos cerrados da la continuidad de Φ. Aquí es donde entra la hipótesis sobre A: permite aplicar este lema del pegado.

Recíprocamente, toda aplicación continua $\Phi : Z \to Y$ determina un par (f, F) de esa forma, restringiendo a $X \times \{0\}$ y a $A \times I$.

Si Z es retracto de $X \times I$, el par tiene la PEH. Sea $\rho : X \times I \to Z$ una retracción y sean f y F como en el enunciado. Se toma Φ como arriba y se define

$$G = \Phi \circ \rho : X \times I \to Y,$$

continua por composición. Falta comprobar que extiende a los dos datos, y sale de que ρ deja fijos los puntos de Z:

$$G(x,0) = \Phi(\rho(x,0)) = \Phi(x,0) = f(x), \qquad G(a,t) = \Phi(\rho(a,t)) = \Phi(a,t) = F(a,t).$$

Si el par tiene la PEH, Z es retracto de $X \times I$. Aquí hay que elegir el espacio de llegada, y el enunciado permite cualquiera. Se toma $Y = Z$ y los datos más naturales posibles:

$$f : X \to Z,\ f(x) = (x,0), \qquad F : A \times I \to Z,\ F(a,t) = (a,t),$$

las dos continuas — son restricciones de aplicaciones evidentes con imagen en Z — y compatibles, porque $F(a,0) = (a,0) = f(a)$.

Por la PEH existe $G : X \times I \to Z$ continua con $G(x,0) = f(x) = (x,0)$ para todo $x \in X$ y $G(a,t) = F(a,t) = (a,t)$ para todo $(a,t) \in A \times I$.

Es decir, G deja fijo cada punto de Z, y su imagen está en Z: eso es exactamente una retracción de $X \times I$ sobre Z. ■

Ejercicio 5.12. *Cancelación en la yuxtaposición de caminos*

Probar que la yuxtaposición de caminos satisface la siguiente propiedad de cancelación: si $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$ y $g_0 \sim g_1$, entonces $f_0 \sim f_1$.

Resolución. La idea. Es la cancelación de siempre en un grupo: de $ab = a'b'$ y $b = b'$ sale $a = a'$ multiplicando por b^{-1} a la derecha. Lo único que hay que vigilar es que cada producto tenga sentido, porque dos caminos solo se yuxtaponen si el primero acaba donde empieza el segundo.

Los extremos, primero. Para que $f_i * g_i$ tenga sentido, f_0 y f_1 son caminos de un punto x a un punto y, y g_0 y g_1 son caminos de y a un punto z. Las equivalencias del enunciado son, todas, relativas a los extremos.

La cuenta. Se usan las tres propiedades demostradas en la sección de caminos, todas salvo equivalencia: el camino constante es neutro, $g * \bar{g} \sim c$, y la yuxtaposición es asociativa; y se usa que la equivalencia es compatible con la yuxtaposición, de modo que se pueden sustituir factores equivalentes.

Obsérvese antes que de $g_0 \sim g_1$ se sigue $\bar{g}_0 \sim \bar{g}_1$: si H es una homotopía relativa a los extremos entre g_0 y g_1, entonces $H(1-t,s)$ lo es entre sus inversos.

Ahora:

$$f_0 \ \sim\ f_0 * c_y \ \sim\ f_0 * (g_0 * \bar{g}_0) \ \sim\ (f_0 * g_0) * \bar{g}_0,$$

donde se han usado, en este orden, el neutro, el inverso y la asociatividad. Sustituyendo ahora los dos factores por sus equivalentes — $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$ por hipótesis, y $\bar{g}_0 \sim \bar{g}_1$ por la observación —,

$$(f_0 * g_0) * \bar{g}_0 \ \sim\ (f_1 * g_1) * \bar{g}_1 \ \sim\ f_1 * (g_1 * \bar{g}_1) \ \sim\ f_1 * c_y \ \sim\ f_1.$$

Por transitividad, $f_0 \sim f_1$. ■

QUÉ DEJA. Que las clases de caminos de un espacio no forman un grupo — dos caminos cualesquiera no se pueden multiplicar —, pero se comportan como si lo fueran siempre que los extremos encajen: hay neutro, inverso y asociatividad, y con eso valen todas las manipulaciones algebraicas de siempre, cancelación incluida. Esa estructura tiene nombre propio, *grupoide*, y el grupo fundamental es lo que queda al quedarse solo con los lazos de un punto, que sí se pueden multiplicar todos con todos.

Ejercicio 5.13. *Simple conexión, caminos y componentes*

Probar que $\pi_1(X, x_0) = 0$ si y solo si para todo $x \in X$ dos caminos cualesquiera entre x_0 y x son equivalentes. Probar también que si $A \subseteq X$ es la componente conexa por caminos de x_0, la inclusión $i : A \hookrightarrow X$ induce un isomorfismo $i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.

Resolución. Primera parte, ida. Supóngase $\pi_1(X, x_0) = 0$ y sean α, β dos caminos de x_0 a x. Entonces $\alpha * \bar{\beta}$ es un lazo en x_0, luego $\alpha * \bar{\beta} \sim c_{x_0}$. Se opera:

$$\alpha \sim \alpha * c_x \sim \alpha * (\bar{\beta} * \beta) \sim (\alpha * \bar{\beta}) * \beta \sim c_{x_0} * \beta \sim \beta.$$

Primera parte, vuelta. Supóngase que dos caminos cualesquiera con los mismos extremos, saliendo de x_0, son equivalentes. Se aplica al caso $x = x_0$: dado un lazo α en x_0, tanto α como el camino constante c_{x_0} son caminos de x_0 a x_0, luego $\alpha \sim c_{x_0}$ y $[\alpha]$ es el neutro. Como α era arbitrario, $\pi_1(X, x_0) = 0$. ■

Segunda parte. Sea A la componente conexa por caminos de x_0. La observación que se usa dos veces es esta: *si S es un subconjunto conexo por caminos de X que contiene a x_0, entonces $S \subseteq A$*, por definición de componente.

Sobreyectividad. Sea α un lazo en x_0 dentro de X. Su traza $\alpha(I)$ es la imagen continua del conexo por caminos I, luego es conexa por caminos, y contiene a $x_0 = \alpha(0)$. Por la observación, $\alpha(I) \subseteq A$: es decir, α es ya un lazo de A, y $i_*[\alpha]_A = [\alpha]_X$.

Inyectividad. Sea α un lazo en A con $i_*[\alpha]_A = 1$, es decir, tal que existe $H : I \times I \to X$ homotopía relativa a $\{0, 1\}$ entre α y c_{x_0}. La imagen $H(I \times I)$ es la imagen continua de un cuadrado, que es conexo por caminos, y contiene a x_0. Por la observación, $H(I \times I) \subseteq A$, de modo que H es en realidad una homotopía dentro de A y $[\alpha]_A = 1$. ■

QUÉ DEJA. Dos cosas de uso constante. La primera, que la simple conexión se puede leer sin mencionar lazos: en un espacio simplemente conexo *da igual el camino que se tome* entre dos puntos, lo que explica por qué el transporte paralelo de la parte de geometría deja de depender del camino cuando la región es simplemente conexa y tiene curvatura nula. La segunda, que el grupo fundamental **solo ve la componente conexa por caminos del punto base**: por eso se supone siempre, sin pérdida de generalidad, que el espacio es conexo por caminos, y por eso las hipótesis del teorema de Seifert-van Kampen insisten tanto en ello.

Ejercicio 5.14. *Espacios 1-simples y las clases libres de S^1*

Un espacio conexo por caminos X se dice **1-simple** si dados $x_0, x_1 \in X$, dos caminos cualesquiera de x_0 a x_1 inducen el mismo isomorfismo entre $\pi_1(X, x_1)$ y $\pi_1(X, x_0)$. Probar que X es 1-simple si y solo si $\pi_1(X, x_0)$ es abeliano. Sea ahora $[S^1, X]$ el conjunto de las clases de homotopía *libre*, no relativa, de aplicaciones de S^1 en X, y sea $\varphi : \pi_1(X, x_0) \to [S^1, X]$ la aplicación $[\alpha] \mapsto [f_\alpha]$. Probar que φ es sobreyectiva cuando X es conexo por caminos, y que si $\varphi([\alpha]) = \varphi([\beta])$ entonces $[\alpha]$ y $[\beta]$ son conjugados. Concluir que $[S^1, X]$ está en biyección con las clases de conjugación de $\pi_1(X, x_0)$.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Escribe el isomorfismo que induce un camino γ: es $[\alpha] \mapsto [\gamma * \alpha * \bar{\gamma}]$. Iguala los de dos caminos y despeja.*
2. *Si γ y δ recorren todos los caminos de x_0 a x_1, ¿qué lazos aparecen como $\bar{\delta} * \gamma$?*

3. *Para la sobreyectividad de φ, el problema es que una aplicación de S^1 no tiene por qué pasar por x_0. Únela a x_0 por un camino y comprueba que la clase libre no cambia.*

Resolución. La idea. Dos caminos γ y δ de x_0 a x_1 dan el mismo isomorfismo exactamente cuando el lazo $\bar{\delta} * \gamma$, que va por δ al revés y vuelve por γ, conmuta con todo; y como ese lazo puede ser cualquiera, ser 1-simple es lo mismo que tener grupo abeliano. En la segunda parte, olvidar el punto base es perder la diferencia entre un lazo y sus conjugados, porque una homotopía libre deja que el punto base dé una vuelta.

Primera parte. Se recuerda del capítulo que un camino γ de x_0 a x_1 induce el isomorfismo

$$\gamma_\sharp : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0), \qquad \gamma_\sharp[\alpha] = [\gamma * \alpha * \bar{\gamma}].$$

Sean γ y δ dos caminos de x_0 a x_1. Que induzcan el mismo isomorfismo significa que para todo lazo α en x_1,

$$[\gamma * \alpha * \bar{\gamma}] = [\delta * \alpha * \bar{\delta}].$$

Multiplicando a la izquierda por $[\bar{\delta}]$ y a la derecha por $[\delta]$ — lo que es lícito por la cancelación del ejercicio anterior —, la igualdad equivale a

$$[\bar{\delta} * \gamma]\,[\alpha]\,[\overline{\bar{\delta} * \gamma}] = [\alpha],$$

es decir, a que el lazo $c = \bar{\delta} * \gamma$, que es un lazo en x_1, conmute con $[\alpha]$.

Ahora se observa que, fijado γ, el elemento $[c]$ recorre *todo* $\pi_1(X, x_1)$ cuando δ recorre los caminos de x_0 a x_1: dado un lazo c cualquiera en x_1, basta tomar $\delta = \gamma * \bar{c}$, que es un camino de x_0 a x_1 y cumple $\bar{\delta} * \gamma \sim c$.

Por tanto: X es 1-simple si y solo si todo elemento de $\pi_1(X, x_1)$ conmuta con todos, es decir, si y solo si $\pi_1(X, x_1)$ es abeliano. Y como X es conexo por caminos, ese grupo es isomorfo a $\pi_1(X, x_0)$. ■

Segunda parte: φ es sobreyectiva. Sea $f : S^1 \to X$ continua y sea $x_1 = f((1,0))$. Por el ejercicio anterior sobre lazos y aplicaciones de la circunferencia, f corresponde al lazo $\alpha_1 = f \circ q$ en x_1, donde $q(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$. Como X es conexo por caminos, existe un camino γ de x_0 a x_1, y $\alpha = \gamma * \alpha_1 * \bar{\gamma}$ es un lazo en x_0.

Se afirma que f_α y f son libremente homotópicas. La homotopía consiste en *ir acortando el rabo* γ: para cada $s \in I$ se llama γ_s al camino $\gamma_s(u) = \gamma(s + (1-s)u)$, que va de $\gamma(s)$ a x_1, y se define

$$G : I \times I \to X, \qquad G(t,s) = \big(\gamma_s * \alpha_1 * \bar{\gamma}_s\big)(t).$$

Es continua, porque las tres piezas dependen continuamente de (t,s) y las reparametrizaciones de la yuxtaposición son continuas. En $s = 0$ el camino γ_0 es γ y queda α; en $s = 1$ el camino γ_1 es constante y queda $c_{x_1} * \alpha_1 * c_{x_1}$, que es una reparametrización de α_1 y por tanto define la misma aplicación de S^1 salvo homotopía. Además $G(0,s) = \gamma_s(0) = \gamma(s)$ y $G(1,s) = \bar{\gamma}_s(1) = \gamma_s(0) = \gamma(s)$ para todo s, de modo que G pasa al cociente $I/\{0 \sim 1\} = S^1$ y define una homotopía libre $S^1 \times I \to X$. Concatenándola con la homotopía que elimina las dos esperas constantes se llega a f. Luego $\varphi([\alpha]) = [f]$.

Segunda parte: la fibra de φ son las clases de conjugación. Sean α y β lazos en x_0 con f_α y f_β libremente homotópicas, y sea $F : S^1 \times I \to X$ una homotopía libre entre ellas. El punto base se mueve a lo largo del camino $\gamma(s) = F((1,0), s)$, que es un lazo en x_0 porque $F((1,0),0) = \alpha(0) = x_0$ y $F((1,0),1) = \beta(0) = x_0$.

Componiendo F con $q \times \mathrm{Id}_I$ se obtiene $\widetilde{F} : I \times I \to X$ con $\widetilde{F}(t,0) = \alpha(t)$, $\widetilde{F}(t,1) = \beta(t)$ y $\widetilde{F}(0,s) = \widetilde{F}(1,s) = \gamma(s)$. Es decir, $\widetilde{F}$ es una homotopía de α a β en la que los extremos, en vez de estar clavados, recorren γ.

De ahí sale la conjugación con un argumento que conviene tener catalogado, porque resuelve solo todos los problemas de este tipo: *en un cuadrado, dos caminos con los mismos extremos son siempre equivalentes*, por ser el cuadrado convexo y valer la homotopía rectilínea. Se consideran en $I \times I$ los dos caminos que van de $(0,0)$ a $(1,0)$:

- el borde inferior, $t \mapsto (t,0)$;
- el que sube por el borde izquierdo, cruza por el superior y baja por el derecho.

Son equivalentes en $I \times I$; componiendo con $\widetilde{F}$, sus imágenes son equivalentes en X. La imagen del primero es α; la del segundo es $\gamma * \beta * \bar{\gamma}$. Luego

$$[\alpha] = [\gamma]\,[\beta]\,[\gamma]^{-1},$$

de modo que $[\alpha]$ y $[\beta]$ son conjugados.

Recíprocamente, si $[\alpha] = [\gamma][\beta][\gamma]^{-1}$ con γ un lazo en x_0, el argumento de «acortar el rabo» de la sobreyectividad, aplicado con ese γ, produce una homotopía libre entre f_α y f_β.

Juntando las tres cosas: φ es sobreyectiva y dos elementos tienen la misma imagen si y solo si son conjugados. Luego φ induce una biyección entre el conjunto de clases de conjugación de $\pi_1(X, x_0)$ y $[S^1, X]$. ■

Qué hemos aprendido. Esto cierra la alternativa de prescindir del punto base de la sección 5.3: las clases libres de lazos existen, pero son las clases de conjugación del grupo fundamental, y no tienen producto. En un grupo abeliano cada clase de conjugación tiene un solo elemento, y entonces φ es biyectiva: para el toro, anticipando el cálculo del capítulo siguiente, $[S^1, S^1 \times S^1]$ está en biyección con $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Repaso del capítulo

REPASO INTERCALADO: HOMOTOPÍA, PRIMERA RONDA

1. Define homotopía, homotopía relativa y equivalencia de homotopía.
2. Define retracto, retracto de deformación y retracto de deformación fuerte, y di qué aporta cada nivel.
3. Enuncia las tres propiedades de la yuxtaposición y describe la imagen de cada homotopía.
4. Define grupo fundamental y prueba que el producto está bien definido.
5. Enuncia el isomorfismo de cambio de punto base.
6. ¿Qué es un espacio simplemente conexo? ¿Y contráctil? ¿Cuál implica cuál?

REPASO INTERCALADO: HOMOTOPÍA, SEGUNDA RONDA, CON MATERIAL ANTERIOR

1. Da un ejemplo de retracto que no sea de deformación, y explica cómo se prueba que no lo es.
2. Da un ejemplo de retracto de deformación que no sea fuerte.
3. ¿Por qué $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$? ¿Qué da eso para el toro?
4. Un espacio contráctil es conexo por caminos. Demuéstralo en dos líneas.
5. Si A es retracto de X, la inclusión induce un homomorfismo inyectivo. ¿Por qué, y

para qué sirve?

6. En la parte de geometría apareció que, si una geodésica simple cerrada bordea un disco, no puede cumplirse $K \leq 0$ en todo ese disco. ¿Qué dice esto sobre la clase del lazo en una superficie con $K \leq 0$? No se está afirmando que toda superficie así tenga geodésicas cerradas.

CAPÍTULO 6

Cálculo del grupo fundamental

ANTES DE LEER

1. Un lazo en la circunferencia puede dar una vuelta, dos, o ninguna, y puede darlas al revés. ¿Cuántos lazos esencialmente distintos hay?
2. ¿Se puede aplastar de forma continua un disco sobre su borde dejando el borde quieto? Intenta hacerlo con las manos.
3. Todo polinomio complejo tiene una raíz. ¿Qué podría tener eso que ver con dar vueltas alrededor de un punto?

Las respuestas están en las secciones 6.1 y 6.2.

LA IDEA: POR QUÉ TODO DEPENDE DE LA CIRCUNFERENCIA

Conocer el grupo fundamental de la circunferencia, junto con la herramienta de cálculo que proporciona el teorema de Seifert-van Kampen, permite determinar el grupo fundamental de una gran variedad de ejemplos. En esta asignatura, el interés está centrado en las superficies.

La circunferencia es el caso básico porque muchos de los ejemplos anteriores, como el plano perforado, tienen el tipo de homotopía de uniones de circunferencias. Para superficies cerradas, como el toro, hará falta además entender las relaciones entre los lazos: de eso se ocupa Seifert-van Kampen.

6.1 Grupo fundamental de S^1

LA PREGUNTA: DEMOSTRAR QUE UNA VUELTA NO SE PUEDE DESHACER

Una cuerda que da una vuelta alrededor de un poste no se puede soltar sin pasar uno de sus extremos por encima del poste; una que solo lo roza, sí. Que un lazo que da una vuelta completa a la circunferencia no se puede encoger hasta un punto lo cree cualquiera, pero creerlo no es demostrarlo: hace falta exhibir algo que distinga las vueltas y que no cambie al deformar el lazo. ¿Qué se le puede medir a un lazo de la circunferencia que sea un número entero y que sobreviva a cualquier deformación continua?

LA IDEA: EL HECHO CRUCIAL, Y POR QUÉ LO ES

Todo el cálculo descansa en una propiedad de la aplicación

$$p : \mathbb{R} \to S^1, \qquad p(t) = (\cos 2\pi t,\ \operatorname{sen} 2\pi t),$$

que enrolla la recta sobre la circunferencia como un muelle infinito.
La propiedad es esta: *cada punto de S^1 tiene un entorno cuya preimagen es una unión disjunta de trozos de recta, cada uno de los cuales p aplica homeomórficamente sobre el entorno*. Es decir, localmente p no mezcla nada: mirando de cerca, la recta y la circunferencia son indistinguibles.
Eso permite **elevar**: dado un camino en la circunferencia, se puede seguir su rastro en la recta de forma única una vez fijado el punto de partida. Y al elevar un lazo, el punto de llegada no tiene por qué ser el de partida: se habrá subido un número entero de pisos. Ese entero es el **grado** del lazo, y es todo el grupo fundamental de la circunferencia.

La imagen, y conviene llevarla hasta el final. Un aparcamiento en espiral. Visto desde arriba, en planta, todo el aparcamiento es una circunferencia: por más que se conduzca, uno siempre está sobre el mismo círculo del plano. Pero el aparcamiento de verdad es la rampa, que sube; y la rampa es una recta enrollada. Conducir es un lazo en la circunferencia; la rampa es el levantamiento; y la única cosa que uno no puede falsear al final del trayecto es **en qué planta ha acabado**.
La imagen predice el teorema entero, punto por punto. Predice que el invariante es un *entero* y no un número cualquiera, porque las plantas son discretas. Predice que *se suma* al encadenar dos trayectos, porque las plantas se suman. Predice que *no cambia al deformar*, porque para cambiar de planta sin salir de la rampa habría que dar un salto. Y predice que un lazo de grado cero *sí* se puede encoger, porque quien acaba en la planta de la que salió puede simplemente desandar lo andado. Cuatro predicciones que son los cuatro pasos de la demostración.
Todo el teorema descansa entonces en una sola cosa, y merece decirse aparte: **no se puede saltar de planta**. Para convertirlo en una prueba se necesitan la existencia y unicidad de los levantamientos, tanto de caminos como de homotopías. Las plantas finales permanecen en una fibra discreta; por continuidad no pueden cambiar.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: CONTAR LAS VUELTAS MIRANDO EL LAZO

La alternativa. Definir el grado de un lazo de la circunferencia como el número de vueltas que se le ven dar, sin construir ningún levantamiento.
Su ventaja. Es lo que todo el mundo tiene en la cabeza, y para los lazos que uno dibuja funciona sin discusión posible.
Qué la hunde. Que «las vueltas que se le ven dar» no es una definición. Un lazo es únicamente una aplicación continua $I \to S^1$, y las aplicaciones continuas pueden ser todo lo patológicas que se quiera: no tienen por qué ser derivables en ningún punto, ni recorrer la circunferencia de manera monótona a trozos, ni admitir dibujo alguno. Sin una definición que valga para todas ellas no hay teorema, y además habría que probar por separado que el número no cambia al deformar. El levantamiento hace las dos cosas de una vez: convierte el lazo en un camino de la recta, donde «cuántos pisos ha subido» es la resta $\tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0)$, un número perfectamente definido, y la unicidad del levantamiento, junto con la elevación de homotopías, prueba la invariancia.

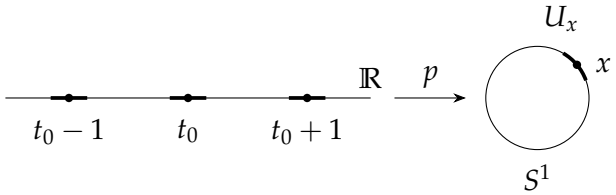
Se recalca el hecho crucial. Para todo $x \in S^1$ existe un abierto $U_x \subseteq S^1$ tal que $p^{-1}(U_x)$ es unión disjunta de abiertos V_a, uno por cada $a \in p^{-1}(x)$, y además, para cada a,

$$p_a = p\big|_{V_a} : V_a \to U_x$$

es un homeomorfismo.

Definición. Se llama **fibra** de x a $p^{-1}(x)$ y **cubierta** de U_x a cada V_a.

Con esta normalización, $p(t+1) = p(t)$: la fibra de $x = p(t_0)$ es $t_0 + \mathbb{Z}$. Un arco pequeño U_x se levanta a intervalos separados por una unidad:



El hecho crucial, comprobado en un punto. Conviene verlo una vez con las fórmulas delante, porque todo lo que sigue lo usa. Sea $x = (1,0)$ y sea $U = S^1 \setminus \{(-1,0)\}$, la circunferencia sin el punto opuesto. Cada punto de U se escribe de una sola manera como $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ con $\theta \in (-\pi, \pi)$, y θ depende continuamente del punto: es el ángulo polar, que solo salta al cruzar $(-1,0)$, y ese punto se ha quitado. Como $p(t) = (-1,0)$ exactamente cuando $t \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, se tiene

$$p^{-1}(U) = \mathbb{R} \setminus \left(\tfrac{1}{2} + \mathbb{Z}\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k - \tfrac{1}{2},\, k + \tfrac{1}{2}\right),$$

una unión disjunta de intervalos abiertos, uno por cada punto k de la fibra $p^{-1}(x) = \mathbb{Z}$. Y en cada intervalo la inversa de p se escribe de un golpe:

$$p_k^{-1}(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = k + \frac{\theta}{2\pi}, \qquad \theta \in (-\pi, \pi).$$

Se lee así: para subir un punto de U a la planta k, se mide su ángulo, se pasa a vueltas dividiendo por 2π y se suma el número de la planta. Es continua, y componerla con p da la identidad, porque $p(k + \theta/2\pi) = (\cos(2\pi k + \theta), \operatorname{sen}(2\pi k + \theta)) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Para cualquier otro punto de S^1 se hace lo mismo girando: se quita su opuesto.

Lo que no se puede hacer es tomar $U = S^1$ entera. Su preimagen es toda la recta, que es conexa y no se parte en trozos; y no hay un ángulo continuo definido en toda la circunferencia, porque al dar la vuelta completa tendría que volver a su valor inicial habiendo aumentado en 2π. Por eso el hecho crucial es *local*: los entornos tienen que ser arcos que no den la vuelta, y un camino largo hay que trocearlo para que cada trozo quepa en uno de ellos. Ese troceo es el trabajo del lema siguiente.

Lema (Lema de Lebesgue)**.** Sea (X, d) un espacio métrico compacto no vacío y $\mathcal{U}$ un recubrimiento por abiertos de X. Entonces existe $\delta > 0$ tal que todo subconjunto de X con diámetro menor que δ está contenido en algún abierto del recubrimiento.

La idea, en una línea: se fabrica una función que mide «cuánto le sobra a este punto por todos lados», y como es continua en un compacto tiene un mínimo positivo; ese mínimo es el δ.
Si algún abierto del recubrimiento es X, sirve cualquier $\delta > 0$. En otro caso, por compacidad se extrae un subrecubrimiento finito $\{A_1, \dots, A_n\}$, con complementarios no vacíos. Para cada i sea $C_i = X \setminus A_i$ y se define $f : X \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, C_i).$$

Es continua en un compacto, luego alcanza un mínimo $\delta > 0$; es estrictamente positivo porque todo x está en algún A_i y por tanto $d(x, C_i) > 0$ para ese i.
Si $Y \subseteq X$ es no vacío y tiene diámetro menor que δ, se elige $x_0 \in Y$; entonces $Y \subseteq B(x_0, \delta)$, porque todo $y \in Y$ cumple $d(x_0, y) \leq \operatorname{diam} Y < \delta$. Como $f(x_0) \geq \delta$ y $f(x_0)$ es el promedio de los n números $d(x_0, C_i)$, alguno de ellos es al menos el promedio: existe i con $d(x_0, C_i) \geq \delta$. Eso significa que ningún punto a distancia menor que δ de x_0 está en C_i, es decir, $B(x_0, \delta) \subseteq A_i$; en particular $Y \subseteq A_i$.

Un caso a mano. En $X = [0, 1]$ se toma el recubrimiento $\{A_1, A_2\} = \{[0, \frac{2}{3}),\ (\frac{1}{3}, 1]\}$, dos abiertos del intervalo que se solapan en $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Un subconjunto de diámetro menor que $\frac{1}{3}$ que tenga algún punto $\leq \frac{1}{3}$ no llega a $\frac{2}{3}$, y cabe en A_1; si no tiene ninguno, cabe en A_2. Así que $\delta = \frac{1}{3}$ sirve, y no se puede mejorar: $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ tiene diámetro exactamente $\frac{1}{3}$ y no cabe en ninguno. La función de la demostración, con $C_1 = [\frac{2}{3}, 1]$ y $C_2 = [0, \frac{1}{3}]$, vale $\frac{1}{2}(\frac{2}{3} - x)$ en $[0, \frac{1}{3}]$, la constante $\frac{1}{6}$ en $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ y $\frac{1}{2}(x - \frac{1}{3})$ en $[\frac{2}{3}, 1]$; su mínimo es $\frac{1}{6}$. La prueba da, pues, un δ peor que el óptimo, pero válido, y eso es todo lo que se le pide: el lema no busca el mejor δ, solo asegura que hay uno positivo.

LA IDEA: PARA QUÉ SIRVE EL LEMA DE LEBESGUE

Es una herramienta puramente técnica pero imprescindible, y su papel es siempre el mismo: *trocear*.
Un camino en la circunferencia puede dar muchas vueltas y no cabe en un solo entorno con cubiertas. El lema garantiza que se puede partir el intervalo $[0, 1]$ en un número finito de trozos tan pequeños que cada uno vaya a parar dentro de un solo entorno. Y en cada trozo pequeño la elevación se escribe de un golpe, sin ningún argumento: como ese trozo cae dentro de un entorno bien cubierto, basta componer con la inversa del homeomorfismo local que sube ese entorno a la planta elegida.

El mismo papel juega en la demostración de que la elevación respeta homotopías, con el cuadrado $I \times I$ partido en cuadraditos.

Elevar a mano, antes del teorema. Tres lazos en $(1,0)$, elevados desde 0:

- $\alpha(t) = p(2t) = (\cos 4\pi t, \operatorname{sen} 4\pi t)$ da dos vueltas. Su elevación es $\tilde{\alpha}(t) = 2t$, que acaba en 2. Si se eleva desde $a = 3$, sale $2t + 3$, que acaba en 5: la planta de llegada cambia con la de salida, pero lo subido, 2, no.
- $\beta(t) = p(t)$ para $t \leq \frac{1}{2}$ y $\beta(t) = p(1-t)$ para $t \geq \frac{1}{2}$ da media vuelta y la deshace. Su elevación es $\tilde{\beta}(t) = \min(t, 1-t)$, que vuelve a 0: grado cero, aunque el lazo pase por el punto opuesto $(-1,0)$.
- $\gamma(t) = p(t^2)$ recorre la circunferencia una vez, frenando al principio. Su elevación es t^2, que acaba en 1: grado uno, el mismo que la vuelta canónica.

El grado cuenta vueltas *netas*: no le importa la velocidad ni por dónde pasa el lazo, solo cuántas plantas ha ganado al final.

Y así encontraría la demostración la elevación de α, sin conocerla de antemano. Se cubre S^1 con $U_+ = S^1 \setminus \{(-1,0)\}$ y $U_- = S^1 \setminus \{(1,0)\}$. Con la partición $t_i = i/8$, en cada trozo $[t_i, t_{i+1}]$ el lazo recorre un cuarto de vuelta cerrado, que no contiene a la vez $(1,0)$ y $(-1,0)$, y por tanto cabe entero en U_+ o en U_-. En cada trozo la elevación es la fórmula del hecho crucial: el ángulo dividido por 2π más la planta en la que se llega al trozo, con el ángulo tomado en $(-\pi, \pi)$ en U_+ y en $(0, 2\pi)$ en U_-. Trozo a trozo la planta se va arrastrando, y al final se ha subido de 0 a 2. Eso es exactamente la existencia del paso 1 que viene.

Teorema. $\pi_1(S^1, (1,0)) \cong \mathbb{Z}$.

La demostración consiste en alcanzar cuatro objetivos, y son las cuatro predicciones de la rampa.

Paso 1: construir la rampa y comprobar que no se puede saltar de planta *(el núcleo de la prueba)*. Es decir, existencia y unicidad de la elevación. Aquí está todo el peso del teorema: la existencia se fabrica troceando, y la unicidad, que es la parte que de verdad importa, sale de un argumento de conexión. Los tres pasos siguientes no hacen más que cobrar las consecuencias.

Dados un camino $\alpha : I \to S^1$ con $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x_1$, y cualquier $a \in p^{-1}(x_0)$, existe un único camino $\tilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}$ con $\tilde{\alpha}(0) = a$ y $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, llamado **elevación** de α por a.

Existencia. Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento de S^1 por abiertos que admiten cubiertas. Se aplica el lema de Lebesgue al recubrimiento $\{\alpha^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ del intervalo: existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ tal que $\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$ para algún $U_i \in \mathcal{U}$. Se define $\tilde{\alpha}$ en $[0, t_1]$ como $p_a^{-1} \circ \alpha$, con V_a la cubierta de U_0 que contiene a a; a continuación se toma $a_1 = \tilde{\alpha}(t_1)$ y se repite en $[t_1, t_2]$, y así sucesivamente. Los trozos encajan por construcción y el pegado finito da continuidad.

Unicidad. Sea $\hat{\alpha}$ otra elevación con $\hat{\alpha}(0) = a$ y sea $A = \{t : \tilde{\alpha}(t) = \hat{\alpha}(t)\}$. Es no vacío porque $0 \in A$. Es cerrado por continuidad: si $t_n \to t$ con $t_n \in A$, entonces $\tilde{\alpha}(t) = \hat{\alpha}(t)$. Y es abierto: si $t \in A$, se toma $U \in \mathcal{U}$ con $\alpha(t) \in U$ y $\varepsilon > 0$ con $\alpha((t-\varepsilon, t+\varepsilon) \cap I) \subseteq U$; las imágenes de ese intervalo por $\tilde{\alpha}$ y $\hat{\alpha}$ son conexas, están en $p^{-1}(U)$, que es unión

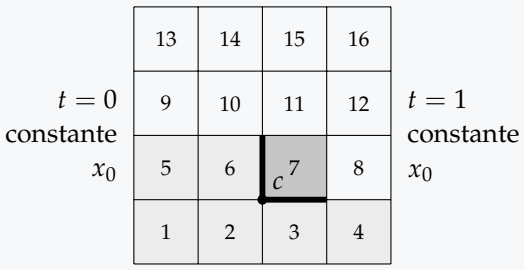
disjunta de cubiertas, y comparten el punto $\tilde{\alpha}(t)$, luego están en la misma cubierta $V_{a'}$; como $p_{a'}$ es un homeomorfismo y las dos composiciones con p coinciden, las dos elevaciones coinciden en todo el intervalo. Al ser A no vacío, abierto y cerrado en el conexo $[0,1]$, se tiene $A = [0,1]$.
En particular, si α es un lazo en $x_0 = (1,0)$, entonces $\tilde{\alpha}(1) \in p^{-1}(x_0)$, luego $\tilde{\alpha}(1) = a + k$ con $k \in \mathbb{Z}$. A ese k se le llama **grado** de α. No depende del inicio elegido: cambiar a por $a + m$, $m \in \mathbb{Z}$, cambia la elevación a $\tilde{\alpha} + m$ por periodicidad y unicidad, y deja igual el incremento. Para los lazos en $(1,0)$ fijaremos $a = 0$.

Paso 2: deformar el trayecto no cambia de planta. Si $\alpha \sim \beta$ mediante $H : I \times I \to S^1$ relativa a $\{0,1\}$, se aplica el lema de Lebesgue al recubrimiento $\{H^{-1}(U)\}$ de $I \times I$ para partirlo en cuadraditos R_{ij} con $H(R_{ij}) \subseteq U_{ij}$, y se eleva cuadradito a cuadradito, empezando por el de la esquina y avanzando por filas. En cada paso, la unicidad de la elevación de caminos garantiza que los trozos coinciden en las aristas comunes. El pegado finito da continuidad. En los dos lados verticales, las elevaciones toman valores en una fibra discreta; como cada lado es conexo, esos valores son constantes.
Cómo se eleva un cuadradito, con detalle. Es la frase anterior desplegada, y es el punto más delicado de toda la prueba. Sea R el cuadradito al que le toca el turno, con $H(R) \subseteq U$, y sea c su esquina inferior izquierda. Lo ya elevado toca a R a lo sumo en dos lados, el izquierdo y el de abajo, que forman una L con vértice en c (en la primera fila solo el izquierdo, en la primera columna solo el de abajo; al primer cuadradito no lo toca nada, y en $c = (0,0)$ se pone el valor a). Se elige la cubierta V de U que contiene el valor ya asignado a c y se define, en R,

$$\widetilde{H} = p_V^{-1} \circ H,$$

que es continua y cumple $p \circ \widetilde{H} = H$. Falta ver que coincide con lo que ya había en la L. Cada lado de la L, recorrido desde c, es un camino, y H lo lleva a un camino de U; lo ya elevado y la fórmula nueva son dos elevaciones de ese mismo camino que empiezan en el mismo punto sobre c. Por la unicidad del paso 1, coinciden en todo el lado. Así el trozo nuevo pega con el viejo, y tras el último cuadradito, el lema del pegado (finitos cerrados) da una $\widetilde{H}$ continua en todo $I \times I$.

$s = 1$: sale una elevación de β



$s = 0$: se eleva α, sale $\tilde{\alpha}$

En la figura, el cuadrado $I \times I$ partido en dieciséis cuadraditos, numerados en el orden en que se elevan. En gris claro, lo ya elevado; en gris oscuro, el cuadradito séptimo, que es el que toca; en trazo grueso, la L por la que tiene que pegar con lo anterior.

Se obtiene así $\widetilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ continua con $\widetilde{H}(t,0) = \tilde{\alpha}(t)$, $\widetilde{H}(0,s) = a$ y $\widetilde{H}(1,s) = \tilde{\alpha}(1)$ para todos s, t. Y como $\widetilde{H}(t,1)$ es una elevación de β que empieza en a, por unicidad es $\tilde{\beta}$. Luego $\tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}$ y, en particular, α y β tienen el mismo grado.

Paso 3: la planta de llegada es, por tanto, una función de la clase. Por (2), la aplicación

$$\Phi : \pi_1(S^1, x_0) \to \mathbb{Z}, \qquad \Phi([\alpha]) = \operatorname{grad}(\alpha)$$

está bien definida.

Paso 4: contar plantas es exactamente contar clases.
Homomorfismo. Si $\tilde{\beta}$ es la elevación de β por $\tilde{\alpha}(1)$, entonces $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}$ existe y es una elevación de $\alpha * \beta$ que empieza en $\tilde{\alpha}(0)$; por unicidad es *la* elevación, y

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(\alpha * \beta) &= (\tilde{\alpha} * \tilde{\beta})(1) - a = \tilde{\beta}(1) - a \\ &= \big(\tilde{\beta}(1) - \tilde{\alpha}(1)\big) + \big(\tilde{\alpha}(1) - a\big) = \operatorname{grad}(\beta) + \operatorname{grad}(\alpha).\end{aligned}$$

La cadena se lee así: el lazo compuesto sube primero lo que sube α y después, desde la planta a la que ha llegado, lo que sube β. El primer paréntesis es el grado de β porque $\tilde{\beta}$ es la elevación de β desde $\tilde{\alpha}(1)$, y el grado no depende de la planta de salida (paso 1).
Sobreyectiva. Dado $k \in \mathbb{Z}$, el lazo $\alpha_k(t) = (\cos 2\pi kt, \operatorname{sen} 2\pi kt)$ tiene elevación $\tilde{\alpha}_k(t) = kt$ empezando en 0, luego grado k.
Inyectiva. Si $\Phi([\alpha]) = 0$, entonces $\tilde{\alpha}$ es un lazo en $\mathbb{R}$, que es contráctil, luego $[\tilde{\alpha}] = 0$ en $\pi_1(\mathbb{R}, 0) = \{0\}$. Aplicando p_*, $[\alpha] = [p \circ \tilde{\alpha}] = p_*[\tilde{\alpha}] = 0$.

Lo que hay que llevarse. Los caminos y las homotopías de S^1 se suben a $\mathbb{R}$, troceando con el lema de Lebesgue y usando en cada trozo la inversa local de p. La subida es única porque dos subidas que empiezan juntas coinciden en un conjunto abierto, cerrado y no vacío del intervalo. Como una homotopía se sube entera y la planta final vive en la fibra discreta $\mathbb{Z}$, esa planta no cambia al deformar: es el grado. Y el grado es un isomorfismo porque las plantas se suman al encadenar y porque en $\mathbb{R}$, que no tiene agujeros, un lazo que vuelve a su planta se contrae.

Observación (Qué papel juega cada ingrediente)**.** Ninguna hipótesis del enunciado se puede quitar, porque el enunciado no tiene hipótesis: lo que hay que revisar aquí es de qué propiedades de p y de I ha vivido la demostración.

- **Que p sea un recubrimiento**: cada entorno elegido se levanta a abiertos disjuntos, todos aplicados homeomórficamente sobre él. Esta propiedad permite elevar caminos y homotopías en cualquier recubrimiento; ser solo un homeomorfismo local no basta para asegurarla.
- **Que $\mathbb{R}$ sea simplemente conexo.** Es lo que se usa en la inyectividad del paso 4, y hace que el recuento de plantas distinga todas las clases. El grupo $\mathbb{Z}$ viene de los desplazamientos enteros de esta cubierta. Si el espacio de arriba tuviera lazos no triviales, llegar a la planta inicial no aseguraría que el lazo se contrajera.
- **Que I y $I \times I$ sean compactos**, vía el lema de Lebesgue. Es lo que permite trocear en un número *finito* de pedazos y cerrar la construcción mediante el lema del pegado finito.
- **Que I sea conexo.** Es lo que cierra la unicidad: el conjunto donde dos elevaciones coinciden se prueba abierto, cerrado y no vacío, y en un conexo eso lo obliga a ser todo. Es literalmente

la traducción de «no se puede saltar de planta».

Observación. El resultado es válido sea cual sea el punto sobre el que se calcule el grupo fundamental de S^1, porque la circunferencia es conexa por caminos.

El lazo $\alpha(t) = e^{2\pi i t}$ representa un generador: es la **vuelta canónica**, y aparecerá con ese nombre en todos los cálculos posteriores.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: CONTAR LAS VUELTAS CON UNA INTEGRAL

La alternativa. Para un lazo α de clase C^1 a trozos en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, el número de vueltas alrededor del origen es

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\alpha \frac{dz}{z},$$

que es el índice de la teoría de variable compleja. Definido así es un entero, se calcula con residuos, y su invariancia por deformación es un teorema estándar de aquella asignatura.
Su ventaja. Se calcula de verdad, con una integral concreta, y conecta el asunto con una herramienta que el lector ya tiene en la mano.
Su límite como punto de partida. Los lazos del grupo fundamental son solo continuos; no todos admiten esa integral en su formulación habitual. El levantamiento define el entero directamente para todos ellos. De hecho, una vez construida la elevación $\tilde{\alpha}$ de un lazo de S^1, se puede interpolar linealmente entre ella y $t \mapsto \tilde{\alpha}(0) + kt$, con k su grado. Al proyectar por p, resulta una homotopía con extremos fijos hasta un representante suave de la misma clase.
El puente con integración. Para un lazo $\alpha(t) = e^{i\theta(t)}$ de clase C^1 a trozos, con argumento real levantado θ, la integral es

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \theta'(t)\, dt = \frac{\theta(1) - \theta(0)}{2\pi} = k.$$

Es el mismo incremento que cuenta las vueltas en la demostración topológica.

CONEXIÓN: FASE, CIRCULACIÓN Y VUELTAS ALREDEDOR DE UN AGUJERO

En una oscilación, la fase se describe por un punto $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ de S^1, mientras que la fase acumulada θ puede crecer durante muchas vueltas. Esta distinción es exactamente la del recubrimiento: aquí $\theta = 2\pi\tilde{\alpha}$, porque p mide vueltas y no radianes. Si un ciclo empieza y termina con la misma fase, el incremento de fase acumulada es $2\pi k$. El teorema demuestra que ese entero no cambia al deformar continuamente el ciclo. Una sola lectura de $\cos\theta$ no basta para reconstruir la fase: también hay que conservar el sentido del giro.
La misma obstrucción aparece en la circulación de un campo. En el plano sin el origen, sea

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Un cálculo de derivadas da $\partial_x F_2 - \partial_y F_1 = 0$ en todo su dominio. Sin embargo, en la circunferencia positiva $\alpha(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$ se obtiene

$$F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = 2\pi, \qquad \oint_\alpha F \cdot d\mathbf{r} = 2\pi.$$

No hay contradicción con Green–Stokes: el disco que rellena esa circunferencia contiene el origen, donde F no está definido. El teorema necesita que el campo sea regular en toda la región de integración.
En un entorno donde se puede elegir un ángulo real suave, $F = \nabla\theta$. Ese potencial existe localmente, pero no en todo el plano perforado: si existiera un potencial real global, su incremento sobre cualquier lazo sería cero. En lenguaje de formas, $(-y\,dx + x\,dy)/(x^2 + y^2)$ es cerrada y

> localmente exacta, pero no exacta en todo el dominio. Para cualquier lazo suave a trozos que evite el origen, su integral dividida por 2π cuenta el mismo entero k que el levantamiento de su dirección $\alpha/|\alpha|$. Así, el «agujero» que detecta el grupo fundamental explica por qué un cálculo local de derivadas no garantiza un potencial global.

Observación (Otros ejemplos del hecho crucial)**.** La propiedad de $p : \mathbb{R} \to S^1$ no es exclusiva suya; a partir de ejemplos como este se desarrolla la llamada *teoría de cubiertas*. Dos más que conviene tener vistos:

- $p : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ dada por $p(t, s) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i s})$, que enrolla el plano sobre el toro. Las cubiertas de un abierto del toro son las infinitas copias que aparecen en la cuadrícula del plano.
- $S^2 \to P^2\mathbb{R}$, la proyección que identifica antípodas. Aquí cada abierto pequeño del plano proyectivo tiene exactamente **dos** cubiertas en la esfera, la formada por un casquete pequeño y la formada por su antípoda.

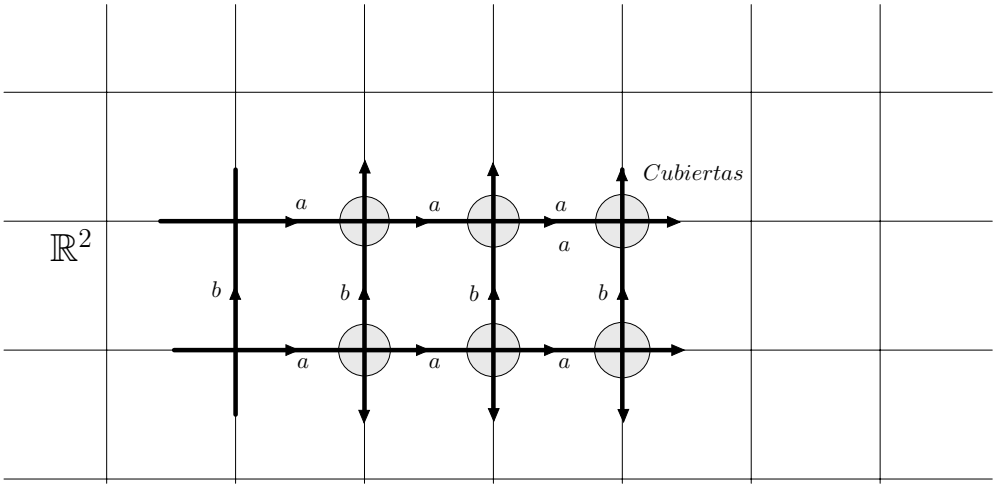


Figura 6.1: El recubrimiento del toro por el plano: las pequeñas regiones grises son copias disjuntas de un mismo entorno. Los lados a, b se identifican al proyectar al toro. Para la aplicación $p(t, s)$ del texto, cada periodo en cualquiera de las coordenadas vale 1 (original, p. 48).

El segundo es el que explicará, en el capítulo 8, por qué $\pi_1(P^2\mathbb{R}) = \mathbb{Z}_2$: solo hay dos pisos a los que subir.

Qué se ha ganado. La pregunta de la sección tiene respuesta: lo que se le mide a un lazo de la circunferencia es la planta a la que llega su elevación, un entero que no cambia al deformar el lazo y que distingue todas sus clases. Con eso se tiene el primer grupo fundamental no trivial del curso, $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$, generado por la vuelta canónica, y con él, a través de las equivalencias de homotopía del capítulo 5, el del plano perforado, el cilindro, la corona y la banda de Möbius. Queda por ver qué se puede *demostrar* con este cálculo, que es la sección siguiente, y cómo se calcula el grupo de espacios que no se retraen sobre una circunferencia, como el toro menos un punto o una superficie cerrada, que es el trabajo del teorema de Seifert-van Kampen.

6.2 Aplicaciones

LA PREGUNTA: QUÉ SE COMPRA CON $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$

Saber que el grupo fundamental de la circunferencia es $\mathbb{Z}$ no parece gran cosa: es el espacio más sencillo que tiene un agujero. Y sin embargo de ese único cálculo salen el teorema del punto fijo de Brouwer en el plano y el teorema fundamental del álgebra. ¿Cómo puede una cuenta sobre lazos en una circunferencia demostrar que todo polinomio complejo no constante tiene una raíz?

Teorema (Teorema de no retracción)**.** No existe retracción de B^2 sobre S^1.

La idea, en una línea: una retracción obligaría al agujero de la circunferencia a caber dentro del disco, que no tiene ninguno; traducido a grupos, obligaría a la identidad de $\mathbb{Z}$ a pasar por el grupo trivial y volver.
Supóngase que existe $r : B^2 \to S^1$ con $r \circ i = \mathrm{Id}_{S^1}$, siendo $i : S^1 \hookrightarrow B^2$ la inclusión. Aplicando el funtor π_1 y usando que B^2 es contráctil:

$$\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(B^2, x_0) = \{1\} \xrightarrow{r_*} \pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z},$$

y la composición es $(r \circ i)_* = \mathrm{Id}_* = \mathrm{Id}$. Pero una aplicación que factoriza a través del grupo trivial es el homomorfismo nulo, y la identidad de $\mathbb{Z}$ no lo es. Contradicción.

Por qué no basta empujar desde el centro. La segunda pregunta del principio del capítulo invitaba a intentarlo con las manos. El primer intento es la proyección radial $x \mapsto x/|x|$: lleva cada punto al borde a lo largo de su radio y deja quieto el borde. Funciona en todo el disco menos en un punto, el centro, donde no hay radio que elegir; es una retracción de $B^2 \setminus \{0\}$ sobre S^1, y de hecho de deformación (capítulo 5). Cambiar de fórmula no arregla nada: siempre queda algún punto donde el aplastamiento se rompe, y el teorema dice por qué. En $B^2 \setminus \{0\}$ el grupo fundamental es $\mathbb{Z}$ y la igualdad $r_* \circ i_* = \mathrm{Id}$ no tiene nada de imposible; al rellenar el centro el grupo se vuelve trivial, y la igualdad sí lo es. El agujero del centro era exactamente lo que la retracción necesitaba.

Eso dice también qué papel juega cada hipótesis. Que el disco sea contráctil es lo que hace trivial el grupo del medio; con la corona $\{1 \leq |x| \leq 2\}$ en lugar del disco, el grupo del medio es $\mathbb{Z}$ y la retracción radial existe. Que $r \circ i = \mathrm{Id}$ es lo que da $(r \circ i)_* = \mathrm{Id}$; una aplicación cualquiera $B^2 \to S^1$ que no deje quieto el borde, una constante por ejemplo, existe sin problema. Y lo que convierte la geometría en álgebra es la regla $(r \circ i)_* = r_* \circ i_*$.

Lo que hay que llevarse. Una retracción es una igualdad $r \circ i = \mathrm{Id}$, y π_1 la convierte en $r_* \circ i_* = \mathrm{Id}$; la identidad de un grupo no trivial no puede pasar por el grupo trivial. Es la primera fila de la tabla de niveles del capítulo 5 (si A es retracto, i_* es inyectivo) usada del revés: $i_* : \mathbb{Z} \to \{1\}$ no puede ser inyectivo.

LA IDEA: EL ARGUMENTO QUE SE REPITE EN TODO EL CURSO

La estructura de esta demostración es la de casi todos los problemas de esta parte, y conviene aislarla:

1. Se supone que existe la aplicación prohibida.
2. Se aplica π_1, que convierte espacios en grupos y aplicaciones continuas en homomorfismos.
3. Se obtiene un homomorfismo imposible: la identidad de $\mathbb{Z}$ factorizando por el grupo trivial, o un homomorfismo inyectivo de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, o de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$.

Todo el arte está en el paso 3, es decir, en saber qué homomorfismos de grupos son imposibles. Por eso conviene tener a mano una lista corta: *no hay homomorfismos inyectivos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$; no hay homomorfismos inyectivos de un grupo no abeliano en uno abeliano; el único homomorfismo de $\mathbb{Z}_2$ en $\mathbb{Z}$ es el nulo.*

Las tres imposibilidades, cada una con su línea. Conviene saber por qué son imposibles, porque en cada problema hay que decirlo.

- *No hay homomorfismos inyectivos $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.* Si $\varphi(1,0) = \lambda$ y $\varphi(0,1) = \mu$, entonces $\varphi(\mu, -\lambda) = \mu\lambda - \lambda\mu = 0$. Si λ o μ no es cero, $(\mu, -\lambda)$ es un elemento no nulo del núcleo; si los dos son cero, φ es nulo. En los dos casos el núcleo no es trivial. Es la cuenta del ejemplo del toro, al final de esta sección.
- *No hay homomorfismos inyectivos de un grupo no abeliano en uno abeliano.* Si $ab \neq ba$, el elemento $aba^{-1}b^{-1}$ no es el neutro, y va a $\varphi(a)\varphi(b)\varphi(a)^{-1}\varphi(b)^{-1}$, que sí lo es porque en el grupo de llegada todo conmuta. En particular $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ no se mete en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: por eso las dos circunferencias $a \cup b$ del toro, cuyo grupo $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ se calcula en el capítulo siguiente, no son un retracto del toro.
- *El único homomorfismo $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$ es el nulo.* Si $\varphi(1) = m$, entonces $2m = \varphi(1+1) = \varphi(0) = 0$, luego $m = 0$: un elemento de orden finito tiene que ir a uno de orden finito, y en $\mathbb{Z}$ el único es el 0. Con $\pi_1(P^2\mathbb{R}) = \mathbb{Z}_2$, del capítulo 8, dice que toda aplicación continua del plano proyectivo en la circunferencia induce el homomorfismo nulo.

Proposición. Sea $f : B^2 \to \mathbb{R}^2$ continua. Entonces existe $y \in B^2$ con $f(y) = 0$, o bien existe $z \in S^1$ con $f(z) = \lambda z$ para algún $\lambda > 0$.

La idea, en una línea: se fabrica a mano un campo g que en el borde apunta hacia fuera; si no se anulara, normalizarlo daría la retracción que el teorema anterior prohíbe, luego se anula.
Se define $g : B^2 \to \mathbb{R}^2$ por

$$g(x) = \begin{cases} (2|x| - 1)x - (2 - 2|x|)f\big(x/|x|\big) & \text{si } |x| \geq \tfrac{1}{2}, \\ -f(4|x|x) & \text{si } |x| \leq \tfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Cómo se lee g. Por zonas. En el disco interior, de radio $\frac{1}{2}$, la aplicación $x \mapsto 4|x|x$ lo lleva sobre todo B^2 (su norma es $4|x|^2 \leq 1$), así que ahí g es $-f$ entera, comprimida en un disco más pequeño. En la corona $\frac{1}{2} \leq |x| \leq 1$ se escribe $x = \rho z$, con $z \in S^1$ y $\rho = |x|$:

$$g(\rho z) = (2\rho - 1)\rho\, z + (2 - 2\rho)\big(-f(z)\big),$$

una mezcla de z y de $-f(z)$ con pesos que no son negativos. Cuando ρ va de $\frac{1}{2}$ a 1, el peso de $-f(z)$ pasa de 1 a 0 y el de z de 0 a 1: g empieza siendo $-f(z)$ en la

circunferencia interior y acaba siendo z en el borde. En resumen, g es un campo en el disco que en el borde es la identidad y que por dentro lleva la información de f.
Por qué el signo menos. En la corona, $g(\rho z)$ solo puede anularse si los dos sumandos se compensan, es decir, si $f(z)$ apunta en la misma dirección que z, hacia fuera. Con $+f$ en lugar de $-f$ saldría $f(z)$ apuntando hacia dentro, que no contradice nada; con $-f$ sale hacia fuera, que es lo que el teorema de Brouwer necesitará.
Las dos fórmulas coinciden cuando $|x| = 1/2$: ambas valen $-f(2x)$. El lema del pegado da continuidad de g. Si g no se anulara nunca, $h(x) = g(x)/|g(x)|$ sería continua de B^2 en S^1, y para $|x| = 1$ daría $h(x) = x$: sería una retracción, en contra del teorema anterior. Luego existe x_0 con $g(x_0) = 0$. Escribiendo $r = |x_0|$:

- Si $r \leq 1/2$, entonces $f(4rx_0) = 0$, con $4rx_0 \in B^2$.
- Si $r > 1/2$, no puede ser $r = 1$ porque $g(x_0) = x_0$ en el borde. Por tanto $1/2 < r < 1$, y $z = x_0/r \in S^1$ verifica $f(z) = \frac{r(2r-1)}{2-2r} z$, con coeficiente estrictamente positivo.

Un caso a mano. Sea $f \equiv c$ constante, con $|c| = 1$. No tiene ceros, así que la proposición predice un $z \in S^1$ con $c = \lambda z$ y $\lambda > 0$, y solo puede ser $z = c$, con $\lambda = 1$. La demostración lo encuentra así. En el disco interior $g = -c$, que no se anula. En la corona, $g(\rho z) = (2\rho - 1)\rho z - (2 - 2\rho)c$ solo se anula si $z = c$ y $(2\rho - 1)\rho = 2 - 2\rho$, es decir, $2\rho^2 + \rho - 2 = 0$, cuya raíz en $(\frac{1}{2}, 1)$ es $\rho = \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \approx 0{,}78$. El cero de g es $x_0 = \rho c$, y el coeficiente $\frac{\rho(2\rho-1)}{2-2\rho}$ vale exactamente $1 = \lambda$.

Lo que hay que llevarse. Se fabrica un campo que en el borde es la identidad y que por dentro lleva a $-f$. Si no se anulara, normalizarlo sería una retracción del disco sobre su borde; luego se anula. Dónde se anula dice qué alternativa se cumple: en el disco interior, un cero de f; en la corona, un punto del borde en el que f apunta hacia fuera.

Proposición. Sea $f : B^2 \to \mathbb{R}^2$ continua. Entonces f tiene un punto fijo, o bien existe $z \in S^1$ con $f(z) = \lambda z$ para algún $\lambda > 1$.

Supóngase $f(x) \neq x$ para todo x y aplíquese la proposición anterior a $h(x) = f(x) - x$, que no se anula: existe $z \in S^1$ con $f(z) - z = \mu z$, $\mu > 0$, es decir, $f(z) = (1 + \mu)z$ con $\lambda = 1 + \mu > 1$.

La idea, en versión intuitiva: el mapa que se cae dentro del país

Brouwer, en dimensión dos, es el teorema del mapa: si se coge un mapa de España, se arruga como se quiera sin romperlo y se deja caer sobre el suelo de España, algún punto del mapa acaba justo encima del punto que representa. La conclusión parece magia y la demostración es una sola idea.
Supóngase que no hubiera punto fijo. Entonces, para cada x, los puntos $f(x)$ y x son distintos y definen una dirección; siguiendo esa dirección desde $f(x)$ hacia x y prolongando hasta el borde se obtiene, para cada punto del disco, un punto del borde, de manera continua, y dejando quieto cada punto que ya estaba en el borde. Es decir: una retracción del disco sobre su borde.
Y eso es imposible, y la razón es la única cosa que hace falta saber de todo el capítulo:

el disco no tiene agujeros y la circunferencia sí. Una retracción obligaría a que el lazo que da la vuelta al borde, que en S^1 no se puede encoger a un punto, sí se pudiera encoger, porque dentro del disco se encoge sin problema y la retracción se lleva el encogimiento consigo. El grupo fundamental convierte esa imposibilidad geométrica en una imposibilidad algebraica: la identidad de $\mathbb{Z}$ no puede pasar por el grupo trivial y volver intacta. Ese es el motor de Brouwer, de la no retracción y, en la página siguiente, del teorema fundamental del álgebra.

Teorema (Punto fijo de Brouwer)**.** Toda aplicación continua $f : B^2 \to B^2$ tiene un punto fijo.

La idea, en una línea: la segunda alternativa de la proposición anterior manda un punto del borde fuera del disco, y eso no se lo puede permitir una aplicación que va del disco al disco.
Si no lo tuviera, por la proposición anterior existiría $z \in S^1$ con $f(z) = \lambda z$ y $\lambda > 1$. Entonces $|f(z)| = \lambda|z| = \lambda > 1$, pero $f(z) \in B^2$ obliga a $|f(z)| \leq 1$. Contradicción.

La demostración escrita no sigue el rayo de la caja anterior, sino las dos proposiciones. El motor es el mismo, la no retracción, y se ahorra escribir la fórmula del punto en que el rayo corta el borde, que es la parte engorrosa del camino del rayo.

Qué pasa si se quita una hipótesis. Las tres se pueden romper con un ejemplo concreto.

- *Que f caiga en el disco.* La traslación $f(x) = x + (2, 0)$, de B^2 en $\mathbb{R}^2$, no tiene punto fijo. Se cumple la segunda alternativa de la proposición: $z = (1, 0)$ da $f(z) = (3, 0) = 3z$, con $\lambda = 3 > 1$. Es justo el punto que se sale del disco.
- *Que el dominio no tenga agujeros.* El giro de ángulo π de la corona $\{1 \leq |x| \leq 2\}$ en sí misma no tiene punto fijo, porque $x = -x$ obliga a $x = 0$. En el disco, el mismo giro fija el centro, que es precisamente el punto que le falta a la corona.
- *Que sea el disco y no su borde.* En S^1 la antipodal $z \mapsto -z$ no tiene punto fijo, como se ve en los problemas de este capítulo.

Lo que hay que llevarse. Si f no tuviera punto fijo, $f(x) - x$ sería un campo sin ceros en el disco. La proposición lo obliga a apuntar hacia fuera en algún punto del borde, $f(z) - z = \mu z$ con $\mu > 0$, y eso saca a $f(z)$ del disco. Todo descansa en la no retracción.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: EL LAZO QUE SE ENCOGE Y NO PUEDE

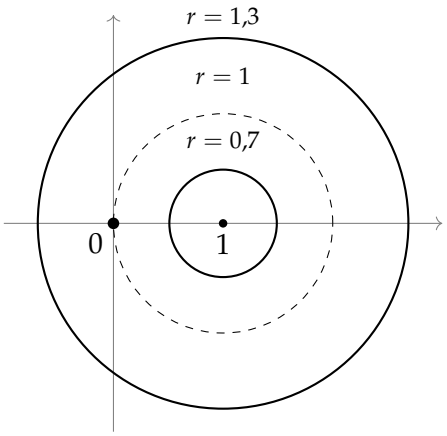
Que el álgebra dependa de la topología sorprende siempre, y la idea cabe en tres frases. Supóngase que p no tiene ninguna raíz. Entonces se puede mirar, para cada radio r, la curva que describe $p(z)$ cuando z recorre la circunferencia de radio r: como p no se anula nunca, esa curva no pasa por el origen y tiene un número de vueltas alrededor de él bien definido.
Ahora se hace variar r de forma continua, y con él el número de vueltas, que es un entero: si varía con continuidad y solo toma valores enteros, no varía. Basta entonces mirarlo en los dos extremos. Con $r = 0$ la curva es el punto constante $p(0)$: cero vueltas. Con r enorme, el término $a_n z^n$ aplasta a todos los demás y la curva da prácticamente las mismas vueltas que z^n, es decir, n.
Cero tiene que ser igual a n, y $n \geq 1$. La contradicción prueba que p sí tenía una raíz. Lo único que se ha usado es que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ y que un entero que varía continuamente

es constante: otra vez el mismo motor que en Brouwer.

Un caso a mano: z^2+1. Este polinomio sí tiene raíces, $\pm i$, y por eso mismo deja ver dónde salta el número de vueltas. Sobre la circunferencia $|z| = r$, con $z = re^{i\theta}$,

$$p(re^{i\theta}) = 1 + r^2 e^{2i\theta} :$$

es la circunferencia de centro 1 y radio r^2, recorrida *dos* veces mientras θ da una vuelta. Si $r < 1$, el radio r^2 es menor que 1, que es la distancia del centro al origen, y la curva no rodea el origen: cero vueltas. Si $r > 1$, lo rodea, y como se recorre dos veces da dos vueltas, las mismas que z^2. Y justo en $r = 1$ la curva pasa por el origen, en $\theta = \pm\pi/2$, es decir, en $z = \pm i$: las raíces. El número de vueltas salta de 0 a 2 exactamente al cruzar las raíces, y sin raíces no podría saltar.



En la figura, las curvas $p(re^{i\theta})$ para $r = 0{,}7$, 1 y 1,3: circunferencias de centro 1 y radios 0,49, 1 y 1,69. La interior no rodea el origen; la exterior lo rodea, y al recorrerse dos veces da dos vueltas; la de trazos pasa por él. La demostración que sigue toma para este polinomio $M = 1 + 0 + 1 = 2$: sobre $|z| = 2$ el término constante, de módulo 1, es menor que $|z^2| = 4$, y la curva da las mismas vueltas que z^2.

Teorema (Teorema fundamental del álgebra)**.** Todo polinomio $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ en $\mathbb{C}$, con $n \geq 1$ y $a_n \neq 0$, tiene al menos una raíz.

Los tres pasos son las tres frases de la idea: elevar a la n da n vueltas; si no hay raíces, el radio se puede encoger sin que nada se rompa; y encoger el radio deja el polinomio en una constante, que da cero vueltas.

Paso 1: la potencia n-ésima da n vueltas. Sea $f_n : S^1 \to S^1$ dada por $f_n(z) = z^n$. Como $z^n = e^{2\pi nti}$, el homomorfismo inducido lleva el generador $[\alpha]$, con $\alpha(t) = e^{2\pi it}$, en la clase de $\alpha_n(t) = e^{2\pi int}$, cuyo grado es n. Es decir, $f_{n*}[\alpha] = n[\alpha]$, y en particular $f_{n*} \neq 0$ si $n \geq 1$.

Paso 2: acotar el resto para poder deformarlo hasta cero. Se razona por reducción al absurdo suponiendo $p(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Se puede suponer p mónico, dividiendo por el término líder. Sea $M = 1 + |a_{n-1}| + \cdots + |a_0|$. Si $|z| \geq M$, entonces

$|z|^j \leq |z|^{n-1}$ para $j \leq n-1$ y

$$|a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0| \leq (|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|)|z|^{n-1} = (M-1)|z|^{n-1} < |z|^n.$$

Paso 3: las dos deformaciones que no pueden coexistir *(el núcleo de la prueba)*. Aquí está el teorema, y son dos deformaciones que tiran del mismo lazo hacia lados opuestos. La primera, F, conecta el lazo constante con el polinomio sobre la circunferencia de radio M. La segunda, G, conecta z^n con ese mismo lazo, encendiendo los términos inferiores. Las dos acaban en el mismo lazo, luego **cero y n tendrían que ser el mismo número de vueltas**. Y ahí se ve para qué ha servido cada hipótesis: que p no se anule es lo que permite normalizar F, y la acotación del paso 2 es lo que permite normalizar G.
Se definen dos homotopías $F, G : S^1 \times I \to S^1$:

$$F(z,t) = \frac{p(Mtz)}{|p(Mtz)|}, \qquad G(z,t) = \frac{H(z,t)}{|H(z,t)|},$$

$$H(z,t) = (Mz)^n + t\big(a_{n-1}(Mz)^{n-1} + \cdots + a_0\big).$$

F está bien definida porque p no se anula. Para G, el punto z sigue en S^1, pero el polinomio se evalúa en Mz, de norma M. La cota del paso 2 da, para todo $t \in [0,1]$,

$$|t\big(a_{n-1}(Mz)^{n-1} + \cdots + a_0\big)| < M^n = |(Mz)^n|.$$

Los dos sumandos de H no pueden cancelarse. Por tanto ambas normalizaciones son continuas y están definidas en todo $S^1 \times I$.
Ahora bien,

$$F(z,0) = \frac{p(0)}{|p(0)|} = \text{cte}, \qquad F(z,1) = \frac{p(Mz)}{|p(Mz)|},$$

$$G(z,0) = \frac{(Mz)^n}{M^n} = z^n = f_n(z), \qquad G(z,1) = \frac{p(Mz)}{|p(Mz)|}.$$

Por transitividad, cte $\simeq f_n$. El cambio de punto base de esa homotopía relaciona los homomorfismos inducidos mediante un isomorfismo. Concretamente, es la proposición de la sección 5.3 según la cual la película arrastra el punto base: si γ es el camino que recorre el punto base durante la homotopía de f_n a la constante, entonces $f_{n*} = \gamma_\sharp \circ \text{cte}_*$. Como cte_* manda todas las clases al elemento neutro y $\gamma_\sharp$ es un isomorfismo, f_{n*} también las mandaría todas al neutro. Esto contradice $f_{n*} \neq 0$.

Lo que hay que llevarse. Si p no tuviera raíces, la curva $p(|z| = r)$ se podría deformar sin pasar por el origen desde $r = 0$, donde es un punto, hasta $r = M$, donde da las mismas vueltas que z^n. El número de vueltas, que es un entero y no cambia al deformar, pasaría de 0 a n. Cada ingrediente tiene su sitio: que p no se anule permite normalizar la primera deformación; que el término líder mande para $|z| \geq M$ permite normalizar la segunda; y que $n \geq 1$ hace que z^n dé alguna vuelta, sin lo cual no habría contradicción.

DE DÓNDE VIENE: UN TEOREMA DE ÁLGEBRA DEMOSTRADO SIN ÁLGEBRA

Merece la pena detenerse en lo que se acaba de hacer. El teorema fundamental del álgebra es un enunciado sobre polinomios y se ha demostrado *contando vueltas*.
La idea, despojada de tecnicismos, es esta: si z recorre una circunferencia muy grande, el polinomio $p(z)$ está dominado por su término de mayor grado, luego $p(z)$ da n vueltas alrededor del origen. Si z recorre una circunferencia muy pequeña, $p(z)$ se queda cerca de $p(0)$ y no da ninguna vuelta. Si p no se anulara nunca, se podría pasar de una situación a la otra de forma continua, y el número de vueltas — que es un entero — tendría que pasar de n a 0 sin saltos. Imposible.
Es el argumento del *perro atado*: si un perro atado con una correa da n vueltas alrededor de un poste, la correa no se puede desenredar sin cortar el poste.

Ejemplo. Si se identifican dos puntos de S^2, el espacio cociente X tiene grupo fundamental no trivial. En efecto, X se retrae sobre una circunferencia, la que va de un punto al otro por la esfera y vuelve por la identificación; si $\pi_1(X)$ fuese trivial, la identidad de $\mathbb{Z}$ factorizaría por el grupo trivial.

Para hacer explícita la retracción, situamos los puntos identificados en los polos. Sea $q : S^2 \to X$ la proyección y elijamos un arco meridiano $\beta : I \to S^2$ cuya altura sea $1 - 2t$. La fórmula $r(q(x, y, z)) = q(\beta((1 - z)/2))$ envía cada paralelo a su punto sobre ese arco. Es continua por la propiedad del cociente, respeta la identificación de los polos y fija $q(\beta(I))$, que es la circunferencia buscada.

Conviene tener claro qué da el retracto y qué no. Da que i_* es inyectivo: $\pi_1(X)$ contiene una copia de $\mathbb{Z}$, la de la circunferencia que baja por la esfera y vuelve por la identificación. No dice cuál es $\pi_1(X)$ entero; para eso hay que descomponer X en trozos de grupo conocido, que es el trabajo del teorema del capítulo siguiente.

Ejemplo. S^1 es retracto del toro $S^1 \times S^1$ pero no de deformación. La retracción es la proyección $(x, y) \mapsto (x, y_0)$. Si fuera de deformación, $i_* \circ r_*$ sería un isomorfismo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y por tanto $r_* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sería inyectivo. Pero eso es imposible: si $\varphi(1, 0) = \lambda$ y $\varphi(0, 1) = \mu$, entonces

$$\varphi(\mu, -\lambda) = \mu\lambda - \lambda\mu = 0$$

con $(\mu, -\lambda) \neq (0, 0)$ salvo que $\lambda = \mu = 0$, en cuyo caso φ es nulo.

Qué se ha ganado. La pregunta de la sección tiene respuesta: con $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ se compra todo lo que sale del esquema «suponer la aplicación prohibida, aplicar π_1 y llegar a un homomorfismo imposible». Así salen la no retracción, Brouwer en el disco y, contando vueltas de un polinomio, el teorema fundamental del álgebra. El esquema es tan fuerte como la lista de grupos que se conocen, y de momento solo se conoce $\mathbb{Z}$ (y $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, por el producto). Para que dé más obstrucciones hacen falta más grupos: $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ para la figura de ocho, $\mathbb{Z}_2$ para el plano proyectivo y, sobre todo, los de las superficies cerradas. Calcularlos es lo que queda.

6.3 Problemas de las relaciones

Ejercicio 6.1. *Aplicaciones no sobreyectivas en la esfera*

Probar que si $f : X \to S^n$ es continua y no es sobreyectiva, entonces es homotópica a la aplicación constante.

Resolución. La idea. Una esfera a la que le falta un punto es un plano, y en un plano todo se puede contraer. Como la imagen de f evita un punto, f vive en realidad en ese plano.

El argumento. Sea $q \in S^n$ un punto que no está en la imagen de f. Entonces f se factoriza como $f = j \circ f'$, donde $f' : X \to S^n \setminus \{q\}$ y j es la inclusión.

Por la proyección estereográfica desde q, $S^n \setminus \{q\} \cong \mathbb{R}^n$, que es contráctil: existe $H : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ con $H(y, 0) = y$ y $H(y, 1) = 0$.

Trasladando esa homotopía por el homeomorfismo y componiendo con f' se obtiene una homotopía entre f' y una constante dentro de $S^n \setminus \{q\}$; componiendo con j, una homotopía entre f y una constante en S^n.

La homotopía, escrita. Se puede dar sin pasar por la proyección estereográfica, empujando $f(x)$ hacia el punto opuesto $-q$ a lo largo del segmento y volviendo a la esfera:

$$H(x,t) = \frac{(1-t)f(x) - tq}{|(1-t)f(x) - tq|}.$$

El denominador no se anula: si $(1-t)f(x) = tq$, tomando normas sale $1 - t = t$, es decir, $t = \frac{1}{2}$, y entonces $f(x) = q$, que es justo el punto que f no alcanza. Así H es continua, $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = -q$. ■

Dónde se falla. En olvidar la hipótesis: la identidad de S^1 es sobreyectiva y no es homótopa a una constante, porque tiene grado 1 (el grado se define unas páginas más abajo). Y en leer el enunciado del revés: ser homótopa a una constante no obliga a dejar puntos fuera. La aplicación de S^1 que da una vuelta entera y la deshace es sobreyectiva y tiene grado 0.

Qué hemos aprendido. Para probar que una aplicación es homótopa a una constante, basta encontrar un punto que no toque. Y, leído del revés, una aplicación $S^1 \to S^1$ de grado distinto de cero tiene que ser sobreyectiva: si dejara un punto fuera, sería homótopa a una constante, que tiene grado 0.

Ejercicio 6.2. *Tres caracterizaciones de la simple conexión*

Probar que para un espacio conexo por caminos X las tres condiciones siguientes son equivalentes:

(a) toda aplicación continua $f : S^1 \to X$ es homotópica a una constante;
(b) toda aplicación continua $f : S^1 \to X$ se extiende al disco B^2;
(c) $\pi_1(X, x_0) = 0$ para todo $x_0 \in X$.

Resolución. La idea. Las tres dicen «todo lazo es trivial» de tres maneras: se puede encoger hasta un punto (a), se puede rellenar con un disco (b), su clase es el neutro (c). Entre (a) y (b) no hay nada que demostrar, solo una imagen que ver: una película que encoge la circunferencia hasta un punto *es* un disco, porque el tiempo de la película hace de radio y el

instante final, en que todo es un punto, hace de centro. Entre (a) y (c) la única diferencia es si el punto base se queda quieto o no, y eso lo resuelve el cambio de punto base.

(a) ⇒ (b). Sea $f : S^1 \to X$ homotópica a la constante x_1 mediante $H : S^1 \times I \to X$, con $H(z,0) = f(z)$ y $H(z,1) = x_1$. Como H es constante en $S^1 \times \{1\}$, es compatible con la relación que define el cono, y por la propiedad universal induce una aplicación continua $\widetilde{H} : CS^1 \to X$. Y $CS^1 \cong B^2$, con S^1 correspondiendo al borde. Luego $\widetilde{H}$ es la extensión buscada. Escrita en el disco, con el homeomorfismo $[z,s] \mapsto (1-s)z$, es

$$F\big((1-s)z\big) = H(z,s) :$$

el punto a distancia $1-s$ del centro en la dirección z va a donde la película lleva z en el instante s. En el centro, $s = 1$, el valor es x_1 sea cual sea z, y por eso F está bien definida; en el borde, $s = 0$, es $f(z)$.

(b) ⇒ (a). Si f se extiende a $F : B^2 \to X$, se define $H(z,t) = F((1-t)z)$, que es continua, cumple $H(z,0) = F(z) = f(z)$ y $H(z,1) = F(0)$, constante.

(a) ⟺ (c). Por la correspondencia entre lazos y aplicaciones de S^1, un lazo α representa el neutro de π_1 si y solo si f_α es homotópica a una constante relativamente al punto base. La única sutileza es pasar de homotopía libre a homotopía relativa: si $f_\alpha \simeq \text{cte}$ libremente, el camino que recorre el punto base durante la homotopía induce el isomorfismo $\gamma_\sharp$, y la clase de α va a la clase del neutro. Con los dos sentidos por separado:

- *(c) ⇒ (a).* Dada $f : S^1 \to X$, el lazo $\alpha(t) = f(e^{2\pi i t})$ en $x_0 = f(1,0)$ cumple $f = f_\alpha$. Como $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$, $\alpha \sim \text{cte}$, y por el ejercicio del capítulo 5 que identifica lazos con aplicaciones de la circunferencia, $f_\alpha \simeq f_{\text{cte}}$, que es constante.
- *(a) ⇒ (c).* Sea α un lazo en x_0 y $\varepsilon(t) = e^{2\pi i t}$ la vuelta canónica; entonces $\alpha = f_\alpha \circ \varepsilon$, luego $[\alpha] = (f_\alpha)_*[\varepsilon]$. Si f_α es homótopa a una constante, la proposición de la sección 5.3 sobre la película que arrastra el punto base da $(f_\alpha)_* = \gamma_\sharp \circ \text{cte}_*$, que manda todas las clases al neutro. Luego $[\alpha] = 1$.

Como X es conexo por caminos, basta con un punto base: los demás dan grupos isomorfos. ■

QUÉ DEJA. Las tres caras del mismo concepto. La (b) es la más útil en los problemas: *ser simplemente conexo significa que todo lazo se puede rellenar con un disco*. Es la imagen correcta y la que hay que tener en la cabeza al mirar una superficie.

Ejercicio 6.3. *Un espacio cubierto por dos simplemente conexos*

Probar que si $X = A \cup B$ con A y B abiertos tales que A, B y $A \cap B$ son conexos por caminos, $A \cap B \neq \emptyset$ y A y B son simplemente conexos, entonces X es simplemente conexo. Deducir que $\pi_1(S^n) = 0$ para todo $n \geq 2$.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Toma un lazo y trocéalo con el lema de Lebesgue en trozos que caigan alternativamente en A o en B.*
2. *Une los puntos de corte con el punto base mediante caminos dentro de $A \cap B$.*
3. *Para la esfera, ¿cómo se cubre con dos casquetes?*

Resolución. La idea. Un lazo que se pasea por A y por B se corta en trozos, cada uno dentro de uno de los dos abiertos, y se cierran los trozos con caminos auxiliares. Cada trozo cerrado vive en un simplemente conexo, luego se contrae; y el lazo original es el producto de todos ellos.

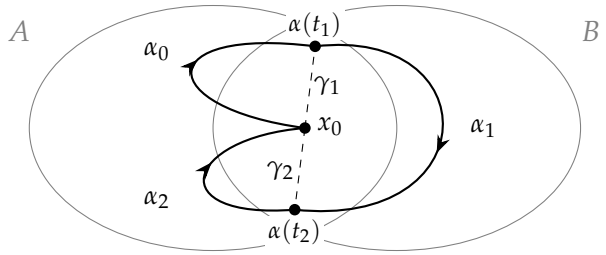
El argumento. Al compartir un punto y ser ambos conexos por caminos, A y B tienen unión conexa por caminos. Sea α un lazo en $x_0 \in A \cap B$. El recubrimiento $\{\alpha^{-1}(A), \alpha^{-1}(B)\}$ de $[0,1]$ es por abiertos, luego por el lema de Lebesgue existe una partición $0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ tal que cada $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ está contenido entero en A o en B.

Se puede suponer, agrupando trozos consecutivos que caen en el mismo abierto, que los trozos alternan. Entonces cada punto de corte $\alpha(t_i)$ está en $A \cap B$. Como $A \cap B$ es conexo por caminos, se elige para cada i un camino γ_i dentro de $A \cap B$ que una x_0 con $\alpha(t_i)$, tomando γ_0 y γ_n constantes.

Reparametrizando cada tramo sobre I mediante $\alpha_i(t) = \alpha(t_i + (t_{i+1} - t_i)t)$, se tiene

$$\alpha \sim (\gamma_0 * \alpha_0 * \bar{\gamma}_1) * (\gamma_1 * \alpha_1 * \bar{\gamma}_2) * \cdots * (\gamma_{n-1} * \alpha_{n-1} * \bar{\gamma}_n),$$

porque las parejas $\bar{\gamma}_i * \gamma_i$ intercaladas son equivalentes a caminos constantes. Cada paréntesis es un lazo en x_0 contenido enteramente en A o en B, que son simplemente conexos, luego cada uno representa el neutro. Por tanto $[\alpha] = 1$.



En la figura, un lazo en x_0 troceado en tres tramos: α_0 y α_2 dentro de A y α_1 dentro de B. Los puntos de corte caen en la lente $A \cap B$, y los caminos auxiliares γ_1, γ_2, a trazos, los unen con x_0 sin salir de ella. Cada lazo cerrado con ellos, $\gamma_0 * \alpha_0 * \bar{\gamma}_1$, $\gamma_1 * \alpha_1 * \bar{\gamma}_2$ y $\gamma_2 * \alpha_2 * \bar{\gamma}_3$, vive entero en A o entero en B, con γ_0 y γ_3 constantes.

La esfera. Se cubre S^n con $A = S^n \setminus \{N\}$ y $B = S^n \setminus \{S\}$, los complementarios de los dos polos. Los dos son abiertos, homeomorfos a $\mathbb{R}^n$ por proyección estereográfica, luego simplemente conexos. Y $A \cap B = S^n \setminus \{N, S\}$, que es homeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y, para $n \geq 2$, es conexo por caminos. Luego $\pi_1(S^n) = 0$. ■

Observación (Por qué falla para $n = 1$)**.** La hipótesis que se rompe es exactamente la conexión por caminos de $A \cap B$: en S^1, quitar dos puntos deja **dos** arcos disjuntos. Y en efecto $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \neq 0$.

Merece la pena registrarlo: en el teorema de Seifert-van Kampen, la hipótesis de que $A \cap B$ sea conexo por caminos no es técnica, es esencial, y el contraejemplo es la circunferencia.

QUÉ DEJA. La técnica de trocear un lazo con el lema de Lebesgue e insertar caminos auxiliares $\bar{\gamma} * \gamma$, que es literalmente la demostración del teorema de Seifert-van Kampen en miniatura. Quien entienda este ejercicio entiende el teorema del capítulo siguiente.

Para una aplicación continua $f : S^1 \to S^1$, definimos su grado como el del lazo $t \mapsto f(e^{2\pi i t})$: el incremento entre los extremos de cualquier elevación. También es invariante por homotopía libre: al elevar una homotopía, ese incremento es una función continua con valores enteros, y por tanto constante.

El grado de una aplicación, con detalle. La definición da por sentadas tres cosas, y conviene verlas antes del ejercicio que la usa.

- *Por qué vale cualquier elevación.* El lazo $t \mapsto f(e^{2\pi it})$ empieza en $f(1,0)$, que no tiene por qué ser $(1,0)$, y por eso no se puede fijar la salida en 0. Pero dos elevaciones del mismo camino difieren en un entero constante: si $\tilde{\varphi}$ es una, $\tilde{\varphi} + m$ es la que sale de $\tilde{\varphi}(0) + m$, y por la unicidad no hay otras. Al restar llegada menos salida, ese entero se cancela.
- *Por qué es invariante por homotopía libre.* Sea $H : S^1 \times I \to S^1$ una homotopía de f a g. La aplicación $(t,s) \mapsto H(e^{2\pi it}, s)$, del cuadrado en S^1, se eleva cuadradito a cuadradito exactamente como en el paso 2 del teorema, que no usó que la homotopía fuera relativa más que para los lados verticales. Sale $\widetilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ continua, y para cada s el incremento $d(s) = \widetilde{H}(1,s) - \widetilde{H}(0,s)$ es un entero, porque los dos extremos están sobre el mismo punto $H\big((1,0),s\big)$. Una función continua de s con valores enteros es constante, luego $\operatorname{grad} f = d(0) = d(1) = \operatorname{grad} g$. A diferencia del paso 2, aquí los lados verticales sí se mueven; lo que no cambia es la diferencia entre ellos.
- *Qué mide en el grupo fundamental.* Si $f(1,0) = (1,0)$, el homomorfismo $f_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ manda el generador, la clase de la vuelta canónica ε, a la clase de $f \circ \varepsilon$, cuyo grado es el de f. Un homomorfismo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ queda determinado por la imagen de 1, así que f_* es multiplicar por el grado: $f_*(k) = \operatorname{grad}(f)\, k$.

Y los casos que conviene tener hechos, todos por el mismo mecanismo (se eleva $t \mapsto f(e^{2\pi it})$ y se resta):

$f(z)$	una elevación	grado
z^n	nt	n
$\bar{z}$, es decir, $(x,y) \mapsto (x,-y)$	$-t$	-1
$e^{i\theta_0}z$, el giro de ángulo θ_0	$t + \theta_0/2\pi$	1
constante $e^{i\theta_0}$	$\theta_0/2\pi$	0

El paso 1 del teorema fundamental del álgebra es la primera fila leída en el grupo: f_{n*} multiplica por n.

Ejercicio 6.4. *El grado y sus consecuencias*

1. Calcular el grado de la aplicación $f : S^1 \to S^1$ dada por $f(x,y) = (x,-y)$.
2. Probar que el grado de la aplicación antipodal $a : S^1 \to S^1$, $a(z) = -z$, es 1.
3. Probar que $f : S^1 \to S^1$, $f(z) = -z$, es homotópica a la identidad, y deducir que tener punto fijo no es una propiedad invariante por homotopía.

Resolución. La idea. Los tres apartados se resuelven con el mismo gesto: escribir $f(e^{2\pi it})$ como $e^{2\pi i\varphi(t)}$ con φ continua, que es una elevación, y restar $\varphi(1) - \varphi(0)$. Lo único que hay que pensar es el tercero, que pide una homotopía y una conclusión sobre puntos fijos.

1. Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = -t$, continua con $g(0) = 0$. Sea $p(s) = (\cos 2\pi s, \operatorname{sen} 2\pi s)$ la proyección canónica y $\pi : [0,1] \to S^1$ el paso al cociente. Entonces

$$p(g(t)) = p(-t) = (\cos(-2\pi t), \operatorname{sen}(-2\pi t)) = (\cos 2\pi t,\ -\operatorname{sen} 2\pi t) = f(\pi(t)).$$

Luego g es el levantamiento buscado, y como $g(1) = -1$,

$$\operatorname{grad}(f) = -1.$$

Geométricamente: f es la reflexión respecto del eje horizontal, que recorre la circunferencia al revés.

2. El grado de una aplicación no cambia al componerla con un giro, porque un giro es homotópico a la identidad: basta girar el ángulo poco a poco. Y la antipodal coincide con el giro de ángulo π. Componiendo la antipodal con el giro de ángulo π se obtiene la identidad, que tiene grado uno; luego el grado de la antipodal es uno.

Otra vía, la directa. Se eleva: $a(e^{2\pi it}) = -e^{2\pi it} = e^{2\pi i(t+1/2)}$, así que $t \mapsto t + \frac{1}{2}$ es una elevación. Va de $\frac{1}{2}$ a $\frac{3}{2}$, y el grado es la diferencia, 1.

3. La homotopía explícita es

$$H(z,t) = e^{i\pi t}z,$$

que es continua, cumple $H(z,0) = z$ y $H(z,1) = e^{i\pi}z = -z$. Luego la antipodal es homotópica a la identidad.

La deducción. La identidad de S^1 tiene puntos fijos: todos. La antipodal no tiene ninguno, porque $z = -z$ obliga a $z = 0 \notin S^1$. Y acabamos de ver que son homotópicas. Luego **tener punto fijo no es invariante por homotopía**. ■

Dónde se falla. En tres sitios.

- *Tomar la llegada por el grado.* La elevación de la antipodal sale de $\frac{1}{2}$ y llega a $\frac{3}{2}$; el grado es la diferencia, 1, no $\frac{3}{2}$. Solo cuando la elevación sale de 0 coinciden las dos cosas.
- *Confundir la antipodal con una reflexión.* En S^1 la antipodal es un giro, de grado 1; la reflexión del apartado 1 invierte el sentido y tiene grado -1. En S^2 ya no es así, como avisa la observación que sigue.
- *Querer probar Brouwer deformando.* Toda $f : B^2 \to B^2$ es homótopa a una constante, por la homotopía rectilínea en el disco, que es convexo, y una constante tiene punto fijo. Eso no prueba nada: el apartado 3 dice precisamente que tener punto fijo no pasa de una aplicación a otra homótopa. Por eso Brouwer necesita la no retracción.

Qué hemos aprendido. El grado se calcula siempre igual, elevando y restando, y es lo único de una aplicación $S^1 \to S^1$ que sobrevive a las deformaciones: ve el sentido de giro, pero no ve los puntos fijos.

Observación (Un aviso sobre el grado de la antipodal)**.** En S^1 la antipodal tiene grado 1; en S^2 tiene grado -1. En general, la antipodal de S^n tiene grado $(-1)^{n+1}$, porque es la composición de $n+1$ reflexiones. El grado de una aplicación $S^n \to S^n$ con $n \geq 2$ no se define en este curso, porque necesita homología: lo que sigue es un aviso de lo que pasa, no algo demostrado aquí.

Esto da una obstrucción a los campos tangentes sin ceros: si existiera uno, normalizado a longitud uno, V, la fórmula $\cos(\pi t)x + \operatorname{sen}(\pi t)V(x)$ sería una homotopía entre la identidad y la antipodal. Sus grados deberían coincidir, lo cual falla si n es par. Si n es impar, el campo $V(x) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \ldots, -x_{n+1}, x_n)$ es tangente y nunca se anula. Para S^2, se recupera el teorema de la bola peluda de la sección 1.5.

QUÉ DEJA. El cálculo del grado por levantamiento, que es mecánico: se levanta, se mira la diferencia entre llegada y partida, y ese es el grado. Y dos hechos que conviene retener: el grado no cambia al componer con giros, y la antipodal de S^1 tiene grado uno y ningún punto fijo.

Ejercicio 6.5. *Infinitos espacios simplemente conexos y distintos*

Dar una familia infinita de espacios conexos por caminos y simplemente conexos que no sean homeomorfos dos a dos.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *La familia obvia es la de las esferas S^n con $n \geq 2$. Piensa qué haría falta para demostrar que no son homeomorfas entre sí, y si eso está a mano en este curso.*
2. *Hay una construcción del capítulo 3 que produce espacios simplemente conexos automáticamente, sin calcular nada.*
3. *Para distinguir dos espacios basta con encontrar* un solo *número que se conserve por homeomorfismos y que valga distinto en cada uno. El más barato de todos: cuántos trozos quedan al quitar un punto.*

Resolución. Por qué la respuesta obvia no sirve todavía. La primera familia que se le ocurre a cualquiera es $\{S^n\}_{n\geq 2}$. Son conexos por caminos y simplemente conexos, esto último por el ejercicio anterior sobre espacios cubiertos por dos abiertos simplemente conexos. Pero para acabar el problema haría falta probar que S^n y S^m no son homeomorfas cuando $n \neq m$, y eso es el teorema de invariancia de la dimensión, que no se demuestra en esta asignatura: el grupo fundamental no sirve, porque vale $\{1\}$ para todas ellas. La familia es correcta, pero la justificación no está a mano.

Una familia que sí se puede justificar entera. Para cada $n \geq 3$ se toma

$$X_n = C(D_n), \qquad D_n = \{1, 2, \ldots, n\} \text{ con la topología discreta,}$$

el **cono** sobre un espacio discreto de n puntos. Concretamente, X_n es la unión de n segmentos que comparten un extremo común, al que se llamará *centro* y se denotará v: una estrella de n puntas.

Son conexos por caminos y simplemente conexos. Todo cono CX con $X \neq \emptyset$ es contráctil: la homotopía $H([x, s], t) = [x, (1 - t)s + t]$ empuja cada punto hacia el vértice, es continua por la propiedad universal del cociente, y lleva la identidad a la constante. Un espacio contráctil es conexo por caminos — la propia homotopía da un camino de cada punto al vértice — y tiene grupo fundamental trivial, por el corolario del capítulo 5. Así que no hay nada que calcular: la construcción los fabrica ya simplemente conexos.

No son homeomorfos dos a dos. Se define, para cada punto p de un espacio Y, el número

$$c_Y(p) = \text{número de componentes conexas de } Y \setminus \{p\},$$

que es un invariante topológico en el sentido siguiente: si $h : Y \to Y'$ es un homeomorfismo, entonces h restringe a un homeomorfismo de $Y \setminus \{p\}$ en $Y' \setminus \{h(p)\}$, y los homeomorfismos conservan el número de componentes conexas. Por tanto también es invariante el máximo, cuando existe,

$$m(Y) = \max_{p \in Y} c_Y(p).$$

En X_n se calcula c punto a punto:

- si $p = v$ es el centro, al quitarlo quedan las n puntas sin su extremo común, que son n conjuntos conexos, abiertos y disjuntos dos a dos: $c_{X_n}(v) = n$;
- si p es un punto interior de una punta, al quitarlo esa punta se parte en dos trozos y las demás siguen unidas entre sí por el centro: $c_{X_n}(p) = 2$;

- si p es el extremo libre de una punta, $X_n \setminus \{p\}$ sigue siendo conexo: $c_{X_n}(p) = 1$.

Luego $m(X_n) = n$, porque $n \geq 3 > 2$.

Si X_n y X_m fueran homeomorfos se tendría $n = m(X_n) = m(X_m) = m$. Por tanto la familia $\{X_n\}_{n\geq 3}$ es infinita y sus miembros no son homeomorfos dos a dos. ■

EXPLÍCATE. *¿Por qué se empieza en $n = 3$ y no en $n = 1$? Dibuja X_1 y X_2 y comprueba que son el mismo espacio. Esa es exactamente la razón.*

Otra vía (con conjuntos del plano, si se prefiere algo más concreto). La misma idea se realiza dentro de $\mathbb{R}^2$ sin hablar de conos: se toma

$$Y_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} \Big\{ t\big(\cos \tfrac{2\pi k}{n}, \operatorname{sen} \tfrac{2\pi k}{n}\big) \ ; \ 0 \leq t \leq 1 \Big\},$$

la unión de n radios de la circunferencia unidad. Es un subconjunto estrellado respecto del origen, luego contráctil por la homotopía rectilínea $H(p,t) = (1-t)p$, y por tanto conexo por caminos y simplemente conexo. Y el mismo recuento de componentes al quitar el origen los distingue.

Merece la pena tener las dos versiones: la del cono enseña que la simple conexión sale gratis de la construcción, y la del plano es la que se dibuja.

Qué hemos aprendido. Todos los X_n son contráctiles, así que tienen el mismo tipo de homotopía que un punto, y ningún invariante de homotopía, el grupo fundamental incluido, puede separarlos. Hace falta un invariante que solo se conserve por homeomorfismos, y el número de trozos que quedan al quitar un punto es de esos: el centro de la estrella se puede encoger hasta nada con una homotopía, pero ningún homeomorfismo lo borra.

Repaso del capítulo

REPASO INTERCALADO: CÁLCULO DEL GRUPO FUNDAMENTAL, PRIMERA RONDA

1. Enuncia el hecho crucial sobre $p : \mathbb{R} \to S^1$ y explica para qué sirve.
2. Enuncia el lema de Lebesgue y di en qué dos sitios de la demostración se usa.
3. Define el grado de un lazo en S^1 y demuestra que está bien definido.
4. Enuncia el teorema de no retracción y demuéstralo en cuatro líneas.
5. Enuncia el teorema del punto fijo de Brouwer.

REPASO INTERCALADO: CÁLCULO DEL GRUPO FUNDAMENTAL, SEGUNDA RONDA, CON MATERIAL ANTERIOR

1. ¿Por qué $\pi_1(S^n) = 0$ para $n \geq 2$ y no para $n = 1$? Localiza la hipótesis que se rompe.
2. Explica en cinco líneas, sin fórmulas, la demostración del teorema fundamental del álgebra.
3. Da tres homomorfismos de grupos que sean imposibles y di qué problema resuelve cada uno.
4. Calcula π_1 del cilindro y de la banda de Möbius usando la tabla de retractos del capítulo 5. Para el toro menos un punto, di sobre qué espacio se retrae y por qué su grupo tiene que esperar al teorema de Seifert-van Kampen.

5. ¿Qué relación hay entre el grado de una aplicación $S^1 \to S^1$ y el índice de un campo en un punto singular de la sección 1.5?
6. El toro admite un campo tangente sin ceros y la esfera no. Justifica ambos hechos mediante χ. ¿Basta tener grupo fundamental no trivial para admitir un campo sin ceros? Considera también la superficie cerrada orientable de género dos.

CAPÍTULO 7

Teorema de Seifert-van Kampen

ANTES DE LEER

1. Si sabes los lazos de dos trozos de un espacio y sabes cómo se pegan, ¿deberías poder deducir los lazos del total? ¿Qué información extra hace falta?
2. Escribe el grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dando generadores y relaciones. ¿Y $\mathbb{Z}_n$?
3. ¿Por qué crees que el grupo fundamental de una figura de ocho no puede ser abeliano?

Las respuestas están en las secciones 7.2, 7.1 y 7.2.1.

LA IDEA: LA HERRAMIENTA QUE FALTABA

Hasta ahora los cálculos se han apoyado en la circunferencia, los retractos y algunas construcciones sencillas, como el producto de espacios. El teorema de este capítulo es la máquina general: dice que si un espacio se descompone en dos abiertos cuya intersección es razonable, entonces su grupo fundamental se obtiene **pegando** los de las dos piezas.

Pegar grupos no es tan simple como pegar espacios, y por eso hace falta primero un poco de lenguaje algebraico: presentaciones, producto libre y producto amalgamado. Es la primera sección del capítulo y no tiene nada de topología.

Después viene el teorema, y después un procedimiento en cinco pasos para usarlo. Ese procedimiento es lo que hay que dominar: casi todo lo que viene después consiste en aplicarlo a un polígono de identificaciones.

7.1 Presentación de grupos

LA PREGUNTA: DESCRIBIR UN GRUPO SIN LISTARLO

Un grupo puede tener muchísimos elementos y estar generado por unas pocas operaciones. Entre los grupos fundamentales que van a salir los hay infinitos y no conmutativos: una tabla finita no basta para describirlos. Lo único que se tiene es un puñado de lazos y unas cuantas igualdades entre ellos. ¿Qué significa exactamente definir un grupo dando generadores y relaciones, y cómo se decide si dos descripciones distintas corresponden al mismo grupo?

Definición. Sea G un grupo. Se llama **presentación** de G a un par $\langle S \mid R\rangle$ donde S es un conjunto de **generadores** — todo elemento de G se escribe como producto de elementos de S y sus inversos — y R es un conjunto de **relaciones**, es decir, de palabras de S que son iguales al elemento neutro, elegido de modo que si dos palabras representan el mismo elemento de G se puede pasar de una a otra usando las igualdades $r^{\pm 1} = e$ con $r \in R$ y las relaciones obvias del grupo.

Si $R = \emptyset$, se dice que $\langle S \mid \rangle$ es un **grupo libre** con base S.

Observación. En la presentación no se incluyen las relaciones triviales como $aa^{-1} = e$, que se suponen dadas implícitamente por la estructura de grupo.

Cómo se trabaja con una presentación, a mano. Antes de ningún teorema conviene manejar estos objetos con las manos, porque con una presentación se hacen siempre las mismas dos operaciones.

En el grupo libre, multiplicar es concatenar y cancelar. Los elementos de $\langle a, b \mid \rangle$ son las **palabras reducidas**: sucesiones de letras $a^{\pm 1}, b^{\pm 1}$ en las que ninguna letra aparece pegada a su inversa. Dos palabras se multiplican escribiéndolas una detrás de otra y cancelando los pares xx^{-1} que queden juntos en la costura, hasta que no quede ninguno:

$$(ab^{-1}) \cdot (ba) = a\,(b^{-1}b)\,a = a^2,$$
$$(aba^{-1}) \cdot (ab^{-1}a^{-1}) = ab\,(a^{-1}a)\,b^{-1}a^{-1} = a\,(bb^{-1})\,a^{-1} = e.$$

La segunda cuenta enseña también cómo se invierte una palabra: se lee al revés invirtiendo cada letra, y $(aba^{-1})^{-1} = ab^{-1}a^{-1}$. En el grupo libre no hay más igualdades que esas cancelaciones, así que dos palabras reducidas distintas son elementos distintos.

Con relaciones, cada relación es una regla de reescritura. La igualdad $r = e$ permite insertar o borrar la palabra r, o su inversa, en cualquier punto de una palabra. En $\langle a \mid a^3\rangle$, por ejemplo, $a^5 = a^2\,a^3 = a^2$ y $a^{-1} = a^{-1}a^3 = a^2$: el grupo tiene exactamente los tres elementos e, a, a^2 y es $\mathbb{Z}_3$. En $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1}\rangle$, multiplicando la relación por ba a la derecha se obtiene $ab = ba$, de modo que cualquier b puede pasar al otro lado de cualquier a:

$$b\,a^2\,b^{-1}\,a = a^2\,b\,b^{-1}\,a = a^3.$$

Formalmente, el grupo $\langle S \mid R\rangle$ es el cociente del grupo libre de base S por el menor subgrupo normal que contiene a R; en la práctica basta con esta lectura: **el grupo libre, con ciertas palabras declaradas iguales al neutro**, y dos palabras son el mismo elemento cuando las reglas permiten pasar de una a otra.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: DESCRIBIR EL GRUPO POR SU TABLA O POR SUS ELEMENTOS

La alternativa. Dar cada grupo mediante la lista de sus elementos y su tabla de multiplicar, o mediante una realización concreta como grupo de matrices o de permutaciones.
Su ventaja. No hay ambigüedad ninguna: dos grupos dados así se comparan elemento a elemento y, para grupos finitos, decidir si son isomorfos es una comprobación mecánica.
Su límite aquí. Algunos de los grupos que salen son infinitos, así que una tabla finita no basta: el de la suma puntual de dos circunferencias es libre de rango dos y tiene infinitos elementos ya en la primera página del capítulo. La presentación, en cambio, se lee directamente de los modelos de un solo vértice: un generador por cada arista identificada y una relación por la palabra del borde. Es un formato especialmente cómodo para calcular con Seifert-van Kampen.
El precio, que conviene saber. Comparar presentaciones puede ser difícil: no existe un algoritmo que decida el isomorfismo para cualesquiera dos presentaciones finitas. Eso no impide resolver familias concretas. En el capítulo 8, los abelianizados bastarán para distinguir los modelos de superficies compactas, conexas y sin borde.

Observación (Importante: cómo se define un homomorfismo desde una presentación)**.** Para construir un homomorfismo $f : G = \langle S \mid R\rangle \to H$, se asigna a cada generador $s \in S$ una imagen $h_s \in H$. La asignación se extiende a un **único homomorfismo** si, al sustituir esas imágenes en cada palabra de R, se obtiene el neutro de H.

En efecto, se define $f(s_1^{\pm 1} \cdots s_m^{\pm 1}) = h_{s_1}^{\pm 1} \cdots h_{s_m}^{\pm 1}$. Respetar las relaciones garantiza que el resultado no depende de la palabra elegida. La fórmula respeta concatenaciones, luego define un homomorfismo; y cualquier homomorfismo con esas imágenes debe satisfacerla, lo que prueba la unicidad.

Este es el criterio que se usa en todos los ejercicios para construir homomorfismos y para probar que no existen.

El criterio, a mano. Tres casos, que son los tres que se repiten.

- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1}\rangle \to \mathbb{Z}$ con $a \mapsto 1$, $b \mapsto 0$. Como $\mathbb{Z}$ es aditivo, sustituir en la relación es sumar los exponentes con sus imágenes: $1 + 0 - 1 - 0 = 0$. La relación se respeta, luego hay un único homomorfismo con esas imágenes; identificando $a = (1, 0)$ y $b = (0, 1)$, es la proyección $(m, n) \mapsto m$.
- $\mathbb{Z}_2 = \langle a \mid a^2\rangle \to \mathbb{Z}$ con $a \mapsto 1$. La relación da $1 + 1 = 2 \neq 0$: no vale. Con $a \mapsto k$ da $2k = 0$, que en $\mathbb{Z}$ obliga a $k = 0$. **El único homomorfismo $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$ es el nulo**, y este hecho resolverá un ejercicio del final del capítulo.
- $\langle a, b \mid \rangle \to H$, sin relaciones. No hay nada que comprobar: a y b pueden ir a dos elementos cualesquiera de H. Esa libertad es lo que da nombre al grupo libre.

Cómo se prueba que dos palabras son distintas. El criterio sirve también para lo contrario de construir. Para ver que dos palabras u y v dan elementos distintos de G, basta encontrar un homomorfismo de G en un grupo concreto donde sus imágenes difieran: si fueran el mismo elemento, tendrían la misma imagen. Así se prueba, por ejemplo, que $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle a, b \mid \rangle$ no es abeliano. Como no hay relaciones, se puede mandar $a \mapsto (1\,2)$ y $b \mapsto (2\,3)$ en el grupo S_3 de las permutaciones de tres objetos. Componiendo de derecha a izquierda,

$$ab \longmapsto (1\,2)(2\,3) = (1\,2\,3), \qquad ba \longmapsto (2\,3)(1\,2) = (1\,3\,2),$$

que son permutaciones distintas. Luego $ab \neq ba$ en $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, y el conmutador $aba^{-1}b^{-1}$ no es el neutro. Esta es la comprobación que hay detrás de cada vez que el capítulo dice que un grupo libre de rango dos no es abeliano.

Ejemplo. Presentaciones que hay que reconocer al vuelo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}: &\quad \langle a \mid \rangle \text{ , grupo libre de base } \{a\};\ \text{también } \langle a, b \mid ab^{-1}\rangle \\
\mathbb{Z}_n: &\quad \langle a \mid a^n\rangle \\
\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}: &\quad \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1}\rangle \\
\mathbb{Z}^n: &\quad \langle a_1, \ldots, a_n \mid a_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1},\ 1 \le i < j \le n\rangle
\end{aligned}$$

En el caso de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, la relación expresa la conmutatividad, que no se considera trivial porque se trabaja con grupos no necesariamente abelianos.

Y merece la pena fijarse en algo que no es casualidad: **la relación $aba^{-1}b^{-1}$ coincide con la identificación de las aristas en el polígono fundamental del toro**. Esa coincidencia es lo que el capítulo 8 explicará.

Definición. Sea G un grupo con presentación $\langle S \mid R\rangle$. Se llama **abelianización** de G al grupo abeliano G_{ab} con presentación $\langle S \mid R \cup R_{ab}\rangle$, donde $R_{ab} = \{s_i s_j s_i^{-1} s_j^{-1}\ ;\ s_i, s_j \in S\}$. Las expresiones $s_i s_j s_i^{-1} s_j^{-1}$ se abrevian $[s_i, s_j]$ y se llaman **conmutadores**.

La idea: por qué se abelianiza

Seifert-van Kampen también produce grupos no abelianos, que pueden ser difíciles de comparar: decidir si dos presentaciones dan grupos isomorfos es, en general, un problema sin solución algorítmica.
La abelianización es una forma de perder información a cambio de poder calcular. Un grupo abeliano finitamente generado está clasificado por un teorema de *Álgebra*: es un producto de copias de $\mathbb{Z}$ y de grupos cíclicos finitos, y esos factores se leen directamente. Así que abelianizando se obtiene un invariante manejable.
Y para distinguir las superficies compactas, conexas y sin borde basta: los abelianizados de los grupos fundamentales de M_n y N_n son todos distintos, y por eso la clasificación funciona. **Ese es el motivo de que las dos cosas vayan siempre juntas, el grupo fundamental y su abelianizado**: el primero se calcula con el teorema, el segundo es el que identifica la superficie.

Ejemplo. $\mathbb{Z} = \langle a \mid \rangle$ da $\mathbb{Z}_{ab} = \langle a \mid aaa^{-1}a^{-1}\rangle = \langle a \mid \rangle = \mathbb{Z}$. En general, si A es abeliano, $A_{ab} = A$. En particular $(\mathbb{Z}_n)_{ab} = \mathbb{Z}_n$.

Abelianizar a mano. En un grupo abeliano el orden de las letras no importa, así que cada relación se puede leer en notación aditiva: se suma, para cada generador, el total de sus exponentes. Con las palabras de las superficies que vienen después:

- toro, $aba^{-1}b^{-1}$: $a + b - a - b = 0$. La relación se vacía y queda $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$;
- botella de Klein, $aba^{-1}b$: $a + b - a + b = 2b$. Queda $2b = 0$ con a libre, es decir, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2$;
- plano proyectivo, aa: $2a = 0$, que da $\mathbb{Z}_2$;
- la superficie N_3, $a^2b^2c^2$: $2a + 2b + 2c = 0$. Aquí hace falta un cambio de generadores: con $a' = a + b + c$, los tríos a, b, c y a', b, c generan lo mismo (porque $a = a' - b - c$), y la relación se convierte en $2a' = 0$. Queda $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2$.

La regla que sale de estos cuatro casos: se escriben las relaciones como combinaciones enteras de los generadores y se cambian generadores, con cambios que se puedan deshacer sin salir de los enteros, hasta que cada relación afecte a un solo generador. Un generador sin relación aporta un $\mathbb{Z}$; uno con la relación $k\,x = 0$ aporta un $\mathbb{Z}_k$.

Definición. Sean $G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$ y $G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$; renombramos los generadores si hace falta para que S_1 y S_2 sean disjuntos. Se llama **producto libre** de G_1 y G_2 al grupo $G_1 * G_2$ con presentación

$$\langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \rangle.$$

Se conservan las relaciones de cada factor, sin añadir relaciones entre ambos. El neutro es la palabra vacía, común a los dos factores; no hace falta introducirlo como generador ni como relación adicional.

Ejemplo.

$$\underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n} = \langle a_1, \ldots, a_n \mid \rangle, \qquad \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2 = \langle a, b \mid b^2 \rangle, \qquad \mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m = \langle a, b \mid a^n, b^m \rangle.$$

Además $(G_1 * G_2)_{ab} = G_1^{ab} \times G_2^{ab}$, lo que da un atajo muy útil: *el abelianizado de un producto libre es el producto directo de los abelianizados*.

La razón cabe en tres líneas. Abelianizar $G_1 * G_2$ es añadir los conmutadores de todos los pares de generadores. Los de dos generadores de S_1 abelianizan G_1; los de dos generadores de S_2 abelianizan G_2; y los mixtos, $[s_1, s_2]$ con $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$, hacen que todo el primer factor conmute con todo el segundo, que es justo lo que distingue el producto directo del libre. Por ejemplo, $(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2)_{ab} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ y $(\mathbb{Z} * \mathbb{Z})_{ab} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Definición. Dado un diagrama de homomorfismos $G_1 \xleftarrow{f_1} G_0 \xrightarrow{f_2} G_2$ con $G_i = \langle S_i \mid R_i \rangle$ y S_1, S_2 disjuntos, se llama **producto amalgamado** del diagrama al grupo G con presentación

$$\langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R_{12} \rangle, \qquad R_{12} = \{ f_1(s) f_2(s)^{-1} \,;\, s \in S_0 \}.$$

Es decir, el producto amalgamado es el resultado de añadir al producto libre las relaciones que igualan $f_1(s)$ con $f_2(s)$, escritos como palabras en los generadores de sus respectivos grupos.

Observación (Importante)**.** Todo diagrama conmutativo de grupos

$$G_1 \xleftarrow{f_1} G_0 \xrightarrow{f_2} G_2, \qquad G_1 \xrightarrow{f_1'} H \xleftarrow{f_2'} G_2$$

induce un homomorfismo $\varphi : G \to H$ desde el producto amalgamado, definido por $\varphi(s_i) = f_i'(s_i)$. Está bien definido porque $f_i'(R_i) = e$ por ser homomorfismos, y porque para todo $s \in S_0$

$$\varphi\big(f_1(s) f_2(s)^{-1}\big) = f_1' f_1(s)\, f_2' f_2(s)^{-1} = e$$

por la conmutatividad del diagrama. Además es el único homomorfismo con esas imágenes en los generadores: esta es la propiedad universal del producto amalgamado.

Ejemplo. Tres casos particulares de interés:
1. si $G_0 = \{1\}$, el producto amalgamado es $G_1 * G_2$;
2. si $G_1 = G_2 = \{1\}$, es el grupo trivial, sea cual sea G_0;
3. si $G_2 = \{1\}$ y $f_1 : G_0 \to G_1$ es sobreyectivo, también es el grupo trivial.

Cada uno tiene su línea de razón. En el primero, $f_1(s) = f_2(s) = e$ para todo s, de modo que las relaciones de R_{12} no dicen nada y queda el producto libre. En el segundo no hay generadores que poner: S_1 y S_2 pueden tomarse vacíos. En el tercero, cada relación de R_{12} dice $f_1(s) = e$; como las imágenes $f_1(s)$ generan G_1 por ser f_1 sobreyectivo, todo G_1 queda declarado trivial.

Un caso a mano, que es el del plano proyectivo. Sean $G_0 = \langle s \mid \rangle \cong \mathbb{Z}$, $G_1 = \langle x \mid \rangle \cong \mathbb{Z}$ y $G_2 = \{1\}$, con $f_1(s) = x^2$ y f_2 el nulo. El diagrama es

$$\langle x \mid \rangle \xleftarrow{s \mapsto x^2} \langle s \mid \rangle \xrightarrow{s \mapsto e} \{1\},$$

y la única relación nueva es $f_1(s) f_2(s)^{-1} = x^2$. El producto amalgamado es $\langle x \mid x^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$. Aquí f_1 no es sobreyectivo, porque su imagen son las potencias pares de x, y por eso no se mata todo: se mata x^2 y sobrevive una x de orden dos. Cuando $G_2 = \{1\}$, en general, el producto amalgamado es G_1 con las imágenes $f_1(s)$ declaradas iguales al neutro. Este cálculo reaparecerá en la sección siguiente con nombres geométricos: x será la única arista del plano proyectivo y s la vuelta alrededor de un agujero, que recorre esa arista dos veces.

Qué se ha ganado. La pregunta de la sección tiene respuesta. Definir un grupo por generadores y relaciones es tomar el grupo libre de los generadores, donde multiplicar es concatenar y cancelar, y declarar iguales al neutro ciertas palabras. Desde un grupo así dado, un homomorfismo se construye eligiendo las imágenes de los generadores y comprobando las relaciones. Esas mismas comprobaciones deciden a veces que dos palabras son distintas, o que dos presentaciones no dan el mismo grupo: basta que sus abelianizados, que se calculan como sistemas de ecuaciones enteras, sean distintos. Lo que queda abierto es el caso general, sin algoritmo, y, sobre todo, de dónde salen las presentaciones de los espacios. Eso es la sección siguiente.

7.2 El teorema

LA PREGUNTA: CALCULAR EL GRUPO DE UN ESPACIO PARTIÉNDOLO EN DOS

Calcular el grupo fundamental de la circunferencia ha costado una teoría entera de levantamientos, y repetir ese esfuerzo para cada superficie es inviable. Lo natural es partir el espacio en dos trozos cuyos grupos ya se conozcan. ¿Determinan esos dos grupos el del total, y qué información adicional hay que dar sobre la forma en que los trozos se pegan?

Teorema (Seifert-van Kampen)**.** Sea X un espacio topológico tal que $X = X_1 \cup X_2$ con X_1, X_2 abiertos y $X_1 \cap X_2$ conexo por caminos. Sea $x_0 \in X_1 \cap X_2$. Entonces $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo al producto amalgamado del diagrama

$$\pi_1(X_1, x_0) \xleftarrow{i_{1*}} \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \xrightarrow{i_{2*}} \pi_1(X_2, x_0),$$

donde $i_k : X_1 \cap X_2 \to X_k$ y $j_k : X_k \to X$ son las inclusiones. Más aún, el homomorfismo $\varphi : G \to \pi_1(X, x_0)$ inducido por j_{1*} y j_{2*} es un isomorfismo.

LA IDEA: DOS MAPAS QUE SE SOLAPAN

La imagen que predice el enunciado es la de un excursionista con dos mapas. El terreno entero no cabe en ninguno de los dos, pero entre los dos lo cubren, y hay una franja donde se solapan. Cualquier ruta del terreno se puede trocear en tramos, cada uno enteramente dentro de uno de los dos mapas: el lema de Lebesgue garantiza un troceado finito, y se agrupan tramos consecutivos del mismo mapa. Así, los cortes

entre tramos distintos caen en la franja común y se pueden llevar hasta un punto fijo de esa franja sin salirse de ella. Con eso, toda ruta es una sucesión de lazos, cada uno dibujable en un solo mapa.

De ahí salen las dos mitades del teorema, y conviene verlas separadas.

- **Todo lazo se genera con lazos de los dos trozos.** Es lo anterior, y es la parte fácil. Por eso los generadores de $\pi_1(X, x_0)$ son los de $\pi_1(X_1, x_0)$ junto con los de $\pi_1(X_2, x_0)$, sin nada más.
- **La franja común dice qué está contado dos veces.** Un lazo que vive en el solape aparece en los dos mapas, con dos nombres distintos, y los dos nombres designan el mismo lazo del terreno. Eso es exactamente lo que hacen las relaciones $i_{1*}(c) = i_{2*}(c)$ del producto amalgamado: no añaden lazos, **identifican nombres**. El diccionario entre los dos mapas es $\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)$.

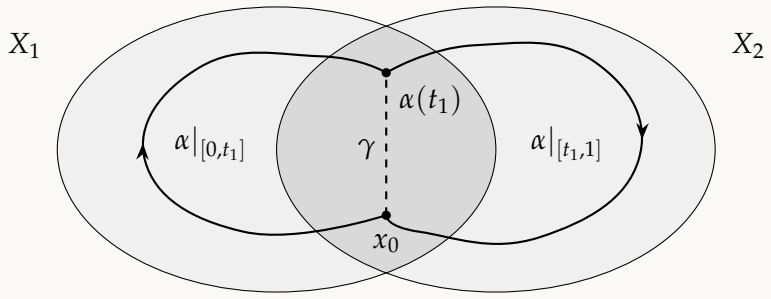
La intuición falsa, y es la que hay que quitarse. Uno lee «el grupo del total sale de los grupos de las partes» y entiende que basta con conocer $\pi_1(X_1, x_0)$ y $\pi_1(X_2, x_0)$. No basta, y ahí está todo el contenido del teorema. Dos espacios pueden tener trozos con los mismos grupos y grupos totales distintos, porque lo que decide no son los dos grupos sino *las dos aplicaciones* i_{1*} e i_{2*}, es decir, cómo se ve el solape desde cada lado. La información está en el pegado, no en las piezas. Por eso el enunciado no dice «producto libre» sino «producto amalgamado», y por eso en el procedimiento de cálculo lo que cuesta trabajo es siempre escribir la imagen del generador de la intersección en cada uno de los dos lados.

El corazón, en una frase. Los generadores los ponen las piezas; las relaciones nuevas las pone el solape.

Y el argumento que hay detrás, ya con símbolos. Sea α un lazo en x_0 que es la yuxtaposición de un camino $\alpha|_{[0,t_1]}$ contenido en X_1 y otro $\alpha|_{[t_1,1]}$ contenido en X_2. Se toma γ un camino en $X_1 \cap X_2$ entre x_0 y $\alpha(t_1)$. Reparametrizando ambos tramos sobre I, el lazo α es homotópico, con extremos fijos, a la yuxtaposición

$$\underbrace{\left(\alpha|_{[0,t_1]} * \bar{\gamma}\right)}_{\text{en } X_1} * \underbrace{\left(\gamma * \alpha|_{[t_1,1]}\right)}_{\text{en } X_2},$$

el primero en la imagen de j_{1*} y el segundo en la de j_{2*}.



En el dibujo, la franja más oscura es $X_1 \cap X_2$. El lazo sale de x_0, recorre X_1 hasta el corte $\alpha(t_1)$, que está en la franja, y vuelve a x_0 por X_2. El camino γ, de trazos, va y viene por la franja sin cambiar la clase del lazo, y lo parte en dos lazos basados en x_0: uno dibujado entero en el primer mapa y otro en el segundo.

Es exactamente el argumento del ejercicio del capítulo anterior sobre dos abiertos simplemente conexos, sin la hipótesis de simple conexión. Lo que se gana allí es que los lazos de cada trozo son triviales; aquí pueden no serlo y hay que conservar sus clases y relaciones. El teorema afirma, además, que las relaciones del solape son todas las relaciones adicionales necesarias.

Por qué no hacen falta más relaciones: la otra mitad, en idea. Supóngase que una palabra en los generadores de las dos piezas representa en X el lazo trivial. Entonces hay una homotopía $H : I \times I \to X$ que lo deforma en el constante. Es la misma situación que en la elevación de homotopías del capítulo 6, y se resuelve con la misma herramienta: por el lema de Lebesgue, el cuadrado $I \times I$ se divide en cuadraditos, cada uno llevado por H entero dentro de X_1 o entero dentro de X_2. Cada vértice de la cuadrícula se une a x_0 por un camino dentro de las piezas que lo contienen, y dentro de $X_1 \cap X_2$ si está en las dos; aquí se usa otra vez que la intersección sea conexa por caminos. Hecho eso, se deforma la palabra cuadradito a cuadradito, y en cada paso solo se usan dos clases de igualdades:

- *el borde de un cuadradito se contrae dentro de su pieza*, porque el cuadradito lo rellena. Es una igualdad de $\pi_1(X_1, x_0)$ o de $\pi_1(X_2, x_0)$, es decir, una consecuencia de R_1 o de R_2;
- *un lado común a dos cuadraditos de piezas distintas está en* $X_1 \cap X_2$, y ese mismo camino se lee con nombres de X_1 desde un lado y con nombres de X_2 desde el otro. Pasar de una lectura a la otra es exactamente una relación $i_{1*}(c) = i_{2*}(c)$ de R_{12}.

Recorrida toda la cuadrícula, la palabra se ha llevado al neutro usando solo relaciones de R_1, R_2 y R_{12}. Por eso no hace falta ninguna más.

Para qué está la hipótesis de que X_1 y X_2 sean abiertos. Las dos mitades del argumento empiezan troceando: un lazo en tramos, una homotopía en cuadraditos. El lema de Lebesgue solo trocea si las preimágenes $\alpha^{-1}(X_1), \alpha^{-1}(X_2)$, o $H^{-1}(X_1), H^{-1}(X_2)$, son un recubrimiento *abierto* de I o de $I \times I$, y eso lo garantiza que X_1 y X_2 sean abiertos. De ahí que en todos los ejemplos y ejercicios las piezas naturales, que suelen ser cerradas, se *engorden* antes de aplicar el teorema.
Y la hipótesis de que $X_1 \cap X_2$ sea conexo por caminos es la que permite elegir el camino γ. Sin ella, el argumento se cae y el teorema es falso.

El camino que no se tomó: exigir simple conexión a la intersección

La alternativa. Enunciar el teorema en la versión más simple, la que se obtiene como consecuencia inmediata del teorema: si $X = X_1 \cup X_2$ con X_1, X_2 abiertos y $X_1 \cap X_2$ *simplemente conexo*, entonces $\pi_1(X, x_0)$ es el producto libre de $\pi_1(X_1, x_0)$ y $\pi_1(X_2, x_0)$, sin relaciones que amalgamar.
Su ventaja. El cálculo se simplifica: no hay relaciones que amalgamar. El argumento del capítulo anterior explica la generación por las piezas; para asegurar que no aparecen relaciones adicionales se usa Seifert-van Kampen.
Su límite. Sirve, por ejemplo, para la figura de ocho, pero no basta para la descomposición estándar de una superficie cerrada: un disco abierto y el complementario de un disco cerrado más pequeño y concéntrico. Su intersección es una corona, que se retrae a una circunferencia y tiene grupo fundamental $\mathbb{Z}$: no es simplemente conexa. Con la versión débil no se calcula el grupo del toro ni el de la botella de Klein mediante esa descomposición. Y la otra hipótesis, la

de que $X_1 \cap X_2$ sea conexo por caminos, tampoco es prescindible: la circunferencia se recubre con dos arcos abiertos simplemente conexos cuya intersección tiene dos componentes, y la conclusión ingenua daría $\pi_1(S^1, x_0) = \{1\}$, que es falso. Cada hipótesis del enunciado está comprando un contraejemplo.

7.2.1 Uso del teorema

A partir del teorema es posible obtener una presentación explícita de $\pi_1(X, x_0)$ siguiendo un procedimiento fijo. Merece la pena escribirlo entero, porque es el mecanismo con el que se calculan todos los grupos fundamentales de superficies que vienen después.

1. Si $\pi_1(X_1 \cap X_2) = \langle S_0 \mid R_0 \rangle$ y $\pi_1(X_i, x_0) = \langle S_i \mid R_i \rangle$, el producto amalgamado tiene presentación $\langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R_{12} \rangle$, con nombres de generadores disjuntos para las dos piezas.
2. En las relaciones $i_{1*}(s)\, i_{2*}(s)^{-1}$ de R_{12}, con $s \in S_0$, se busca **cómo expresar $i_{1*}(s)$ e $i_{2*}(s)$ en función de los generadores de S_1 y S_2** respectivamente. Este es el único paso con trabajo geométrico.
3. Como φ es un isomorfismo, $\pi_1(X, x_0)$ tiene por presentación $\langle j_{1*}(S_1) \cup j_{2*}(S_2) \mid j_{1*}(R_1) \cup j_{2*}(R_2) \cup \varphi(R_{12}) \rangle$. Aquí se conservan los nombres formales de los generadores; las relaciones indicarán si sus imágenes coinciden o se vuelven triviales.
4. Un elemento $s \in S_k$ es la clase de un lazo α en X_k basado en x_0; entonces $j_{k*}(s)$ es la clase de *ese mismo lazo*, ahora visto en X.
5. Cada relación de R_{12}, ya escrita como producto de elementos de $S_1 \cup S_2$, se transforma por φ en el producto de las clases de esos mismos lazos en X.

LA IDEA: LA LECTURA PRÁCTICA DEL PROCEDIMIENTO

Despojado de notación, el procedimiento dice esto:

Los generadores del total son los generadores de las dos piezas juntos. Las relaciones son las de cada pieza, más una relación por cada generador de la intersección, que iguala cómo se ve ese lazo desde una pieza y cómo se ve desde la otra.

En los ejemplos de superficies, X_1 será un disco abierto, que es contráctil y no aporta generadores ni relaciones; X_2 será la superficie menos un disco cerrado más pequeño y concéntrico, que se retrae a un grafo y aporta un grupo libre; y $X_1 \cap X_2$ será una corona, que se retrae a una circunferencia y aporta un solo generador, y por tanto **una sola relación**.
Esa relación única es la palabra del polígono. Todo está en eso.

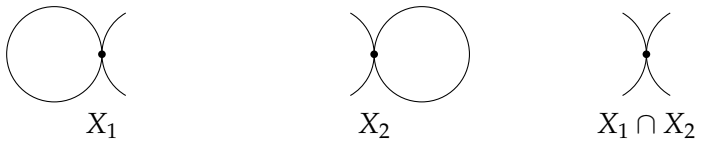
7.2.2 Los cálculos fundamentales

Ejemplo ($\pi_1(S^2) = 1$)**.** Se cubre la esfera con dos casquetes abiertos ligeramente solapados. $X_1 \cap X_2$ es conexo por caminos y tiene al ecuador como retracto de deformación fuerte, luego $\pi_1(X_1 \cap X_2) \cong \mathbb{Z}$. Y X_1, X_2 son homeomorfos a discos abiertos, que son contráctiles, luego sus grupos son triviales. El producto amalgamado de dos grupos triviales es trivial:

$$\pi_1(S^2, x_0) = \{1\}.$$

Conviene fijarse en qué ha pasado con el $\mathbb{Z}$ de la intersección, porque es el caso más limpio del mecanismo: la franja común tiene un generador, el ecuador, y ese generador aporta una relación que iguala cómo se ve el ecuador desde arriba y cómo se ve desde abajo. Desde los dos lados se ve trivial, porque cada casquete es un disco y el ecuador se encoge dentro de él hasta un punto. La relación que queda es $1 = 1$, no dice nada, y como tampoco hay generadores que poner, el grupo total es trivial. La esfera es simplemente conexa porque cualquier lazo se puede empujar hasta uno de los dos casquetes, y ahí ya no hay nada que lo sujete.

Ejemplo ($\pi_1(S^1 \vee S^1) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$)**.** Se toman X_1 y X_2 como cada circunferencia más un trocito de la otra, de modo que $X_1 \cap X_2$ sea un entorno del punto de unión, que es contráctil: $\pi_1(X_1 \cap X_2) = \{1\}$. Cada X_i se retrae a una circunferencia, luego $\pi_1(X_i) = \langle \varepsilon_i \mid \rangle \cong \mathbb{Z}$.



Los extremos de los arcos cortos están excluidos: el solape son cuatro brazos abiertos unidos por su centro, y se contrae a ese centro.

Con G_0 trivial, el producto amalgamado es el producto libre:

$$\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \mid \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z},$$

el grupo libre con dos generadores, que **no es abeliano**. En general, π_1 de una unión puntual de n circunferencias es el grupo libre con n generadores.

Es el ejemplo contrario al anterior y explica el mecanismo por el otro extremo: aquí la intersección es contráctil, no tiene generadores, y por tanto **no impone ninguna relación**. Los dos grupos entran enteros y sin hablarse. Y que no sea abeliano tiene una lectura directa: dar una vuelta al lazo izquierdo y luego al derecho no es lo mismo que darlas en el orden contrario, porque para pasar de un recorrido al otro habría que arrastrar un lazo a través del punto de unión, y ahí no hay superficie por donde deslizarlo. En el toro, que se ve enseguida, sí la hay, y por eso allí el grupo sí conmuta.

Ejemplo ($\pi_1(T) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$)**.** Se toma X_1 un disco abierto del toro y X_2 el toro menos un disco cerrado contenido en X_1, escogidos concéntricos en el interior del modelo cuadrado. Entonces:

- X_1 es contráctil: $\pi_1(X_1) = \{1\}$.
- $X_1 \cap X_2$ es una corona, que se retrae a una circunferencia: $\pi_1(X_1 \cap X_2) = \langle \varepsilon_0 \mid \rangle \cong \mathbb{Z}$, generado por la vuelta canónica α_0.

- X_2, el toro menos un disco, se retrae con deformación fuerte a $S^1 \vee S^1$, formado por las aristas a y b del modelo cuadrado. Luego $\pi_1(X_2) = \langle \varepsilon_2^a, \varepsilon_2^b \mid \rangle$, libre con dos generadores.

Para mantener el punto base x_0 de la corona, se elige un camino γ desde él hasta el vértice del cuadrado. Si α_a, α_b recorren las aristas, los generadores son $\varepsilon_2^a = [\gamma * \alpha_a * \bar{\gamma}]$ y $\varepsilon_2^b = [\gamma * \alpha_b * \bar{\gamma}]$. Así, las aristas y el lazo que rodea el agujero se comparan en el mismo grupo con base x_0.

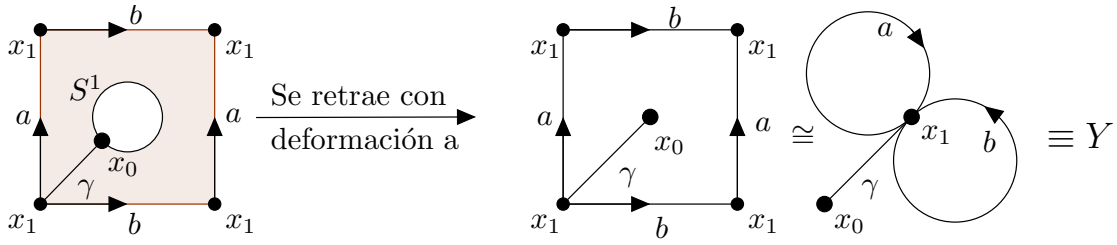


Figura 7.1: Retracción del toro perforado conservando el punto base x_0. El camino γ lo une al vértice x_1 del modelo; por eso los lazos de las aristas se llevan a x_0 mediante $\gamma * \alpha * \bar{\gamma}$ (original, p. 59).

Como $i_{1*}(\varepsilon_0) = 1$ por ser X_1 contráctil, solo hay que calcular $i_{2*}(\varepsilon_0)$: es la clase, en X_2, del lazo α_0 que rodea el agujero. Y al retraer X_2 sobre el grafo, ese lazo se convierte en el recorrido completo del borde del cuadrado, es decir, en

$$i_{2*}(\varepsilon_0) = \varepsilon_2^a \varepsilon_2^b (\varepsilon_2^a)^{-1} (\varepsilon_2^b)^{-1}.$$

Este es el único paso con trabajo geométrico de todo el ejemplo, y conviene verlo despacio. El lazo α_0 es una circunferencia pequeña alrededor del agujero; empujarla hacia fuera hasta el borde del cuadrado no cambia su clase de homotopía, porque el toro menos el disco es exactamente la región por la que se la está empujando. Al llegar al borde, lo que recorre es el perímetro entero del cuadrado, y el perímetro del cuadrado, leído con las identificaciones puestas, es la palabra $aba^{-1}b^{-1}$. De ahí que la única relación del grupo sea esa palabra: no la elige nadie, la escribe el polígono. Por tanto

$$\pi_1(T, x_0) = \langle \varepsilon^a, \varepsilon^b \mid \varepsilon^a \varepsilon^b (\varepsilon^a)^{-1} (\varepsilon^b)^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

La relación dice literalmente $\varepsilon^a \varepsilon^b = \varepsilon^b \varepsilon^a$: los dos generadores conmutan, y un grupo libre con dos generadores y esa única relación es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Geométricamente, es la superficie del toro la que permite deslizar un lazo alrededor del otro; compárese con la figura del ocho de más arriba, donde esa superficie no existe y el grupo se queda libre.

La idea: el mecanismo, ya visible

Los tres ejemplos anteriores comparten estructura, y en el tercero se ve entero:

En un modelo con un solo vértice, los generadores son las aristas identificadas. La cara aporta la palabra del borde como relación.

Y la razón es geométrica: el lazo que rodea el agujero, al empujarlo hacia el borde del polígono, recorre las aristas en el orden en que aparecen en la palabra. Nada más. Con eso ya se puede calcular el grupo fundamental de *cualquier* superficie dada por un polígono de identificaciones, cuidando los vértices: si hay varios, primero se contrae

un árbol máximo del grafo de aristas. El capítulo 8 formaliza el caso de los modelos normales.

Ejemplo (Botella de Klein)**.** Con la palabra $aba^{-1}b$ y el mismo esquema, $i_{2*}(\varepsilon_0) = (\varepsilon^b)^{-1}\varepsilon^a(\varepsilon^b)^{-1}(\varepsilon^a)^{-1}$, y se obtiene

$$\pi_1(K) = \langle \varepsilon^a, \varepsilon^b \mid \varepsilon^a\varepsilon^b(\varepsilon^a)^{-1}\varepsilon^b \rangle.$$

Todo el trabajo es el mismo que en el toro y cambia una sola letra: donde allí había b^{-1} aquí hay b, porque el segundo par de lados se cose dando la vuelta. Esa letra basta para que la relación deje de ser un conmutador, y con ella se va la conmutatividad: la relación dice ahora $\varepsilon^a\varepsilon^b = (\varepsilon^b)^{-1}\varepsilon^a$, es decir, que pasar ε^a al otro lado de ε^b invierte ε^b. Es la misma media vuelta de la banda de Möbius, escrita en el grupo.

El $i_{2*}(\varepsilon_0)$ que sale es la palabra inversa de $aba^{-1}b$, porque el lazo que rodea el agujero se ha recorrido en el otro sentido. No importa: una relación y su inversa generan el mismo subgrupo normal, así que la presentación es la misma.

Lo mismo pasa si el borde se empieza a leer por otro vértice. Empezando por la segunda letra se obtiene $ba^{-1}ba$, y

$$ba^{-1}ba = a^{-1}\,(aba^{-1}b)\,a,$$

que es un conjugado de la relación original; y declarar trivial una palabra es declarar triviales todos sus conjugados, porque $gwg^{-1} = geg^{-1} = e$. Conclusión práctica: **la palabra del polígono se puede leer empezando por cualquier letra y en cualquiera de los dos sentidos**, y la presentación no cambia.

Ejemplo (Plano proyectivo)**.** Con la palabra aa, el lazo que rodea el agujero recorre la arista a dos veces, luego $i_{2*}(\varepsilon_0) = \varepsilon_2^2$ y

$$\pi_1(P^2\mathbb{R}) = \langle \varepsilon \mid \varepsilon^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2.$$

El grupo presentado por un generador y esa *única* relación tiene exactamente dos elementos, y esos dos elementos son el lazo constante y el diámetro del disco, que en el plano proyectivo es un lazo porque sus dos extremos están identificados. Recorrerlo dos veces sí se deshace; una vez, no. Es el ejemplo más pequeño de grupo fundamental finito y no trivial de todo el curso.

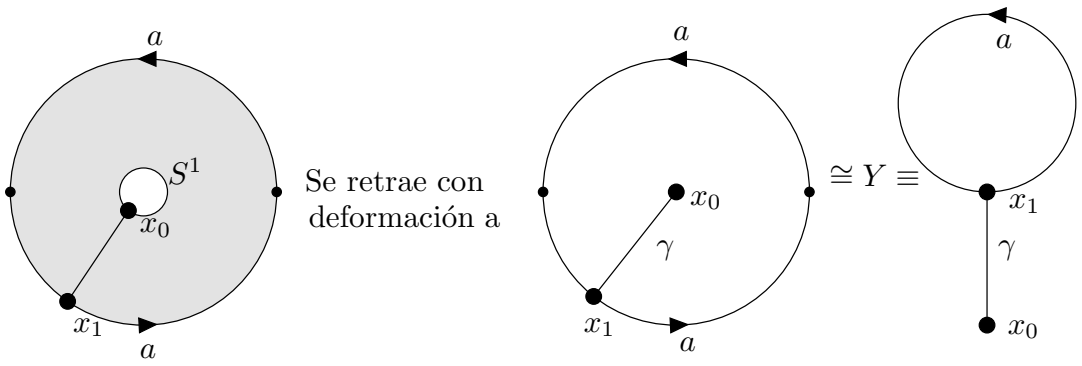


Figura 7.2: En el plano proyectivo perforado, el borde exterior tiene los antípodas identificados. Al retraer la corona, su vuelta completa recorre dos veces el lazo a del cociente: de ahí procede la relación $\varepsilon^2 = 1$ al tapar el agujero (original, p. 62).

Un caso a mano con varios vértices: el plano proyectivo como cuadrado. La intuición de más arriba avisaba de que, si el polígono tiene varias clases de vértices, la regla «generadores = letras» no vale tal cual. El plano proyectivo también se obtiene de un cuadrado con la palabra $abab$, y es el ejemplo más corto donde se ve. Sean v_0, v_1, v_2, v_3 los vértices del cuadrado en el orden del borde, de modo que la primera a va de v_0 a v_1, la primera b de v_1 a v_2, la segunda a de v_2 a v_3 y la segunda b de v_3 a v_0.

- *Clases de vértices.* Pegar las dos a identifica sus orígenes y sus finales: $v_0 \sim v_2$ y $v_1 \sim v_3$. Pegar las dos b da $v_1 \sim v_3$ y $v_2 \sim v_0$, lo mismo. Quedan dos clases, $P = \{v_0, v_2\}$ y $Q = \{v_1, v_3\}$, y cada arista va de una a la otra: a de P a Q, b de Q a P.
- *El grafo del borde.* Tras las identificaciones, el borde es un grafo con $V = 2$ vértices y $A = 2$ aristas, que es una sola circunferencia: $A - V + 1 = 1$, por la regla de «Contar las circunferencias de un grafo» del capítulo 5. El plano proyectivo perforado se retrae a ese grafo, y su grupo es libre de rango uno, no de rango dos.
- *Contraer un árbol.* La arista b une los dos vértices distintos y forma un árbol; al contraerla, b se vuelve trivial y a se convierte en un lazo. La palabra del borde pasa a leerse aa, y

$$\pi_1(P^2\mathbb{R}) = \langle a \mid a^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2,$$

  lo mismo que con el bígono.

Dónde se falla. En aplicar la regla de un solo vértice sin contar los vértices. Daría $\langle a, b \mid abab \rangle$, y con el cambio $c = ab$ (es decir, $b = a^{-1}c$) la relación se escribe $abab = c^2$, de modo que ese grupo es $\langle a, c \mid c^2 \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$: infinito, y con abelianizado $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$, el mismo que el de la botella de Klein. Se concluiría que el plano proyectivo *es* la botella de Klein. Con la esfera pasa lo mismo: la palabra aa^{-1} tiene dos clases de vértices y una arista entre ellas, $A - V + 1 = 0$, y el grupo es trivial; la regla mal aplicada daría $\langle a \mid aa^{-1} \rangle = \langle a \mid \rangle \cong \mathbb{Z}$. El capítulo 8 vuelve sobre esto en la observación «Una hipótesis escondida que hay que comprobar siempre».

Observación (Dos presentaciones del mismo grupo)**.** El grupo fundamental de la botella de Klein se ha obtenido como $\langle a, b \mid aba^{-1}b \rangle$. Calculándolo como suma conexa $P^2\mathbb{R} \# P^2\mathbb{R}$, con $i_{1*}(\varepsilon_0) = (\varepsilon_1')^2$ e $i_{2*}(\varepsilon_0) = (\varepsilon_2')^2$, la relación que impone el teorema es $i_{1*}(\varepsilon_0)\, i_{2*}(\varepsilon_0)^{-1}$, es decir, $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \mid \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^{-2} \rangle$. Son el mismo grupo, y conviene ver el cambio de variable que lo demuestra.

Sea $b' = a^{-1}b$, de modo que $b = ab'$. Como a y b generan, también lo hacen a y b'. Entonces

$$aba^{-1}b = a^2(a^{-1}b)(a^{-1}b) = a^2(a^{-1}b)^2 = a^2b'^2,$$

y basta tomar $a = \varepsilon_1$ y $b' = \varepsilon_2^{-1}$, que convierte $a^2b'^2$ en $\varepsilon_1^2\varepsilon_2^{-2}$.

Este ejemplo es importante como aviso: **dos presentaciones muy distintas pueden dar el mismo grupo**. Aquí lo hemos probado mediante un cambio de generadores. Abelianizar permite descartar isomorfismos cuando los resultados difieren; si coinciden, en general todavía no basta para concluir que los grupos son isomorfos.

Observación (Una errata que conviene tener localizada)**.** El material de partida escribe esta relación como $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2^{-2} \rangle$, sin el exponente 2 en el primer generador, y por el mismo motivo cierra la cadena anterior en $a \cdot b'^2$ en vez de $a^2b'^2$. Es una errata, y no es inocua: con $\varepsilon_1 = \varepsilon_2^2$ el grupo colapsa al libre de un solo generador,

$$\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2^{-2} \rangle \cong \mathbb{Z},$$

que no es el grupo de la botella de Klein: su abelianizado sería $\mathbb{Z}$ y no $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$. Lo correcto es lo escrito arriba, y coincide con la presentación general $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \mid \alpha_1^2 \cdots \alpha_n^2 \rangle$ de las superficies de tipo II que se obtiene en el capítulo 8, tomando $n = 2$.

Ejemplo (Suma conexa de dos toros)**.** Sean T_1' y T_2' los dos toros con un disco abierto quitado, de modo que $T_1 \# T_2 = T_1' \cup T_2'$. Se toman $A = T_1' \cup A_0$ y $B = T_2' \cup B_0$, ensanchados con sendas coronas, de modo que $A \cap B$ se retrae a la circunferencia por la que se hace la suma conexa. Entonces $\pi_1(A)$ y $\pi_1(B)$ son libres con dos generadores cada uno, y

$$i_{1*}(\varepsilon) = [\varepsilon_1', \varepsilon_2'], \qquad i_{2*}(\varepsilon) = [\varepsilon_3', \varepsilon_4'].$$

El teorema da

$$\pi_1(T_1 \# T_2) = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \mid [\varepsilon_1, \varepsilon_2][\varepsilon_4, \varepsilon_3] \rangle.$$

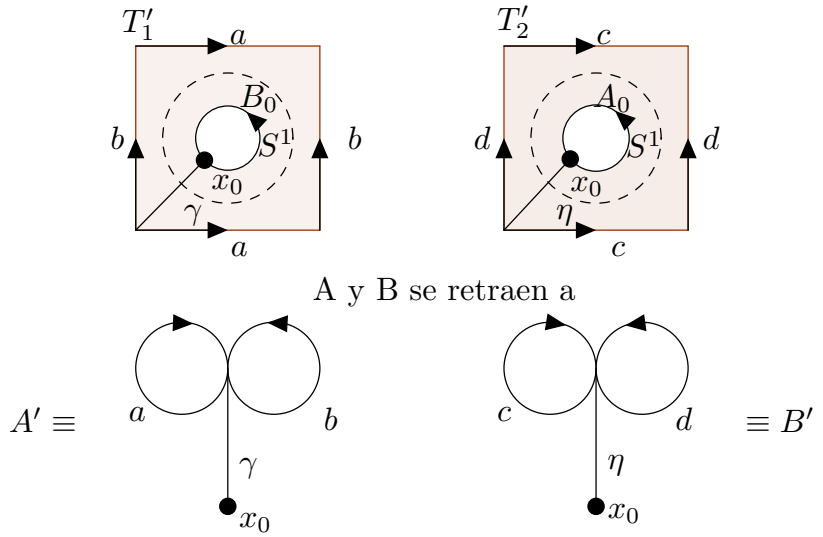


Figura 7.3: Dos toros perforados, las coronas A_0, B_0 y los grafos a los que se retraen los abiertos A, B. Cada pieza aporta dos lazos, trasladados al punto común x_0 por γ o η (original, p. 63).

Aquí la novedad es que las dos piezas aportan generadores — dos cada una — y que la única relación es de nuevo la de la circunferencia común, leída desde cada lado. Desde T_1' ese lazo es el borde del agujero, que es el conmutador $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$, exactamente como en el toro; desde T_2' es $[\varepsilon_3, \varepsilon_4]$. La relación iguala los dos, y como el teorema la escribe en la forma $i_{1*}(\varepsilon)\, i_{2*}(\varepsilon)^{-1}$ y el inverso de un conmutador es el conmutador cambiado de orden, $[x,y]^{-1} = [y,x]$, queda el producto de arriba. Es la misma presentación que da el capítulo 8 para las superficies de tipo I con $n = 2$, salvo el nombre de los generadores.

Qué se ha ganado. La pregunta de la sección era si los grupos de dos trozos determinan el del total, y qué hay que saber además sobre el pegado. La respuesta es sí, siempre que los trozos sean abiertos y su intersección conexa por caminos, y lo que hay que saber además son las dos aplicaciones i_{1*} e i_{2*}: cómo se ven los lazos del solape desde cada lado. Con eso se tienen ya, sin más teoría, los grupos de la esfera, de las uniones puntuales de circunferencias, del toro, de la botella de Klein, del plano proyectivo y de la suma de dos toros, y el mecanismo que da el de cualquier superficie dada por un polígono: las aristas son los generadores, una vez contraído un árbol si hay varias clases de vértices, y la palabra del borde es la relación. Quedan dos cosas abiertas. Una es decidir cuáles de esos grupos son distintos, que el capítulo 8 resuelve con los abelianizados. La otra es usar el teorema fuera de las superficies, y la primera aplicación es la de la sección siguiente: probar que una curva cerrada simple separa el plano.

7.3 Separación del plano por curvas cerradas

LA PREGUNTA: DENTRO Y FUERA DE UNA CURVA CERRADA

Que una curva cerrada y simple del plano lo separa en un dentro y un fuera es de las cosas que parecen no necesitar demostración: se ve en cualquier dibujo. Pero hay que justificarlo para toda curva cerrada simple continua, que puede ser mucho más complicada que un dibujo. ¿Qué hace falta para probarlo, y qué tiene que ver con el grupo fundamental de la circunferencia?

Lema. Sea A un espacio compacto y $g : A \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ continua. Si 0 está en la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus g(A)$, entonces g es homotópicamente trivial.

La idea, en una línea: si el origen puede escaparse hasta el infinito sin cruzar la imagen de g, se le deja escapar, y visto desde muy lejos todo conjunto acotado parece un punto, luego g ya no rodea nada.
Como $\mathbb{R}^2$ es localmente conexo por caminos, también lo es $\mathbb{R}^2 \setminus g(A)$, y sus componentes conexas coinciden con las conexas por caminos. Se elige un camino $\alpha : I \to \mathbb{R}^2 \setminus g(A)$ de 0 a un punto p fuera de una bola B que contenga a $g(A)$, centrada en el origen y de radio $r < |p|$.
La aplicación $G(x,t) = g(x) - \alpha(t)$ es una homotopía entre g y $h(x) = g(x) - p$, y no se anula porque $\alpha(I) \cap g(A) = \emptyset$.
Y $H(x,t) = (1-t)g(x) - p$ es una homotopía entre h y la constante $-p$, que no se anula porque $|(1-t)g(x)| \le |g(x)| \le r < |p|$. Por transitividad, g es homotópica a la

constante $-p$ dentro de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. No se traslada la homotopía a la constante 0, pues ese punto no pertenece al espacio de llegada.

Un caso a mano. Sea $A = S^1$ y $g(z) = z + (3,0)$: la circunferencia de radio 1 y centro $(3,0)$, que no rodea al origen. Todo $g(A)$ cabe en la bola de radio 4, y se toma $p = (-5,0)$ con el camino $\alpha(t) = (-5t, 0)$, que va hacia la izquierda y no toca $g(A)$, cuyos puntos tienen abscisa entre 2 y 4. La primera homotopía, $g(x) - \alpha(t) = g(x) + (5t, 0)$, desplaza la circunferencia hacia la derecha hasta centrarla en $(8,0)$, y en todo momento sus puntos distan del origen al menos 2. La segunda, $(1-t)g(x) + (5,0)$, encoge esa circunferencia hasta el punto $(5,0)$, a distancia al menos 5 del origen. Así se ve la prueba entera: el origen no se mueve; se aleja la curva de él, y lejos se encoge a un punto. Con $g(z) = z$ esto es imposible, porque el origen está en la componente acotada y ningún camino lo saca sin cruzar la curva; y en efecto esa g es la vuelta canónica, que no se contrae.

Lo que hay que llevarse. Una curva que no rodea al origen, en el sentido de que el origen puede escapar al infinito sin cruzarla, se contrae en el plano perforado. Se prueba en dos movimientos: se traslada la curva por el camino de escape, lo que equivale a mover el origen, y después, desde muy lejos, se encoge. La hipótesis de la componente no acotada es la que da el camino de escape.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: DAR POR BUENA LA SEPARACIÓN Y NO DEMOSTRARLA

La alternativa. Admitir sin demostración que una curva cerrada y simple del plano lo divide en exactamente dos regiones, que es lo que enseña cualquier dibujo, y seguir adelante.
Su ventaja. Ahorra una sección entera de lemas técnicos y no cambia ninguna de las aplicaciones, porque el enunciado es cierto.
Qué la hunde. Que lo que el dibujo enseña no es la hipótesis del teorema. Que el complementario de un conjunto cerrado y conexo del plano tenga exactamente dos componentes no es en absoluto automático: hay ejemplos clásicos de tres regiones abiertas del plano, disjuntas dos a dos, que tienen exactamente la misma frontera, de modo que cada punto de esa frontera común está tocando las tres a la vez. Con esos ejemplos delante, la evidencia visual deja de ser evidencia. Lo que hay que demostrar es que una curva *simple*, homeomorfa a S^1, no se comporta así, y la demostración descansa sobre el cálculo de $\pi_1(S^1, x_0)$: es la primera aplicación seria de esa teoría, y la razón de que esta sección esté en este capítulo y no antes.

Lema. Sea $A \subset S^2$ compacto y $a, b \in S^2$. Dada $f : A \to S^2 \setminus \{a, b\}$ continua, si a y b están en la misma componente de $S^2 \setminus f(A)$, entonces f es homotópicamente trivial.

La idea, en una línea: se manda uno de los dos puntos al infinito con la proyección estereográfica y el enunciado se convierte, literalmente, en el del lema anterior.
Si $a = b$, el espacio de llegada es una esfera menos un punto, homeomorfa a $\mathbb{R}^2$ y contráctil. Supongamos $a \neq b$. Sea $\rho : S^2 \setminus \{a\} \to \mathbb{R}^2$ la proyección estereográfica y pongamos $\sigma(x) = \rho(x) - \rho(b)$. Su restricción lleva $S^2 \setminus \{a, b\}$ homeomórficamente a $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
La componente que contiene a a contiene un entorno suyo disjunto del compacto $f(A)$; al proyectar, ese entorno llega fuera de toda bola. Si también contiene a b, el punto $\sigma(b) = 0$ queda en la componente no acotada del complementario de $\sigma(f(A))$. Quitar

a no desconecta esa componente: es un abierto conexo de una superficie y los caminos pueden desviarse alrededor de un punto. El lema anterior contrae $\sigma \circ f$ en el plano perforado; componiendo con σ^{-1} se obtiene la homotopía buscada.

Lo que hay que llevarse. En la esfera, «no rodear» se dice con dos puntos: una curva que deja a a y a b del mismo lado se contrae en la esfera menos esos dos puntos. La proyección desde a convierte la esfera menos $\{a, b\}$ en el plano menos el origen, y el punto a, que está en la componente de b, se convierte en el infinito: el origen está entonces en la componente no acotada, que es la hipótesis del lema anterior.

Proposición. Sea $f : S^1 \to S^2$ una inyección continua. Entonces su imagen $\Sigma = f(S^1)$ divide a S^2: el complementario $S^2 \setminus \Sigma$ tiene al menos dos componentes. Además $f : S^1 \to \Sigma$ es un homeomorfismo.

LA IDEA: PARTIR LA CURVA EN DOS ARCOS Y HACERLOS HABLAR

La imagen que predice el enunciado es esta: **un arco no separa, y dos arcos pegados por sus extremos sí**. Un trozo de curva sin cerrar se puede rodear; no encierra nada. Una curva cerrada es dos arcos cosidos por sus dos puntos comunes, y es ese cosido el que crea el dentro.
La demostración convierte esa frase en un argumento por reducción al absurdo, y el mecanismo es bonito. Se supone que la curva *no* separa. Se parte Σ en sus dos arcos y se toman como abiertos los dos complementarios, $S^2 \setminus \Sigma^+$ y $S^2 \setminus \Sigma^-$. Su unión es la esfera menos los dos puntos de cosido, y su intersección es el complementario de la curva entera, que por la suposición es conexo por caminos: exactamente lo que pide Seifert-van Kampen. Los lemas previos dicen que cada arco, por sí solo, no obliga a ningún lazo a rodear nada, y entonces el teorema devuelve que la esfera menos dos puntos es simplemente conexa. Pero la esfera menos dos puntos es un plano menos un punto, y ese tiene $\mathbb{Z}$. Contradicción.

El corazón, en una frase. Si la curva no separase, sus dos mitades podrían «taparse» la una a la otra, y el agujero que dejan los dos puntos de cosido desaparecería; pero ese agujero existe y se llama $\mathbb{Z}$.

Paso 1: montar la descomposición que Seifert-van Kampen necesita. Por compacidad de S^1 y separación de S^2, la aplicación $f : S^1 \to \Sigma$ es un homeomorfismo. Además $\Sigma \neq S^2$, pues sus grupos fundamentales son distintos. El complementario es abierto y localmente conexo por caminos; si fuera conexo, sería conexo por caminos. Supongámoslo y escribamos $\Sigma = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$, donde $\Sigma^\pm$ es la imagen de la semicircunferencia $E^\pm$, y sea $\Sigma^+ \cap \Sigma^- = \{a, b\}$. Entonces

$$S^2 \setminus \{a, b\} = (S^2 \setminus \Sigma^+) \cup (S^2 \setminus \Sigma^-),$$

y la intersección de los dos abiertos es $S^2 \setminus \Sigma$, que se ha supuesto conexo por caminos. Se puede aplicar Seifert-van Kampen con $U = S^2 \setminus \Sigma^+$ y $V = S^2 \setminus \Sigma^-$.

Paso 2: cada arco por separado no obliga a nada *(el núcleo de la prueba)*. Aquí entran los dos lemas, y es donde se paga el precio del teorema. Lo que hay que ver es que

todo lazo del complementario de *un solo arco* se deshace dentro de la esfera menos los dos puntos: como el arco es conexo y contiene a a y a b, esos dos puntos quedan del mismo lado de cualquier lazo que no lo toque, y un lazo que no separa a de b es homotópicamente trivial. En una frase: **un arco no encierra, y por eso no deja rastro en el grupo**.
Denotemos por $j_1 : U \to S^2 \setminus \{a, b\}$ y $j_2 : V \to S^2 \setminus \{a, b\}$ las inclusiones en el total. Veremos que j_{1*} y j_{2*} son triviales. Sea $[\alpha] \in \pi_1(U, x_0)$; como α es un lazo, induce $\tilde{\alpha} : S^1 \to U$ con $\tilde{\alpha}_*(\varepsilon) = [\alpha]$, siendo ε la vuelta canónica. Ahora $j_1 \circ \tilde{\alpha} : S^1 \to S^2 \setminus \{a, b\}$ tiene imagen disjunta de Σ^+, y $a, b \in \Sigma^+$. Como Σ^+ es conexo, por ser imagen continua de una semicircunferencia, y no corta la imagen del lazo, está entero dentro de una sola componente de $S^2 \setminus (j_1 \circ \tilde{\alpha})(S^1)$, y con él a y b. Luego a y b están en la misma componente de ese complementario; por el lema anterior, $j_1 \circ \tilde{\alpha}$ es homotópicamente trivial y por tanto $j_{1*}[\alpha] = (j_1 \circ \tilde{\alpha})_*(\varepsilon) = 1$.

Paso 3: cobrar la contradicción. Por Seifert-van Kampen, las imágenes de las inclusiones de U y V generan el grupo del total. Como j_{1*} y j_{2*} son triviales, ese grupo es trivial, luego $\pi_1(S^2 \setminus \{a, b\}, x_0) = \{1\}$. Pero S^2 menos dos puntos es homeomorfo al plano menos un punto por proyección estereográfica, cuyo grupo fundamental es $\mathbb{Z}$. Contradicción.

Lo que hay que llevarse. Se supone que la curva no separa y se cubre la esfera menos los dos puntos de cosido con los complementarios de los dos arcos. Su intersección es el complementario de la curva, conexo por la suposición: se puede usar Seifert-van Kampen, y solo su mitad fácil, la de los generadores. Cada arco es conexo y contiene a los dos puntos, así que ningún lazo que lo esquive los separa, y el segundo lema lo contrae: las dos piezas aportan generadores triviales. El total tendría grupo trivial, y es $\mathbb{Z}$. El papel de cada hipótesis: la inyectividad da los dos arcos con solo dos puntos en común; la conexión de cada arco pone a y b del mismo lado de cualquier lazo que lo esquive.

Proposición (Teorema de Jordan: separación)**.** Si $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ es una inyección continua, su imagen divide a $\mathbb{R}^2$.

Es equivalente a la proposición anterior vía la proyección estereográfica. Además de la componente C del punto de S^2 que corresponde al infinito de $\mathbb{R}^2$, existe otra componente C'; al volver a $\mathbb{R}^2$, C' queda acotada y C es la no acotada. Luego hay al menos dos componentes en $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$.

Observación. Aquí se ha demostrado la separación, es decir, la existencia de al menos dos componentes. La versión completa de Jordan afirma que son exactamente dos y que ambas tienen la curva como frontera; esa parte requiere un argumento adicional.

CONEXIÓN CON LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS: CÓMO JORDAN RESTRINGE LAS ÓRBITAS PLANAS

Esta es la conexión que más lejos llega de todo el capítulo, y no es una analogía: es el mismo teorema, usado literalmente.
En un sistema autónomo del plano, $y' = f(y)$ con f de clase C^1, el comportamiento de las órbitas es sorprendentemente pobre. El **teorema de Poincaré-Bendixson** afirma que si una

semiórbita positiva permanece dentro de un compacto contenido en el dominio del campo y su conjunto límite no contiene puntos críticos, entonces ese conjunto límite es una órbita periódica. La ausencia de puntos críticos es esencial: al permitirlos, pueden aparecer conjuntos límite formados por equilibrios y órbitas que los unen. No se puede concluir que toda órbita acotada tienda a un solo equilibrio o a un ciclo.

Lo que impone esa pobreza es exactamente el teorema que se acaba de demostrar. Una órbita periódica es una curva cerrada simple del plano, luego lo separa en un dentro y un fuera; y como las órbitas de un sistema autónomo no se cortan a sí mismas ni entre sí, una trayectoria que está dentro no puede salir y una que está fuera no puede entrar. La curva actúa como una pared. La demostración de Poincaré-Bendixson combina esta separación con la unicidad de las soluciones y el estudio de los retornos a un arco transversal. La barrera geométrica ayuda a entender el resultado, pero no sustituye esas partes de la prueba.[a]

Merece la pena verlo como un caso de algo más general, porque es la moraleja de este capítulo entero: **la topología del espacio donde ocurre algo limita lo que puede ocurrir**. Es lo mismo que decía el teorema de Poincaré sobre los campos en superficies, en la parte de geometría: la esfera no admite un campo sin ceros por una razón topológica, no dinámica.

En el libro de *Ecuaciones diferenciales ordinarias* del autor, esto es la sección 8.5, «El caso de los sistemas planos. Teorema de Poincaré-Bendixson».

[a] Véase G. Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, sección 7.3, especialmente el teorema 7.16.

DE DÓNDE VIENE: UN TEOREMA QUE PARECE OBVIO Y NO LO ES

El teorema de la curva de Jordan afirma que una curva cerrada y simple del plano tiene un dentro y un fuera. Dicho así, parece que no hay nada que demostrar.

La dificultad está en la palabra «cualquiera». Para una circunferencia o un polígono es elemental. Pero una curva cerrada simple puede ser espantosamente complicada, con oscilaciones en todas las escalas y sin ninguna tangente en ningún punto, y entonces decidir a ojo qué está dentro y qué está fuera es imposible.

Hay demostraciones con herramientas distintas. Por ejemplo, Tverberg dio en 1980 una prueba mediante aproximación por polígonos y argumentos elementales de análisis.[a] Aquí Seifert-van Kampen permite demostrar la parte de separación aprovechando los grupos fundamentales ya calculados.

Merece la pena relacionarlo con la parte de geometría: el teorema del índice de rotación de Hopf, que allí se admitió sin demostrar, también convierte una intuición sobre curvas cerradas simples en un resultado global. Su contexto es más regular: curvas suaves a trozos, no todas las curvas continuas de Jordan.

[a] H. Tverberg, *A proof of the Jordan curve theorem*, Bull. London Math. Soc. 12 (1980), 34–38.

Qué se ha ganado. La pregunta de la sección era qué hace falta para probar que una curva cerrada simple separa el plano, y qué tiene que ver eso con el grupo de la circunferencia. La respuesta: hacen falta dos lemas que dicen cuándo una curva no rodea nada, y el cálculo $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$, que es la obstrucción. Si la curva no separase, Seifert-van Kampen, usado al revés, obligaría a ese $\mathbb{Z}$ a ser trivial. Queda abierta la otra mitad de Jordan, que haya exactamente dos componentes y que las dos tengan la curva por frontera; con estas herramientas no sale sin más trabajo.

7.4 Problemas de las relaciones

Ejercicio 7.1. *Grupos fundamentales por Seifert-van Kampen*

Calcular el grupo fundamental de los siguientes espacios:
1. el cilindro $\mathbb{R} \times S^1$;
2. la suma puntual de dos copias de S^2;
3. la suma puntual de n copias de S^1;
4. la banda de Möbius y la botella de Klein;
5. el sombrero bobo, es decir, un triángulo relleno con los lados identificados según la palabra $aa^{-1}a$;
6. el toro menos un disco;
7. la esfera S^2 con un diámetro;
8. $\mathbb{R}^3$ menos una recta; $\mathbb{R}^3$ menos una circunferencia; $\mathbb{R}^3$ menos la unión de dos circunferencias coplanarias disjuntas.

Resolución. La idea. Hay dos herramientas, y se prueban en este orden. Primero, retraer el espacio, o deformarlo sin cambiar su tipo de homotopía, hasta algo cuyo grupo ya se conoce: una circunferencia, un ramillete, una superficie de las ya calculadas. Solo si eso no basta, partirlo en dos abiertos y aplicar Seifert-van Kampen; y si el espacio es un polígono con los lados identificados, el esquema estándar de la sección 7.2 da el grupo leyendo la palabra del borde. Los ocho apartados están ordenados para que se vean las dos.

1. Cilindro. $\mathbb{R} \times S^1$ se retrae con deformación fuerte a $\{0\} \times S^1 \cong S^1$, luego $\pi_1 \cong \mathbb{Z}$.

2. Dos esferas por un punto. Se cubre con dos abiertos, cada uno una esfera más un entorno del punto de unión en la otra; cada uno se retrae a una esfera, con $\pi_1 = \{1\}$, y la intersección es contráctil. El producto amalgamado de dos grupos triviales es trivial:

$$\pi_1(S^2 \vee S^2) = \{1\}.$$

3. n circunferencias por un punto. Iterando el ejemplo de la figura de ocho,

$$\pi_1(S^1 \vee \cdots \vee S^1) = \langle a_1, \ldots, a_n \mid \rangle \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n},$$

el grupo libre con n generadores.

4. Banda de Möbius y botella de Klein. La banda se retrae a su circunferencia central, luego $\pi_1 \cong \mathbb{Z}$. La botella se calculó antes: $\langle a, b \mid aba^{-1}b \rangle$, que no es abeliano y cuyo abelianizado es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.

5. El sombrero bobo. La palabra es $aa^{-1}a$, con una sola arista. Aplicando el esquema estándar: X_1 disco abierto, contráctil; X_2 el sombrero menos un disco cerrado, que se retrae a la única circunferencia a, luego $\pi_1(X_2) = \langle a \mid \rangle$; y $X_1 \cap X_2$ una corona con generador ε_0 que, al empujarlo al borde, recorre $a\, a^{-1}\, a$. Luego

$$\pi_1(B) = \langle a \mid aa^{-1}a \rangle = \langle a \mid a \rangle = \{1\}.$$

El sombrero bobo es simplemente conexo. De hecho es contráctil, aunque eso no se ve a simple vista ni se demuestra aquí; y no es homeomorfo al disco, ni siquiera es una superficie: la arista a aparece tres veces en el borde del triángulo, así que un punto interior de a tiene por

entorno tres semidiscos pegados por su diámetro, y eso no es un disco. Es el contraejemplo estándar de que «simplemente conexo» no significa «con forma de disco».

6. Toro menos un disco. Se retrae a $S^1 \vee S^1$, luego $\pi_1 \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, libre con dos generadores. Obsérvese la diferencia con el toro entero, que es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: **quitar un disco destruye la relación**.

7. Esfera con un diámetro. Sea $X = S^2 \cup D$, con D el diámetro, y sea m su punto medio. Tomamos $U = X \setminus \{m\}$ y $V = N \cup D$, donde N es un entorno abierto de un arco meridiano β que une los polos, elegido como un disco que se retrae sobre β.

El abierto U se retrae sobre S^2, contrayendo cada mitad del diámetro hacia su polo; V se retrae sobre la circunferencia $\beta \cup D$; y $U \cap V$ se retrae sobre N, contráctil. Seifert-van Kampen da $\pi_1(X) \cong \{1\} * \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$. Contraer el diámetro a un punto sería un cociente, no una retracción sobre $S^2 \vee S^1$.

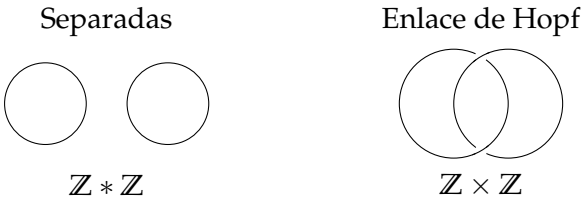
8. Complementarios en $\mathbb{R}^3$.

- Menos una recta: se retrae a S^1, luego $\pi_1 \cong \mathbb{Z}$.
- Menos una circunferencia: tiene el tipo de homotopía de $S^2 \vee S^1$, luego $\pi_1 \cong \mathbb{Z}$.
- Menos dos circunferencias coplanarias disjuntas: tiene el tipo de homotopía de $S^2 \vee S^2 \vee S^1 \vee S^1$, luego $\pi_1 \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Al separar las dos componentes en bolas disjuntas y aplicar Seifert-van Kampen, sus generadores se combinan sin relaciones adicionales.

El enlace con el apartado 7 es directo. Se encierra la circunferencia en una esfera grande y se empuja radialmente sobre ella todo lo de fuera. Dentro, lo que rodea a la circunferencia se va aplastando contra esa esfera, salvo un eje que atraviesa el disco que la circunferencia bordea y va de polo a polo; no se detalla aquí esa deformación. Lo que queda es la esfera con un diámetro del apartado 7, y de ahí el $\mathbb{Z}$. Su generador es el lazo que baja por el eje, pasando por dentro de la circunferencia, y sube por la esfera: el lazo que da una vuelta alrededor de la circunferencia. Con dos circunferencias salen dos de esas figuras unidas por un arco, y cada una aporta un generador. ■

Dónde se falla. En tres sitios. Confundir el toro menos un disco, cuyo grupo es libre, con el toro: quitar el disco quita justo la cara que impone la relación. Tratar el sombrero bobo como si fuera una superficie, o como si fuera un disco porque su grupo es trivial. Y, en los complementarios de $\mathbb{R}^3$, contar mal las piezas de la retracción: las esferas que aparecen no aportan nada al grupo, que sale entero de las circunferencias.

Observación (El caso enlazado)**.** Las dos circunferencias engarzadas como eslabones forman el *enlace de Hopf* L. Aquí el grupo es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, que **sí distingue** este caso del no enlazado: en uno los generadores conmutan y en el otro no.



En el dibujo de la derecha cada componente pasa una vez por encima y otra por debajo.

Una forma de comprobar el cálculo es añadir el punto del infinito y ver $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. El enlace de Hopf se representa por las dos circunferencias $z_1 = 0$ y $z_2 = 0$. Fuera de ellas, ambos módulos son positivos y la aplicación

$$(z_1, z_2) \longmapsto \left(\frac{z_1}{|z_1|}, \frac{z_2}{|z_2|}, |z_1| \right)$$

es un homeomorfismo $S^3 \setminus L \cong S^1 \times S^1 \times (0,1)$: la inversa es $(u, v, r) \mapsto (ru, \sqrt{1-r^2}\, v)$. Por tanto su grupo es $\mathbb{Z}^2$. Quitar el punto del infinito, que está fuera del enlace, no cambia π_1: Seifert-van Kampen se aplica a su complementario y una bola pequeña, cuya intersección es una bola perforada, simplemente conexa. Así se obtiene también $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L) \cong \mathbb{Z}^2$. [1]

QUÉ DEJA. La estrategia correcta ante cualquier «calcular el grupo fundamental de»: *primero se intenta retraer a algo de la tabla, y solo si no se puede se saca Seifert-van Kampen*. Los retractos simplifican muchos de estos ejercicios. Y el sombrero bobo como aviso: simplemente conexo no significa disco.

Ejercicio 7.2. *Pegando un toro y una botella de Klein*

Se considera el toro T visto como cuadrado con identificaciones $aba^{-1}b^{-1}$ y la botella de Klein K vista como cuadrado con identificaciones $cdc^{-1}d$. Calcular el grupo fundamental del cociente obtenido de la unión disjunta $T \sqcup K$ identificando las aristas a y d.

Resolución. La idea. El espacio son dos piezas conocidas, el toro y la botella, pegadas a lo largo de una circunferencia. Con abiertos que engorden cada pieza un poco hacia la otra, la intersección se retrae a esa circunferencia y tiene grupo $\mathbb{Z}$: habrá exactamente **una** relación nueva, y dirá que la circunferencia de pegado tiene el mismo nombre visto desde el toro, donde se llama a, que visto desde la botella, donde se llama d.

La construcción de los abiertos. Sea V un entorno abierto en T en forma de corona alrededor de la circunferencia definida por la arista a, y sea W el análogo en K alrededor de la arista d. Si X es el cociente del enunciado, se toman

$$U_1 = T \cup W, \qquad U_2 = K \cup V.$$

Son abiertos, arcoconexos, su unión es X y su intersección $V \cup W$ también es arcoconexa. Se puede aplicar el teorema.

Los tres grupos. U_1 se retrae con deformación sobre T, luego $\pi_1(U_1) = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$. Con U_2 se hace lo mismo — se retrae sobre K empujando hacia dentro la corona V, exactamente como U_1 se retraía sobre T empujando W —, y lo único que cambia es la palabra del polígono, que en la botella de Klein termina en d y no en d^{-1}; luego $\pi_1(U_2) = \langle c, d \mid cdc^{-1}d \rangle$. Y $U_1 \cap U_2$ se retrae con deformación sobre la circunferencia de pegado, luego $\pi_1(U_1 \cap U_2) = \langle \varepsilon \mid \rangle \cong \mathbb{Z}$.

Las imágenes del generador. El generador ε de la intersección va, por la inclusión en U_1, a la clase de a; y por la inclusión en U_2, a la clase de d. La relación que se añade es, pues, ad^{-1}.

El resultado.

$$\pi_1(X) = \langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1},\ cdc^{-1}d,\ ad^{-1} \rangle.$$

Y como la última relación permite eliminar d sustituyéndolo por a,

$$\boxed{\pi_1(X) = \langle a, b, c \mid aba^{-1}b^{-1},\ cac^{-1}a \rangle}$$

■

Dos controles del resultado. El abelianizado se lee como en la sección 7.1: la primera relación da $a + b - a - b = 0$ y la segunda $c + a - c + a = 2a = 0$, así que $\pi_1(X)_{ab} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$, con b y c libres y a de orden dos. Tiene sentido: en la botella la arista d es la de orden dos del

[1] Modelo del enlace: S. Friedl, *Topology*, lema 3.13 (Hopf Link–Lemma).

abelianizado, y al pegar se ha llamado a. Y la característica: el toro y la botella tienen cada uno un vértice, dos aristas y una cara, y tras el pegado quedan un vértice, tres aristas ($a = d$, b y c) y dos caras, luego $\chi(X) = 1 - 3 + 2 = 0$, que es $\chi(T) + \chi(K) - \chi(S^1) = 0 + 0 - 0$.
Un detalle sobre W. En la botella $cdc^{-1}d$, el entorno de la arista d sí es una corona: una curva paralela a d cruza los lados c, que se pegan sin giro, y se cierra por el mismo lado. El entorno de c, en cambio, sería una banda de Möbius, porque los lados d se pegan dando la vuelta. Para el cálculo da igual, porque lo único que se usa es que $V \cup W$ se retrae a la circunferencia de pegado. Y obsérvese que X no es una superficie: a lo largo de esa circunferencia se juntan cuatro medias hojas, dos del toro y dos de la botella.
Dónde se falla. En escribir la relación nueva con las palabras de los polígonos en vez de con las aristas pegadas: la circunferencia de pegado es la arista a, no el borde del cuadrado. Y en olvidar que, al eliminar d, hay que sustituirlo también dentro de la relación de la botella, que pasa de $cdc^{-1}d$ a $cac^{-1}a$.

Ejercicio 7.3. *Obstrucciones por homomorfismos imposibles*

1. Demostrar que ningún homomorfismo de grupos de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ puede ser inyectivo.
2. Consideremos un homomorfismo $\phi : \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Demostrar que ϕ no puede ser ni inyectivo ni sobreyectivo.
3. Usando el apartado anterior, probar que no existen aplicaciones continuas $f : S^1 \vee P^2\mathbb{R} \to S^1 \vee S^1$ y $g : S^1 \vee S^1 \to S^1 \vee P^2\mathbb{R}$ tales que alguna de las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$ sea homotópica a la identidad correspondiente.
4. Probar que el plano proyectivo no se puede retraer sobre la banda de Möbius que contiene.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *En $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ hay elementos que no conmutan. ¿Qué le pasa a un conmutador al aplicarle un homomorfismo con imagen abeliana?*
2. *En $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}$ hay un elemento de orden dos. ¿Hay elementos de orden dos en $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$?*
3. *Para la sobreyectividad, abelianiza.*
4. *Para el apartado 4, ¿cuáles son $\pi_1(P^2\mathbb{R})$ y π_1 de la banda?*

Resolución. La idea. Los apartados 3 y 4 preguntan por aplicaciones continuas, y eso es difícil de atacar de frente. El grupo fundamental lo convierte en una pregunta sobre homomorfismos: si la aplicación existiera, induciría un homomorfismo con cierta propiedad, inyectivo, sobreyectivo o con una composición igual a la identidad. Basta entonces ver que ese homomorfismo es imposible, y para eso hay tres herramientas algebraicas: los conmutadores, que mueren en un grupo abeliano; la torsión, porque un elemento de orden finito distinto del neutro no puede ir inyectivamente a un grupo sin torsión, como un grupo libre; y el abelianizado, que controla la sobreyectividad. Los apartados 1 y 2 preparan esas herramientas.

1. Sea $f : \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ un homomorfismo y sean x, y los generadores libres. El conmutador $xyx^{-1}y^{-1}$ es **no trivial** en $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, porque el grupo libre no es abeliano. Pero

$$f(xyx^{-1}y^{-1}) = f(x)f(y)f(x)^{-1}f(y)^{-1} = 1$$

porque $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es abeliano. Luego f mata un elemento no trivial y no es inyectivo. ■

2. *No inyectivo.* En $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z} = \langle a, b \mid a^2 \rangle$ el elemento a tiene orden 2. Si ϕ fuera inyectivo, $\phi(a)$ tendría orden 2 en $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Pero $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ **es libre y un grupo libre no tiene elementos**

de orden finito distintos del neutro. Para verlo, se escribe una palabra reducida no vacía como $w = uvu^{-1}$, donde v es no vacía y su primera y última letra no se cancelan. Entonces $w^n = uv^n u^{-1}$: en v^n no hay cancelaciones entre las copias, de modo que ninguna potencia positiva es el neutro. Por ejemplo, $w = aba^{-1}$ tiene $u = a$ y $v = b$, y

$$(aba^{-1})^3 = ab\,(a^{-1}a)\,b\,(a^{-1}a)\,ba^{-1} = ab^3a^{-1} \neq e\,:$$

las cancelaciones solo ocurren entre u^{-1} y u, y lo que queda en medio, b^3, no se cancela nunca. Luego $\phi(a) = 1$ con $a \neq 1$, y ϕ no es inyectivo.

No sobreyectivo. Se abeliana. Si ϕ fuese sobreyectivo, induciría un homomorfismo sobreyectivo entre los abelianizados,

$$(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z})_{ab} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z} \;\longrightarrow\; (\mathbb{Z} * \mathbb{Z})_{ab} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Pero la imagen del factor $\mathbb{Z}_2$ es un subgrupo de torsión de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ el único elemento de orden finito es el neutro: si $n(p, q) = (0, 0)$ con $n \neq 0$, entonces $np = nq = 0$ en $\mathbb{Z}$ y por tanto $p = q = 0$. Así que esa imagen se reduce al neutro; luego la imagen del homomorfismo entero está generada por la imagen de un solo elemento y es cíclica, y $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ no lo es. Contradicción. ■

3. Se calculan los grupos fundamentales:

$$\pi_1(S^1 \vee P^2\mathbb{R}) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2, \qquad \pi_1(S^1 \vee S^1) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z},$$

por el producto libre, ya que la intersección de los dos abiertos naturales es contráctil.

Si $f \circ g \simeq \mathrm{Id}$, entonces $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ es un isomorfismo, en particular sobreyectivo, luego $f_* : \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ sería sobreyectivo. Imposible por el apartado 2.

Si $g \circ f \simeq \mathrm{Id}$, entonces $g_* \circ f_*$ es isomorfismo, luego f_* sería inyectivo. También imposible por el apartado 2. ■

4. Se sabe que $\pi_1(P^2\mathbb{R}) = \mathbb{Z}_2$ y que la banda de Möbius B contenida en $P^2\mathbb{R}$ tiene $\pi_1(B) = \mathbb{Z}$. Si existiera una retracción $r : P^2\mathbb{R} \to B$ con $r \circ i = \mathrm{Id}_B$, aplicando π_1:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{r_*} \mathbb{Z},$$

con $r_* \circ i_* = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$. Pero el único homomorfismo de $\mathbb{Z}_2$ en $\mathbb{Z}$ es el nulo: el generador de $\mathbb{Z}_2$ tiene orden 2 y su imagen debe satisfacer $2z = 0$; en $\mathbb{Z}$ esto obliga a $z = 0$. Luego $r_* \circ i_*$ es el homomorfismo nulo, no la identidad. Contradicción. ■

Dónde se falla. En tres sitios.

- En el apartado 3, en sacar más de lo que da la hipótesis. De $f \circ g \simeq \mathrm{Id}$ solo sale que f_* es sobreyectivo y g_* inyectivo, no que f_* sea un isomorfismo; por eso se necesitan las dos mitades del apartado 2.
- En confundir «no hay homomorfismo inyectivo» con «no hay aplicación continua». Aplicaciones continuas $S^1 \vee P^2\mathbb{R} \to S^1 \vee S^1$ hay muchas, empezando por las constantes. Lo que se prueba que no existe es una con inversa por homotopía de un lado.
- En el apartado 4, en olvidar que una retracción cumple $r \circ i = \mathrm{Id}_B$ *exactamente*. Esa igualdad es la que, al pasar a π_1, da $r_* \circ i_* = \mathrm{Id}$.

Qué hemos aprendido. Una pregunta sobre aplicaciones continuas se convierte, vía π_1, en una pregunta sobre homomorfismos, y esta se decide con muy pocas herramientas: los conmutadores, la torsión y el abelianizado.

Observación (El catálogo de obstrucciones)**.** Los apartados de este ejercicio, junto con la imposibilidad de un homomorfismo inyectivo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ del capítulo 6, forman el catálogo de obstrucciones que se usan en este libro. Conviene tenerlo escrito:

Obstrucción	Por qué
No hay homomorfismos inyectivos de un no abeliano en un abeliano	los conmutadores mueren
No hay torsión no trivial en un grupo libre	las potencias no son el neutro
El único homomorfismo $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$ es el nulo	$\mathbb{Z}$ no tiene torsión
No hay homomorfismos sobreyectivos de $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$	abelianizando, la imagen sería cíclica
No hay homomorfismos inyectivos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$	$\varphi(\mu, -\lambda) = 0$

En la última fila, $\lambda = \varphi(1,0)$ y $\mu = \varphi(0,1)$, de modo que $\varphi(\mu, -\lambda) = \mu\lambda - \lambda\mu = 0$. Si $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$, el elemento $(\mu, -\lambda)$ es un elemento no nulo del núcleo; si $\lambda = \mu = 0$, φ es el nulo, que tampoco es inyectivo.

Ejercicio 7.4. *Un recubrimiento dado por tipos de homotopía*

Sea X un espacio topológico conexo por caminos que puede ser recubierto por dos abiertos U y V arcoconexos, tales que U tiene el mismo tipo de homotopía que el toro, V tiene el mismo tipo de homotopía que $S^1 \times S^1$ y $U \cap V$ tiene el mismo tipo de homotopía que la esfera menos un punto. Calcular el grupo fundamental de X.

Resolución. El movimiento decisivo está en la intersección. La esfera menos un punto es homeomorfa a $\mathbb{R}^2$ por proyección estereográfica, y $\mathbb{R}^2$ es contráctil. Luego

$$\pi_1(U \cap V) = \{1\}.$$

Y cuando la intersección tiene grupo fundamental trivial, el producto amalgamado se reduce al **producto libre**: no hay relaciones que añadir.

Como U y V tienen los dos el tipo de homotopía del toro — obsérvese que $S^1 \times S^1$ *es* el toro, de modo que el enunciado dice lo mismo dos veces con dos nombres —, se tiene $\pi_1(U) \cong \pi_1(V) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Por tanto

$$\boxed{\pi_1(X) \cong (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) * (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})}$$

que en presentación es

$$\langle a, b, c, d \mid [a,b],\ [c,d] \rangle.$$

■

Dónde se falla. En dos sitios. El primero, en el grupo de la intersección: la esfera menos *un* punto es un plano y tiene grupo trivial; es la esfera menos *dos* puntos, o el plano menos uno, la que tiene $\mathbb{Z}$. Con $\mathbb{Z}$ habría una relación más, y el resultado sería otro. El segundo, en el resultado: no es $\mathbb{Z}^4$. Un producto libre no es abeliano aunque sus factores lo sean, porque a y c, por ejemplo, no conmutan. Lo que sí es $\mathbb{Z}^4$ es su abelianizado, que por la regla del producto libre es $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$.

QUÉ DEJA. El reflejo más rentable con Seifert-van Kampen: *mirar primero la intersección*. Si es simplemente conexa, el resultado es el producto libre y no hay nada más que amalgamar; si tiene $\pi_1 = \mathbb{Z}$, se añade una relación a las de las piezas. Casi todos los ejercicios caen en uno de esos dos casos.

Ejercicio 7.5. *Un toro pegado a dos circunferencias*

Calcular el grupo fundamental de la unión puntual de un toro con la unión puntual de dos circunferencias, es decir, de

$$X = T \vee (S^1 \vee S^1).$$

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Los dos grupos que hay que juntar ya están calculados: el del toro, en el capítulo 5; el de la suma puntual de dos circunferencias, en el ejercicio de los cálculos por Seifert-van Kampen.*
2. *Para aplicar el teorema hacen falta* abiertos*, y ni el toro ni el ramillete lo son dentro de X. Engórdalos un poco.*
3. *¿Qué grupo fundamental tiene la intersección que resulta?*

Resolución. La descomposición. Sea x_0 el punto común de la unión puntual, y sean T el toro y $R = S^1 \vee S^1$ el ramillete de dos circunferencias, de modo que $X = T \cup R$ con $T \cap R = \{x_0\}$.

Ni T ni R son abiertos en X, así que hay que engordarlos. En R se toma un entorno N_R de x_0 que se retraiga por deformación fuerte a x_0: basta con un arco pequeño de cada una de las dos circunferencias alrededor del punto de pegado, que es una cruz de cuatro brazos y se contrae a su centro. En T se hace lo mismo pero la forma es otra, y conviene decirlo: allí x_0 no es un punto de cruce sino un punto ordinario de una superficie, así que el entorno N_T que se toma es un disco abierto, que también se contrae a x_0. Lo que importa es el papel, idéntico en los dos casos: engordar la pieza sin cambiarle el tipo de homotopía. Se definen

$$X_1 = T \cup N_R, \qquad X_2 = R \cup N_T.$$

Son abiertos de X: la preimagen de X_1 en la unión disjunta $T \sqcup R$ es $T \sqcup N_R$, abierto, y lo mismo con X_2. Y cumplen $X_1 \cup X_2 = X$ y

$$X_1 \cap X_2 = N_T \cup N_R,$$

que es el pegado de dos espacios contráctiles por un punto y por tanto conexo por caminos.

Los tres grupos.

- X_1 se retrae por deformación fuerte a T, aplastando N_R sobre x_0; luego $\pi_1(X_1, x_0) \cong \pi_1(T, x_0) = \langle \alpha, \beta \mid [\alpha, \beta] \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, calculado en el capítulo 5 con la fórmula del producto.
- X_2 se retrae por deformación fuerte a R; luego $\pi_1(X_2, x_0) \cong \pi_1(R, x_0) = \langle \gamma, \delta \mid \rangle$, el grupo libre de rango dos.
- $X_1 \cap X_2$ se retrae por deformación fuerte a x_0 — las dos piezas se contraen a la vez y comparten el único punto que se queda quieto —, luego es simplemente conexo: $\pi_1(X_1 \cap X_2) = \{1\}$.

Seifert-van Kampen. Con la intersección simplemente conexa, el producto amalgamado no tiene nada que amalgamar y se reduce al producto libre. Siguiendo el procedimiento del capítulo, con $S_0 = \emptyset$:

$$\pi_1(X, x_0) = \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \mid [\alpha, \beta] \rangle = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) * (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}).$$

Es decir, **el producto libre del grupo del toro por el grupo libre de rango dos**: cuatro generadores y una única relación, la que dice que los dos generadores del toro conmutan entre sí. Obsérvese que γ y δ no conmutan ni entre sí ni con α ni con β: en un producto libre no hay más relaciones que las que cada factor trae.

Comprobación por el abelianizado. Al abelianizar, la única relación desaparece y queda

$$\big(\pi_1(X, x_0)\big)_{ab} \cong \mathbb{Z}^4,$$

que es lo que tenía que salir: en la abelianización solo cuentan los cuatro lazos independientes, dos del toro y dos del ramillete. ■

Otra vía (por característica, como control). Aunque X no es una superficie, se le puede calcular la característica triangulándolo y comprobar que encaja. La unión puntual satisface $\chi(A \vee B) = \chi(A) + \chi(B) - 1$ para estos complejos finitos, escogiendo los puntos de pegado como vértices: se identifican dos vértices en uno. Con $\chi(T) = 0$ y $\chi(S^1) = 0$,

$$\chi(X) = 0 + 0 + 0 - 1 - 1 = -2.$$

Por otra parte, X tiene el tipo de homotopía de un complejo con un solo vértice, cuatro lazos y una cara — la del toro —, de donde $\chi = 1 - 4 + 1 = -2$. Las dos cuentas coinciden, como deben. Es un control de compatibilidad del recuento de celdas, no una prueba de la presentación: distintos números de generadores y relaciones pueden dar la misma característica.

Dónde se falla. En creer que el punto de pegado impone alguna relación entre el toro y el ramillete. No la impone, porque la intersección es contráctil y no tiene generadores que igualar. Y en escribir el resultado como $\mathbb{Z}^4$ o como $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} * \mathbb{Z})$: los lazos del toro no conmutan con los del ramillete, así que el producto es libre entre los dos factores.

QUÉ DEJA. El caso más sencillo del teorema: cuando la intersección es simplemente conexa, el grupo del total es el *producto libre* de los grupos de las partes, es decir, se juntan los generadores y se juntan las relaciones sin añadir ninguna. Y la maniobra técnica que no se puede saltar: los dos trozos de una unión puntual no son abiertos, y hay que engordarlos con entornos contráctiles antes de poder aplicar el teorema.

Repaso del capítulo

REPASO INTERCALADO: SEIFERT-VAN KAMPEN, PRIMERA RONDA

1. Define presentación, grupo libre, abelianización, producto libre y producto amalgamado.
2. Enuncia el teorema de Seifert-van Kampen con sus hipótesis exactas.
3. Escribe el procedimiento de uso en cinco pasos.
4. Calcula π_1 del toro, de la botella de Klein y del plano proyectivo con el esquema estándar.
5. ¿Por qué hace falta que $X_1 \cap X_2$ sea conexo por caminos? Da el contraejemplo.

REPASO INTERCALADO: SEIFERT-VAN KAMPEN, SEGUNDA RONDA, CON MATERIAL ANTERIOR

1. Escribe las cinco obstrucciones algebraicas de la tabla y un problema que resuelva cada una.
2. El grupo fundamental de la botella de Klein admite dos presentaciones muy distintas. Escríbelas y da el cambio de variable que las relaciona.
3. ¿Por qué el abelianizado de un producto libre es el producto directo de los abelianizados?
4. Calcula el abelianizado de $\langle a, b \mid aba^{-1}b \rangle$ y determina la superficie compacta, conexa y sin borde cuyo grupo fundamental tiene esa presentación.
5. ¿Qué parte del teorema de Jordan se ha demostrado aquí? Relaciona el problema de las curvas simples con el teorema del índice de rotación de Hopf y distingue las hipótesis de regularidad.
6. Una superficie compacta, conexa, orientable y sin borde de género 2 tiene π_1 con cuatro generadores y una relación. Escríbela y calcula su abelianizado.

CAPÍTULO 8

Clasificación de superficies. Conclusión

ANTES DE LEER

1. Ya sabes que toda superficie compacta, conexa y sin borde es M_n o N_n. ¿Cómo probarías que M_2 y M_3 no son homeomorfas?
2. ¿Y que el toro y la botella de Klein no lo son, si las dos tienen característica 0?
3. En la parte de geometría, la característica de Euler apareció como $C + V - A$ de una triangulación. Aquí va a aparecer otra vez. ¿Esperas que sea el mismo número?

Las respuestas están en las secciones 8.1, 8.2 y 8.4.

LA IDEA: LO QUE FALTA PARA CERRAR EL CURSO

El capítulo 4 dio la lista de modelos: M_n y N_n. Faltaba el segundo objetivo de toda clasificación, el método de distinguibilidad, y faltaba también probar que toda superficie compacta, conexa y sin borde es homeomorfa a algún modelo.
Este capítulo hace las dos cosas. Primero calcula el grupo fundamental de M_n y de N_n con el teorema de Seifert-van Kampen y comprueba que sus abelianizados son todos distintos: eso distingue los modelos. Después demuestra, usando triangulaciones, que toda superficie compacta, conexa y sin borde es homeomorfa a alguno de ellos. Y por último reencuentra la característica de Euler-Poincaré, cerrando el círculo con la parte de geometría.

8.1 El grupo fundamental de una superficie de tipo I

LA PREGUNTA: QUÉ GRUPO DESCRIBE UN POLÍGONO PEGADO

Al pegar los lados de un polígono de $4n$ lados según la palabra de los conmutadores, todos los vértices se convierten en un mismo punto y cada par de lados en un lazo con base en él. Se tienen, pues, $2n$ lazos y una superficie. ¿Qué grupo forman esos lazos, y de dónde sale la única relación que los liga?

Sea $S = M_n$ una superficie de tipo I, con $n \geq 1$, representada por el modelo con código

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1},$$

es decir, por la identificación de los lados de un polígono regular de $4n$ lados.

Teorema.

$$\pi_1(S, x) = \langle \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n \mid [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_n, \beta_n] \rangle,$$

y su abelianizado es el grupo abeliano libre

$$\big(\pi_1(S, x)\big)_{ab} \cong \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{2n}.$$

Para $n = 0$, $M_0 = S^2$ y tanto su grupo fundamental como su abelianizado son triviales.

LA IDEA: LA SUPERFICIE ES UN DISCO COSIDO A UN RAMO DE CIRCUNFERENCIAS

La imagen que predice el enunciado es la del polígono visto al revés. En vez de mirar la superficie como un polígono cuyos lados se pegan, mírese como **dos piezas**: el borde del polígono, que al pegarse se convierte en un ramo de $2n$ circunferencias unidas por un punto, y el interior, que es un disco. La superficie es el ramo con el disco cosido encima.

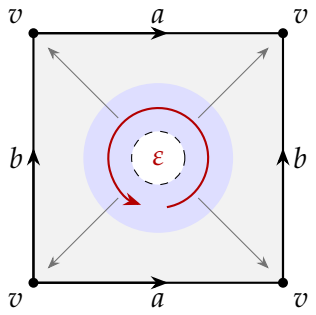
De ahí salen los dos ingredientes de la presentación, y salen ya en el orden correcto.

- **Los generadores los pone el ramo.** En un ramo de circunferencias no hay ninguna relación: cada pétalo se puede recorrer con independencia de los demás y en cualquier orden, así que su grupo es libre con $2n$ generadores. Esos son los α_i y los β_i.
- **La única relación la pone el disco.** Coser un disco al ramo significa añadir una tapa, que hace contráctil el lazo de su borde y, con él, todos los productos de conjugados de ese lazo y de su inverso. El borde del disco, leído sobre el ramo, es la palabra del polígono. Por eso la relación es esa palabra y no otra, y por eso hay *una* sola: se ha cosido *un* disco.

La intuición falsa. Uno espera que un objeto tan cerrado y tan simétrico como una superficie compacta tenga un grupo fundamental complicado, con muchas relaciones. Tiene una sola, y la razón es de contabilidad: el polígono tiene un único interior. Toda la complejidad de la superficie está en *qué* palabra es esa relación, no en cuántas hay.

El corazón, en una frase. Cada asa aporta dos generadores, y la tapa anula el producto de sus conmutadores. Al abelianizar, los conmutadores se evaporan, y lo que queda es el recuento limpio de generadores: $\mathbb{Z}^{2n}$.

Un caso a mano: el toro, $n = 1$. Antes de la prueba general conviene ver el teorema en la única superficie de la familia cuyo grupo ya se conoce. El toro es el cuadrado con código $aba^{-1}b^{-1}$. Sus cuatro vértices se pegan en un solo punto v, y sus lados, en dos lazos con base en v: el borde del cuadrado, una vez pegado, es un ramo de dos circunferencias, un meridiano a y un paralelo b que se cruzan en v. Lo que queda dentro es un disco.



sombreado azul: el disco A;
B: todo menos el disco blanco;
ε: la vuelta de la corona $A \cap B$;
flechas grises: ε se infla hasta el borde.

Inflar la vuelta ε hasta el borde es recorrer el perímetro en sentido antihorario desde el vértice de abajo a la izquierda: a hacia la derecha, a favor de su flecha; b hacia arriba, a favor; a hacia la izquierda, en contra de su flecha, que es a^{-1}; y b hacia abajo, en contra, que es b^{-1}. Un lado recorrido a favor de su flecha aporta su letra, y recorrido en contra, la inversa. El teorema dice entonces que

$$\pi_1(T) = \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \rangle.$$

La relación $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1$ se lee $\alpha\beta = \beta\alpha$: los dos generadores conmutan y no hay nada más. Esa es la presentación de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ del capítulo 7, y es el mismo grupo que dio la fórmula del producto en el capítulo 5, $\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. El teorema no inventa nada en el caso conocido. Aquí el abelianizado coincide con el propio grupo, porque este ya era abeliano. Con $n \geq 2$ ya no lo es, y se verá al cerrar la sección.

Paso 1: partir la superficie en el disco y el resto. Se procede como en los ejemplos del capítulo anterior. Se descompone $S = A \cup B$ donde A es un disco abierto centrado en el interior del polígono y B es S menos un disco cerrado concéntrico más pequeño. Entonces A es contráctil y $A \cap B$ es una corona.

Paso 2: reconocer el ramo de circunferencias, que da los generadores. B se retrae con deformación fuerte al grafo L formado por las aristas del polígono, un ramo de $2n$ circunferencias con vértice v. Se elige $x_0 \in A \cap B$ y un camino γ en B desde x_0 hasta v. El cambio de punto base transporta los generadores de $\pi_1(L, v)$ a las clases $\alpha_i' = [\gamma * a_i * \bar{\gamma}]$ y $\beta_i' = [\gamma * b_i * \bar{\gamma}]$ de $\pi_1(B, x_0)$.
Y $A \cap B$ se retrae con deformación fuerte a una circunferencia; sea ε la clase de su vuelta canónica.

Paso 3: leer el borde del agujero sobre el ramo *(el núcleo de la prueba)*. Aquí está la única cuenta con contenido geométrico de toda la demostración, y es la que produce la relación. Como $i_{1*}(\varepsilon) = 1$ por ser A contráctil, solo hay que calcular $i_{2*}(\varepsilon)$, es decir, *qué lazo del ramo es el borde del agujero*. Y la respuesta es la palabra del polígono, porque inflar el agujero hasta el borde del polígono es recorrer sus lados en orden. Empujando el lazo que rodea el agujero hasta el borde del polígono, se recorre la palabra completa,

de modo que

$$i_{2*}(\varepsilon) = [\alpha'_1, \beta'_1] \cdots [\alpha'_n, \beta'_n].$$

El teorema de Seifert-van Kampen da entonces la presentación del enunciado.

Paso 4: abelianizar, y ver desaparecer la relación. Al abelianizar, la relación se convierte en un producto de conmutadores, que en un grupo abeliano son todos triviales: **la relación desaparece**. Queda

$$\big(\pi_1(S, x)\big)_{ab} = \langle \alpha_i, \beta_i \mid [\alpha_i, \beta_j], [\alpha_i, \alpha_j], [\beta_i, \beta_j] \rangle \cong \mathbb{Z}^{2n}.$$

Lo que hay que llevarse. La prueba entera cabe en cuatro líneas. La superficie es un disco A pegado a lo demás, B, por una corona. B se retrae al ramo de las $2n$ letras, que da un grupo libre. El disco mata un solo lazo, el borde del agujero. Inflado hasta el perímetro, ese lazo se lee letra a letra: es la palabra del polígono. Por eso los generadores son las letras y la relación es la palabra. Todo lo demás es trámite de punto base, que solo cambia cada generador por un conjugado.

LA IDEA: POR QUÉ LA RELACIÓN SE EVAPORA

Este es el punto clave de toda la clasificación y merece subrayarse.
La única relación de $\pi_1(M_n)$ es un producto de conmutadores. Al abelianizar, todo conmutador se vuelve trivial, luego la relación se vuelve la palabra vacía y no impone nada. El resultado es el grupo abeliano libre de rango $2n$, y **el rango cuenta los generadores**.
Como $\mathbb{Z}^{2n} \cong \mathbb{Z}^{2m}$ solo si $n = m$, los modelos de tipo I quedan distinguidos entre sí. Eso es lo que faltaba.

Qué se ha ganado. La primera pregunta del principio del capítulo tiene respuesta: M_2 y M_3 no son homeomorfas, porque sus grupos abelianizados son $\mathbb{Z}^4$ y $\mathbb{Z}^6$, y estos dos grupos no son isomorfos. Esto último merece una línea, porque «tienen distinto número de factores» no es todavía un argumento: un isomorfismo podría mezclar los factores. El argumento es contar. En un grupo abeliano G, escrito en notación aditiva, los dobles $2G = \{2g : g \in G\}$ forman un subgrupo, y un isomorfismo $G \cong H$ lleva $2G$ a $2H$ y da un isomorfismo $G/2G \cong H/2H$. Para $G = \mathbb{Z}^m$, el cociente $\mathbb{Z}^m/2\mathbb{Z}^m$ es el conjunto de vectores de ceros y unos, que tiene 2^m elementos. Así $\mathbb{Z}^4/2\mathbb{Z}^4$ tiene 16 elementos y $\mathbb{Z}^6/2\mathbb{Z}^6$ tiene 64: no pueden ser isomorfos.

Queda también a la vista lo que el abelianizado pierde. Para $n \geq 2$ el grupo $\pi_1(M_n)$ no es abeliano. Con $n = 2$ basta el criterio de homomorfismos del capítulo 7: la asignación $\alpha_1 \mapsto x$, $\beta_1 \mapsto 1$, $\alpha_2 \mapsto y$, $\beta_2 \mapsto 1$ en el grupo libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle x, y \mid \rangle$ respeta la relación, porque la lleva a $[x, 1][y, 1] = 1$. Define, pues, un homomorfismo, y es sobreyectivo, porque x e y están en la imagen. Si $\pi_1(M_2)$ fuera abeliano, su imagen también lo sería, y $xy \neq yx$ en el grupo libre, porque son dos palabras reducidas distintas. Al abelianizar se tira, por tanto, información de verdad. Pero lo que queda basta para distinguir los modelos. La sección siguiente hace lo mismo con la otra familia.

8.2 El grupo fundamental de una superficie de tipo II

LA PREGUNTA: COMPARAR DOS GRUPOS DADOS POR PRESENTACIONES

Max Dehn se preguntó en 1911 si, dadas dos descripciones de un grupo por generadores y relaciones, hay un procedimiento que decida si describen el mismo grupo. En los años cincuenta Novikov, Adian y Rabin demostraron que no lo hay en general, ni siquiera para decidir si una palabra representa el elemento neutro. Para las superficies no orientables el modelo da la presentación $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \mid \alpha_1^2 \cdots \alpha_n^2 \rangle$, que no se parece en nada a la del tipo I, y compararlas directamente resulta menos cómodo que comparar un invariante abeliano. ¿Qué se le puede calcular a un grupo dado por generadores y relaciones que sí se pueda comparar siempre?

Sea S de tipo II, con código $a_1a_1a_2a_2 \cdots a_na_n$ sobre un polígono de $2n$ lados.

Teorema.

$$\pi_1(S, x_0) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \mid \alpha_1^2 \cdots \alpha_n^2 \rangle,$$

y su abelianizado es

$$\big(\pi_1(S,x)\big)_{ab} \cong \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n-1} \times \mathbb{Z}_2.$$

LA IDEA: LA MISMA CONSTRUCCIÓN, Y UNA RELACIÓN QUE AHORA SÍ PESA

La construcción es exactamente la del caso orientable — un ramo de circunferencias con un disco cosido — y solo cambia la palabra que hay escrita en el borde del disco. Pero ese cambio lo cambia todo, y conviene ver por qué antes de hacer la cuenta.
En el tipo I la relación era un producto de conmutadores. Un conmutador $[a, b]$ es el neutro exactamente cuando a y b conmutan. En un grupo abeliano eso ya se cumple, así que la relación no dice nada nuevo y se evapora. En el tipo II la relación es un producto de *cuadrados*, y un cuadrado no se evapora al abelianizar: sigue diciendo algo. Ese algo es $\beta_n^2 = 1$, y es la huella de la banda de Möbius.

La intuición falsa. Uno tiende a leer $\mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}_2$ como «casi lo mismo que $\mathbb{Z}^n$, con un defecto pequeño». Es al revés: ese $\mathbb{Z}_2$ es lo único que impide que $\mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}_2$ sea nunca isomorfo a ningún $\mathbb{Z}^{2m}$, porque un grupo abeliano libre no tiene elementos de orden finito distintos del neutro y aquí hay uno. El «defecto pequeño» es exactamente lo que separa para siempre las dos familias de superficies.

El corazón, en una frase. El cambio de generadores concentra los n cuadrados en uno solo, y ese único cuadrado sobrevive a la abelianización.

Un caso a mano: el plano proyectivo y la botella de Klein. Con $n = 1$ el código es aa, un polígono de dos lados, y el teorema da $\langle \alpha \mid \alpha^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$. Es el grupo del plano proyectivo que ya se calculó en el capítulo 7. Su abelianizado es el mismo, y la fórmula del enunciado lo confirma: $\mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2$.

Con $n = 2$ el código es $aabb$, la botella de Klein, y sale $\langle \alpha, \beta \mid \alpha^2\beta^2 \rangle$. Para abelianizar conviene pasar a notación aditiva, en la que la relación se escribe $2\alpha + 2\beta = 0$. Se toma $\gamma = \alpha + \beta$ en lugar de β. Los generadores α y γ sirven igual, porque se recupera $\beta = \gamma - \alpha$, y

en ellos la relación es $2\gamma = 0$. El abelianizado es, pues, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$: α genera la parte libre y γ la de orden dos. Esto es, en pequeño, el cambio de generadores de la demostración.

La botella de Klein también se describe con el código $aba^{-1}b$. Abelianizando esa otra palabra se obtiene $a + b - a + b = 2b$, y la relación es $2b = 0$: otra vez $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$, ahora sin cambiar de generadores. Dos palabras distintas de la misma superficie dan abelianizados isomorfos, como tiene que ser.

Paso 1: repetir la descomposición y leer la nueva palabra. La descomposición es la misma: A disco abierto y $B = S$ menos un disco cerrado, que se retrae al grafo de n circunferencias unidas por un punto, con $\pi_1(B) = \langle \alpha'_1, \ldots, \alpha'_n \mid \rangle$. La intersección se retrae a una circunferencia con generador ε, y ahora

$$i_{1*}(\varepsilon) = 1, \qquad i_{2*}(\varepsilon) = \alpha'_1\alpha'_1 \cdots \alpha'_n\alpha'_n = {\alpha'_1}^2 \cdots {\alpha'_n}^2,$$

de donde sale la presentación.

Paso 2: abelianizar, y ver que ahora la relación aguanta *(el núcleo de la prueba)*. Ahora la relación **no** desaparece al abelianizar:

$$\big(\pi_1(S,x)\big)_{ab} = \langle \alpha_i \mid \alpha_1^2 \cdots \alpha_n^2,\ [\alpha_i, \alpha_j] \rangle.$$

El cambio de generadores que viene ahora es el movimiento decisivo, y su idea es simple: en un grupo abeliano un producto de cuadrados es el cuadrado del producto. La *única* relación contiene n cuadrados; al tomar como generador nuevo ese producto, queda escrita como un solo cuadrado.
Se hace el cambio de generadores $\beta_i = \alpha_i$ para $1 \le i \le n-1$ y $\beta_n = \alpha_1 \cdots \alpha_n$. Es un cambio válido porque permite recuperar $\alpha_n = (\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1})^{-1}\beta_n$. En el grupo abeliano, $\alpha_1^2 \cdots \alpha_n^2 = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)^2 = \beta_n^2$, luego

$$\big(\pi_1(S,x)\big)_{ab} = \langle \beta_i \mid [\beta_i, \beta_j],\ \beta_n^2 \rangle \cong \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}_2.$$

Lo que hay que llevarse. La descomposición y la lectura del borde son las del tipo I, y dan la palabra $\alpha_1^2 \cdots \alpha_n^2$ como única relación. Al abelianizar, un producto de cuadrados es el cuadrado del producto. Tomando ese producto como generador nuevo, la relación dice solo que *un* generador tiene orden dos. El cambio es legítimo porque su matriz es entera con determinante 1: para $n = 3$, sus filas son $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(1,1,1)$. Por eso su inversa también es entera, y los generadores viejos se recuperan de los nuevos.

Dónde se falla. En creer que el elemento de orden dos es una de las letras. En la botella de Klein $aabb$, con la base α, γ del caso a mano, se tiene $\alpha = (1,0)$ y $\beta = \gamma - \alpha = (-1,1)$. Ninguno de los dos tiene orden dos: sus dobles son $(2,0)$ y $(-2,0)$, que no son cero. El de orden dos es la suma $\alpha + \beta$. En general, en N_n la torsión la lleva el producto $\alpha_1 \cdots \alpha_n$, no α_n.

LA IDEA: QUÉ SIGNIFICA EL FACTOR $\mathbb{Z}_2$

En el abelianizado, la clase $\beta_n = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ tiene orden dos: su doble es cero, pero ella no lo es. Esta afirmación pertenece al **abelianizado**; no dice que recorrer dos veces ese lazo lo haga contráctil en la superficie.

Tampoco debe confundirse con el cambio de orientación al recorrer el centro de una banda de Möbius. El grupo fundamental de la banda es $\mathbb{Z}$: su lazo central recorrido dos veces sigue siendo no trivial, aunque la orientación vuelva a la inicial.
Lo que sí permite concluir la cuenta es que **ningún modelo de tipo I es homeomorfo a uno de tipo II**: $\mathbb{Z}^{2n}$ no tiene torsión no trivial y $\mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}_2$ sí. Para las superficies compactas, conexas y sin borde, ese factor $\mathbb{Z}_2$ distingue exactamente la familia no orientable.

Observación (La tabla que resuelve todos los ejercicios de clasificación)**.** Para una superficie compacta, conexa y sin borde, los dos teoremas anteriores permiten clasificarla: se reduce a leer su abelianizado:

Abelianizado	Superficie	χ
$\mathbb{Z}^{2n}$	M_n, suma conexa de n toros	$2-2n$
$\mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}_2$	N_n, suma conexa de n planos proyectivos	$2-n$
$\{1\}$	esfera	2

Si aparece un factor $\mathbb{Z}_2$, la superficie es no orientable, y el número de factores $\mathbb{Z}$ más uno da el n. Si no aparece, es orientable y el número de factores $\mathbb{Z}$ es $2n$.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: COMPARAR LOS GRUPOS FUNDAMENTALES SIN ABELIANIZAR

La alternativa. Distinguir las superficies comparando directamente sus grupos fundamentales, que son el invariante más fino de los dos y que se acaban de calcular.
Su ventaja. Conserva más información que el abelianizado. Si los grupos fundamentales de dos superficies son distintos, las superficies no son homeomorfas, y no hace falta nada más.
Su dificultad. Comparar presentaciones directamente puede ser laborioso. La ausencia de un algoritmo para grupos finitamente presentados *en general* no impide compararlos en familias concretas, como los grupos de superficies. Aquí conviene usar un invariante más sencillo que ya los distingue. El abelianizado, en cambio, es un grupo abeliano finitamente generado, y esos están clasificados por completo: dos de ellos son isomorfos si y solo si coinciden su rango y sus factores de torsión, cosa que se lee de la presentación con álgebra lineal sobre $\mathbb{Z}$. Se renuncia a información a cambio de poder decidir siempre; y aquí lo que queda basta, porque los abelianizados de los distintos modelos ya son todos distintos entre sí.

Qué se ha ganado. La segunda pregunta del principio del capítulo tiene respuesta. El toro y la botella de Klein tienen los dos característica 0, pero sus abelianizados son $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$, y el segundo tiene un elemento de orden dos que el primero no tiene: no son homeomorfos.

Con las dos secciones juntas, los modelos quedan distinguidos todos entre sí. La torsión separa las dos familias. Dentro de cada familia separa la misma cuenta de antes: el cociente $G/2G$ tiene 2^{2n} elementos para $\mathbb{Z}^{2n}$, y 2^n para $\mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}_2$, porque ahí cada uno de los n factores aporta dos clases. Queda la otra mitad de la clasificación: que toda superficie compacta, conexa y sin borde sea uno de estos modelos. De eso se ocupa la sección siguiente.

8.3 Fin del teorema de clasificación. Triangulación

LA PREGUNTA: DE LO LOCAL AL POLÍGONO

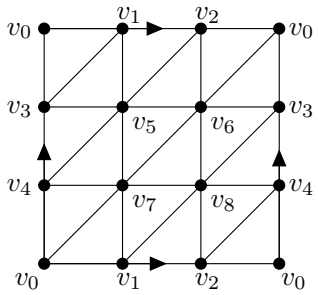
La primera parte del teorema de clasificación afirmaba que toda superficie compacta, conexa y sin borde es homeomorfa a uno de los modelos, y se dio por buena para poder seguir. Falta demostrarla, y lo único que se sabe de una superficie abstracta es que cada uno de sus puntos tiene un entorno homeomorfo a un disco. ¿Cómo se pasa de esa información puramente local a un polígono concreto con su palabra?

Los grupos abelianizados de modelos diferentes no son isomorfos; por tanto representan modelos de superficies no homeomorfas. Para terminar la clasificación queda probar que toda superficie conexa, compacta y sin borde es homeomorfa a algún modelo. Para eso se usa la idea de triangulación.

Definición. Una **triangulación** de una superficie S es una familia localmente finita K de vértices, aristas y triángulos en algún $\mathbb{R}^n$ tal que:
1. si $\sigma \in K$, todas sus caras están en K;
2. si $\sigma, \tau \in K$, entonces $\sigma \cap \tau$ es una cara común, posiblemente vacía;
3. $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ es homeomorfo a S.

Localmente finita significa que cada punto de $|K|$ tiene un entorno que solo corta finitos símplices. Si S es compacta, un subrecubrimiento finito de esos entornos muestra que K es finita.

Ejemplo. El borde de un tetraedro triangula la esfera. Y el toro admite una triangulación con nueve vértices, veintisiete aristas y dieciocho triángulos, que se obtiene subdividiendo el cuadrado modelo en una cuadrícula de 3×3 y partiendo cada cuadradito por una diagonal.



Las etiquetas iguales se identifican: se cuentan nueve vértices *después* del pegado.

Por qué nueve vértices y no menos. Lo más económico sería partir el cuadrado entero por una diagonal, en dos triángulos. Pero tras el pegado los cuatro vértices del cuadrado son un solo punto, y cada triángulo tendría sus tres vértices iguales: eso no es un triángulo de la definición. Con una cuadrícula de 2×2, partiendo cada cuadradito por la diagonal que sube hacia la derecha, los vértices ya son cuatro puntos distintos. Pero el triángulo inferior del cuadradito de abajo a la izquierda y el superior del cuadradito de arriba a la derecha tienen, tras el pegado, los mismos tres vértices. Dos triángulos distintos con los mismos vértices se cortan en algo que no es una cara común, y la condición 2 falla. Con 3×3 ya no pasa: dos vértices están unidos a lo sumo por una arista, y tres, a lo sumo por un triángulo. Aun así, el cuadrado partido en dos triángulos sirve para *contar*: da $1 - 3 + 2 = 0$, la característica buena.

Por qué se puede contar sobre descomposiciones que no son triangulaciones se verá en la última sección.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: DAR POR HECHO QUE TODA SUPERFICIE SE TRIANGULA

La alternativa. Admitir sin más que toda superficie compacta admite una triangulación, que es lo que dice la intuición y lo que nadie pone en duda al dibujar.
Su ventaja. Ahorra la parte más técnica y menos vistosa de la demostración, y permite ir directamente a lo que interesa: cortar la triangulación y normalizar la palabra.
Qué la hunde. Que es un teorema y no un hecho evidente. Lo único que se sabe de una superficie es que cada punto tiene un entorno homeomorfo a un disco; de ahí a fabricar una descomposición global en triángulos que encajen unos con otros hay un trabajo real, y la prueba es delicada. Que no se trata de una obviedad lo demuestra el hecho de que el enunciado análogo deja de ser cierto en dimensiones superiores: existen variedades topológicas que no admiten ninguna triangulación. Que en dimensión dos sí valga es una propiedad de la dimensión dos. Aquí el resultado se usa sin demostrarlo, pero se señala como lo que es: un teorema prestado, no un paso trivial.

Proposición. Toda triangulación de una superficie sin borde cumple:
1. toda arista de K está exactamente en dos triángulos de K;
2. dado un vértice $v \in K$, la unión de todos los triángulos que contienen a v es homeomorfa a un disco cerrado.

Observación. Las dos propiedades son la traducción combinatoria de que cada punto tenga un entorno homeomorfo a un disco, y son las que se comprueban cuando se pide «probar que el cociente es una superficie».

Por qué es verdad, en idea. Las dos propiedades salen de mirar un punto y el borde de un entorno pequeño suyo, que se llama su *enlace*. En un punto de superficie sin borde, el enlace es una circunferencia.

- *Un punto del interior de una arista.* Cada triángulo que contiene la arista aporta un semidisco, y los semidiscos se pegan por el diámetro. Si la arista está en un solo triángulo, el entorno es un semidisco y el enlace es un arco con dos extremos sueltos: el punto sería de borde. Si está en dos, los dos semidiscos forman un disco. Si está en tres, sale un libro de tres hojas, cuyo enlace son tres arcos entre los mismos dos puntos, y no una circunferencia.
- *Un vértice.* El enlace de v está formado por los lados opuestos a v de los triángulos que lo contienen. En el tetraedro, cada vértice está en tres triángulos, cuyos lados opuestos forman un triángulo cerrado, una circunferencia, y la unión de los tres es un disco. Si se pegan dos tetraedros por un vértice, el enlace de ese vértice son dos circunferencias, y su entorno, dos discos unidos por el centro. Es el mismo fenómeno del ejercicio de los cocientes por el borde, al final del capítulo.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: POR QUÉ ESTE TEOREMA SE ADMITE

Este enunciado es la bisagra de todo el capítulo: dice que cualquier superficie, por rara que sea, puede cortarse en triángulos pegados por sus lados, y es lo que permite pasar de lo continuo (una superficie) a lo combinatorio (una lista finita de triángulos y de reglas de pegado), que es donde se puede razonar y contar.
Es uno de los resultados que aquí se admiten sin demostrar. Conviene saber por qué: lo intuitivo es que basta cubrir la superficie con parches, triangular cada parche y

hacer que los triángulos casen en los solapes; lo difícil, y lo que se lleva las páginas, es exactamente ese «hacer que casen», porque en los solapes los triángulos de dos parches pueden cortarse de maneras patológicas, y arreglarlo obliga a un control fino de la topología del plano. De ahí que las demostraciones conocidas sean o muy técnicas (Radó, Moise) o apoyadas en maquinaria pesada (geodésicas, o el teorema de Kuratowski de la teoría de grafos planos).
Para lo que sigue solo hace falta quedarse con la consecuencia: *a partir de aquí, una superficie compacta es una lista finita de triángulos*. El siguiente paso consiste en cortar y pegar esa lista sin cambiar la superficie.

Teorema. Toda superficie es triangulable.

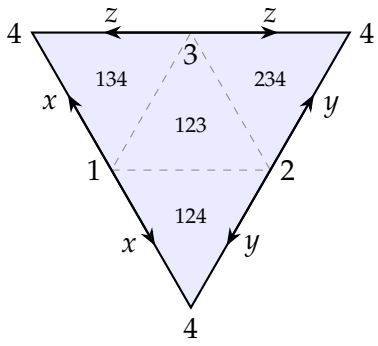
La demostración no es sencilla y existen varios métodos. Una demostración puramente topológica puede encontrarse en los trabajos de Moise y de Doyle y Moran, que usan técnicas más refinadas. Otra, de tipo geométrico y basada en la existencia de geodésicas, puede consultarse en el libro de Bloch. Alternativamente, en el de Mohar y Thomassen se encuentra una basada en la caracterización de Kuratowski de los grafos planos.

La idea, en versión intuitiva: aplanar, cortar y pegar hasta la forma normal

Este es el teorema grande de la asignatura, y su demostración es artesanía pura: no hay ningún invariante mágico, hay unas tijeras y celo.
Primero se aplana. Por triangulabilidad y compacidad se dispone de una lista finita de triángulos. Se coge uno, se pone sobre la mesa, se le pega otro que comparta lado, luego otro, y así hasta gastarlos todos. Lo que queda es un polígono plano en el que cada lado del borde está marcado con una letra y hay que identificarlo con exactamente otro lado. Toda la superficie se ha convertido en una *palabra*: la lista de letras del borde, con sus exponentes según el sentido.
Después se normaliza la palabra. Y aquí entran las tijeras: cada movimiento (cortar el polígono por una diagonal y volver a pegarlo por otro lado) cambia la palabra pero no la superficie. Con esos movimientos se van consiguiendo, una por una, cosas concretas: que todos los vértices del polígono se identifiquen en uno solo, que dos apariciones de una misma letra con el mismo sentido queden juntas (y entonces forman un gorro cruzado), y que dos apariciones con sentidos opuestos se emparejen entrelazadas con otras dos (y entonces forman un asa). Al final no queda nada más: la palabra es aa^{-1}, o n asas, o k gorros cruzados.
Por qué no salen mezclas. Porque un asa junto a un gorro cruzado se puede transformar en tres gorros cruzados: en cuanto hay una sola pieza no orientable, las asas se convierten en gorros. Por eso la lista final tiene solo dos familias y no tres.
Lo que hay que llevarse: la clasificación no se demuestra reconociendo la superficie, se demuestra *cortando y reordenando sus piezas* hasta llegar a una forma normal. Los invariantes (orientabilidad y característica) vienen después, y sirven para saber en cuál ha caído sin tener que cortar.

Un caso a mano: aplanar el tetraedro. El borde de un tetraedro con vértices 1, 2, 3 y 4 es una esfera triangulada por cuatro triángulos: 123, 124, 134 y 234. Se pone 123 sobre la mesa y

se le pegan los otros tres, cada uno por un solo lado: 124 por el lado 12, 134 por el 13 y 234 por el 23. Esos tres lados forman un árbol del grafo dual, que une el triángulo 123 con cada uno de los otros. Sale la plantilla de un tetraedro recortable: un triángulo con tres solapas.



El vértice 4 aparece tres veces, en la punta de cada solapa. Los lados discontinuos ya están pegados. Queda el borde exterior, que parece un triángulo grande pero tiene seis lados, porque 1, 2 y 3 son vértices suyos. Sus lados se emparejan de dos en dos, porque son las tres aristas que salen de 4: la 14 está en las solapas 124 y 134, la 24 en las 124 y 234, y la 34 en las 134 y 234. Se llaman x, y y z las aristas que van de 1, de 2 y de 3 hacia 4. Recorriendo ese borde en sentido antihorario desde 1, se pasa por 4, 2, 4, 3, 4 y se vuelve a 1, y la palabra es

$$x\,y^{-1}\,y\,z^{-1}\,z\,x^{-1}.$$

Las letras $y^{-1}y$ son consecutivas, y quitarlas es la reducción de la prueba: se cierra la solapa 234 sobre la 124 como una cremallera que empieza en el vértice 2. Lo mismo con $z^{-1}z$, desde el vértice 3. Queda xx^{-1}: la esfera, como debía. La cuenta de la última sección también cuadra ya: la palabra tiene $k = 3$ parejas y $v = 4$ clases de vértices, que son $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ y las tres copias de 4, y $1 - k + v = 1 - 3 + 4 = 2$, lo mismo que $4 - 6 + 4$ en el tetraedro.

Teorema. Toda superficie conexa, compacta y sin borde es homeomorfa a un modelo.

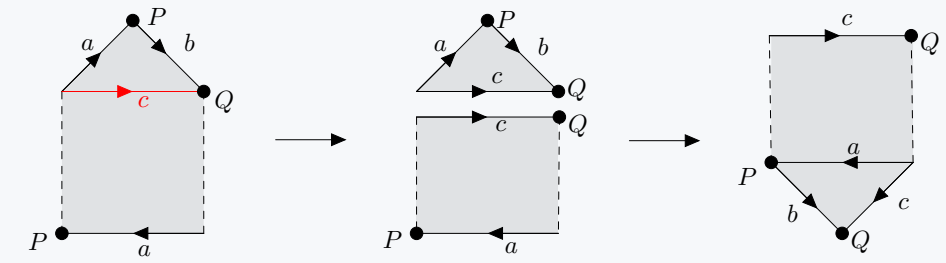
Sea K una triangulación de S, con triángulos $t_1, \ldots, t_n$, finitos por compacidad y finitud local. El grafo dual, con un vértice por triángulo y una arista por cada lado compartido, es conexo: se pueden unir puntos interiores de dos triángulos por un camino que evite los vértices y cruce lados. Un *árbol generador* de ese grafo permite ordenarlos de modo que cada t_i, para $i > 1$, comparta un lado con un triángulo anterior.

Paso 1: aplanar, hasta convertir la superficie en una palabra. Se empieza con una copia de t_1 en $\mathbb{R}^2$ y se le pega una copia de t_2 por una arista común; después t_3, que tiene una arista común con t_1 o con t_2, y así sucesivamente pegando cada vez por una sola arista. Se pega solo por los lados del árbol elegido: cada nuevo triángulo se une por un *único* lado del borde, por lo que la pieza sigue siendo un disco. Este disco admite un modelo poligonal plano; no hace falta mantener las formas ni las longitudes de los triángulos originales. En su perímetro quedan por identificar las aristas restantes.

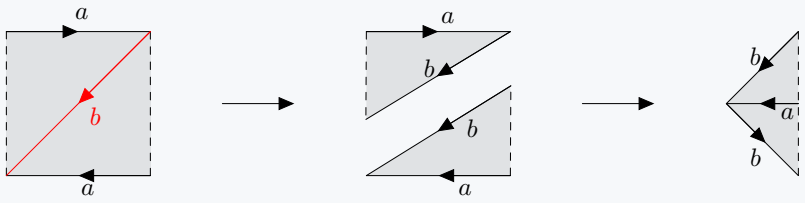
Paso 2: normalizar la palabra a golpe de tijera *(el núcleo de la prueba)*. La idea es **cortar y pegar sin cambiar el espacio cociente**. Los dibujos siguientes muestran esos movimientos: las líneas rojas son cortes y las letras indican los lados que vuelven a

pegarse. Conviene seguir las flechas, porque una lista de nombres de operaciones no muestra por sí sola por qué conservan la superficie.
Se orienta la región eligiendo un sentido de recorrido del perímetro; como las aristas deben quedar emparejadas, cada arista aparece dos veces, con el mismo sentido o con el opuesto. Se forma así un código de letras y, posiblemente, sus inversas. El objetivo es normalizarlo hasta uno de los dos tipos, de forma que cada paso represente un homeomorfismo. Se consigue aplicando una o varias veces las operaciones siguientes.

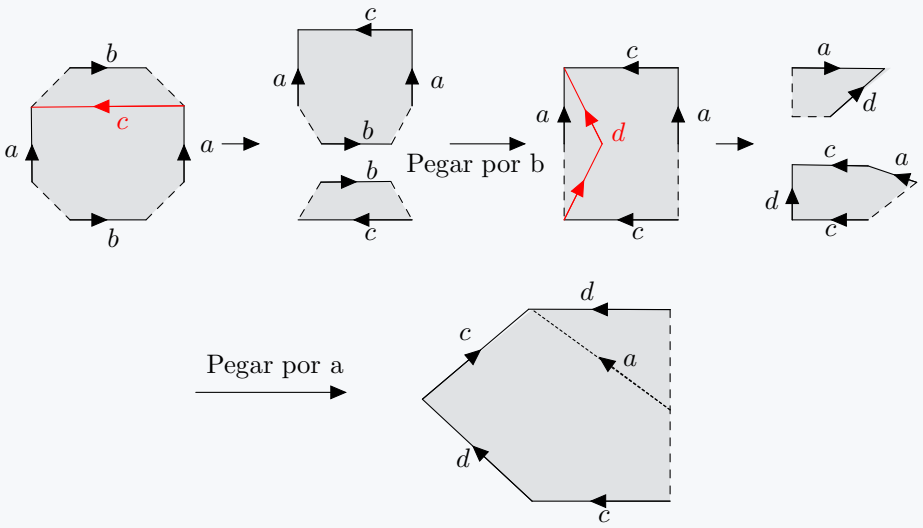
1. **Suprimir subdivisiones innecesarias de un mismo lado.** Si un bloque $u = abc$ y su copia inversa corresponden al mismo arco subdividido, se abrevia u por x y $u^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1}$ por x^{-1}. Al invertir un bloque hay que invertir *también su orden*.
2. **Reducción**: eliminar apariciones consecutivas de una arista con los dos sentidos distintos, es decir, quitar aa^{-1}, siempre que quede otro borde que identificar. Si toda la palabra se reduce a aa^{-1}, se reconoce la esfera y se termina.
3. **Quedarse con un solo vértice**: mediante cortes y pegados se reduce el número de clases de vértices hasta que solo queda una. El corte sustituye una aparición de P por una de Q; se repite hasta eliminar la clase P, y después las otras clases, si las hay.



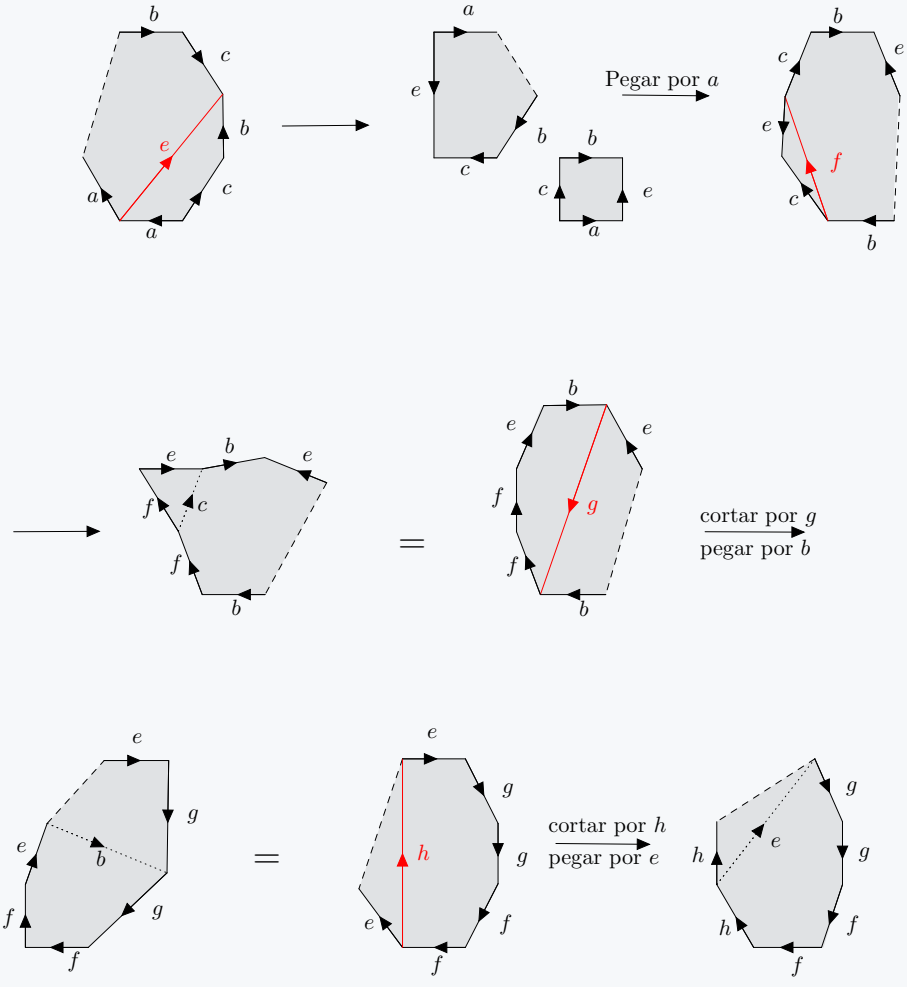
4. **Dejar consecutivos los lados con sentidos de identificación iguales**, llevándolos a la forma aa. Se corta entre ambas apariciones y se pega por el lado repetido; los dos nuevos lados del corte quedan consecutivos y con el mismo sentido.



5. **Poner juntos los grupos de cuatro lados** con símbolos opuestos dos a dos, llevándolos a la forma $aba^{-1}b^{-1}$. Cuando quedan pares opuestos, se eligen dos entrelazados y se hacen los cortes del dibujo. El bloque resultante es un asa; se separa del resto y se repite con los pares que quedan.



6. **Convertir las mezclas**: si aparecen pares del mismo símbolo *aa* junto a grupos de la forma $bcb^{-1}c^{-1}$, se pasa todo a pares del mismo símbolo, es decir, a una superficie de tipo II. Cada aplicación convierte un asa y un gorro en tres gorros, de modo que disminuye el número de asas que quedan por convertir.



Dibujos de los pasos 3–6: apuntes originales de Topología de Superficies, pp. 72–74.
Salvo el caso de la esfera ya separado, si al terminar todas las parejas son de símbolos iguales, se ha llegado al tipo II; si todas son de símbolos opuestos agrupadas de cuatro en cuatro, al tipo I. Y el paso 6 garantiza que no queda ninguna mezcla.

La operación 4, hecha con letras. Los dibujos del paso 2 tienen una versión escrita que se puede seguir sin tijeras. Sea la palabra $aAaB$, con dos apariciones de a en el mismo sentido y dos bloques de letras, A y B, entre ellas. Se corta por la diagonal c que va del final de la primera a al final de la segunda. Quedan dos piezas, que leídas en sentido antihorario tienen palabras Aac^{-1} y Bac. Para pegar las dos copias de a hace falta que una pieza la recorra en un sentido y la otra en el contrario, así que se le da la vuelta a la primera pieza, que es un homeomorfismo y solo invierte su palabra: pasa a ser $ca^{-1}A^{-1}$. Pegando por a se obtiene $cBA^{-1}c$, y empezando a leer por la última letra,

$$aAaB \;\sim\; ccBA^{-1}.$$

Las dos a separadas se han convertido en dos c seguidas, que es lo que busca la operación 4. Con la botella de Klein en la forma $abab^{-1}$, donde $A = b$ y $B = b^{-1}$, sale $ccb^{-1}b^{-1}$; llamando $d = b^{-1}$, es $ccdd$, la forma normal de N_2.

Lo que hay que llevarse. Se triangula la superficie y se aplana a lo largo de un árbol de triángulos: queda un polígono con una palabra. Después se normaliza la palabra con cortes y pegados, cada uno un homeomorfismo: quitar los aa^{-1}, dejar un solo vértice, juntar los pares del mismo sentido en aa, agrupar los pares opuestos en asas y, si queda algún gorro cruzado, convertir las asas en gorros. El orden importa, porque la operación 5 usa que la 3 ya dejó un solo vértice. La caja siguiente explica por qué.

LA IDEA: POR QUÉ LA OPERACIÓN 5 NECESITA UN ARGUMENTO

Al llegar a la operación 5, con todas las parejas de símbolos iguales ya consecutivas, hay que saber que si aparece una pareja de símbolos opuestos $c \cdots c^{-1}$, entonces existe *otra* pareja de símbolos opuestos separada por las apariciones de c, es decir, entrelazada con ella.
Si no fuera así, las letras de cada una de las dos partes A y B en que c divide el perímetro se emparejarían solo entre sí. Como la operación 3 ya dejó un solo vértice P, las esquinas del polígono que están en A se pegarían alrededor de P por un lado y las que están en B por otro, y entonces P no sería un punto de superficie: su entorno estaría formado por dos discos pegados por su centro, que no es homeomorfo a un disco.
Ese argumento es exactamente el que se usa para comprobar que un cociente *sí* es una superficie, mirando los vértices. Conviene tenerlo identificado.

Qué se ha ganado. La pregunta de la sección tiene respuesta: de lo local se pasa al polígono en dos saltos. El primero es la triangulación, un teorema prestado que convierte la superficie en una lista finita de triángulos. El segundo es aplanar a lo largo de un árbol, que convierte esa lista en un polígono con su palabra. Desde ahí todo es combinatoria de palabras. Con esto el teorema de clasificación queda completo: toda superficie es un modelo, por esta sección, y

los modelos son distintos entre sí, por las dos anteriores. Queda una pregunta abierta, que es la de la sección siguiente: si se cuenta $V - E + T$ con dos triangulaciones distintas de la misma superficie, ¿sale lo mismo?

8.4 Característica de Euler-Poincaré

LA PREGUNTA: EL NÚMERO QUE YA HABÍA APARECIDO

En la mitad de geometría de este libro, χ apareció contando vértices, aristas y caras de una triangulación, y resultó ser lo que hay al otro lado del teorema de Gauss-Bonnet. Aquí reaparece haciendo la misma cuenta sobre superficies que ni siquiera caben en $\mathbb{R}^3$. ¿Es el mismo número, y qué relación guarda con el grupo fundamental que se acaba de calcular?

Definición. Sea K una triangulación finita de una superficie compacta. Se denomina **característica de Euler-Poincaré** al número entero

$$\chi(K) = V - E + T,$$

donde V es el número de vértices, E el de aristas y T el de triángulos.

Observación (Es el mismo número de la parte de geometría)**.** En la parte de geometría, la característica se definió como $C + V - A$: caras más vértices menos aristas. Aquí se escribe $V - E + T$: vértices menos aristas más triángulos. Es la misma suma con los sumandos en otro orden, y el mismo número.

Cambia el símbolo — X allí, χ aquí — y cambia el contexto, pero no el objeto. Este libro usa χ en las dos partes.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: DEFINIR χ SIN TRIANGULAR

La alternativa. Definir la característica como la suma alternada de los rangos de los grupos de homología, en vez de contando vértices, aristas y triángulos de una triangulación concreta.
Su ventaja. Una vez demostrada la invariancia de la homología, la invariancia de su suma alternada sale sin más, porque es una suma de números que no cambian. Esta definición también se aplica a espacios sin triangulación cuando sus grupos de homología tienen rango finito y solo hay un número finito de rangos no nulos.
Por qué aquí se cuenta. La homología no forma parte del temario. Para una triangulación finita, la fórmula de Euler–Poincaré identifica la suma alternada de esos rangos con $V - E + T$. El recuento basta para este curso. Gauss–Bonnet y Poincaré–Hopf aportan, además, teoremas que relacionan ese mismo invariante con la curvatura y con los índices de un campo; no son coincidencias numéricas.

El hecho sorprendente es que $\chi(K)$ es **independiente de la triangulación** y solo depende de la topología de la superficie.

Un caso a mano: la esfera, triangulada de dos maneras. El borde del tetraedro tiene 4 vértices, 6 aristas y 4 triángulos, y $\chi = 4 - 6 + 4 = 2$. El del octaedro tiene 6 vértices, 12 aristas y 8 triángulos, y $\chi = 6 - 12 + 8 = 2$. Son dos triangulaciones de la esfera bastante distintas, y dan lo mismo.

Hay una razón local para esperarlo. Si se añade un vértice en el interior de un triángulo y se une con sus tres vértices, aparecen un vértice, tres aristas y dos triángulos netos, porque el viejo se parte en tres: el saldo es $1-3+2=0$. Si se añade un vértice en medio de una arista y se une con los vértices opuestos de sus dos triángulos, aparecen un vértice, tres aristas (una por la arista partida y dos nuevas) y dos triángulos: otra vez $1-3+2=0$. Subdividir no cambia χ. Pero dos triangulaciones de la misma superficie no tienen por qué ser una subdivisión de la otra, así que esto no basta; la razón completa viene después de los dos teoremas.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: CADA ASA CUESTA DOS Y CADA GORRO CUESTA UNO

Estos dos teoremas son la contabilidad de la clasificación, y la manera de recordarlos no es memorizar $2-2n$ y $2-n$ sino entender de dónde sale cada resta.
Se parte de la esfera, que vale 2. Para añadir un asa se quitan dos discos abiertos y se cose un cilindro entre sus bordes. Cada disco quitado resta 1, mientras que el cilindro y las circunferencias por las que se pega tienen característica 0. El saldo es -2, y así $\chi(M_n)=2-2n$.
Para añadir un gorro cruzado se quita un solo disco y se pega una banda de Möbius por su borde. La banda se retrae a una circunferencia y tiene característica 0; el saldo es -1. Por eso $\chi(N_n)=2-n$. Estas cuentas usan la aditividad $\chi(A\cup B)=\chi(A)+\chi(B)-\chi(A\cap B)$ para descomposiciones finitas compatibles.
Esa aritmética es la que hace útil la característica: como no depende de la triangulación elegida, se puede calcular en el modelo más cómodo (el polígono con su palabra) y usarla después para reconocer cualquier superficie. Junto con la orientabilidad, decide quién es: dos superficies compactas, conexas y sin borde son homeomorfas si y solo si coinciden en las dos cosas. Y explica de paso la coincidencia $\chi(M_1)=\chi(N_2)=0$, que es la razón de que el toro y la botella de Klein solo se distingan por la orientabilidad.

Teorema. Si K es una triangulación de una superficie M_n de tipo I, entonces $\chi(K)=2-2n$. En particular, si $n=0$ se obtiene $\chi=2$: la característica de la esfera es 2.

Teorema. Si K es una triangulación de una superficie N_n de tipo II, entonces $\chi(K)=2-n$.

De dónde salen $2-2n$ y $2-n$, y por qué no depende de la triangulación. La prueba de la clasificación da las dos cosas a la vez, si se lleva la cuenta de vértices menos aristas más caras en cada paso. Las caras dejan de ser triángulos en cuanto se aplana, así que se cuenta con la extensión natural de la definición a caras poligonales, la que justifica la observación del final de esta sección. Ningún paso cambia la cuenta:

- *Aplanar.* Pegar un triángulo por un lado del árbol convierte ese lado en interior y funde dos caras en una: una arista menos y una cara menos. Los vértices siguen todos en el borde del polígono.
- *Cortar y volver a pegar.* El corte por una diagonal añade una arista y parte una cara en dos; el pegado por otro lado quita una arista y funde dos caras. El saldo es cero.
- *Reducir aa^{-1}.* Desaparecen la arista a y el vértice que había entre sus dos apariciones: un vértice menos y una arista menos.
- *Suprimir una subdivisión.* Cambiar un bloque de $j+1$ letras por una sola quita j vértices y j aristas.

Al final se llega a un polígono normal, con una sola cara. El de M_n tiene $4n$ lados que dan $2n$ aristas y un solo vértice: $1 - 2n + 1 = 2 - 2n$. El de N_n tiene $2n$ lados, n aristas y un vértice: $1 - n + 1 = 2 - n$. El de la esfera, aa^{-1}, tiene una arista y dos vértices: $2 - 1 + 1 = 2$. Así que $\chi(K)$ es el número del modelo al que lleva el proceso.

Ahora la independencia. Si K y K' triangulan la misma superficie S, cada una lleva a un modelo homeomorfo a S. Esos dos modelos son homeomorfos entre sí, y como los modelos distintos tienen abelianizados distintos, son el mismo. Luego $\chi(K) = \chi(K')$. Obsérvese de qué depende el argumento: sin el grupo fundamental, la cuenta daría el número del modelo al que se llega, pero no aseguraría que dos caminos distintos lleguen al mismo sitio.

Conexión con la Matemática Discreta: la fórmula de Euler es este mismo recuento

Esta conexión merece un encabezado propio porque es la más fácil de pasar por alto y la que más ahorra: el $V - A + C$ que aquí clasifica superficies es *literalmente* la fórmula de Euler de los grafos planos, y las dos asignaturas la usan el mismo cuatrimestre.

Lo que dice allí. Un grafo se llama *plano* cuando está dibujado en el plano sin que dos aristas se corten, y sus *caras* son las regiones en que ese dibujo divide al plano, contando la exterior. Con esa notación:

Fórmula de Euler. Si G es un grafo finito, plano y conexo con V vértices, A aristas y C caras, entonces $V - A + C = 2$. Si tiene k componentes conexas, $V - A + C = k + 1$.

Por qué es el mismo recuento. Al añadir el punto del infinito, un grafo finito, plano y conexo queda dibujado sobre la esfera. Sus caras dan una descomposición celular de la esfera, aunque no sean triángulos y sus bordes puedan recorrer una arista más de una vez. Por eso el recuento es $V - A + C = \chi(S^2) = 2$. No hay que confundir esta descomposición con una triangulación simplicial.

Qué se gana sabiendo esto. Dos cosas concretas. La primera es que las cotas que en la asignatura de grafos se deducen de la fórmula de Euler — las que prueban que ciertos grafos no se pueden dibujar en el plano sin cruces — son, leídas desde aquí, afirmaciones sobre qué cabe en una superficie de característica 2. Y la segunda es la recíproca, que es la que se usa en esta asignatura: un grafo que no cabe en la esfera puede caber en el toro. Si el dibujo en el toro tiene todas sus caras homeomorfas a discos abiertos, la cuenta pasa a ser $V - A + C = 0$. La característica da restricciones sobre los dibujos posibles; por sí sola no decide si un grafo concreto puede dibujarse en una superficie.

Y no es coincidencia de nombres. Las dos asignaturas las imparte el mismo departamento, y en el libro de grafos un grafo se define como un complejo simplicial de dimensión uno precisamente para que añadir triángulos lleve, sin cambiar de lenguaje, a la triangulación de superficies y al recuento de esta sección. Está en su sección 5.2, «Caras de un grafo planar y fórmula de Euler».

De dónde viene: el germen de la topología algebraica

La fórmula de Euler para poliedros es uno de los antecedentes de la topología algebraica. Su memoria *Elementa doctrinae solidorum* apareció en 1758, en un volumen fechado 1752–1753.[a] La extensión del recuento y la demostración de su invariancia impulsaron el desarrollo de la homología. Para un complejo finito, la idea actual es precisa: contar celdas o sumar alternadamente los rangos de homología da el mismo número.

En cuarto curso, con la homología simplicial, se probará el enunciado general: si K es un complejo simplicial finito en $\mathbb{R}^n$, entonces $\chi(K)$ solo depende del tipo de homotopía del

poliedro $|K|$.

[a] Euler Archive, memoria E230. La fecha del volumen y la de publicación no coinciden.

Observación (El teorema de clasificación, en su forma final)**.** De acuerdo con los teoremas anteriores, una vez conocido el tipo, la característica de Euler determina la superficie. Y como el tipo se corresponde con la orientabilidad, se tiene el enunciado definitivo:

Las superficies compactas, conexas y sin borde quedan clasificadas por dos datos: la orientabilidad y su característica de Euler. La presencia de una banda de Möbius indica no *orientabilidad.*

Ejemplo. Toro. Con la triangulación de nueve vértices,

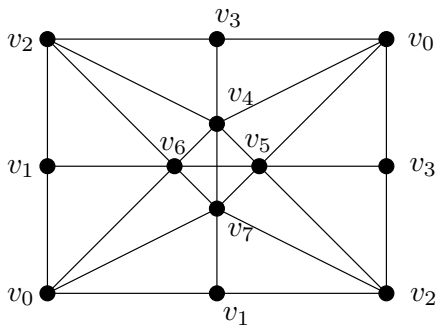
$$\chi(K) = 9 - 27 + 18 = 0,$$

lo cual era de esperar porque el toro es M_1 y $\chi(M_1) = 2 - 2 = 0$.

Plano proyectivo. Con una triangulación de ocho vértices,

$$\chi(K) = 8 - 21 + 14 = 1,$$

coherente con $\chi(N_1) = 2 - 1 = 1$.



En el dibujo original se identifican las etiquetas iguales del borde.

Observación. No toda descomposición en triángulos es una triangulación. Por ejemplo, la descomposición del plano proyectivo en la que dos triángulos comparten *una arista y además un vértice fuera de ella* no lo es, porque viola la segunda condición de la definición.

Sin embargo, si se extiende de manera natural la definición de característica a descomposiciones C en triángulos que se cortan en uniones de caras, se sigue teniendo $\chi(C) = 1$. Esto permite flexibilizar la definición de triangulación en las condiciones que lo requieran, y es lo que justifica calcular χ directamente sobre el polígono de identificaciones con la fórmula $\chi = 1 - k + v$.

CONEXIÓN: EL REENCUENTRO CON LA PARTE DE GEOMETRÍA

Aquí se cierra el curso, y merece la pena verlo entero.
En la parte de geometría se demostró que, para una superficie suave, compacta, conexa, orientable y sin borde de $\mathbb{R}^3$,

$$\iint_M K\, dA = 2\pi\, \chi(M).$$

En este capítulo se ha calculado χ para todas las superficies compactas, conexas y sin borde. Combinando las dos cosas se obtiene, sin integrar nada:

Superficie	χ	Curvatura total
Esfera	2	4π
Toro	0	0
Toro doble	-2	-4π
Suma conexa de n toros	$2-2n$	$2\pi(2-2n)$

Y en sentido contrario: se puede *medir* la curvatura de una superficie y deducir cuántos agujeros tiene, sin mirarla.
Ese es el resultado por el que las dos mitades de la asignatura se imparten juntas, y por el que el teorema de Gauss-Bonnet se considera el más profundo de la geometría diferencial de superficies.

Qué se ha ganado. Las tres preguntas del principio del capítulo tienen respuesta. M_2 y M_3 se distinguen por el rango del abelianizado, 4 frente a 6. El toro y la botella de Klein, por la torsión: $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ frente a $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2$. Y la característica de esta sección es la de la parte de geometría: no solo porque la suma sea la misma, sino porque ahora se sabe que no depende de la triangulación con que se cuente.

La pregunta de la sección pedía además su relación con el grupo fundamental, y la tabla de la sección 8.2 la da. Si r es el rango del abelianizado, es decir, el número de factores $\mathbb{Z}$, entonces $\chi = 2-r$ para las superficies orientables y $\chi = 1-r$ para las no orientables. Con el toro, $r=2$ y $\chi=0$; con la botella de Klein, $r=1$ y $\chi = 1-1=0$. Con la orientabilidad y uno de los dos números, la característica o el abelianizado, la superficie queda determinada.

8.5 Problemas de las relaciones

Ejercicio 8.1. *Clasificar una superficie dada por su palabra*

Se sabe que las identificaciones del perímetro de un polígono de diez lados dadas por los códigos

$$abcb^{-1}daec^{-1}e^{-1}d^{-1} \qquad \text{y} \qquad abcbdaece^{-1}d^{-1}$$

son superficies. Determinar sus grupos fundamentales y, a partir de la abelianización, el modelo de cada superficie.

Resolución. La idea. Una superficie dada por su palabra es, como los modelos de las dos primeras secciones, un disco cosido a un grafo. Su grupo se lee de la palabra con Seifert-van Kampen, el abelianizado se simplifica con cambios de generadores, y la tabla dice qué modelo es. La característica, contada sobre el polígono, controla el resultado. Pero antes hay que comprobar una hipótesis que los modelos cumplen y que una palabra cualquiera no tiene por qué cumplir, y en este ejercicio una de las dos palabras no la cumple.

El procedimiento, una vez y para siempre. Sea X el cociente de un polígono por una palabra w con letras distintas $x_1,\dots,x_k$, suponiendo por ahora que todos los vértices se identifican en uno. Se toman U_1 un disco abierto centrado en el centro del polígono y $U_2 = X$ menos un disco cerrado concéntrico más pequeño que U_1. Entonces:

- $\pi_1(U_1)=\{1\}$, por ser un disco;

- U_2 se retrae con deformación fuerte a la unión puntual de k circunferencias, luego $\pi_1(U_2)$ es libre con k generadores;
- $U_1 \cap U_2$ es una corona, luego $\pi_1 \cong \mathbb{Z}$, y su generador va a 1 por un lado y a la palabra w por el otro.

Por tanto

$$\pi_1(X) = \langle x_1, \ldots, x_k \mid w \rangle.$$

Eso es todo: los generadores son las letras y la relación es la palabra.

Observación (Una hipótesis escondida que hay que comprobar siempre)**.** El razonamiento anterior tiene un paso que se suele dar por bueno sin mirarlo, y que **no siempre es cierto**: se ha afirmado que U_2 se retrae a una unión puntual de k circunferencias.

Eso es cierto **solo si todos los vértices del polígono se identifican en una sola clase**. Si quedan v clases de vértices, el grafo al que se retrae U_2 tiene v vértices y k aristas, y su grupo fundamental es libre de rango

$$k - v + 1,$$

no k. Los modelos canónicos M_n y N_n con $n \geq 1$ tienen $v = 1$, y por eso el atajo funciona en ellos; pero una palabra cualquiera puede tener $v > 1$.

Cómo detectarlo sin dibujar nada. Se calcula la característica por los dos caminos y se comparan:

- por el polígono, $\chi = 1 - k + v$;
- por el abelianizado, leyendo la tabla.

Si no coinciden, o si el abelianizado sale con rango impar y sin factor $\mathbb{Z}_2$ — algo imposible para una superficie cerrada —, hay un error que revisar: puede haberse usado el atajo con $v > 1$, o haberse contado mal.

En el apéndice B hay un examen resuelto donde ocurre exactamente eso: la palabra $eabc^{-1}db^{-1}ca^{-1}d^{-1}e^{-1}$ tiene cinco letras pero **dos** clases de vértices, y quien aplique el atajo obtiene $\mathbb{Z}^5$, de rango impar, que no corresponde a ninguna superficie cerrada.

Antes de nada: contar los vértices. La observación anterior obliga a empezar por ahí, y en este ejercicio las dos palabras se comportan de manera distinta. Contar las clases de vértices es mecánico: se numeran los vértices del polígono $V_0, \ldots, V_9$, se orienta cada arista según su exponente, y cada letra identifica origen con origen y extremo con extremo. El lado j-ésimo va de V_{j-1} a V_j, con $V_{10} = V_0$; si su letra lleva exponente -1, la flecha va al revés, de V_j a V_{j-1}. En la primera palabra:

Letra	Lados	Flechas	Identifica
a	1 y 6	$V_0 \to V_1$ y $V_5 \to V_6$	$V_0 = V_5$, $V_1 = V_6$
b	2 y 4	$V_1 \to V_2$ y $V_4 \to V_3$	$V_1 = V_4$, $V_2 = V_3$
c	3 y 8	$V_2 \to V_3$ y $V_8 \to V_7$	$V_2 = V_8$, $V_3 = V_7$
d	5 y 10	$V_4 \to V_5$ y $V_0 \to V_9$	$V_4 = V_0$, $V_5 = V_9$
e	7 y 9	$V_6 \to V_7$ y $V_9 \to V_8$	$V_6 = V_9$, $V_7 = V_8$

Encadenando las igualdades salen dos grupos, $\{V_0, V_1, V_4, V_5, V_6, V_9\}$ y $\{V_2, V_3, V_7, V_8\}$, y ninguna identificación cruza de uno a otro: hay dos clases. En la segunda palabra solo cambian b y c, que ahora llevan exponente $+1$ en sus dos apariciones. La b va de V_1 a V_2 y de V_3 a V_4, e identifica $V_1 = V_3$ y $V_2 = V_4$; la c va de V_2 a V_3 y de V_7 a V_8, e identifica $V_2 = V_7$ y

$V_3 = V_8$. Las letras a, d y e siguen juntando $\{V_0, V_1, V_4, V_5, V_6, V_9\}$ por un lado y $\{V_7, V_8\}$ por otro. La b añade V_3 y V_2 al primer grupo, y la c une V_2 con V_7: todo cae en una sola clase. En resumen:

Palabra	clases de vértices	$\chi = 1 - k + v$
$abcb^{-1}daec^{-1}e^{-1}d^{-1}$	$v = 2$	$1 - 5 + 2 = -2$
$abcbdaece^{-1}d^{-1}$	$v = 1$	$1 - 5 + 1 = -3$

Las dos características son distintas, así que **las dos superficies no son homeomorfas**, y en la primera el atajo de «letras = generadores» *no* vale.

Primera palabra: $abcb^{-1}daec^{-1}e^{-1}d^{-1}$**.** Como $v = 2$, hay que reducir antes a un solo vértice, y eso se hace con un corte y un pegado. Se corta el polígono por un arco interior cuyos extremos representan el mismo punto p del cociente y que representa el lazo $\alpha = ece^{-1}$, se pega por c, y llamando $\beta = be^{-1}$ la superficie queda descrita por la palabra de ocho letras

$$a\,\beta\,\alpha\,\beta^{-1}\,d\,a\,\alpha^{-1}\,d^{-1},$$

para la cual todos los vértices sí representan un solo punto. Ahora ya se aplica el procedimiento: cuatro letras distintas, a, d, α y β, luego

$$\pi_1 = \langle a, d, \alpha, \beta \mid a\beta\alpha\beta^{-1}da\alpha^{-1}d^{-1}\rangle.$$

Al abelianizar, β con β^{-1}, α con α^{-1} y d con d^{-1} se cancelan, y sobrevive $a \cdot a = a^2$. Luego

$$(\pi_1)_{ab} \cong \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}_2,$$

con α, β y d generando la parte libre y a la torsión. Comparando con la tabla, $\mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}_2$ con $n - 1 = 3$ da $n = 4$:

Es N_4, la suma conexa de cuatro planos proyectivos

Es **no orientable** y $\chi = 2 - 4 = -2$, que es lo que ya había dado el recuento de vértices.

Otra vía, sin cortar: contraer una arista. Si el corte anterior cuesta de ver, hay un camino mecánico que llega a lo mismo, y es el que usa el ejercicio siguiente. La letra b va de V_1, que está en la primera clase, a V_2, que está en la segunda. En el grafo de U_2, con dos vértices y cinco aristas, la arista b sola es un árbol que pasa por los dos vértices. Contraerla a un punto no cambia el tipo de homotopía, por la regla de «Contar las circunferencias de un grafo» del capítulo 5, y deja un solo vértice con los lazos a, c, d y e. En la presentación, eso es borrar la letra b de la palabra:

$$\pi_1 \cong \langle a, c, d, e \mid a\,c\,d\,a\,e\,c^{-1}e^{-1}d^{-1}\rangle.$$

Al abelianizar se cancelan c, d y e con sus inversas y queda $2a = 0$: otra vez $\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}_2$ y N_4. La letra e, que va de V_6 a V_7, también une las dos clases, y contraerla daría otra presentación del mismo grupo.

Observación (Lo que sale si uno se salta el recuento de vértices)**.** Aplicando el atajo directamente a la palabra original se obtendría $\langle a, b, c, d, e \mid abcb^{-1}daec^{-1}e^{-1}d^{-1}\rangle$, con abelianizado $\mathbb{Z}^4 \times \mathbb{Z}_2$ y respuesta N_5. Es incorrecto, y el error se detecta sin saber la respuesta buena: el recuento $\chi = 1 - k + v$ da -2 y $\chi(N_5) = -3$. **Aquí falla el atajo**: el recuento explícito ha dado dos clases de vértices. En general, una discrepancia obliga a revisar tanto las hipótesis como las cuentas.

Segunda palabra: $abcbdaece^{-1}d^{-1}$**.** Aquí $v = 1$ y el atajo sí vale: cinco letras distintas y la palabra como única relación. Al abelianizar se cancelan e con e^{-1} y d con d^{-1}, y quedan a^2, b^2 y c^2:

$$\text{relación abelianizada: } a^2b^2c^2 = 1.$$

Haciendo el cambio $\beta_1 = b$, $\beta_2 = c$, $\eta = abc$ — válido porque permite recuperar $a = \eta c^{-1}b^{-1}$ —, la relación se convierte en $\eta^2 = 1$ y

$$(\pi_1)_{ab} \cong \mathbb{Z}^4 \times \mathbb{Z}_2,$$

con b, c, d y e generando la parte libre y η la torsión. Por la tabla, $n - 1 = 4$ y

Es N_5, la suma conexa de cinco planos proyectivos

con $\chi = 2 - 5 = -3$, que otra vez coincide con el recuento. ■

Observación (La comprobación con la característica, que es la otra vía)**.** Conviene rehacerlo por el camino de la parte de geometría, porque es más rápido y sirve de control.

Un polígono de $2k$ lados con los lados identificados dos a dos y v clases de vértices tiene $\chi = 1 - k + v$. Aquí $2k = 10$, luego $k = 5$, y todo lo que falta es v. En las dos palabras hay alguna letra que aparece dos veces con el mismo exponente — la a en la primera; la a, la b y la c en la segunda —, así que las dos superficies son no orientables y basta resolver $\chi = 2 - n$:

$$\chi = -2 \;\Rightarrow\; N_4, \qquad \chi = -3 \;\Rightarrow\; N_5.$$

Mismo resultado, en tres líneas y sin calcular ningún grupo. Merece la pena tener las dos vías: la del grupo fundamental es la que se pide de ordinario, pero la de la característica es la que detecta errores, y aquí detecta el más fácil de cometer.

Dónde se falla. En tres sitios, y el primero es el que más cuesta.

- En saltarse el recuento de vértices. La primera palabra da entonces N_5 en vez de N_4, como muestra la observación de más arriba.
- En contar mal k. En $\chi = 1 - k + v$, k es el número de letras distintas, la mitad del número de lados. Con los diez lados en lugar de las cinco letras, la primera palabra daría $1 - 10 + 2 = -7$, un número imposible aquí: con cinco parejas y al menos un vértice, $\chi = 1 - 5 + v$ no baja de -3.
- En leer mal la torsión. En la segunda palabra el generador de orden dos es $\eta = abc$, no a. Tomar a como torsión cuenta bien el rango, pero describe mal el grupo: en el abelianizado, $2a$ no es cero.

QUÉ DEJA. El procedimiento entero, que es mecánico y hay que poder ejecutarlo sin pensar, pero que tiene un paso cero que no se puede saltar: *contar las clases de vértices; si hay una sola, letras distintas = generadores y palabra = relación; si hay más, antes hay que dejar una, cortando y pegando o contrayendo un árbol del grafo*. Y después, abelianizar es cancelar inversos y contar cuadrados, con la regla de lectura final: si sobrevive un cuadrado, la superficie es no orientable y n es el número de generadores libres más uno; si no sobrevive ninguno, es orientable y n es la mitad del número de generadores. El control que cierra el problema es siempre $\chi = 1 - k + v$.

Ejercicio 8.2. *Dos familias de códigos*

Usar el abelianizado del grupo fundamental para determinar qué superficies son las repre-

sentadas por los códigos

$$a_1a_2\cdots a_na_1^{-1}a_2^{-1}\cdots a_{n-1}^{-1}a_n \qquad \text{y} \qquad a_1a_2\cdots a_na_1^{-1}a_2^{-1}\cdots a_{n-1}^{-1}a_n^{-1}.$$

Determinar también, con ayuda del grupo fundamental, el modelo de la superficie dada por el código $abcd^{-1}ad^{-1}b^{-1}c^{-1}$.

Resolución. La idea. Los tres códigos se resuelven con el procedimiento del ejercicio anterior: cancelar inversos y contar cuadrados en el abelianizado, contar vértices y leer la tabla. La novedad es que las dos familias dependen de n, y las clases de vértices hay que contarlas en general, no en un caso. En la segunda familia su número depende de la paridad de n, y eso decide si el atajo vale.

Primer código. Se toma $n \geq 1$. Al abelianizar, cada a_i con $i \leq n-1$ aparece una vez con exponente $+1$ y otra con -1: se cancelan. La letra a_n aparece **dos veces con exponente** $+1$. La relación abelianizada es, pues,

$$a_n^2 = 1,$$

y el abelianizado es $\mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}_2$. Por la tabla, la superficie es N_n, la suma conexa de n planos proyectivos, no orientable, con $\chi = 2-n$.

Falta comprobar que hay una sola clase de vértices, y aquí sí la hay para todo n. Se numeran los vértices $V_0, \ldots, V_{2n-1}$ como en el ejercicio anterior. Cada a_j con $j \leq n-1$ va de V_{j-1} a V_j la primera vez y de V_{n+j} a V_{n+j-1} la segunda, e identifica $V_j = V_{n+j-1}$ y $V_{j-1} = V_{n+j}$. Combinando la primera igualdad de a_j con la segunda de a_{j-1} sale $V_j = V_{j-2}$ para $2 \leq j \leq n-1$: los vértices pares de $V_0, \ldots, V_{n-1}$ quedan todos juntos, y los impares también. Los de la segunda mitad no añaden clases, porque la segunda igualdad de cada a_j y la letra a_n los identifican con vértices de la primera. La a_1 identifica además $V_1 = V_n$, y la a_n, que va de V_{n-1} a V_n y de V_{2n-1} a V_0, identifica $V_n = V_0$. Luego $V_0 = V_1$, y las dos cadenas son una sola. Con $n = 3$ se ve entero: la palabra $a_1a_2a_3a_1^{-1}a_2^{-1}a_3$ da $V_0 = V_4$ y $V_1 = V_3$ por a_1, $V_1 = V_5$ y $V_2 = V_4$ por a_2, y $V_2 = V_5$ y $V_3 = V_0$ por a_3, que encadenadas dan $V_0 = V_4 = V_2 = V_5 = V_1 = V_3$. Con $v = 1$ y $k = n$, el recuento da $\chi = 1 - n + 1 = 2 - n$, que coincide con $\chi(N_n)$. ✓

Segundo código. Ahora todas las letras aparecen con exponentes opuestos y todo se cancela: la relación abelianizada sería trivial. Pero antes hay que contar los vértices, y aquí **el resultado depende de la paridad de** n.

La cuenta es la del primer código, con un cambio: ahora también a_n va invertida la segunda vez, de $V_{2n} = V_0$ a V_{2n-1}. Siguen valiendo $V_j = V_{j-2}$, ahora para $2 \leq j \leq n$, y $V_1 = V_n$; y la a_n identifica $V_{n-1} = V_0$. Si n es par, V_n tiene índice par y $V_1 = V_n$ une la cadena de los impares con la de los pares: una sola clase. Si n es impar, $V_1 = V_n$ une dos impares y $V_{n-1} = V_0$ dos pares, y las dos cadenas no se tocan: quedan dos clases, la de los vértices pares y la de los impares.

Si $n = 2k$ es par, todos los vértices caen en una sola clase. El atajo vale, el abelianizado es $\mathbb{Z}^{2k}$ y, por la tabla, la superficie es M_k: la suma conexa de k toros, con $\chi = 1 - 2k + 1 = 2 - 2k$.

Si $n = 2k+1$ es impar, hay **dos** clases de vértices y el atajo no vale. El código sigue definiendo una superficie cerrada — todo polígono con las aristas emparejadas dos a dos la define —, solo que el grafo al que se retrae U_2 tiene dos vértices y $2k+1$ aristas, y su grupo libre es de rango $n - v + 1 = (2k+1) - 2 + 1 = 2k$, no $2k+1$. Contrayendo la arista a_1, que

une los dos vértices, se obtiene un espacio del mismo tipo de homotopía con una sola clase y $2k$ lazos $\alpha_2, \ldots, \alpha_{2k+1}$, y la presentación queda

$$\pi_1(S) \cong \langle \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k+1} \mid \alpha_2\alpha_3 \cdots \alpha_{2k+1}\alpha_2^{-1}\alpha_3^{-1} \cdots \alpha_{2k+1}^{-1} \rangle.$$

Al abelianizar, la relación vuelve a ser trivial y el abelianizado es $\mathbb{Z}^{2k}$: otra vez M_k. El recuento lo confirma, porque $\chi = 1 - (2k+1) + 2 = 2 - 2k = \chi(M_k)$.

En resumen, el segundo código da $M_{\lfloor n/2 \rfloor}$ en los dos casos: la paridad de n cambia el camino, no la respuesta.

El código $abcd^{-1}ad^{-1}b^{-1}c^{-1}$**.** Cuatro letras, ocho lados, luego $k = 4$ y $\chi = 1 - 4 + v = v - 3$. El recuento de vértices da $v = 2$, de modo que

$$\chi = -1,$$

y la letra a muestra que la superficie es no orientable. Para obtener también el grupo pedido, se numeran los vértices $V_0, \ldots, V_7$: las dos clases son los pares y los impares. La arista a une ambas clases y forma un árbol generador. Al contraerla queda la presentación

$$\pi_1(S) \cong \langle b, c, d \mid bcd^{-2}b^{-1}c^{-1} \rangle.$$

Su abelianizado es $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}_2$: b, c generan la parte libre y d tiene orden dos. Por tanto $n - 1 = 2$ y se obtiene $n = 3$, de acuerdo con $\chi = 2 - n = -1$:

Es N_3, la suma conexa de tres planos proyectivos

Obsérvese que aquí el atajo tampoco valdría: aplicado a ciegas daría la relación abelianizada $a^2d^{-2} = 1$, que con el cambio $x = ad^{-1}$ se convierte en $x^2 = 1$ y deja $\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}_2$, es decir N_4 y $\chi = -2$. No coincide con el recuento, y por tanto es el atajo el que falla. ■

Observación (Una errata del enunciado, y por qué conviene conocerla)**.** El código de este último apartado circula también en la forma

$$abcd^{-1}a\,d\,b^{-1}c^{-1},$$

con la segunda d sin exponente negativo, y es esa la versión con la que está hecha la resolución de referencia. Cambia el resultado, porque cambia el recuento de vértices: con $abcd^{-1}adb^{-1}c^{-1}$ todos los vértices caen en una sola clase, $\chi = 1 - 4 + 1 = -2$, y la superficie es N_4 — que es además lo que da el atajo, porque con $v = 1$ el atajo es legítimo.

Las dos versiones son ejercicios buenos y conviene tener las dos hechas. Lo que este par enseña es que un solo exponente cambia la superficie, y que el recuento de vértices permite detectarlo antes de calcular el grupo.

Dónde se falla. En aplicar el atajo al segundo código con $n = 2k + 1$ impar. Saldría $\mathbb{Z}^{2k+1}$, de rango impar y sin factor $\mathbb{Z}_2$, y ninguna superficie cerrada tiene ese abelianizado: en la tabla, las orientables tienen rango par. Es la alarma de la observación «Una hipótesis escondida que hay que comprobar siempre». Y en el tercer código, en copiar sin darse cuenta la versión de la errata: las dos versiones dan superficies distintas, N_3 y N_4.

QUÉ DEJA. El atajo para la orientabilidad, que no falla nunca: *sumar los exponentes de cada letra*. Si todas las sumas son cero, la superficie es orientable; si alguna vale ± 2, es no orientable. Eso se lee de la palabra sin manipularla y sin contar vértices. Lo que sí exige contar vértices es el *número n* del modelo, y la manera segura de obtenerlo es $\chi = 1 - k + v$ y después despejar en $2 - 2n$ o en $2 - n$ según la orientabilidad. Los tres apartados de este ejercicio son tres casos distintos de esa cuenta.

Ejercicio 8.3. *Cuatro superficies orientables con el mismo abelianizado*

Dar, justificadamente, cuatro superficies orientables, no homeomorfas entre sí, tales que el abelianizado de su grupo fundamental sea isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. ¿Hay alguna superficie no orientable que tenga la misma propiedad?

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Entre las superficies **cerradas** orientables, ¿cuántas tienen abelianizado $\mathbb{Z}^2$?*
2. *El enunciado no dice «cerradas». Piensa en superficies con borde y no compactas.*
3. *Para la última pregunta, ¿puede un $\mathbb{Z}^2$ salir de una superficie no orientable?*

Resolución. El movimiento decisivo: el enunciado no dice «cerradas». Entre las superficies compactas sin borde orientables, la única con abelianizado $\mathbb{Z}^2$ es el toro, porque $\mathbb{Z}^{2n} \cong \mathbb{Z}^2$ obliga a $n = 1$. Así que si solo se admitieran esas, la respuesta sería que no existen cuatro.

La clave es admitir superficies con borde y no compactas. Cuatro ejemplos, todos orientables y con π_1 abelianizado igual a $\mathbb{Z}^2$:

1. **El toro** $S^1 \times S^1$: $\pi_1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, ya abeliano.
2. **El toro menos un punto**: se retrae a $S^1 \vee S^1$, luego $\pi_1 = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, cuyo abelianizado es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
3. **El plano menos dos puntos**: tiene el tipo de homotopía de $S^1 \vee S^1$, luego su abelianizado es $\mathbb{Z}^2$.
4. **El toro menos un disco abierto**, conservando la circunferencia de borde: se retrae al ramo de dos circunferencias y tiene abelianizado $\mathbb{Z}^2$.

Son cuatro superficies distintas. El toro y el toro con borde son compactos, y se separan por la presencia de borde. Los otros dos son no compactos y sin borde: el toro menos un punto tiene *un extremo*, mientras que el plano menos dos puntos tiene *tres*. Aquí los extremos se ven como las regiones que quedan al retirar un compacto suficientemente grande: una cerca del punto quitado en el toro, y tres en el plano, cerca de cada punto quitado y hacia el infinito. Este número es invariante por homeomorfismos.

La esfera menos tres puntos es homeomorfa al plano menos dos puntos, por proyección estereográfica desde uno de ellos; no aporta un quinto ejemplo.

Todas son orientables y sus abelianizados coinciden, lo que ilustra que **el abelianizado no clasifica fuera de la familia de las superficies cerradas**.

¿Alguna no orientable? Sí. La botella de Klein tiene $\pi_1 = \langle a, b \mid aba^{-1}b \rangle$ y su abelianizado es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$, que *no* es $\mathbb{Z}^2$; pero la **botella de Klein menos un punto** se retrae a $S^1 \vee S^1$ y tiene abelianizado $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Es decir: **sí existe una superficie no orientable con abelianizado** $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, como la botella de Klein menos un punto, que es no compacta y no tiene borde. Otro ejemplo, ahora con borde, es la banda de Möbius menos un punto *interior*: tiene el tipo de homotopía de una figura de ocho. ■

Observación (La moraleja)**.** El ejercicio está diseñado para que se descubra el límite del método. La cadena «calcular π_1, abelianizar y leer la superficie» **solo funciona para superficies compactas, conexas y sin borde**. En cuanto hay borde o falta compacidad, muchas superficies distintas comparten abelianizado y hay que distinguirlas con otros invariantes: número de componentes del borde y de extremos, compacidad, orientabilidad.

Dónde se falla. En leer solo la tabla de las superficies cerradas y contestar que no existen cuatro, cuando el enunciado no pide que sean cerradas. Y en dar como distintas dos que son la misma, o al revés: la esfera menos tres puntos y el plano menos dos puntos son homeomorfas, mientras que el toro menos un punto y el toro menos un disco abierto no lo son, aunque tengan el mismo tipo de homotopía.

Ejercicio 8.4. *Cocientes por el borde*

Sea M una superficie compacta con k componentes conexas en su borde. Dar, justificadamente, una condición necesaria y suficiente sobre k para que el espacio cociente $M/\partial M$ sea una superficie. En tal caso, ¿será compacta? ¿Y cerrada?

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Al aplastar todo el borde a un punto, ¿cómo es el entorno de ese punto?*
2. *Con una sola componente de borde, aplastarla es como pegar un disco.*
3. *Con dos o más, el entorno del punto resultante son varios discos pegados por su centro.*

Resolución. Qué está pasando. Si $k \geq 1$, el cociente $M/\partial M$ aplasta *todo* el borde, sea cual sea el número de componentes, a un único punto P. La cuestión es si P tiene un entorno homeomorfo a un disco.

Si $k = 0$. No hay borde que identificar: con la convención usual $M/\varnothing = M$. Por tanto ya es una superficie compacta y sin borde.

Si $k = 1$. El borde es una sola circunferencia. Un entorno de esa circunferencia en M es un collar $S^1 \times [0, 1)$, y al aplastar $S^1 \times \{0\}$ a un punto se obtiene un cono sobre S^1, es decir, **un disco**. Luego P tiene entorno homeomorfo a un disco y $M/\partial M$ es una superficie. De hecho es la superficie cerrada que se obtiene tapando el agujero con un disco.

Si $k \geq 2$. Ahora hay k collares disjuntos, y al aplastar todos sus bordes al *mismo* punto P, un entorno de P es la unión de k discos pegados por su centro. Ese espacio **no** es homeomorfo a un disco: al quitarle P queda un espacio con k componentes conexas, mientras que un disco menos su centro es conexo. Luego $M/\partial M$ no es una superficie.

$$\boxed{M/\partial M \text{ es una superficie } \iff k \leq 1}$$

Si se supone desde el principio que el borde es no vacío, la condición se reduce a $k = 1$.

Compacidad y cierre. Para cualquier k, el cociente es compacto: es la imagen continua del compacto M por la proyección. Cuando $k \leq 1$, es además una superficie cerrada, es decir, compacta y sin borde: el único borde que tenía M era ∂M, que ha desaparecido al aplastarlo. ■

Observación (El caso de la banda de Möbius)**.** Con M la banda de Möbius, que tiene $k = 1$, el cociente $M/\partial M$ es una superficie cerrada. ¿Cuál? La banda de Möbius es el plano proyectivo con un agujero, y taparlo devuelve el plano proyectivo:

$$M/\partial M \cong P^2\mathbb{R}.$$

Es la manera más corta de fabricar el plano proyectivo a partir de una superficie con borde, y por eso conviene tenerla vista.

Un caso a mano: el cilindro, $k = 2$. El cilindro $M = S^1 \times [0, 1]$ tiene dos circunferencias de borde. Si se aplastara cada una a su propio punto, saldría una esfera, con esos dos puntos como polos. Pero $M/\partial M$ aplasta las dos al *mismo* punto, así que además pega el polo norte con el polo sur. El resultado es una esfera con dos puntos identificados, y en ese punto el entorno son dos discos unidos por el centro: es exactamente el caso $k \geq 2$ de la resolución.

Dónde se falla. En confundir aplastar el borde con pegar sus componentes entre sí. Pegar las dos circunferencias del cilindro punto a punto, una sobre otra, da el toro o la botella de Klein, según el sentido, y los dos son superficies. Aplastarlas a un punto da el espacio del caso a mano, que no lo es. Y en olvidar el caso $k = 0$, que el enunciado no excluye.

QUÉ DEJA. Para probar que el punto nuevo es un punto de superficie hay que construir un entorno homeomorfo a un disco. Si todo entorno suficientemente pequeño queda desconectado al quitar el punto, esto lo impide, como ocurre con varios collares colapsados juntos. Que el entorno perforado sea conexo es una condición necesaria, *no suficiente* por sí sola.

Repaso del capítulo

REPASO INTERCALADO: CLASIFICACIÓN II, PRIMERA RONDA

1. Escribe $\pi_1(M_n)$ y $\pi_1(N_n)$ con sus presentaciones, y sus abelianizados.
2. ¿Por qué la relación de $\pi_1(M_n)$ desaparece al abelianizar y la de $\pi_1(N_n)$ no?
3. Escribe la tabla que relaciona abelianizado, superficie y característica.
4. Enuncia el teorema de clasificación en su forma final, con los dos invariantes.
5. Escribe $\chi(M_n)$ y $\chi(N_n)$ y comprueba con el toro y el plano proyectivo.
6. Enumera las seis operaciones de normalización de una palabra.

REPASO INTERCALADO: CLASIFICACIÓN II, SEGUNDA RONDA, CON TODA LA ASIGNATURA

1. Dada la palabra $abcb^{-1}daec^{-1}e^{-1}d^{-1}$, clasifica la superficie por los dos caminos: abelianizando y contando característica.
2. Para una superficie compacta, conexa y sin borde, ¿por qué χ impar implica no orientable?
3. Una superficie suave, compacta, conexa, orientable y sin borde tiene curvatura total -8π. ¿Cuál es su grupo fundamental?
4. Entre las superficies suaves, compactas, conexas, orientables y sin borde, solo el toro admite un campo tangente continuo sin ceros. Reescribe el enunciado usando su grupo fundamental.
5. ¿Qué permite deducir el factor $\mathbb{Z}_2$ del abelianizado de $\pi_1(N_n)$? ¿Por qué no significa que el lazo central de una banda de Möbius tenga orden dos?
6. ¿Para qué superficies funciona la cadena «π_1, abelianizar, leer el modelo»? ¿Qué falla fuera de ahí?
7. Enuncia, en una sola frase, qué relación hay entre el teorema de Gauss-Bonnet y el teorema de clasificación de superficies.

APÉNDICE A

Qué cae en el examen

Este capítulo reúne, en un solo sitio, todo lo que es específico de cómo se imparte y se examina esta asignatura en la Universidad de Sevilla: qué ha caído, con qué formato, cuánto vale y qué guión sigue el profesor. Quien estudie la geometría y la topología de superficies en otro sitio puede saltárselo entero sin perder nada: el resto del libro es un curso estándar de la materia y no depende de este capítulo. Está aquí, y no repartido en notas sueltas por los capítulos, precisamente para que se pueda saltar de una vez. Los exámenes completos, resueltos, están en el apéndice B.

A.1 Cómo se examina

El sistema de 2026-27. Según los proyectos docentes de 2026-27, idénticos en los tres grupos, el examen de cada convocatoria se divide en dos: uno de **geometría** y otro de **topología**, cada uno sobre 10 puntos. La nota es la media ponderada $\frac{1}{3}$ Geometría $+ \frac{2}{3}$ Topología, y se aprueba con 5. Durante las clases hay pruebas parciales voluntarias, al menos una por parte, que con la misma ponderación permiten aprobar antes del examen final. **La topología pesa el doble que la geometría.**

Dos advertencias presentes en los exámenes de geometría. La exigencia de justificar las respuestas es habitual. La prohibición del cálculo explícito de curvatura geodésica aparece en varias convocatorias (por ejemplo, junio de 2025), pero no en todas; en otras se limita a un apartado. Hay que leer la cabecera de cada examen. Estas son las dos formulaciones:

> *En ninguno de los apartados de los ejercicios que siguen podrá razonarse usando el cálculo explícito de la curvatura geodésica de cualquiera de las curvas que aparecen.*
>
> *No se valorará, ni parcialmente, ninguna respuesta que no esté debidamente justificada, a juicio del corrector, aunque sea correcta.*

Cuando esa prohibición está presente, la solución debe apoyarse en el teorema, las propiedades geométricas, la orientación y la característica de Euler. El cálculo directo sigue siendo

válido matemáticamente y sirve para comprobar; en los ejercicios sin esa restricción también puede ser la solución principal.

Una letra distinta. La característica de Euler-Poincaré se escribe χ en todo este libro; el profesor de la parte de geometría la escribe X, con equis latina, y la define como *caras más vértices menos aristas*. Es el mismo número y la misma suma con los sumandos en otro orden.

El catálogo corto de superficies. La parte de geometría se juega, convocatoria tras convocatoria, sobre las mismas superficies. Según el recuento del banco de veintidós sesiones documentadas: cilindro en ocho, esfera en siete, cono en cuatro, hiperboloide de revolución en tres, toro de revolución en tres, catenoide en dos, plano en dos, y una vez cada uno el paraboloide, el tubo alrededor de una curva plana y una superficie de revolución genérica. Están calculados en el apéndice C.

Configuraciones que se repiten.

- *Regiones con agujeros.* Aparecen en seis sesiones documentadas: hay que contar χ y orientar cada curva frontera por su lado (sección 1.3.5).
- *Curvas cerradas metidas dentro de una región*, con la pregunta de si hay contradicción entre las dos lecturas de $\oint K_g$: prueba de evaluación de 2022-23, segunda convocatoria de 2023-24, primera de 2025-26, y problema 16 de la relación.
- *Las tres versiones del teorema* (local, regiones simples, superficies compactas): en nueve sesiones entre 2013 y 2019 se pidió enunciar dos de ellas y señalar sus diferencias.
- *La curvatura geodésica integral de un paralelo del cono*, con la prohibición expresa de calcular: 19 de marzo de 2019. Vale $\pi\sqrt{2}$ para todos los paralelos.
- *El área de la franja terrestre entre los dos trópicos*: 11 de marzo de 2015.
- *La cota* $\chi \geq 1 - k$ para un polígono de $2k$ lados: pedida dos veces.
- *Aplicar Seifert-van Kampen a un polígono de identificaciones*: once de trece convocatorias. Siempre con el abelianizado detrás, que es el que identifica la superficie.

A.2 Por capítulos

Cada entrada dice a qué ejercicio o sección del libro se refiere.

El Teorema de Gauss-Bonnet (capítulo 1)

- *Los dos casquetes de la esfera, o dónde está la trampa.* Segundo ejercicio de la primera prueba de 2012-13. Es también el problema 15 de la relación de Gauss-Bonnet.
- *Cuatro triangulaciones y una comprobación.* No ha caído como problema, pero los cuatro valores son dato de partida en el ejercicio de la segunda convocatoria de 2023-24 y en varios problemas de la relación. Conviene comprobar los recuentos y saber reproducirlos.
- *La curvatura geodésica de un paralelo de la esfera, por dos caminos.* Los paralelos de la esfera son la configuración más repetida del banco histórico: junio de 2013, diciembre de 2014, marzo de 2015 con los trópicos, y el problema 11 de la relación. Y la primera convocatoria de 2022-23 pide exactamente la curvatura geodésica integral de un paralelo, calculada *sin* este método.
- *La suma de los ángulos externos de un triángulo curvilíneo del cilindro.* Primer apartado del segundo ejercicio de la primera convocatoria de 2024-25, con la advertencia expresa de que no puede razonarse calculando curvaturas geodésicas.
- *Dos agujeros en un cilindro.* Es la estructura exacta del segundo apartado del primer ejercicio

de la primera convocatoria de 2025-26, trasladada del cono al cilindro, y del problema 16 de la relación. La versión con un solo agujero cayó en la prueba de evaluación de 2022-23 y en el primer parcial del 11 de marzo de 2016.

- *Todos los paralelos del cono tienen la misma curvatura geodésica integral.* Segundo ejercicio de la primera prueba del 19 de marzo de 2019.
- *La curvatura integral del hiperboloide de una hoja.* Tercer ejercicio de la primera prueba de 2012-13; con el mismo hiperboloide, la primera convocatoria de 2013-14, el parcial del 13 de marzo de 2015 y la prueba de evaluación de 2024-25. Es la superficie no compacta que más se repite.
- *El área de un huso esférico, y el área de la esfera.* Segunda convocatoria de 2021-22, y el segundo ejercicio de la primera prueba del 12 de marzo de 2014. La variante con dos meridianos, el ecuador y un paralelo cayó el 19 de marzo de 2018.
- *Un polígono geodésico en una superficie de curvatura constante.* El primer apartado es el problema 2 de la relación; el segundo cayó en la prueba de evaluación de 2021-22. La variante «¿puede un cuadrilátero geodésico ser un rectángulo?» es el problema 4 de la relación.
- *La curvatura integral de la esfera.* Problema 3 de la relación. La variante «deducir el área de la esfera» cayó en la segunda convocatoria de 2021-22 y el 12 de marzo de 2014.
- *Dos familias de geodésicas que se cortan.* El primer apartado es el problema 1 de la relación; el segundo cayó en la prueba de evaluación de 2022-23.
- *El toro de revolución, por trozos.* Problema 12 de la relación. El toro completo cayó el 15 de septiembre de 2016 y la mitad inferior del toro el 13 de marzo de 2015.
- *La región entre el ecuador y un paralelo.* Problema 11 de la relación. La misma región, con los trópicos de Cáncer y Capricornio, cayó el 11 de marzo de 2015; con dos paralelos simétricos, el 12 de junio de 2013 y el 5 de diciembre de 2014; y con dos meridianos, el ecuador y un paralelo, el 19 de marzo de 2018.
- *Una hoja del hiperboloide de dos hojas.* Problema 10 de la relación.
- *El elipsoide y su imagen esférica.* Problema 13 de la relación.
- *Un arco cualquiera sobre el cilindro.* Problema 14 de la relación y primer ejercicio de la primera prueba de 2012-13.
- *La desarrollable tangencial de una circunferencia.* Problema 17 de la relación.
- *Consecuencias topológicas del signo de la curvatura.* Problemas 6, 8 y 7 de la relación. El primer problema del final de junio de 2017 es una variante del primero: en una superficie homeomorfa a la esfera con $K > 0$, dos geodésicas cerradas y simples cualesquiera se cortan.
- *Una región plana con dos agujeros.* Problema 9 de la relación. La versión con un solo agujero pentagonal, y luego con dos, cayó el 11 de marzo de 2016 en cuatro apartados encadenados.
- *La imagen esférica de las dos regiones de una geodésica.* Problema 5 de la relación.
- *El cuadrilátero geodésico en curvatura negativa.* Problema 4 de la relación.
- *La superficie reglada sobre la hélice con $k = \tau = 1$.* Prueba de evaluación de 2023-24, problema 4 del documento de problemas de exámenes del profesor.
- *Cinco índices en el plano.* Problema 18 de la relación. Es el único problema puramente computacional de esta sección y el que fija las imágenes.
- *Solo el toro se puede peinar.* Problema 19 de la relación.
- *Una curva en la esfera obliga a que haya ceros a los dos lados.* Problema 20 de la relación.

Material complementario sobre curvas en una superficie (capítulo 2)

- *Trayectorias ortogonales de las hélices del cilindro.* No como problema completo, pero el cilindro con esta p.l. y las hélices aparecen en la prueba de evaluación de 2021-22, en la primera convocatoria de 2023-24, en la prueba de evaluación de 2022-23 y en la primera convocatoria de 2024-25. Es la superficie más frecuente del examen con diferencia.

Introducción (capítulo 3)

- *Las clases de la relación «estar unidos por un camino».* Problema 1 de la relación 1.
- *Cuándo la proyección al cociente es abierta o cerrada.* Problema 2 de la relación 1, con solucionario del profesor.
- *Aplastar un compacto conserva la separación.* Problema 4 de la relación 1, con solucionario del profesor.
- *Tres cocientes que parecen iguales y no lo son.* Problema 5 de la relación 1, con solucionario del profesor. Es el mejor ejercicio de la relación y el que más enseña.
- *Un cociente que no es Hausdorff.* Problema 6 de la relación 1. El profesor lo resuelve también como ejercicio en sus apuntes de teoría.
- *Tres cocientes del plano, dibujados en el espacio.* Problema 7 de la relación 1. El apartado (b) cayó, en versión con dos circunferencias, en el examen final del 13 de junio de 2016.
- *El cociente de las parábolas.* Problema 12 de la relación 1.
- *Hausdorff en el cociente y cerrado en el producto.* Problemas 13 y 15 de la relación 1.
- *El cono y la suspensión de una esfera.* Problemas 16, 17, 19 y 20 de la relación 1.
- *Dos cocientes de un cubo.* Problema 8 de la relación 1.
- *Proyección abierta y relación no abierta.* Problema 14 de la relación 1. Es el complemento del problema 15, que se resuelve junto con el 13.
- *Adjunciones: conexión, compacidad y separación.* Problemas 21 y 22 de la relación 1. La notación $X \cup_f Y$ se usa en la relación sin definirse en los apuntes; la definición de arriba es la estándar y es la única compatible con los enunciados.

Clasificación de superficies I (capítulo 4)

- *Mezclas de toros y planos proyectivos.* Problema 7 de la relación 2. El caso $P^2\mathbb{R}\#T$ cayó en el examen prefinal del 27 de mayo de 2016.
- *Si la suma conexa es una esfera, los sumandos también.* Problema 8 de la relación 2.
- *Superficies representables en un polígono dado.* El primer apartado cayó el 14 de mayo de 2018; el segundo, en la segunda prueba de 2013-14 y en la primera convocatoria de junio de 2014.
- *La forma normal de Möbius por sumas de esferas con agujeros.* Problema 4 de la relación 2.
- *Un hexágono que no da una superficie.* Problema 6 de la relación 2.

Teoría de homotopía (capítulo 5)

- *Retractos de deformación que hay que tener catalogados.* Problema 7 de la relación 3. Los apartados 2, 4 y 6 reaparecen en la relación 6 y en varios exámenes; el 4 cayó en el segundo parcial de 2017-18.
- *Un retracto de un espacio contráctil es contráctil.* Problemas 17 y equivalente de la relación 3.
- *Todo lazo define una aplicación de la circunferencia.* Problema 2 de la relación 4.
- *Un retracto de un Hausdorff es cerrado, y las retracciones extienden aplicaciones.* Problemas 2 y 3 de la relación 3.
- *Retractos de deformación: en producto y en cadena.* Problemas 4 y 5 de la relación 3.
- *Dos subespacios homeomorfos, y solo uno es retracto de deformación.* Problema 6 de la relación 3.
- *Aplicaciones desde un contráctil, y los dos extremos de la topología.* Problemas 8 y 9 de la relación 3.
- *El cilindro de una aplicación.* Problema 10 de la relación 3.
- *El functor $[X, -]$ y la caracterización de las equivalencias.* Problemas 11 y 12 de la relación 3.
- *Equivalencias de homotopía: criterios, productos y componentes.* Problemas 13, 14 y 16 de la relación 3.
- *La propiedad de extensión de homotopía.* Problema 15 de la relación 3.
- *Cancelación en la yuxtaposición de caminos.* Problema 1 de la relación 4.
- *Simple conexión, caminos y componentes.* Problemas 4 y 5 de la relación 4.
- *Espacios 1-simples y las clases libres de S^1.* Problemas 8 y 9 de la relación 4.

Cálculo del grupo fundamental (capítulo 6)

- *Aplicaciones no sobreyectivas en la esfera.* Problema 1 de la relación 3.
- *Tres caracterizaciones de la simple conexión.* Problema 3 de la relación 4. La equivalencia (a) $\iff$ (b) se usa como ayuda en el examen final de junio de 2017.
- *Un espacio cubierto por dos simplemente conexos.* Problema 6 de la relación 4. Es el caso particular del teorema de Seifert-van Kampen que se puede probar a mano, y así conviene verlo.
- *El grado y sus consecuencias.* El primer apartado cayó en el segundo parcial del 2 de junio de 2017, el segundo en el final del 13 de junio de 2017 y el tercero en la segunda convocatoria de 2024-25.
- *Infinitos espacios simplemente conexos y distintos.* Problema 7 de la relación 4.

Teorema de Seifert-van Kampen (capítulo 7)

- *Grupos fundamentales por Seifert-van Kampen.* Problemas 1 a 11 de la relación 6, agrupados. El sombrero bobo cayó en el segundo parcial de 2017-18 y en la primera convocatoria de 2024-25.
- *Pegando un toro y una botella de Klein.* Problema 3 del examen parcial de topología de 2015-16. El problema 13 de la relación 6 es la variante con dos toros.
- *Obstrucciones por homomorfismos imposibles.* El apartado 1 cayó el 13 de junio de 2017; el 2 y el 3 en la primera convocatoria de 2023-24; el 4 en el examen final del 13 de junio de 2016.
- *Un recubrimiento dado por tipos de homotopía.* Segundo ejercicio de la tercera prueba del 1 de junio de 2018.
- *Un toro pegado a dos circunferencias.* Problema 12 de la relación 6.

Clasificación de superficies. Conclusión (capítulo 8)

- *Clasificar una superficie dada por su palabra.* Problema 14 de la relación 6. Es exactamente el tipo de ejercicio que cae en once de las trece convocatorias legibles.
- *Dos familias de códigos.* Problemas 15 y 16 de la relación 6.
- *Cuatro superficies orientables con el mismo abelianizado.* Tercer ejercicio de la tercera prueba del 1 de junio de 2018.
- *Cocientes por el borde.* Primer ejercicio de la segunda prueba del 14 de mayo de 2018.

APÉNDICE B

Exámenes resueltos

Este apéndice existe porque las últimas sesiones del plan de estudio se dedican a hacer exámenes completos, cronometrados y a libro cerrado. Las soluciones permiten comprobar el razonamiento y localizar qué conviene repasar.

Abre el apéndice el examen más reciente de topología; siguen los de geometría y los restantes de topología. Los precedentes orientan la preparación, pero no predicen por sí solos la próxima convocatoria. Conviene recordar que la asignatura se examina de las dos mitades por separado y que un examen de una parte no dice nada de la otra.

Cómo se usa este apéndice. De cada examen va primero la ficha y el enunciado íntegro, y *solo* eso. Para simular la prueba, hazlo entero, cronometrado y a libro cerrado antes de mirar las soluciones. Si aún estás aprendiendo el método, también puedes estudiar una resolución, explicar por qué funciona cada paso e intentar después un problema similar sin ayuda. Leer ejemplos resueltos sí puede enseñar; reconocer sus pasos no equivale todavía a saber producirlos.

Figuras. Se reproducen las recuperadas del material original. Cuando una identificación sigue siendo ambigua, se indican las interpretaciones posibles; las omisiones restantes figuran en el apéndice E.

B.1 Segunda convocatoria de 2025-26, parte de topología

Es el examen más reciente del banco y por eso abre el apéndice.

Ficha

Asignatura	Geometría y topología de superficies, parte de topología
Convocatoria	Segunda, curso 2025-26
Fecha	julio de 2026
Estructura	Cinco ejercicios: 2,5 + 1 + 3 + 2 + 1,5 puntos

Enunciado

Ejercicio 1 [2,5 puntos]. Sea $X = [-1,1] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$. Consideramos sobre X la relación de equivalencia R dada por

$$(x,-1) \sim (x,0) \sim (x,1), \qquad \forall x \in [-1,1],$$

y denotamos $Y = X/R$ el espacio cociente. Se pide:
(a) encontrar un subespacio de $\mathbb{R}^3$ homeomorfo a Y;
(b) ¿es Y una superficie con borde?;
(c) calcular el grupo fundamental de Y.

Ejercicio 2 [1 punto]. Probar que el toro no se puede cubrir por dos abiertos U y V que no sean simplemente conexos pero su intersección $U \cap V$ sí lo sea.

Ejercicio 3 [3 puntos]. Denotamos por X al espacio cociente obtenido al identificar las aristas de los pentágonos tal y como indica la figura del enunciado. Comprobar que X es una superficie cerrada y calcular su grupo fundamental para determinar de qué superficie se trata, usando su abelianizado. ¿Es orientable? En caso negativo, mostrar una banda de Möbius dentro de X.

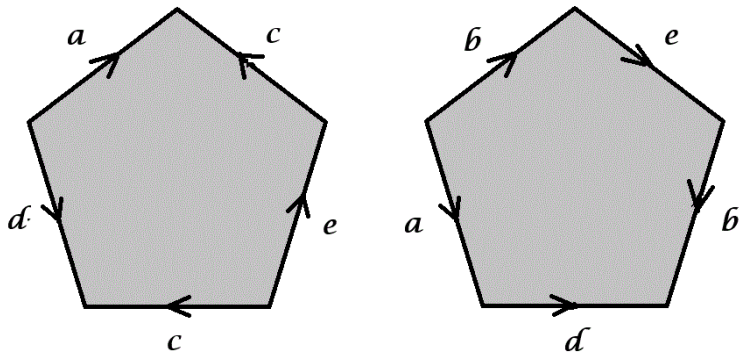


Figura del enunciado original, segunda convocatoria de topología de 2026.

Ejercicio 4 [2 puntos]. Probar que un espacio X es contráctil si y solo si X es retracto del cono CX.

Ejercicio 5 [1,5 puntos]. Sea $\mathcal{A}$ la familia de aquellos espacios topológicos que son productos de $m \geq 0$ copias del toro y $n \geq 0$ copias del plano proyectivo. Usar el grupo fundamental para caracterizar los elementos de $\mathcal{A}$ con $m + n > 0$.

ANTES DE LAS SOLUCIONES. Si estás simulando el examen, termina tu intento antes de seguir leyendo.

Resolución del ejercicio 1

El movimiento que resuelve los tres apartados. La relación solo afecta a la segunda coordenada: para cada x fijo se identifican los valores -1, 0 y 1 de y, y la primera coordenada no interviene. Por tanto el cociente es un **producto**:

$$Y = [-1,1] \times \Big([-1,1] / \{-1 \sim 0 \sim 1\} \Big).$$

Y el segundo factor es conocido. El intervalo $[-1,1]$ con los puntos -1, 0 y 1 identificados se parte en dos trozos, $[-1,0]$ y $[0,1]$, cada uno con sus dos extremos pegados, es decir, dos circunferencias que comparten el punto imagen. O sea,

$$[-1,1]/\{-1 \sim 0 \sim 1\} \;\cong\; S^1 \vee S^1.$$

Por tanto

$$\boxed{Y \cong (S^1 \vee S^1) \times [-1,1]}$$

(a) Un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Basta tomar la figura de ocho dentro del plano $z = 0$ y multiplicarla por el intervalo en la dirección vertical: el conjunto

$$\{(p,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; p \in S^1 \vee S^1 \subset \mathbb{R}^2,\; z \in [-1,1]\}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ homeomorfo a Y. Geométricamente es un **ocho engordado en altura**: dos cilindros pegados a lo largo de un segmento vertical.

(b) ¿Es una superficie con borde? No. El punto conflictivo es el que corresponde al punto de unión del ocho. Sea p_0 ese punto y considérese (x, p_0) con $x \in (-1,1)$.

En la figura de ocho, un entorno de p_0 son **cuatro** arcos que salen del punto. Multiplicando por el intervalo, un entorno de (x, p_0) en Y son cuatro semiplanos pegados a lo largo de una recta común.

Puede comprobarse con el enlace, como en el capítulo 4: al cortar las cuatro páginas con una pequeña esfera centrada en el punto, aparecen dos vértices unidos por cuatro arcos. Ese grafo no es una circunferencia ni un intervalo, los enlaces propios de un punto interior o de borde de una superficie. Equivalentemente, los entornos pequeños sin el punto se retraen a un grafo de rango $4 - 2 + 1 = 3$, mientras que un disco perforado tiene rango uno y un semidisco sin su punto central de borde es contráctil. Luego Y no es una superficie con borde.

(c) El grupo fundamental. El intervalo $[-1,1]$ es contráctil, luego la proyección $Y \to S^1 \vee S^1$ es una equivalencia de homotopía — de hecho $(S^1 \vee S^1) \times \{0\}$ es un retracto de deformación fuerte de Y —, y por tanto

$$\boxed{\pi_1(Y) \cong \pi_1(S^1 \vee S^1) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}}$$

el grupo libre con dos generadores. ■

QUÉ DEJA. El reflejo que ahorra todo el ejercicio: *si la relación de equivalencia solo toca una coordenada, conviene buscar un producto.* Aquí la aplicación natural del cuadrado al producto con el ocho induce una biyección continua; es un homeomorfismo porque el dominio cociente es compacto y el producto es Hausdorff. Así el problema se reduce al cociente de un intervalo.

Resolución del ejercicio 2

Observación (La conexión por caminos se deduce)**.** Los abiertos del toro son localmente conexos por caminos. Como $U \cap V$ es conexo por caminos, está contenido en una sola componente de U. Si hubiera otra, sería disjunta de V y quedaría abierta y cerrada en $T = U \cup V$, contra la conexión del toro. Lo mismo vale para V. Por tanto ambos son conexos por caminos, sin añadir una hipótesis al enunciado.

Se razona por reducción al absurdo. Supóngase que existen abiertos U, V conexos por caminos, no simplemente conexos, con $T = U \cup V$ y $U \cap V$ simplemente conexo.

Como $U \cap V$ es simplemente conexo, en particular es conexo por caminos, luego se puede aplicar el teorema de Seifert-van Kampen. Y como $\pi_1(U \cap V) = \{1\}$, el producto amalgamado se reduce al **producto libre**:

$$\pi_1(T) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V).$$

Ahora bien, $\pi_1(T) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, que es **abeliano**. Y un producto libre de dos grupos ambos no triviales **nunca es abeliano**: si $g \in \pi_1(U)$ y $h \in \pi_1(V)$ son distintos del neutro, la palabra $ghg^{-1}h^{-1}$ no se reduce a la palabra vacía en el producto libre, porque en él no hay ninguna relación que mezcle elementos de los dos factores. Luego g y h no conmutan.

Por hipótesis $\pi_1(U)$ y $\pi_1(V)$ son ambos no triviales, así que $\pi_1(U) * \pi_1(V)$ no es abeliano, mientras que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sí lo es. Contradicción. ■

QUÉ DEJA. La observación general que hay detrás: *un producto libre de dos grupos no triviales nunca es abeliano*. De ahí se sigue que un espacio con grupo fundamental abeliano no trivial **no** admite descomposiciones con intersección simplemente conexa y piezas con lazos. Es un criterio de imposibilidad muy barato.

Resolución del ejercicio 3

Se recorre cada pentágono en sentido horario, empezando en su vértice superior. Las palabras que se leen en la figura son

$$w_1 = c^{-1}e^{-1}cd^{-1}a, \qquad w_2 = ebd^{-1}a^{-1}b.$$

El signo se obtiene comparando el recorrido con la flecha de cada lado.

Paso 1: comprobar que es una superficie cerrada. Cada letra aparece dos veces, así que cada punto interior de una arista tiene un entorno formado por dos semidiscos. Las identificaciones llevan los diez vértices a una sola clase. Al seguir los sectores angulares de esa clase, los diez se encadenan en un único círculo, de modo que también allí el entorno es un disco. El cociente es compacto, conexo y sin borde.

Paso 2: la característica. Hay dos caras, cinco aristas y un vértice:

$$\chi(X) = 2 - 5 + 1 = -2.$$

Este dato todavía deja dos posibilidades: la superficie orientable de género dos y la no orientable de género cuatro.

Paso 3: el grupo fundamental. Como solo hay un vértice, cada arista es un generador y cada cara aporta una relación:

$$\pi_1(X) = \langle a, b, c, d, e \mid c^{-1}e^{-1}cd^{-1}a = 1, \quad ebd^{-1}a^{-1}b = 1 \rangle.$$

De la primera relación, $a = dc^{-1}ec$. Se sustituye en la segunda y queda

$$\boxed{\pi_1(X) = \langle b, c, d, e \mid ebd^{-1}c^{-1}e^{-1}cd^{-1}b = 1 \rangle.}$$

Paso 4: abelianizar y clasificar. En notación aditiva, la única relación se convierte en $2b - 2d = 0$. Tomando $t = b - d$ como generador,

$$\pi_1(X)_{ab} \cong \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}_2.$$

Por tanto $X \cong N_4$: es la suma conexa de cuatro planos proyectivos y no es orientable. La comprobación es $\chi(N_4) = 2 - 4 = -2$.

Paso 5: mostrar una banda de Möbius. Se pegan primero los dos pentágonos por la arista a, formando un solo octágono. Su palabra es la relación de ocho letras del paso 3, donde b aparece dos veces con el mismo exponente. Se unen los puntos medios de esas dos aristas mediante un arco interior; una banda estrecha alrededor de ese arco se cierra con media vuelta al identificar las aristas b. Esa es la banda de Möbius buscada.

QUÉ DEJA. La figura se traduce en dos relaciones, una por cara. Eliminar una de ellas equivale aquí a pegar las dos caras por una arista. El abelianizado distingue las dos superficies que todavía compartían la característica -2.

Resolución del ejercicio 4

($\Leftarrow$) Si X es retracto de CX, entonces X es contráctil. El cono de cualquier espacio es contráctil: la homotopía $H([x,t],s) = [x,(1-s)t+s]$ lleva la identidad a la constante en el vértice. Y un retracto de un espacio contráctil es contráctil, como se probó en el capítulo 5. Luego X es contráctil. ■

($\Rightarrow$) Si X es contráctil, es retracto de CX. Por la caracterización de la contractibilidad, existe $H : X \times I \to X$ continua con

$$H(x,0) = x, \qquad H(x,1) = x_0 \quad \text{para todo } x \in X.$$

Se define $r : CX \to X$ por $r([x,t]) = H(x,t)$. Hay que ver tres cosas.

Está bien definida. La relación del cono identifica todos los puntos $(x,1)$ entre sí, y en ellos $H(x,1) = x_0$ para todo x: el valor no depende del representante.

Es continua. Por la propiedad universal del cociente: H es continua y compatible con la relación, luego induce una aplicación continua en el cociente.

Es una retracción. La inclusión de X en CX es $i(x) = [x,0]$, y

$$r(i(x)) = r([x,0]) = H(x,0) = x.$$

Luego $r \circ i = \mathrm{Id}_X$ y X es un retracto de CX. ■

QUÉ DEJA. La equivalencia es un buen resumen de para qué sirve el cono: *CX es la forma canónica de meter X en un espacio contráctil*, y X es contráctil exactamente cuando esa inclusión se puede deshacer. La demostración usa la propiedad universal en su forma más típica: una homotopía definida arriba baja al cociente porque es constante en el instante final.

Resolución del ejercicio 5

El cálculo. Por la fórmula del grupo fundamental de un producto, aplicada repetidamente,

$$\pi_1\big(T^m \times (P^2\mathbb{R})^n\big) \cong \pi_1(T)^m \times \pi_1(P^2\mathbb{R})^n \cong (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})^m \times (\mathbb{Z}_2)^n = \mathbb{Z}^{2m} \times \mathbb{Z}_2^n.$$

La caracterización dentro de la familia. Los grupos fundamentales que aparecen en $\mathcal{A}$ con $m+n>0$ son exactamente los de la forma

$$\mathbb{Z}^{2m} \times \mathbb{Z}_2^n, \qquad m,n \geq 0,\ m+n>0,$$

es decir: **un grupo abeliano finitamente generado, no trivial, cuyo rango libre es par y cuya parte de torsión es un producto de copias de $\mathbb{Z}_2$.**

Y la caracterización es completa, en el sentido de que el grupo determina el espacio dentro de la familia. Por el teorema de estructura de los grupos abelianos finitamente generados, la descomposición $\mathbb{Z}^r \times T$ con T finito es única salvo isomorfismo, luego

$$m = \frac{r}{2}, \qquad n = \text{número de factores } \mathbb{Z}_2,$$

quedan determinados por el grupo. Dos elementos de $\mathcal{A}$ con grupos fundamentales isomorfos tienen los mismos m y n, y por tanto son homeomorfos. Es esencial conocer que los espacios pertenecen a $\mathcal{A}$: fuera de ella, por ejemplo, T y $T \times S^2$ tienen el mismo grupo fundamental y no son homeomorfos. ■

Observación (Por qué la condición «rango par» no es redundante)**.** Podría parecer que basta decir «abeliano finitamente generado con torsión elemental de orden 2». No basta: el grupo $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2$ tiene rango uno, impar, y no es el grupo fundamental de ningún elemento de $\mathcal{A}$, porque cada toro aporta dos factores $\mathbb{Z}$ y el plano proyectivo no aporta ninguno.

Es, además, el mismo fenómeno del rango par que apareció en la clasificación de superficies: $\pi_1(M_n)_{ab} = \mathbb{Z}^{2n}$ tiene siempre rango par.

Qué buscaba este examen

- **Ejercicio 1.** Reconocer que un cociente que solo toca una coordenada es un producto, y saber decidir si algo es una superficie mirando el entorno de un punto sospechoso.
- **Ejercicio 2.** Usar Seifert-van Kampen *al revés*: no para calcular un grupo, sino para probar que una descomposición no puede existir.
- **Ejercicio 3.** El procedimiento completo del polígono de identificaciones, que es lo que cae en once de trece convocatorias.
- **Ejercicio 4.** Manejar la propiedad universal del cociente y la caracterización de la contractibilidad.
- **Ejercicio 5.** Calcular grupos fundamentales de productos y usar el teorema de estructura de los abelianos finitamente generados como herramienta de clasificación.

Errores típicos

- **Intentar dibujar Y en $\mathbb{R}^3$ a ojo** en el ejercicio 1, en vez de reconocer el producto. Se pierde mucho tiempo.
- **Contestar que Y es una superficie con borde** porque «localmente parece un cuadrado». Hay que mirar el punto de unión.
- **En el ejercicio 2, olvidar comprobar que el producto libre no es abeliano.** Sin eso no hay contradicción.
- **En el ejercicio 5, olvidar la paridad del rango** y dar una caracterización que incluya grupos que no aparecen.

B.2 Primera convocatoria de 2025-26, parte de geometría

Ficha

Asignatura	Geometría y topología de superficies, parte de geometría
Convocatoria	Primera, curso 2025-26
Fecha	8 de junio de 2026
Primer ejercicio	$3 + 3$ puntos
Segundo ejercicio	4 puntos

La nota que figura en el enunciado original:

> *No se valorará, ni parcialmente, ninguna respuesta que no esté debidamente justificada, aunque sea correcta.*

Enunciado

Primer ejercicio [$3 + 3$ puntos]. Se considera la s.r.

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = z^2,\ z > 0\}.$$

Sean Π_1 y Π_2 dos planos paralelos que cortan a M en sendas elipses α_1 y α_2, y sean β_1 y β_2 los meridianos resultantes de cortar M con el plano $x = 0$. Entre estas cuatro curvas encierran dos regiones en la pared de M. Denótese por R a una cualquiera de ellas. Se pide:

1. Dar una condición necesaria y suficiente para que, en R, se verifique que las curvaturas geodésicas integrales de α_1 y α_2 sean iguales.
2. Supuesto que dicha condición se verifica, sean γ_1 y γ_2 dos curvas regulares, cerradas, simples y disjuntas contenidas en el interior de R. Si R_1 y R_2 denotan las regiones encerradas por γ_1 y γ_2, respectivamente, en la pared de M, con $R_1 \cap R_2 = \emptyset$, y se escribe $R_3 = R - (R_1 \cup R_2)$, comprobar que se verifica el teorema de Gauss-Bonnet en R_3.

Segundo ejercicio [4 puntos]. Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. plana sin autointersecciones. Considérese la s.s.

$$\mathbf{x}(s, u) = \alpha(s) + r\big(\cos u\, \mathbf{n}(s) + \operatorname{sen} u\, \mathbf{b}(s)\big),$$

donde $r > 0$ es tal que $1 - rk(s)\cos u > 0$, siendo $k = k(s)$ la curvatura de α. Aplicar el teorema de Gauss-Bonnet a la región delimitada por las curvas paramétricas $s = s_0$, $s = s_1$, $u = u_0$ y $u = u_1$ para calcular la curvatura integral de la región.

ANTES DE LAS SOLUCIONES. Si estás simulando el examen, termina tu intento antes de seguir leyendo.

Resolución del primer ejercicio

Qué superficie es M, y los dos hechos que lo deciden todo

La ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ con $z > 0$ es la **hoja superior de un cono circular de semiángulo** $\pi/4$, sin el vértice: el origen cumple la ecuación pero no cumple $z > 0$, y es justamente el punto en el que el cono no sería una superficie regular. Se parametriza por la siguiente expresión, con el ángulo entendido módulo 2π (para una carta se restringe a un intervalo angular):

$$\mathbf{x}(t, \varphi) = (t\cos\varphi,\ t\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ t), \qquad t > 0.$$

Aquí t recorre la generatriz y φ da la vuelta. Todo el ejercicio descansa en dos hechos, y conviene aislarlos antes de tocar nada.

Hecho 1: $K \equiv 0$. Con esa parametrización,

$$\mathbf{X}_t = (\cos\varphi, \mathrm{sen}\,\varphi, 1), \qquad \mathbf{X}_\varphi = t(-\mathrm{sen}\,\varphi, \cos\varphi, 0),$$

luego $E = 2$, $F = 0$, $G = t^2$, y

$$\mathbf{X}_t \times \mathbf{X}_\varphi = t\,(-\cos\varphi,\ -\mathrm{sen}\,\varphi,\ 1), \qquad \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\varphi,\ -\mathrm{sen}\,\varphi,\ 1).$$

Como $\mathbf{X}_{tt} = 0$, sale $e = 0$; y $\mathbf{X}_{t\varphi} = (-\mathrm{sen}\,\varphi, \cos\varphi, 0)$ es ortogonal a $\mathbf{N}$, luego $f = 0$. Por tanto

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0.$$

Que $e = 0$ no es casualidad: las curvas $\varphi = \text{cte}$ son las **generatrices**, rectas contenidas en la superficie, y una recta contenida en una superficie tiene curvatura normal nula. El cono es desarrollable.

Hecho 2: los meridianos son geodésicas. El plano $x = 0$ corta a M en $\varphi = \pi/2$ y $\varphi = 3\pi/2$, es decir, en las dos generatrices contenidas en ese plano. Son **rectas de $\mathbb{R}^3$ contenidas en** M, y una recta contenida en una superficie es siempre geodésica: su vector curvatura es nulo, luego su componente tangente también. Así que

$$K_g \equiv 0 \quad \text{a lo largo de } \beta_1 \text{ y } \beta_2.$$

LA IDEA: EL CONO DESENROLLADO

El cono es plano en el sentido de Gauss, y eso significa algo muy concreto: se puede cortar por una generatriz y **extender sobre una hoja de papel sin estirarlo**. Merece la pena hacer la cuenta del sector que resulta, porque explica todo lo demás. Un punto a distancia ρ del vértice tiene altura $z = \rho/\sqrt{2}$, y el paralelo que pasa por él es una circunferencia de radio $z = \rho/\sqrt{2}$, de longitud $2\pi\rho/\sqrt{2}$. Al desenrollar, esa misma

curva es un arco de radio ρ; luego abarca un ángulo de

$$\frac{2\pi\rho/\sqrt{2}}{\rho} = \pi\sqrt{2} \approx 4{,}443 \text{ radianes.}$$

El cono es, desenrollado, un **sector plano de ángulo** $\pi\sqrt{2}$. Le faltan $2\pi - \pi\sqrt{2} \approx 1{,}84$ radianes para cerrarse: eso es el defecto angular del vértice, toda la curvatura del cono concentrada en el único punto que se ha quitado.
De aquí sale gratis un dato que conviene tener en la cabeza durante todo el ejercicio: si σ es una curva suave, cerrada y simple de M que rodea el eje, recorrida en el sentido de φ creciente en el paralelo de comparación, su curvatura geodésica integral vale exactamente el ángulo del sector. Para justificarlo incluso si la curva cruza varias veces la generatriz de corte, se compara con un paralelo situado por encima de toda ella: entre ambos hay un anillo con $K = 0$ y $\chi = 0$, y Gauss–Bonnet iguala las dos integrales con sentidos compatibles:

$$\int_\sigma K_g \, ds = \pi\sqrt{2},$$

sea cual sea la curva. Se comprueba con el paralelo $z = c$: desenrollado es un arco de radio $c\sqrt{2}$ y longitud $2\pi c$, luego $\int K_g = 2\pi c \cdot \frac{1}{c\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2}$. La curvatura geodésica integral no distingue entre curvas: solo ve cuánto cono rodean.

La observación que resuelve el apartado 1: las dos elipses son homotéticas

Sea $\Pi:\ ax + by + cz = d$ un plano. Sustituyendo la parametrización,

$$t\,(a\cos\varphi + b\,\mathrm{sen}\,\varphi + c) = d \qquad \Longrightarrow \qquad t(\varphi) = \frac{d}{a\cos\varphi + b\,\mathrm{sen}\,\varphi + c},$$

Para obtener una elipse en la hoja $t > 0$, se necesita $c^2 > a^2 + b^2$ y $cd > 0$: el denominador nunca se anula y tiene el mismo signo que d. Las dos secciones del enunciado ya satisfacen estas condiciones.

Ahora bien, **dos planos paralelos comparten** (a, b, c) **y solo difieren en** d. Luego

$$t_2(\varphi) = \frac{d_2}{d_1}\, t_1(\varphi) = \lambda\, t_1(\varphi), \qquad \lambda = \frac{d_2}{d_1} > 0,$$

y como el punto de la superficie es $t\,(\cos\varphi, \mathrm{sen}\,\varphi, 1)$, esto dice literalmente que

$$\boxed{\alpha_2 = h_\lambda(\alpha_1)}$$

donde $h_\lambda(p) = \lambda p$ es la **homotecia de centro el vértice y razón** λ. Esa homotecia deja M invariante, deja invariante cada generatriz (en particular β_1 y β_2), y multiplica todas las longitudes por λ.

Apartado 1: igualdad con sentidos de recorrido compatibles

Se comparan los arcos con el mismo sentido angular y con el normal **N** fijado. Como componentes del borde positivo de R, sus sentidos son opuestos y sus integrales tienen signos contrarios. Esta convención es necesaria para interpretar la palabra «iguales» del enunciado.

Primera vía: la homotecia. Una homotecia de razón λ multiplica las longitudes por λ y las curvaturas por $1/\lambda$. Por tanto multiplica la curvatura geodésica por $1/\lambda$ y el elemento de arco por λ, de modo que

$$\int K_g \, ds \quad \textbf{no cambia}.$$

Y h_λ lleva el arco de α_1 contenido en R exactamente sobre el arco de α_2 contenido en R, porque lleva β_1 en β_1 y β_2 en β_2 y respeta el semiespacio $x > 0$. Luego las dos curvaturas geodésicas integrales coinciden *cualesquiera que sean los dos planos paralelos*.

Segunda vía: Gauss-Bonnet. R es un cuadrilátero curvilíneo, luego simplemente conexo, y $\chi(R) = 1$. Su borde tiene cuatro lados: un arco de α_1, un trozo de β_1, un arco de α_2 y un trozo de β_2. Con $K \equiv 0$ y $K_g = 0$ en los dos lados meridianos, el teorema queda

$$\int_{\alpha_1 \cap R} K_g \, ds + \int_{\alpha_2 \cap R} K_g \, ds + \sum_{i=1}^{4} \theta_i = 2\pi,$$

donde los dos arcos van recorridos con la orientación del borde de R, que es opuesta en uno y en otro. Faltan los ángulos externos, y aquí vuelve a decidir la homotecia: como h_λ lleva la tangente de α_1 en p a la tangente de α_2 en λp, que es **paralela**, y la región R queda a un lado en el vértice de abajo y al otro en el de arriba, los dos ángulos internos de cada meridiano son **suplementarios**. Los cuatro internos suman 2π, los cuatro externos suman $4\pi - 2\pi = 2\pi$, y queda

$$\int_{\alpha_1 \cap R} K_g \, ds + \int_{\alpha_2 \cap R} K_g \, ds = 0,$$

que es la igualdad buscada una vez que se recorren las dos elipses en el mismo sentido alrededor del eje.

Entonces, ¿cuál es la condición? La honesta: **ninguna**, o mejor dicho, la condición ya está en la hipótesis y es **que los dos planos sean paralelos**. Eso es exactamente lo que hace que α_2 sea homotética de α_1, y es lo que permite esta demostración. Fuera de esas hipótesis, la igualdad puede ocurrir o no y requiere otro análisis; no se ha probado que el paralelismo sea necesario entre planos arbitrarios. Con planos paralelos se cumple sin ninguna condición extra sobre la inclinación de Π_1, sobre la distancia entre los dos planos ni sobre cuál de las dos regiones se llame R.

QUÉ DEJA. Un enunciado que pide «una condición necesaria y suficiente» no garantiza que la condición sea restrictiva. Cuando la cuenta sale sola, lo correcto es decirlo y demostrar la igualdad, no fabricar una condición artificial para que la respuesta tenga la forma que parecía esperarse. Aquí lo que hay que entregar es la homotecia, que es la razón de fondo, y la comprobación por Gauss-Bonnet, que es la que el examen quiere ver.

Apartado 2: Gauss-Bonnet en la región agujereada

Ahora se retiran los interiores de dos discos R_1 y R_2, disjuntos y contenidos en el interior de R, conservando sus fronteras γ_1, γ_2. Esta es la región compacta con borde a la que se aplica Gauss–Bonnet. Hay tres cosas que contar y todas son sencillas.

La característica. $R_3 = R - \big(\operatorname{int} R_1 \cup \operatorname{int} R_2\big)$ es un disco con dos agujeros, luego

$$\chi(R_3) = \chi(R) - \chi(R_1) - \chi(R_2) = 1 - 1 - 1 = -1.$$

Los bordes. ∂R_3 tiene tres componentes: el borde exterior ∂R, con sus cuatro vértices, recorrido como antes; y γ_1 y γ_2, recorridas **en sentido contrario**, porque en R_3 son bordes interiores y la región les queda al otro lado. No aportan ángulos externos: son curvas regulares cerradas, sin picos.

Lo que vale cada trozo. Aplicando Gauss-Bonnet a cada R_j, que es un disco con $K \equiv 0$ y borde regular,

$$\int_{\gamma_j} K_g \, ds = 2\pi\chi(R_j) = 2\pi, \qquad j = 1, 2,$$

y aplicándolo a R, que es lo que se hizo en el apartado anterior,

$$\oint_{\partial R} K_g \, ds + \sum_{i=1}^{4} \theta_i = 2\pi.$$

Con esto, el miembro izquierdo del teorema en R_3 vale

$$\underbrace{\iint_{R_3} K \, dA}_{=0} + \underbrace{\oint_{\partial R} K_g \, ds}_{=2\pi - \sum\theta_i} - \underbrace{\int_{\gamma_1} K_g \, ds}_{=2\pi} - \underbrace{\int_{\gamma_2} K_g \, ds}_{=2\pi} + \sum_{i=1}^{4} \theta_i = 2\pi - 4\pi = -2\pi,$$

y el derecho, $2\pi\chi(R_3) = 2\pi(-1) = -2\pi$. Coinciden: **el teorema se verifica**.

LA IDEA: QUIÉN PAGA CADA AGUJERO

La comprobación anterior no es una casualidad aritmética, y conviene ver de dónde sale cada 2π. Cada agujero que se abre en una región hace dos cosas a la vez: baja la característica de Euler en una unidad, o sea resta 2π al miembro derecho; y añade al borde una curva recorrida al revés, que resta al miembro izquierdo exactamente la $\int K_g = 2\pi$ que esa curva aportaba cuando era el borde de su propio disco. Los dos 2π son el mismo 2π, y por eso la igualdad sobrevive intacta a cualquier número de agujeros.

Dicho de otro modo: Gauss–Bonnet es compatible con el pegado. Las curvaturas geodésicas del borde común se cancelan. Para Euler se usa $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$: al pegar por una circunferencia la corrección es cero, y al pegar por un arco es uno; en este último caso también hay que ajustar los ángulos de los extremos. Comprobarlo en R_3 es comprobar esa aditividad en el caso $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$.

Resolución del segundo ejercicio

Qué superficie es

Es el **tubo de radio** r **alrededor de** α: para cada s, la circunferencia de radio r centrada en $\alpha(s)$ y contenida en el plano normal a la curva, el que generan $\mathbf{n}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$. Se entiende $k > 0$ para usar el triedro de Frenet. La condición $1 - rk\cos u > 0$ evita la degeneración del diferencial; si se exige para todos los ángulos, equivale a $r < 1/k(s)$. No excluye que porciones alejadas del tubo se corten. Para la región del ejercicio se trabaja en una carta inyectiva, como requiere la parametrización local.

Que α sea **plana** simplifica mucho: su torsión es nula, luego $\mathbf{b}$ es constante y las fórmulas de Frenet quedan en $\mathbf{t}' = k\mathbf{n}$, $\mathbf{n}' = -k\mathbf{t}$. Con eso,

$$\mathbf{X}_s = \mathbf{t} + r\cos u\,(-k\mathbf{t}) = (1 - rk\cos u)\,\mathbf{t}, \qquad \mathbf{X}_u = r(-\operatorname{sen} u\,\mathbf{n} + \cos u\,\mathbf{b}).$$

Como $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ y $\mathbf{b}$ son ortonormales,

$$E = (1 - rk\cos u)^2, \qquad F = 0, \qquad G = r^2.$$

Los tres ingredientes de Gauss-Bonnet

Uno: la región y su característica. La región R delimitada por $s = s_0$, $s = s_1$, $u = u_0$, $u = u_1$ es la imagen de un rectángulo contenido en esa carta inyectiva, con $s_0 < s_1$ y $u_0 < u_1$, luego un disco: $\chi(R) = 1$.

Dos: los ángulos externos valen todos $\pi/2$**.** Porque $F = 0$: las curvas paramétricas se cortan ortogonalmente. Los cuatro ángulos internos son rectos, los cuatro externos también, y

$$\sum_{i=1}^{4} \theta_i = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

De modo que el teorema se reduce a

$$\iint_R K\,dA = 2\pi\chi(R) - \oint_{\partial R} K_g\,ds - \sum \theta_i = 2\pi - \oint_{\partial R} K_g\,ds - 2\pi = -\oint_{\partial R} K_g\,ds.$$

Toda la curvatura integral está en el borde.

Tres: quién aporta al borde. Los dos lados $s = \text{cte}$ son **geodésicas**, y no hace falta ninguna fórmula para verlo. La curva $u \mapsto \mathbf{x}(s_0, u)$ es una circunferencia de radio r centrada en $\alpha(s_0)$; su vector curvatura apunta al centro, es decir, en la dirección de $-(\cos u\,\mathbf{n} + \operatorname{sen} u\,\mathbf{b})$, que es precisamente la normal a la superficie. Un vector curvatura normal a la superficie no tiene componente tangente: $K_g = 0$.

Quedan los lados $u = \text{cte}$. Con coordenadas ortogonales ($F = 0$), la fórmula de Liouville para la curva de segunda coordenada constante da

$$K_g = -\frac{E_u}{2E\sqrt{G}} = -\frac{2(1 - rk\cos u)\,rk\operatorname{sen} u}{2(1 - rk\cos u)^2\,r} = -\frac{k\operatorname{sen} u}{1 - rk\cos u}.$$

Y el elemento de arco a lo largo de esa curva es $\sqrt{E}\,ds = (1 - rk\cos u)\,ds$. Al multiplicar, **el denominador se cancela**:

$$\int_{u=\text{cte}} K_g\,ds = -\operatorname{sen} u \int_{s_0}^{s_1} k(s)\,ds.$$

El resultado

Recorriendo ∂R positivamente, el lado $u = u_0$ se recorre en el sentido de s creciente y el lado $u = u_1$ en el contrario, lo que cambia el signo de su aportación:

$$\oint_{\partial R} K_g \, ds = -\operatorname{sen} u_0 \int_{s_0}^{s_1} k \, ds + \operatorname{sen} u_1 \int_{s_0}^{s_1} k \, ds = (\operatorname{sen} u_1 - \operatorname{sen} u_0) \int_{s_0}^{s_1} k(s) \, ds.$$

Y por tanto

$$\boxed{\iint_R K \, dA = (\operatorname{sen} u_0 - \operatorname{sen} u_1) \int_{s_0}^{s_1} k(s) \, ds}$$

LA IDEA: POR QUÉ EL RADIO DESAPARECE

El resultado no depende de r, y eso es lo más llamativo. La razón está en la cancelación de arriba: donde el tubo se estrecha (cerca del lado cóncavo, $\cos u > 0$) la curvatura geodésica crece justo en la misma proporción en que se acorta el arco. El tubo solo recuerda **cuánto gira su eje**, $\int k \, ds$, y **qué franja angular se ha tomado**, $\operatorname{sen} u_0 - \operatorname{sen} u_1$. Dos comprobaciones que conviene hacer siempre con una fórmula así. Si se da la vuelta entera al tubo, $u_1 = u_0 + 2\pi$, los senos coinciden y la curvatura integral es **cero**; y en efecto, si además α es cerrada el tubo entero es un toro, que tiene $\chi = 0$ y curvatura total nula. Y si se toma la mitad exterior, $u \in (\pi/2, 3\pi/2)$, sale $\operatorname{sen} u_0 - \operatorname{sen} u_1 = 1 - (-1) = 2$, positivo: la mitad de fuera del tubo es convexa, como la parte exterior de un donut, y la de dentro es de silla. Se ve también en la curvatura puntual, que sale $K = -k \cos u / \big(r(1 - rk \cos u)\big)$: negativa donde $\cos u > 0$, o sea del lado al que apunta $\mathbf{n}$, que es el lado hacia el centro de curvatura.

Qué buscaba este examen

Los dos ejercicios son el mismo ejercicio con dos disfraces: **Gauss-Bonnet sobre una superficie de la que se sabe algo fuerte de antemano**, y las propiedades conocidas reducen las cuentas necesarias. En el tubo, por ejemplo, solo quedan dos lados y la fórmula de Liouville se simplifica inmediatamente.

En el primero lo fuerte es que **el cono es plano y sus generatrices son rectas**: eso anula la integral de K y dos de los cuatro lados del borde, y deja el teorema convertido en una relación entre lo que aportan las dos elipses y los cuatro ángulos. Lo que hay que ver, y es lo único verdaderamente fino del examen, es que **dos planos paralelos cortan al cono en dos elipses homotéticas desde el vértice**; a partir de ahí todo es consecuencia.

En el segundo lo fuerte es que **las coordenadas del tubo son ortogonales y las circunferencias transversales son geodésicas**: eso deja los cuatro ángulos rectos y solo dos lados aportando, y la cancelación del factor $1 - rk \cos u$ hace el resto.

Y el segundo apartado del primer ejercicio comprueba la **aditividad** del teorema: que quitar discos a una región descuenta lo mismo por los dos lados de la igualdad.

Errores típicos

- **Inventar una condición en el apartado 1.** El enunciado pide una condición necesaria y suficiente y la tentación es escribir una, por ejemplo que los planos sean perpendiculares al eje o que las elipses sean simétricas. No hace falta ninguna, y decirlo con la homotecia delante vale más que una condición falsa bien redactada.
- **Olvidar que el vértice no está en M.** Es lo que impide aplicar Gauss-Bonnet a la región encerrada por una sola elipse: esa región no es un disco de M, porque le falta el punto. De ahí que el examen construya un cuadrilátero con dos meridianos.
- **Contar mal $\chi(R_3)$.** Un disco con dos agujeros tiene $\chi = -1$, no 1 ni -2. Cada agujero resta uno.
- **Poner los ángulos externos donde van los internos.** El teorema lleva los **externos**, $\theta_i = \pi - (\text{interno})$. En el segundo ejercicio ambos valen $\pi/2$ y no se nota; en el primero sí.
- **En el tubo, integrar K_g respecto de s y no respecto del arco.** El elemento de arco de la curva $u = \text{cte}$ es $(1 - rk\cos u)\,ds$, y es precisamente ese factor el que se cancela y hace que el resultado sea limpio. Sin él no sale.
- **Suponer que $\mathbf{b}$ varía.** α es plana, luego $\tau = 0$ y $\mathbf{b}$ es constante. Si se arrastra un término de torsión, F deja de ser cero y los ángulos ya no son rectos.

B.3 Segunda convocatoria de 2024-25, parte de geometría

Ficha

Asignatura	Geometría y topología de superficies, parte de geometría
Convocatoria	Segunda, curso 2024-25
Fecha	3 de julio de 2025
Primer ejercicio	5 puntos, dos apartados
Segundo ejercicio	2 + 3 puntos

Nota que figura en el enunciado original: no se valorará, ni parcialmente, ninguna respuesta que no esté debidamente justificada, a juicio del corrector del examen, aunque sea correcta.

Enunciado

Primer ejercicio [5 puntos]. Sea C el cilindro circular $x^2 + z^2 = r^2$. En C se consideran las curvas siguientes: α, el resultado de cortar C con el plano $x = y$; y β, el paralelo $y = 0$. Sea R una de las regiones encerradas por α y β. Se pide:

1. Sin calcular la curvatura geodésica integral de α y sin dejar el resultado en función de ella, calcular la suma de los ángulos externos de R.
2. Calcular la curvatura geodésica integral de α.

Segundo ejercicio [2 + 3 puntos].

1. Sea M un plano y R una región simple de M cuya frontera no es una curva regular. Obtener una condición necesaria y suficiente para que la suma de los ángulos externos de R valga 2π.
2. En el plano $z = 0$ se considera la región R de la figura del enunciado, donde α y β son arcos de circunferencia. Probar que R verifica la condición del apartado anterior y, sin

usar el teorema de Gauss-Bonnet, comprobar que efectivamente la suma de los ángulos externos de R vale 2π.

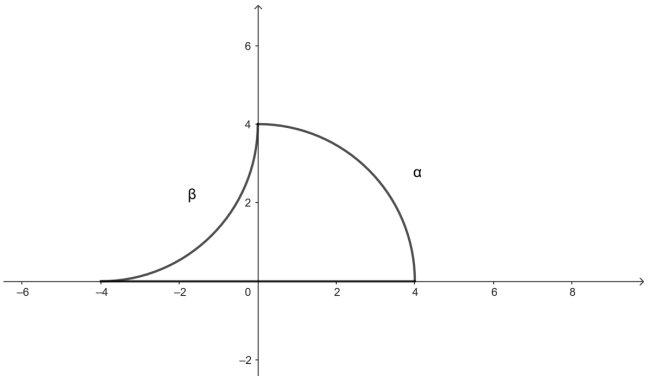


Figura del segundo ejercicio del enunciado original, julio de 2025.

ANTES DE LAS SOLUCIONES. Si estás simulando el examen, termina tu intento antes de seguir leyendo.

Resolución del primer ejercicio

Preparación: elegir bien la parametrización

El cilindro es $x^2 + z^2 = r^2$, de modo que su eje es el eje OY, no el OZ. Es un detalle del enunciado que conviene no pasar por alto, porque decide quién es un paralelo y quién un meridiano. La parametrización natural es

$$x(u, v) = (r\cos u,\ v,\ r\,\mathrm{sen}\, u), \qquad u \in (-\pi, \pi),\ v \in \mathbb{R}.$$

Se calculan los campos coordenados y los coeficientes métricos:

$$\mathbf{X}_1 = (-r\,\mathrm{sen}\, u,\ 0,\ r\cos u), \qquad \mathbf{X}_2 = (0, 1, 0),$$
$$g_{11} = r^2, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = 1, \qquad g = r^2.$$

Estos tres números son toda la geometría intrínseca del problema, y merece la pena leerlos antes de seguir. Como $g_{12} = 0$, las líneas paramétricas son ortogonales. Y si se cambia la variable u por

$$\widetilde{u} = r\,u,$$

la P.F.F. pasa a tener por matriz la identidad. Es decir: **la aplicación** $(\widetilde{u}, v) \mapsto x(\widetilde{u}/r, v)$ **conserva longitudes y ángulos**. Es el desenrollado del cilindro sobre un plano, y es lo que permite hacer todo el ejercicio con geometría elemental.

Se necesita además el campo normal, para los signos:

$$\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = (-r\cos u,\ 0,\ -r\,\mathrm{sen}\, u), \qquad \mathbf{N} = (-\cos u,\ 0,\ -\mathrm{sen}\, u),$$

que es el normal **interior**. Como $\mathbf{N}$ es exactamente $(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2)/|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|$, el triedro $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{N}\}$ es directo y la orientación del plano de parámetros es la que induce la superficie.

Las dos curvas y la región

El plano $x = y$ corta al cilindro en

$$\alpha(u) = (r\cos u,\ r\cos u,\ r\operatorname{sen} u),$$

porque $y = x = r\cos u$. En coordenadas, α es la curva $v = r\cos u$.

El paralelo $y = 0$ es $v = 0$, es decir,

$$\beta(u) = (r\cos u,\ 0,\ r\operatorname{sen} u),$$

que es la circunferencia de radio r obtenida al cortar el cilindro con el plano $y = 0$, perpendicular al eje.

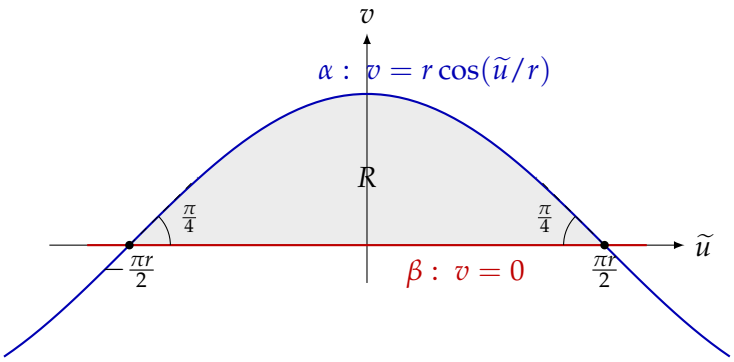
Se cortan donde $r\cos u = 0$, es decir, en $u = \pi/2$ y $u = 3\pi/2$, que corresponden a los puntos $(0, 0, r)$ y $(0, 0, -r)$. Hay por tanto **dos vértices**, y las dos curvas encierran dos regiones, simétricas entre sí por $(u, v) \mapsto (u + \pi, -v)$, con u módulo 2π. Se toma

$$R = \Big\{(u, v)\ :\ -\tfrac{\pi}{2} \le u \le \tfrac{\pi}{2},\ 0 \le v \le r\cos u\Big\},$$

y por la simetría el resultado no depende de cuál de las dos se elija.

Apartado 1: la suma de los ángulos externos

La clave es que el enunciado prohíbe usar la curvatura geodésica, y no hace ninguna falta: **los ángulos se leen en el desenrollado**.



El cilindro desenrollado: en las coordenadas $(\tilde{u}, v) = (ru, v)$ la P.F.F. es la identidad y los ángulos son los del plano. En los dos vértices la pendiente de α es ∓ 1, luego el ángulo interno es $\pi/4$ y el externo $3\pi/4$ en cada uno.

En las coordenadas $(\tilde{u}, v) = (ru, v)$, donde la P.F.F. es la identidad, las dos curvas son

$$\beta :\ v = 0, \qquad \alpha :\ v = r\cos\Big(\frac{\tilde{u}}{r}\Big),$$

y se cortan en $\tilde{u} = \pm r\pi/2$. La pendiente de α es

$$\frac{dv}{d\tilde{u}} = -r\operatorname{sen}\Big(\frac{\tilde{u}}{r}\Big)\cdot\frac{1}{r} = -\operatorname{sen}\Big(\frac{\tilde{u}}{r}\Big),$$

que vale -1 en $\tilde{u} = r\pi/2$ y $+1$ en $\tilde{u} = -r\pi/2$.

Vértice $\tilde{u} = r\pi/2$, es decir, el punto $(0, 0, r)$. Desde él, los dos lados de R salen hacia $\tilde{u}$ decreciente: el lado β en la dirección $(-1, 0)$ y el lado α en la dirección $(-1, +1)$, porque su

pendiente es -1 y se avanza en el sentido de $\widetilde{u}$ decreciente. El ángulo entre $(-1,0)$ y $(-1,1)$ es

$$\arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4},$$

y ese es el ángulo interno, porque R ocupa precisamente el sector comprendido entre las dos direcciones.

Vértice $\widetilde{u} = -r\pi/2$, el punto $(0,0,-r)$. Por la simetría $\widetilde{u} \mapsto -\widetilde{u}$, que deja invariante a R, el ángulo interno vale también $\pi/4$.

Los ángulos externos son los suplementarios, y son positivos porque los dos vértices son convexos:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Por tanto

$$\boxed{\sum_{i=1}^{2} \varphi_i = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}}$$

Obsérvese que no se ha calculado ninguna curvatura, ni geodésica ni de otro tipo, y que tampoco se ha usado el teorema de Gauss-Bonnet: se ha usado que el cilindro se desenrolla sin deformar ángulos, que es un hecho sobre la P.F.F..

Apartado 2: la curvatura geodésica integral de α

Ahora sí entra Gauss-Bonnet, y entra precisamente para *evitar* el cálculo.

Tres observaciones y la cuenta sale sola.

Primera: $K \equiv 0$**.** El cilindro es una superficie desarrollable. Se ve sin calcular nada: la P.F.F. en las coordenadas $(\widetilde{u}, v)$ es la identidad, igual que la del plano, y la curvatura de Gauss es una cantidad intrínseca por el teorema egregio; luego K es la del plano, es decir, cero. Por tanto $\iint_R K\,dA = 0$.

Segunda: β **es una geodésica.** En el desenrollado, β es la recta $v = 0$, y las geodésicas del plano son las rectas. Como ser geodésica es una propiedad intrínseca, β lo es en el cilindro y $\int_\beta K_g\,ds = 0$.

Se puede comprobar también sin desenrollar: $\beta''(u) = (-r\cos u, 0, -r\operatorname{sen} u)$ es paralelo a $\mathbf{N} = (-\cos u, 0, -\operatorname{sen} u)$, y una curva cuya normal principal es paralela al normal de la superficie es una geodésica.

Tercera: R **es una región simple.** Es homeomorfa a un disco y su frontera es una curva cerrada, simple y regular a trozos con dos vértices. Luego $\chi(R) = 1$.

Con esto, el teorema de Gauss-Bonnet aplicado a R dice

$$\int_\alpha K_g\,ds + \underbrace{\int_\beta K_g\,ds}_{=0} + \underbrace{\iint_R K\,dA}_{=0} + \underbrace{\sum \varphi_i}_{=3\pi/2} = 2\pi \cdot 1,$$

de donde

$$\boxed{\int_\alpha K_g\,ds = 2\pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}}$$

Aquí se ha integrado únicamente el **arco** $\alpha \cap R$, orientado como parte de la frontera de R. Si «α» designa la elipse cerrada completa, como en el enunciado, el resultado es otro:

$$\boxed{\oint_\alpha K_g\,ds = 0.}$$

En efecto, se compara con un paralelo situado por encima de toda la elipse. Entre ambas curvas hay un anillo del cilindro: $K = 0$, $\chi = 0$, y el paralelo es geodésico. Gauss–Bonnet da entonces integral cero para la elipse completa. Es esencial distinguir la curva completa del arco que bordea R.

Otra vía (comprobación directa del arco). La prohibición de calcular esta curvatura figura en el apartado 1. El apartado 2 pide calcularla; la siguiente cuenta comprueba el valor del arco, no de la elipse completa.

En el desenrollado, α es la curva $v = r\cos(\widetilde{u}/r)$ del plano euclídeo, y la integral de la curvatura geodésica de una curva plana es la variación total del ángulo de su tangente. El vector tangente es proporcional a

$$\Big(1,\ -\operatorname{sen}\frac{\widetilde{u}}{r}\Big),$$

cuyo ángulo pasa de $\pi/4$ en $\widetilde{u} = -r\pi/2$ a $-\pi/4$ en $\widetilde{u} = +r\pi/2$, de forma monótona. La variación total al recorrer α con $\widetilde{u}$ creciente es $-\pi/2$.

Y la orientación positiva de ∂R recorre α con $\widetilde{u}$ *decreciente*: como $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{N}\}$ es directo, el sentido positivo en el plano de parámetros es el antihorario, que en R significa avanzar por el lado β, que está abajo, con $\widetilde{u}$ creciente, y volver por α, que está arriba, con $\widetilde{u}$ decreciente. Al invertir el sentido, la variación total cambia de signo y queda $+\pi/2$. ✓

Resolución del segundo ejercicio

Apartado 1: la condición en el plano

Sea M un plano y $R \subseteq M$ una región simple cuya frontera no es regular, es decir, que tiene al menos un vértice.

Se aplica el teorema de Gauss-Bonnet. Al ser R simple, $\chi(R) = 1$; y al ser M un plano, $K \equiv 0$. Queda

$$\oint_{\partial R} K_g\, ds + 0 + \sum_i \varphi_i = 2\pi.$$

Por tanto

$$\boxed{\sum_i \varphi_i = 2\pi \iff \oint_{\partial R} K_g\, ds = 0}$$

donde la integral significa, como siempre, la suma de las integrales sobre los arcos regulares de la frontera, cada uno orientado positivamente.

Y esa condición se puede decir en el lenguaje del plano, que es lo que da sentido al enunciado. En un plano, la curvatura geodésica de una curva coincide, salvo el signo que fija la orientación, con su curvatura como curva plana. Luego la condición es: *la curvatura total con signo de los arcos regulares de la frontera debe anularse*.

Dos lecturas de esa condición, y merece la pena tener las dos:

- **Es automática si todos los arcos son segmentos rectilíneos**, porque entonces $K_g \equiv 0$. Se recupera así el hecho elemental de que los ángulos externos de un polígono plano suman 2π, y se ve de dónde viene: no de que el polígono sea convexo ni de cuántos lados tenga, sino de que sus lados sean rectos.
- **Si hay arcos curvos, tienen que compensarse.** Lo que un arco gira hacia un lado lo tiene que deshacer otro girando hacia el otro. Un único arco de circunferencia con el resto de la frontera recta no cumple la condición.

Apartado 2: los dos arcos y la punta

La figura tiene un segmento sobre el eje x, desde $(-4,0)$ hasta $(4,0)$, y dos cuartos de circunferencia de radio 4. El arco α tiene centro $(0,0)$; el arco β tiene centro $(-4,4)$. Se recorre el borde positivamente: primero el segmento hacia la derecha, después α hasta $(0,4)$ y finalmente β hasta $(-4,0)$.

El segmento aporta cero. En α la tangente gira $\pi/2$ en sentido positivo, y en β gira $\pi/2$ en sentido negativo. Por tanto

$$\int_\alpha K_g\,ds + \int_\beta K_g\,ds = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0,$$

y se cumple la condición del apartado 1.

Ahora se comprueban los ángulos *sin* usar Gauss–Bonnet. En $(4,0)$ la tangente pasa de apuntar a la derecha a apuntar hacia arriba: giro $\pi/2$. En $(0,4)$ pasa de apuntar a la izquierda a apuntar hacia abajo: otro giro positivo $\pi/2$. En $(-4,0)$ está la **punta**: se llega hacia la izquierda y se sale hacia la derecha, con ángulo interior cero y ángulo externo π. Así,

$$\boxed{\sum_i \varphi_i = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi = 2\pi.}$$

La punta no puede omitirse aunque los dos trazos tengan allí la misma recta tangente.

Qué buscaba este examen

- **Primer ejercicio, apartado 1.** Que el alumno sepa que los ángulos pueden leerse en el desenrollado: tras el cambio $\widetilde{u} = ru$, la matriz de la P.F.F. es la identidad. También se pueden calcular con productos escalares de las tangentes en $\mathbb{R}^3$.
- **Primer ejercicio, apartado 2.** Que el alumno use Gauss-Bonnet en la dirección inversa a la habitual: no para hallar la curvatura integral conocidos los ángulos, sino para hallar la curvatura geodésica integral conocidos los ángulos y sabiendo que $K = 0$. Es el uso que más se repite en las convocatorias recientes.
- **Segundo ejercicio.** Que el alumno sepa que el teorema, aplicado al caso más pobre posible — el plano —, no da cero: da un enunciado de geometría elemental que se creía sabido desde el instituto.

Errores típicos

- **Confundir el eje del cilindro.** $x^2 + z^2 = r^2$ tiene el eje en OY. Quien parametriza como si fuera $x^2 + y^2 = r^2$ obtiene otras curvas y otro resultado.
- **Tomar el ángulo equivocado en el vértice.** Entre dos curvas que se cortan hay dos ángulos suplementarios, y el interno es el que abre hacia la región. Aquí sale $\pi/4$; quien toma $3\pi/4$ obtiene $\sum \varphi_i = \pi/2$ y una curvatura geodésica integral del arco de $3\pi/2$.
- **Olvidar que K_g cambia de signo con el sentido de recorrido.** El arco $\alpha \cap R$ aporta $+\pi/2$ orientado positivamente respecto de R; con el otro sentido aporta $-\pi/2$. La elipse completa tiene integral cero.
- **Dar por hecho que la normal es la exterior.** En esta parametrización del cilindro sale la interior. No cambia los ángulos, pero sí el signo del determinante con el que se comprueba que los ángulos externos son positivos.

B.4 Primera convocatoria de 2024-25, parte de geometría

Ficha

Asignatura	Geometría y topología de superficies, parte de geometría
Convocatoria	Primera, curso 2024-25
Fecha	4 de junio de 2025
Primer ejercicio	5 puntos, dos apartados
Segundo ejercicio	5 puntos, dos apartados

Las dos notas que figuran en el enunciado original:

> *Primera nota muy importante. En ninguno de los apartados de los ejercicios que siguen podrá razonarse usando el cálculo explícito de la curvatura geodésica de cualquiera de las curvas que aparecen.*
>
> *Segunda nota muy importante. No se valorará, ni parcialmente, ninguna respuesta que no esté debidamente justificada, a juicio del corrector del examen, aunque sea correcta.*

Enunciado

Primer ejercicio [5 puntos]. Se considera la s.r. M dada por la ecuación $y = x^2 + 1$. En ella, sean la recta r de ecuaciones $x = 1$, $y = 2$, y un arco de curva regular α en M, sin autointersecciones, que solo corta a r en los puntos $(1, 2, 1)$ y $(1, 2, 2)$ y tal que en el primero de ellos forma ángulo de $\pi/2$ con r. Se pide:

1. ¿Qué consecuencia se obtiene al aplicar el teorema de Gauss-Bonnet a la región encerrada por r y α?
2. ¿Es posible que α sea una geodésica de M?

Segundo ejercicio [5 puntos]. Sea C el cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$. En C se consideran las curvas siguientes: α, el resultado de cortar C con el plano $x = z$; β, el meridiano $x = 1$, $y = 0$; y γ, el paralelo $z = 0$. Sea R la región encerrada por α, β y γ en el semiespacio $x \geq 0$. Se pide:

1. Calcular la suma de los ángulos externos de R.
2. Probar o refutar la siguiente afirmación: α es una geodésica de C.

ANTES DE LAS SOLUCIONES. Si estás simulando el examen, termina tu intento antes de seguir leyendo.

Resolución del primer ejercicio

Qué superficie es M

La ecuación $y = x^2 + 1$ no impone ninguna condición sobre z. Es, por tanto, el **cilindro parabólico** que se obtiene al trasladar la parábola $y = x^2 + 1$ del plano $z = 0$ a lo largo del eje OZ. Se parametriza globalmente por

$$x(u, v) = (u,\ u^2 + 1,\ v), \qquad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

que es una p.l. de toda M: es una gráfica.

Las dos cosas que hacen falta se obtienen de un cálculo corto.

$$\mathbf{X}_1 = (1, 2u, 0), \qquad \mathbf{X}_2 = (0, 0, 1), \qquad \mathbf{X}_{11} = (0, 2, 0), \qquad \mathbf{X}_{12} = \mathbf{X}_{22} = (0, 0, 0).$$

$$\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = (2u, -1, 0), \qquad \mathbf{N} = \frac{(2u, -1, 0)}{\sqrt{1 + 4u^2}}.$$

De ahí los coeficientes de la S.F.F.:

$$L_{11} = \mathbf{X}_{11} \cdot \mathbf{N} = \frac{-2}{\sqrt{1 + 4u^2}}, \qquad L_{12} = 0, \qquad L_{22} = 0,$$

y por tanto

$$K = \frac{L_{11} L_{22} - L_{12}^2}{g} = 0.$$

M **tiene curvatura de Gauss idénticamente nula.** Es lo esperable: es un cilindro sobre una curva plana, es decir, una superficie reglada desarrollable, y las una superficie con $K = 0$ es localmente isométrica al plano. Aquí el desarrollo puede construirse directamente usando la longitud de arco de la parábola como coordenada.

Qué es la recta r

Las ecuaciones $x = 1$, $y = 2$ describen la recta vertical que pasa por $(1, 2, 0)$ con dirección $(0, 0, 1)$. Y está contenida en M, porque $2 = 1^2 + 1$. En la parametrización es la línea $u = 1$, es decir, una generatriz del cilindro.

Una recta contenida en una superficie es siempre una geodésica de esa superficie: parametrizada por su longitud de arco tiene $\ddot{\alpha} = 0$, luego su derivada covariante es nula. Por tanto

$$\int_r K_g \, ds = 0.$$

Apartado 1: qué dice Gauss-Bonnet

La región R encerrada por r y α está limitada por el segmento de r entre $(1,2,1)$ y $(1,2,2)$ y por el arco α, que no tiene autointersecciones y no corta a r en ningún otro punto. Es, pues, una **región simple** con dos vértices, que son esos dos puntos, y $\chi(R) = 1$.

Sea φ_1 el ángulo externo en $(1,2,1)$ y φ_2 el de $(1,2,2)$. En el primero, el enunciado dice que α y r forman ángulo $\pi/2$. Como las dos determinaciones posibles del ángulo entre dos curvas perpendiculares valen las dos $\pi/2$, no hay ambigüedad: el ángulo interno vale $\pi/2$ y

$$\varphi_1 = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

El teorema de Gauss-Bonnet aplicado a R da entonces

$$\int_\alpha K_g\, ds + \underbrace{\int_r K_g\, ds}_{=0} + \underbrace{\iint_R K\, dA}_{=0} + \varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi,$$

y sustituyendo $\varphi_1 = \pi/2$ resulta

$$\boxed{\int_\alpha K_g\, ds + \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}}$$

Esa es la consecuencia. Se puede decir también en términos del ángulo interno $\psi_2 = \pi - \varphi_2$ en el segundo vértice:

$$\int_\alpha K_g\, ds = \frac{\pi}{2} + \psi_2.$$

Es decir: *la curvatura geodésica total del arco α queda completamente determinada por el ángulo con que llega a r en el segundo punto*, sin que importe nada de lo que α haga por el camino.

EXPLÍCATE. *Antes de leer el apartado siguiente, mira la igualdad enmarcada y pregúntate qué valores puede tomar φ_2. La respuesta está en la definición de ángulo externo y contesta el apartado 2 sola.*

Apartado 2: ¿puede α ser geodésica?

No, y la razón cabe en dos líneas.

Si α fuera una geodésica de M, se tendría $K_g \equiv 0$ a lo largo de α y por tanto $\int_\alpha K_g\, ds = 0$. La igualdad del apartado anterior obligaría entonces a

$$\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}.$$

Pero un ángulo externo cumple siempre, por definición,

$$|\varphi_2| \leq \pi,$$

porque es la *menor* determinación del ángulo entre las dos derivadas laterales. Y $3\pi/2 > \pi$. Contradicción.

Queda por descartar el caso en que $(1,2,2)$ no sea un vértice, es decir, que α llegue a r tangencialmente y la frontera sea regular ahí. Entonces no hay φ_2 que sumar, la igualdad de Gauss-Bonnet queda $\int_\alpha K_g\, ds = 3\pi/2$, y una geodésica daría $0 = 3\pi/2$, también absurdo.

En los dos casos posibles se llega a contradicción, luego

$$\boxed{\alpha \text{ no puede ser una geodésica de } M}$$

■

QUÉ DEJA. Este apartado es el prototipo del ejercicio que esta asignatura pregunta cada año: una imposibilidad demostrada con una *cota*, no con un cálculo. La cota $|\varphi_i| \leq \pi$ parece un tecnicismo de la definición de ángulo externo y es, de hecho, la herramienta que cierra el problema. Merece la pena guardar el patrón: cuando Gauss-Bonnet deja una igualdad con dos incógnitas y una de ellas es un ángulo externo, casi siempre la respuesta está en que los ángulos externos no pueden ser tan grandes como haría falta.

Resolución del segundo ejercicio

Apartado 1

Este apartado es exactamente el ejercicio resuelto en la sección 1.3.1 del capítulo 1, y no se repite aquí el detalle. El hilo es este:

Con la p.l. $x(u,v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$ los coeficientes métricos son $g_{11} = g_{22} = 1$ y $g_{12} = 0$, de modo que la P.F.F. es la identidad y los ángulos se miden en el plano (u,v). Allí, γ es la recta $v = 0$, β es la recta $u = 0$ y α es la gráfica $v = \cos u$; la condición $x \geq 0$ recorta $u \in [-\pi/2, \pi/2]$, y las tres curvas encierran dos regiones triangulares simétricas. Los ángulos internos son $\pi/2$, $\pi/2$ y $\pi/4$, luego los externos son $\pi/2$, $\pi/2$ y $3\pi/4$, y

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3} \varphi_i = \frac{7\pi}{4}}$$

Apartado 2: α no es una geodésica

Hay que probarlo o refutarlo, y **sin calcular la curvatura geodésica**. Se dan dos argumentos independientes; con uno basta.

Primer argumento: por la normal principal.

De *Geometría local* se sabe que una curva regular contenida en una superficie, con curvatura estrictamente positiva, es una geodésica si y solo si su normal principal $\mathbf{n}$ es paralela al normal $\mathbf{N}$ de la superficie en cada punto, es decir, $\mathbf{n} = \pm\mathbf{N}$. Esa hipótesis se cumple aquí porque α es una elipse regular; ser simplemente «no recta» no excluiría puntos de curvatura cero.

La curva α es la intersección del cilindro con el plano $x = z$, luego está contenida en ese plano. Y la normal principal de una curva contenida en un plano está contenida en la dirección de ese plano: en efecto, α' y α'' pertenecen al espacio de direcciones del plano por estar α contenida en él, y $\mathbf{n}$ es proporcional a la parte de $\ddot{\alpha}$ ortogonal a $\mathbf{t}$.

El plano $x = z$ tiene por vector normal $(1, 0, -1)$. Un vector w está en su dirección si y solo si $w \cdot (1, 0, -1) = 0$. Ahora bien, el normal del cilindro es $\mathbf{N} = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0)$, y

$$\mathbf{N} \cdot (1, 0, -1) = \cos u,$$

que solo se anula para $u = \pi/2$ y $u = 3\pi/2$.

Por tanto $\mathbf{N}$ pertenece a la dirección del plano *solo en dos puntos*, mientras que $\mathbf{n}$ le pertenece en todos. La igualdad $\mathbf{n} = \pm\mathbf{N}$ es imposible salvo en esos dos puntos aislados, luego α no es una geodésica. ■

Segundo argumento: por el desenrollado.

Como $g_{11} = g_{22} = 1$ y $g_{12} = 0$, la P.F.F. del cilindro en esta p.l. coincide con la del plano euclídeo en coordenadas cartesianas. Y ser geodésica es una propiedad *intrínseca*: la curvatura geodésica se calcula solo con los coeficientes métricos y sus derivadas. Luego las geodésicas del cilindro son exactamente las imágenes de las rectas del plano (u, v).

En ese plano, α es la curva $v = \cos u$, que no es una recta. Luego α no es una geodésica. ■

Observación. El segundo argumento tiene, de propina, la lista completa de las geodésicas del cilindro, que conviene tener memorizada porque el examen vuelve una y otra vez sobre esta superficie: son las imágenes de las rectas del plano (u, v), es decir, **los meridianos** (rectas $u = \text{cte.}$), **los paralelos** (rectas $v = \text{cte.}$) y **las hélices circulares** (rectas $v = au + b$ con $a \neq 0$). Y ninguna otra.

Qué buscaba este examen

- **Primer ejercicio.** No pide calcular nada: pide darse cuenta de que Gauss-Bonnet, aplicado a una región de la que apenas se sabe nada, deja una *igualdad*, y de que esa igualdad tiene consecuencias porque los ángulos externos están acotados. El atajo que ahorra tiempo es no intentar averiguar qué curva es α: no hace falta, y el enunciado no la da a propósito.
- **Segundo ejercicio.** Que el alumno sepa medir ángulos sin integrar, y que tenga al menos un criterio de geodesicidad que no pase por calcular K_g. El atajo es, otra vez, el desenrollado del cilindro.

Errores típicos

- **Intentar identificar α en el primer ejercicio.** Es una curva cualquiera y los datos no determinan una curva única. Gauss–Bonnet permite razonar sin buscar una parametrización concreta.
- **Usar φ_2 sin acotarlo.** La respuesta del apartado 2 está íntegramente en la cota $|\varphi_i| \leq \pi$. Sin ella no hay contradicción y el ejercicio se queda a medias.
- **Calcular K_g de α en el segundo ejercicio.** Está expresamente prohibido por la primera nota del enunciado, y esa nota anula el apartado entero aunque el resultado sea correcto.
- **Olvidar que la región son dos.** Las tres curvas encierran dos regiones simétricas en $x \geq 0$; conviene decirlo y decir que por simetría da lo mismo cuál se tome.

B.5 Prueba de evaluación de 2024-25, parte de geometría

Ficha

Asignatura	Geometría y topología de superficies, parte de geometría
Convocatoria	Prueba de evaluación, curso 2024-25
Fecha	3 de marzo de 2025
Primer ejercicio	7 puntos
Segundo ejercicio	3 puntos, tres apartados

Nota del enunciado original: no se valorará, ni parcialmente, ninguna respuesta que no esté debidamente justificada, aunque sea correcta.

Enunciado

Primer ejercicio [7 puntos]. Sea el hiperboloide de revolución $x^2 - y^2 + z^2 = 1$. Se consideran los meridianos α_1 y α_2 resultantes de cortar el hiperboloide con los planos $z = 0$ — eligiendo el que verifica $x > 0$ — y $x = 0$ — eligiendo el que verifica $z > 0$ —, respectivamente, y los paralelos β_1 y β_2 resultantes de cortar el hiperboloide con los planos $y = 0$ e $y = \sqrt{3}$, respectivamente. Sea R la región encerrada por esas cuatro curvas contenida en el primer octante. Calcular la curvatura integral de R.

Segundo ejercicio [3 puntos].

1. Sea M una s.r. orientable. Dar una condición necesaria y suficiente para que los ángulos externos de todo polígono geodésico de n lados, con $n \geq 3$, que encierre una región simple en M, sumen 2π.
2. Dar un ejemplo de s.r. orientable M y de una región simple de M que verifique la condición anterior y cuya frontera sea un polígono de tres o más lados tal que sus ángulos externos no sumen 2π.
3. Dar un ejemplo de s.r. orientable M y de una región simple de M cuya frontera sea un polígono *geodésico* de tres o más lados tal que sus ángulos externos no sumen 2π.

ANTES DE LAS SOLUCIONES. Si estás simulando el examen, termina tu intento antes de seguir leyendo.

Resolución del primer ejercicio

Qué superficie es y cómo parametrizarla

La ecuación $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ se reescribe $x^2 + z^2 = 1 + y^2$: es el **hiperboloide de una hoja con eje** OY. El detalle importa, porque decide quiénes son los meridianos y quiénes los paralelos.

Se parametriza como superficie de revolución alrededor de OY de la rama de hipérbola $x = \sqrt{1+u^2}$, $y = u$:

$$x(u,v) = \big(\sqrt{1+u^2}\cos v,\ u,\ \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{sen}\, v\big), \qquad u \in \mathbb{R},\ v \in (-\pi, \pi).$$

Las cuatro curvas del enunciado son, en estas coordenadas:

- α_1, corte con $z = 0$ y $x > 0$: es $v = 0$, un **meridiano**;
- α_2, corte con $x = 0$ y $z > 0$: es $v = \pi/2$, otro **meridiano**;
- β_1, corte con $y = 0$: es $u = 0$, un **paralelo**;
- β_2, corte con $y = \sqrt{3}$: es $u = \sqrt{3}$, otro **paralelo**.

La región del primer octante es, pues, el rectángulo de coordenadas

$$R = \{(u,v)\ :\ 0 \leq u \leq \sqrt{3},\ 0 \leq v \leq \pi/2\},$$

una región simple con cuatro vértices y $\chi(R) = 1$.

Los coeficientes métricos

$$\mathbf{X}_1 = \Big(\tfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}\cos v,\ 1,\ \tfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}\operatorname{sen} v\Big), \qquad \mathbf{X}_2 = \big(-\sqrt{1+u^2}\operatorname{sen} v,\ 0,\ \sqrt{1+u^2}\cos v\big),$$

de donde

$$g_{11} = \frac{u^2}{1+u^2} + 1 = \frac{1+2u^2}{1+u^2}, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = 1+u^2,$$

y por tanto

$$\sqrt{g} = \sqrt{g_{11}g_{22}} = \sqrt{1+2u^2}.$$

Que $g_{12} = 0$ no es casualidad: **en toda superficie de revolución los meridianos y los paralelos son ortogonales**. Es el hecho que ahorra el trabajo de los ángulos.

Los cuatro sumandos de Gauss-Bonnet

Los ángulos. Como $g_{12} = 0$, las cuatro esquinas del rectángulo de coordenadas son ángulos rectos, luego los cuatro ángulos internos valen $\pi/2$ y los cuatro externos también:

$$\sum_{i=1}^{4} \varphi_i = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

Los meridianos son geodésicas. En toda superficie de revolución los meridianos lo son. Se ve sin calcular: cada meridiano está contenido en un plano que corta a la superficie perpendicularmente, de modo que su normal principal coincide con la normal de la superficie, y esa es la caracterización de geodésica. Luego α_1 y α_2 no aportan curvatura geodésica.

Los paralelos. Por la fórmula de Liouville, con $\dot{u}_1 = 0$,

$$K_g = \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u}\,\dot{u}_2 = \frac{2u}{2\sqrt{1+2u^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{u}{\sqrt{1+2u^2}\sqrt{1+u^2}}.$$

La longitud del arco de paralelo con $v \in [0, \pi/2]$ es $\frac{\pi}{2}\sqrt{1+u^2}$, luego

$$\int_{\text{paralelo } u} K_g\, ds = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{u}{\sqrt{1+2u^2}}.$$

Para β_1, con $u = 0$, esto vale **cero**: el paralelo $y = 0$ es la *garganta* del hiperboloide y es una geodésica. Para β_2, con $u = \sqrt{3}$,

$$\Big|\int_{\beta_2} K_g\, ds\Big| = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

El resultado

Gauss-Bonnet en la región simple R:

$$\underbrace{0}_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1} + \int_{\beta_2} k_g\, ds + \iint_R K\, dA + \underbrace{2\pi}_{\text{ángulos}} = 2\pi,$$

de donde

$$\iint_R K\, dA = -\int_{\beta_2} k_g\, ds.$$

El signo se fija con la geometría: el hiperboloide de una hoja tiene todos sus puntos hiperbólicos, luego $K < 0$ y la curvatura integral tiene que ser negativa. Por tanto

$$\boxed{\iint_R K\, dA = -\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} \simeq -1{,}028}$$

Otra vía (comprobación integrando K). Este enunciado no prohíbe integrar K. La cuenta directa también resuelve el problema; Gauss–Bonnet ofrece una segunda lectura a partir del borde. Para este hiperboloide, la curvatura de Gauss vale $K = -\dfrac{1}{(1+2u^2)^2}$. Entonces

$$\iint_R K\, dA = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{-1}{(1+2u^2)^2}\sqrt{1+2u^2}\, du\, dv = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{du}{(1+2u^2)^{3/2}}.$$

Y como

$$\frac{d}{du}\Big[\frac{u}{\sqrt{1+2u^2}}\Big] = \frac{1}{\sqrt{1+2u^2}} - \frac{2u^2}{(1+2u^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+2u^2)^{3/2}},$$

la integral vale $\big[u/\sqrt{1+2u^2}\big]_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}/\sqrt{7}$, y se recupera exactamente el mismo número. ✓

Resolución del segundo ejercicio

Apartado 1

Sea P un polígono geodésico de n lados que encierra una región simple. Como los lados son geodésicos y $\chi = 1$, la versión local del teorema da

$$\iint_P K\, dA + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 2\pi,$$

luego

$$\sum_i \varphi_i = 2\pi \iff \iint_P K\, dA = 0.$$

Y si eso ha de valer **para todo** polígono geodésico que encierre una región simple, entonces la curvatura integral se anula sobre todas esas regiones. Si $K(p) \neq 0$, por continuidad tiene el mismo signo y está separada de cero en un entorno de p. Dentro de un entorno geodésicamente convexo suficientemente pequeño se puede elegir un triángulo geodésico de área positiva. Su integral de K tiene ese signo y no puede ser cero: contradicción. Como p es arbitrario,

$$\boxed{\text{la condición es } K \equiv 0}$$

El recíproco se lee en la misma equivalencia y en el mismo sentido: si $K \equiv 0$, la integral $\iint_P K\,dA$ se anula sobre cualquier región, luego la suma de los ángulos externos vale 2π para todo polígono geodésico.

Apartado 2: $K \equiv 0$ ***pero el polígono no es geodésico***

Se pide una superficie con $K \equiv 0$ — para que cumpla la condición del apartado anterior — y una región simple cuyo borde **no** sea geodésico, de modo que la suma no sea 2π.

Ejemplo: el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, que es orientable y desarrollable, con la región triangular limitada por el paralelo $z = 0$, el meridiano $x = 1$, $y = 0$ y la curva α obtenida al cortar con el plano $x = z$, en el semiespacio $x \geq 0$.

Es exactamente la región del segundo ejercicio de la primera convocatoria de 2024-25, donde se obtuvo

$$\sum_{i=1}^{3} \varphi_i = \frac{7\pi}{4} \neq 2\pi.$$

La razón es que α no es una geodésica del cilindro: en el desenrollado es la curva $z = \cos u$, que no es una recta. Su curvatura geodésica integral vale $\pi/4$, y $7\pi/4 + \pi/4 = 2\pi$, como manda el teorema.

Apartado 3: polígono geodésico pero $K \not\equiv 0$

Ahora se pide lo contrario: los lados sí son geodésicos, pero la superficie no es plana, de modo que la curvatura integral no se anula.

Ejemplo: la esfera unidad, que es orientable, con el **triángulo geodésico de un octante**, limitado por tres arcos de círculo máximo que se cortan en ángulo recto.

Sus tres ángulos internos valen $\pi/2$, luego los externos valen también $\pi/2$ y

$$\sum_{i=1}^{3} \varphi_i = \frac{3\pi}{2} \neq 2\pi.$$

Y el teorema cuadra: $\iint_T K\,dA = A(T) = \frac{1}{8} \cdot 4\pi = \frac{\pi}{2}$, y en efecto $\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 2\pi$. ■

Qué buscaba este examen

- **Primer ejercicio.** Reconocer una superficie de revolución con el eje cambiado, saber que sus líneas paramétricas son ortogonales — y por tanto que los ángulos suman 2π sin calcular nada —, y que sus meridianos son geodésicos. Todo el ejercicio se reduce entonces a una sola integral.
- **Segundo ejercicio.** Que el alumno vea que la igualdad $\sum \varphi_i = 2\pi$ tiene *dos* formas de fallar, y sepa construir un ejemplo de cada una: o los lados no son geodésicos, o la superficie no es plana. Los dos apartados están deliberadamente cruzados.

Errores típicos

- **Confundir el eje del hiperboloide.** $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ tiene el eje en OY; quien lo parametriza con eje OZ intercambia meridianos y paralelos y el resultado sale mal.
- **Olvidar que el paralelo $u = 0$ es geodésico.** La garganta de un hiperboloide de revolución es siempre una geodésica, y aquí es β_1.
- **Poner el signo positivo.** La curvatura integral de una región de un hiperboloide de una hoja es negativa, porque todos sus puntos son hiperbólicos.
- **Dar en el apartado 3 un ejemplo con $K \equiv 0$.** Ahí hace falta lo contrario, y una superficie plana no sirve.

B.6 Segunda convocatoria de 2024-25, parte de topología

Ficha

Asignatura	Geometría y topología de superficies, parte de topología
Convocatoria	Segunda, curso 2024-25
Fecha	3 de julio de 2025
Estructura	Cuatro ejercicios; la copia escribe «XXX PUNTOS»

Enunciado

Ejercicio 1. Definir explícitamente dos relaciones de equivalencia sobre $\mathbb{R}^3$ de modo que el cociente por la primera sea homeomorfo al cilindro $S^1 \times [0,1]$ y el cociente por la segunda sea homeomorfo a la esfera S^2.

Ejercicio 2. Considérese el polígono de identificaciones definido por la palabra

$$f\,c\,a^{-1}d^{-1}e^{-1}e\,a\,b\,c^{-1}d\,b^{-1}f.$$

(a) Comprobar que el cociente es una superficie compacta sin borde.
(b) Calcular el grupo fundamental de esa superficie y su abelianizado.
(c) Clasificar la superficie.

Ejercicio 3. Probar que la aplicación $f : S^1 \to S^1$ dada por $f(z) = -z$ es homotópica a la identidad — puede ser útil recordar que $e^{i\pi} = -1$ —, y deducir de ello que tener punto fijo no es una propiedad invariante por homotopía.

Ejercicio 4. Calcular el grupo fundamental del espacio definido por una figura del enunciado.

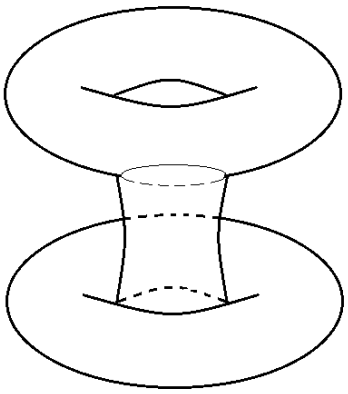


Figura original del cuarto ejercicio, julio de 2025.

ANTES DE LAS SOLUCIONES. Si estás simulando el examen, termina tu intento antes de seguir leyendo.

Resolución del ejercicio 1

Qué hay que producir, exactamente. Dar una relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}^3$ cuyo cociente sea homeomorfo a un espacio Z conocido equivale a dar una aplicación $H : \mathbb{R}^3 \to Z$ que sea **continua, sobreyectiva y una identificación**: la relación es entonces

$$p \sim q \iff H(p) = H(q),$$

y la biyección inducida $\mathbb{R}^3/\sim \to Z$ es un homeomorfismo por la propiedad universal.

Lo delicado es la palabra «identificación». El criterio compacto-Hausdorff, que es el que se usa siempre en esta asignatura, **no sirve aquí**, porque $\mathbb{R}^3$ no es compacto. Hay que usar otro, y el más cómodo es este:

*toda aplicación continua, sobreyectiva y **abierta** es una identificación.*

La razón cabe en dos líneas, y conviene escribirlas porque en ellas se ve dónde entra cada hipótesis. Hay que comprobar que si $H^{-1}(U)$ es abierto entonces U es abierto. Ahora bien, $H^{-1}(U)$ es abierto y H es abierta, luego $H(H^{-1}(U))$ es abierto; y $H(H^{-1}(U)) = U$ **porque** H **es sobreyectiva** — sin sobreyectividad solo se tendría la inclusión $H(H^{-1}(U)) \subseteq U$, que no bastaría. Luego U es abierto, que es exactamente lo que había que ver.

Explícate. *Antes de seguir, convéncete de que la tentación evidente no funciona. Uno querría tomar el cilindro $C \subseteq \mathbb{R}^3$ y* retraer *$\mathbb{R}^3$ sobre él. Pero si existiera una retracción $r : \mathbb{R}^3 \to C$, la inclusión induciría un homomorfismo inyectivo $\mathbb{Z} \cong \pi_1(C) \to \pi_1(\mathbb{R}^3) = \{1\}$, que es imposible. Para la esfera se usa su no contractibilidad, probada en el capítulo 6: un retracto de $\mathbb{R}^3$ sería contráctil. El grupo fundamental no distingue aquí la esfera de $\mathbb{R}^3$, pues ambos son simplemente conexos. Las identificaciones que se buscan no pueden dejar fijo ningún cilindro ni ninguna esfera de $\mathbb{R}^3$.*

Una pieza que se usa dos veces: una aplicación abierta de $\mathbb{R}$ sobre $[0,1]$. Sea

$$k : \mathbb{R} \to [0,1], \qquad k(t) = \frac{1+\operatorname{sen} t}{2}.$$

Es continua y sobreyectiva. Y es **abierta**, cosa que conviene comprobar porque no es del todo evidente. Sea $U \subseteq \mathbb{R}$ abierto y $t_0 \in U$, con $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \subseteq U$.

- Si $\cos t_0 \neq 0$, entonces $k'(t_0) \neq 0$ y k es estrictamente monótona en un entorno de t_0; su imagen es un intervalo abierto alrededor de $k(t_0)$, contenido en $(0,1)$, y por tanto abierto en $[0,1]$.
- Si $\cos t_0 = 0$, entonces $\operatorname{sen} t_0 = \pm 1$ y $k(t_0)$ vale 0 o 1. Supóngase $k(t_0) = 0$; entonces t_0 es un mínimo de k y a ambos lados k crece, de modo que al tomar ε suficientemente pequeño, $k\big((t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\big) = [0,\delta)$ para algún $\delta > 0$, que es un abierto de $[0,1]$. El caso $k(t_0) = 1$ es simétrico.

En los dos casos $k(U)$ es entorno de $k(t_0)$ en $[0,1]$, luego k es abierta.

Se usará también que $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, es continua, sobreyectiva y abierta, por ser un homeomorfismo local; y que la proyección $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\pi(x,y,z) = (x,z)$, es continua, sobreyectiva y abierta.

Primera relación: el cilindro. Se define

$$H_1 : \mathbb{R}^3 \to S^1 \times [0,1], \qquad H_1(x,y,z) = \Big((\cos x, \operatorname{sen} x)\,,\ \frac{1+\operatorname{sen} z}{2} \Big).$$

Es la composición $H_1 = (p \times k) \circ \pi$. Las tres aplicaciones son continuas, sobreyectivas y abiertas — el producto de dos abiertas es abierto sobre los abiertos básicos $U \times V$, y todo abierto del producto es unión de ellos —, luego H_1 también lo es y es una identificación.

La relación de equivalencia es entonces, escrita sin rodeos:

$$(x,y,z) \sim_1 (x',y',z') \iff \begin{cases} x - x' \in 2\pi\mathbb{Z}, & \text{y} \\ \operatorname{sen} z = \operatorname{sen} z'. \end{cases}$$

La segunda condición equivale a $z' \in \{z + 2k\pi\} \cup \{\pi - z + 2k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$. La coordenada y no interviene: todas las rectas paralelas al eje OY se aplastan a un punto. Y $\mathbb{R}^3/\sim_1 \cong S^1 \times [0,1]$.

Segunda relación: la esfera. Aquí el mismo truco no sale, y conviene ver por qué. La candidata natural sería la parametrización esférica habitual, con un ángulo dando la vuelta y el otro subiendo del polo norte al sur; pero esa aplicación **no es abierta en los polos**: la imagen de un entorno pequeño de un punto que va al polo es una cuña con vértice en el polo, y una cuña no es entorno de su vértice. Lo que sí se puede hacer es encadenar dos identificaciones, y para la segunda ya sirve el criterio compacto-Hausdorff.

Se aprovecha un resultado ya demostrado en el capítulo 3:

$$S^2 \;\cong\; (S^1 \times S^1)/(S^1 \vee S^1),$$

donde $S^1 \vee S^1$ es la unión de las dos circunferencias generadoras del toro, $S^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times S^1$ con $1 = (1,0)$. Con eso, la cadena es:

1. $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\pi(x,y,z) = (x,y)$, continua, sobreyectiva y abierta.
2. $P : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$, $P(u,v) = \big((\cos u, \operatorname{sen} u), (\cos v, \operatorname{sen} v)\big)$, continua, sobreyectiva y abierta por ser producto de dos aplicaciones abiertas.
3. $Q : S^1 \times S^1 \to (S^1 \times S^1)/(S^1 \vee S^1) \cong S^2$, la proyección al cociente, que es identificación por definición.

La composición de identificaciones es una identificación — si $(Q \circ P \circ \pi)^{-1}(U)$ es abierto, se sube por los tres pasos —, luego $H_2 = Q \circ P \circ \pi$ lo es.

Escrita explícitamente, la relación es:

$$(x,y,z) \sim_2 (x',y',z') \iff \begin{cases} \text{o bien } x - x' \in 2\pi\mathbb{Z} \text{ y } y - y' \in 2\pi\mathbb{Z}, \\ \text{o bien } \big(x \in 2\pi\mathbb{Z} \text{ o } y \in 2\pi\mathbb{Z}\big) \text{ y } \big(x' \in 2\pi\mathbb{Z} \text{ o } y' \in 2\pi\mathbb{Z}\big). \end{cases}$$

La segunda línea es la clase gorda: todos los puntos que caen sobre la unión puntual, que se aplastan a un solo punto de la esfera. La coordenada z vuelve a no intervenir. Y $\mathbb{R}^3/\sim_2 \cong S^2$.

Otra vía (la esfera con una sola cadena de dos pasos, sin usar el toro). Si no se quiere invocar el problema del toro, sirve igualmente

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{H_1} S^1 \times [0,1] \xrightarrow{G} S^2, \qquad G(q,u) = \big(\operatorname{sen}(\pi u)\, q_1,\ \operatorname{sen}(\pi u)\, q_2,\ \cos(\pi u)\big),$$

con H_1 la identificación del apartado anterior. G es continua y sobreyectiva — colapsa $S^1 \times \{0\}$ al polo norte y $S^1 \times \{1\}$ al sur, y es biyectiva en medio —, y ahora sí se puede aplicar el criterio estándar: el cilindro $S^1 \times [0,1]$ es compacto y S^2 es Hausdorff, luego G es cerrada y por tanto una identificación. La composición $G \circ H_1$ es entonces una identificación de $\mathbb{R}^3$ sobre S^2.

Resolución del ejercicio 2

(a) El cociente es una superficie compacta sin borde.

La palabra tiene doce letras, luego el polígono tiene doce lados, y se comprueba que cada letra aparece **exactamente dos veces**:

$$f\ (1.^{\text{a}}, 12.^{\text{a}}), \quad c\ (2.^{\text{a}}, 9.^{\text{a}}), \quad a\ (3.^{\text{a}}, 7.^{\text{a}}), \quad d\ (4.^{\text{a}}, 10.^{\text{a}}), \quad e\ (5.^{\text{a}}, 6.^{\text{a}}), \quad b\ (8.^{\text{a}}, 11.^{\text{a}}).$$

Eso es exactamente la condición que hay que verificar, y conviene ver por qué basta.

Puntos interiores. No se identifican con nada: su entorno es un disco.

Puntos interiores de una arista. Al aparecer cada letra dos veces, cada punto interior de una arista se identifica con exactamente otro, y su entorno es la unión de dos semidiscos pegados por su diámetro, que es un disco. Si alguna letra apareciera tres veces — como en el hexágono $aabba^{-1}b$ del capítulo 4 —, saldría un «libro» y no habría superficie.

Vértices. Alrededor de un vértice del cociente, el *enlace* es el grafo cuyos vértices son las clases de extremos de aristas y cuyas aristas son las esquinas del polígono que ahí confluyen. Como cada letra aparece dos veces, cada clase de extremos contiene exactamente dos extremos de aristas del polígono, de modo que todos los vértices del enlace tienen grado dos; y el enlace es conexo, porque dos esquinas están unidas en él justamente cuando la identificación obliga a que sus vértices coincidan, que es la relación que define la clase. Un grafo conexo con todos los vértices de grado dos es una circunferencia, luego el entorno del vértice es un disco.

Además el cociente es compacto, por ser imagen continua del polígono, que es cerrado y acotado; y es Hausdorff, porque la relación identifica un número finito de aristas cerradas mediante homeomorfismos. Y no tiene borde: no queda ninguna arista libre. Luego es una superficie compacta y sin borde. ■

Una simplificación que ahorra la mitad del trabajo. La palabra contiene el bloque $e^{-1}e$, es decir, dos apariciones consecutivas de la misma letra con exponentes opuestos. Esa es la transformación elemental de *cancelación* del algoritmo de clasificación: dos lados consecutivos identificados en sentidos opuestos se pueden pegar y suprimir, siempre que quede algo, y el espacio cociente no cambia. Suprimiéndolos queda un decágono con la palabra

$$W = f\,c\,a^{-1}d^{-1}a\,b\,c^{-1}d\,b^{-1}f.$$

Todo lo que sigue se hace sobre W.

(b) El grupo fundamental.

Primero, cuántos vértices quedan. Se numeran los vértices del decágono $Q_0, \dots, Q_9$ y las aristas g_i de Q_i a Q_{i+1} con índices módulo diez, de modo que

$$g_0 = f,\ g_1 = c,\ g_2 = a^{-1},\ g_3 = d^{-1},\ g_4 = a,\ g_5 = b,\ g_6 = c^{-1},\ g_7 = d,\ g_8 = b^{-1},\ g_9 = f.$$

Una arista con exponente -1 se recorre, como arista de su letra, en sentido contrario: por ejemplo $g_2 = a^{-1}$ va de Q_2 a Q_3 sobre el polígono, pero como arista de tipo a va de Q_3 a Q_2.

La identificación empareja orígenes con orígenes y extremos con extremos, lo que da:

$$\begin{aligned} &f:\ Q_0 \sim Q_9,\ Q_1 \sim Q_0; \quad c:\ Q_1 \sim Q_7,\ Q_2 \sim Q_6;\\ &a:\ Q_3 \sim Q_4,\ Q_2 \sim Q_5; \quad d:\ Q_4 \sim Q_7,\ Q_3 \sim Q_8;\\ &b:\ Q_5 \sim Q_9,\ Q_6 \sim Q_8. \end{aligned}$$

Encadenando: $Q_0 \sim Q_1 \sim Q_9$, y $Q_1 \sim Q_7$ mete a Q_7; $Q_4 \sim Q_7$ mete a Q_4; $Q_3 \sim Q_4$ mete a Q_3; $Q_3 \sim Q_8$ mete a Q_8; $Q_6 \sim Q_8$ mete a Q_6; $Q_2 \sim Q_6$ mete a Q_2; y $Q_2 \sim Q_5$ mete a Q_5. Los diez vértices caen en **una sola clase**.

Segundo, Seifert-van Kampen. Con todos los vértices identificados, el esqueleto de dimensión uno del cociente es la unión puntual de cinco circunferencias, una por letra, y la situación es la estándar del capítulo 8: se toma A el disco abierto interior al polígono y B el cociente menos un punto interior, que se retrae por deformación al esqueleto. La intersección es una corona, que se retrae a una circunferencia, y su generador se aplica en el borde del polígono, es decir, en la palabra. Resulta

$$\boxed{\pi_1(X, x_0) = \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta, \phi \mid \phi\gamma\alpha^{-1}\delta^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\delta\beta^{-1}\phi \rangle}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \phi$ las clases de los lazos a, b, c, d, f.

EXPLÍCATE. *¿Por qué ha desaparecido la letra e del grupo? Vuelve a la cancelación y di, en una frase, qué le ocurre al lado e del polígono original al pegarlo consigo mismo.*

Tercero, el abelianizado. Al abelianizar, la relación se convierte en la suma de los exponentes de cada generador:

$$\phi:\ 1+1=2, \qquad \gamma:\ 1-1=0, \qquad \alpha:\ -1+1=0, \qquad \delta:\ -1+1=0, \qquad \beta:\ 1-1=0.$$

Luego la única relación que sobrevive es $2\phi = 0$ y

$$\boxed{\big(\pi_1(X, x_0)\big)_{ab} \cong \mathbb{Z}^4 \times \mathbb{Z}_2}$$

(c) Clasificación.

La tabla del capítulo 8 dice que $\mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}_2$ es el abelianizado de N_n. Con $n - 1 = 4$ sale $n = 5$:

$$X \ \cong\ N_5 = \underbrace{P^2\mathbb{R}\#\cdots\#P^2\mathbb{R}}_{5},$$

la suma conexa de cinco planos proyectivos. Es no orientable, cosa que se podía haber visto sin calcular nada: la letra f aparece **dos veces con el mismo exponente** en la palabra, y ese es el criterio de no orientabilidad.

Comprobación independiente por la característica. Sobre el decágono hay $V = 1$ vértice, $E = 5$ aristas y $T = 1$ cara, luego

$$\chi(X) = 1 - 5 + 1 = -3.$$

Y para las superficies de tipo II, $\chi(N_n) = 2 - n$, de donde $n = 5$. Los dos caminos — el algebraico y el combinatorio — dan la misma respuesta, que es la comprobación que hay que hacer siempre en este tipo de ejercicio.

EXPLÍCATE. *Haz el mismo recuento sobre el* dodecágono *original, sin cancelar. Te saldrán $V = 2$, $E = 6$ y $T = 1$. Comprueba que la característica vuelve a valer -3 y explícate por qué tenía que ser así.*

Resolución del ejercicio 3

La homotopía. Se identifica $S^1 = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 1\}$ y se define

$$H : S^1 \times I \to S^1, \qquad H(z,t) = e^{i\pi t} z.$$

Tres comprobaciones, y ninguna es larga:
- *La imagen está donde debe*: $|e^{i\pi t} z| = |e^{i\pi t}||z| = 1 \cdot 1 = 1$, luego $H(z,t) \in S^1$.
- *Es continua*: es el producto de dos funciones continuas de (z,t).
- *Une las dos aplicaciones*: $H(z,0) = e^0 z = z = \mathrm{Id}(z)$ y $H(z,1) = e^{i\pi} z = -z = f(z)$, usando la indicación del enunciado.

Luego $f \simeq \mathrm{Id}_{S^1}$. ■

La lectura geométrica, que es lo que el ejercicio quiere que se vea: la homotopía es *girar la circunferencia*. En el instante t se ha girado un ángulo πt, y al llegar a $t = 1$ se ha dado media vuelta, que es exactamente la aplicación antípoda de la circunferencia. Nada se rompe ni se pega por el camino, y por eso la deformación es continua.

La deducción. La identidad tiene puntos fijos: todos. La aplicación $f(z) = -z$ no tiene ninguno, porque $z = -z$ obliga a $2z = 0$, es decir, $z = 0$, que no está en S^1.

Se tienen entonces dos aplicaciones **homotópicas** entre sí, una con puntos fijos y otra sin ninguno. Luego «tener algún punto fijo» no se conserva por homotopía de aplicaciones: no es un invariante homotópico. ■

Observación (Una distinción que conviene no perder)**.** El ejercicio dice que la propiedad no es invariante por homotopía *de aplicaciones*, y eso es lo que se ha probado. Es distinto de la **propiedad del punto fijo** de un espacio, que es la de que *toda* aplicación continua de él en sí mismo tenga algún punto fijo. El disco B^2 la tiene — es el teorema de Brouwer del capítulo 6 — y la circunferencia no, y este mismo ejercicio lo demuestra: $f(z) = -z$ es un contraejemplo explícito.

Merece la pena guardar ese contraejemplo, porque es el más barato que hay y aparece cada vez que se quiere ver que B^2 y S^1 no se parecen.

Resolución del ejercicio 4

La figura recuperada muestra dos toros unidos por la pared de un cilindro. Lo que decide el grupo es *dónde se pega cada circunferencia del cilindro*. La superior rodea una pequeña región discal del toro de arriba; la inferior recorre una circunferencia esencial del toro de abajo.

Modelo con los dos toros completos. Si se conservan ambas superficies al añadir el cilindro, se toman abiertos U, V que contienen respectivamente cada toro y algo más de la mitad del cilindro. Se retraen a sus toros, y su intersección se retrae a una circunferencia. Escribiendo

$$\pi_1(U) = \langle a, b \mid [a,b] = 1 \rangle, \qquad \pi_1(V) = \langle c, d \mid [c,d] = 1 \rangle,$$

el generador de la intersección va a 1 en el toro superior (bordea un disco) y a c en el inferior. Seifert–van Kampen da

$$\pi_1(X) = \langle a, b, c, d \mid [a,b] = 1, [c,d] = 1, c = 1 \rangle \cong (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) * \mathbb{Z}.$$

Observación (El dato que el dibujo debe fijar)**.** La copia no acompaña la figura de una descripción del pegado. El cálculo anterior usa dos toros completos. Si se hubiera retirado el

disco superior antes de pegar el cilindro, ese borde representaría $[a, b]$ en un toro perforado, y saldría en cambio $\langle a, b, d \mid [[a, b], d] = 1\rangle$. Por eso se explicita el modelo: no se debe elegir entre retirar o conservar un disco sin que el enunciado lo determine.

Qué buscaba este examen

Los cuatro ejercicios recorren, uno por uno, los cuatro bloques de la parte de topología, y ninguno repite técnica con otro.

El **primero** evalúa si se ha entendido qué es una identificación, y no si se sabe la definición de topología cociente. El atajo que ahorra tiempo es no intentar construir homeomorfismos: basta exhibir una aplicación continua, sobreyectiva y abierta, y decir sus fibras. La trampa consiste en tirar del criterio compacto-Hausdorff por costumbre, que aquí no vale porque $\mathbb{R}^3$ no es compacto.

El **segundo** es el ejercicio típico de clasificación; la copia no especifica su puntuación. El atajo está en ver la cancelación $e^{-1}e$ antes de empezar: quita una letra y dos lados, y evita tener que descubrir que en el dodecágono hay dos clases de vértices en vez de una, que es donde se cometen los errores.

El **tercero** es corto y conceptual. Con la indicación del enunciado, la homotopía se escribe en una línea; lo que se evalúa de verdad es la segunda parte, es decir, si se entiende qué significa que una propiedad sea o no invariante por homotopía.

El **cuarto** pide reconocer los lazos de pegado y aplicar Seifert–van Kampen: un dibujo con toros no se reduce automáticamente a un grafo.

Errores típicos

- **En el primero**, dar la aplicación y olvidarse de justificar que es una identificación. Una aplicación continua, sobreyectiva y con las fibras correctas *no basta*: la biyección inducida es continua, pero su inversa puede no serlo.
- **En el primero, otra vez**, intentar retraer $\mathbb{R}^3$ sobre un cilindro o una esfera concretos. El grupo fundamental descarta el cilindro; para la esfera se usa que no es contráctil.
- **En el segundo**, contar los vértices identificados «a ojo» sin escribir la lista de emparejamientos. Es el error más caro del examen: si el número de clases sale mal, la característica sale mal y la clasificación también.
- **En el segundo**, equivocarse con el sentido de las aristas de exponente -1 al emparejar orígenes y extremos. Conviene escribir cada arista dos veces: como lado del polígono y como arista de su letra.
- **En el segundo**, dar como respuesta el grupo fundamental sin abelianizar y concluir de él la clasificación. Dos presentaciones distintas pueden dar el mismo grupo; el abelianizado es aquí un invariante fácil de calcular que permite clasificarlas.
- **En el tercero**, escribir la homotopía $H(z, t) = (1 - t)z + t(-z)$, que es la rectilínea, y no darse cuenta de que en $t = \frac{1}{2}$ vale 0 y se sale de S^1. La homotopía tiene que ser un *giro*, no un segmento.

B.7 Primera convocatoria de 2024-25, parte de topología

Ficha

Asignatura	Geometría y topología de superficies, parte de topología
Convocatoria	Primera, curso 2024-25
Fecha	4 de junio de 2025
Estructura	Cuatro ejercicios: 2 + 3 + 2,5 + 2,5 puntos

Enunciado

Ejercicio 1 [2 puntos]. Consideramos $A = (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \subset \mathbb{R}$ con la topología euclídea. Se pide describir explícitamente el espacio $\mathbb{R}/A$ con su topología cociente. ¿Es T_2? ¿Y compacto? ¿Es homeomorfo a algún subespacio euclídeo?

Ejercicio 2 [3 puntos]. Consideremos el polígono de identificaciones definido por la palabra

$$e\, a\, b\, c^{-1}\, d\, b^{-1}\, c\, a^{-1}\, d^{-1}\, e^{-1}.$$

Comprobar que el cociente es una superficie compacta sin borde. Calcular el grupo fundamental de esta superficie y su abelianizado. Clasificar la superficie.

Ejercicio 3 [2,5 puntos]. Sea D el disco cerrado en $\mathbb{R}^2$ y $A \neq \emptyset$ un subconjunto propio del interior de D. Demostrar que $D \setminus A$ retrae sobre el borde de D. ¿Es siempre $D \setminus A$ retracto de deformación del borde de D? Probar que si $B \neq \mathbb{R}^2$ es un retracto del plano $\mathbb{R}^2$, su complementario no puede ser acotado.

Ejercicio 4 [2,5 puntos]. Consideramos un triángulo relleno donde cada arista tiene la etiqueta a o a^{-1}. Describir todos los tipos de homeomorfismo de cocientes que se obtienen de ese modo y, para cada tipo, calcular el grupo fundamental del espacio.

ANTES DE LAS SOLUCIONES. Si estás simulando el examen, termina tu intento antes de seguir leyendo.

Resolución del ejercicio 1

Describir el cociente. El conjunto A es abierto y su complementario es el intervalo cerrado $[0, 1]$. Al aplastar A a un punto, el conjunto subyacente de $\mathbb{R}/A$ es

$$[0, 1] \sqcup \{[A]\},$$

donde cada punto de $[0, 1]$ conserva su identidad y $[A]$ representa todo lo que queda fuera.

La topología. Un conjunto $G \subseteq \mathbb{R}/A$ es abierto si y solo si $\pi^{-1}(G)$ es abierto en $\mathbb{R}$. Hay dos casos.

Si $[A] \notin G$, entonces $\pi^{-1}(G) = G \cap [0,1]$, que ha de ser abierto de $\mathbb{R}$; y un subconjunto de $[0,1]$ abierto en $\mathbb{R}$ está contenido en $(0,1)$. Luego los abiertos que no contienen a $[A]$ son exactamente los **abiertos de** $(0,1)$.

Si $[A] \in G$, entonces $\pi^{-1}(G) = A \cup S$ con $S = G \cap [0,1]$, y hay que exigir que sea abierto. Los puntos de A ya son interiores. Un punto $x \in S \cap (0,1)$ necesita un intervalo a su alrededor dentro de S. El punto 0, si está en S, tiene a su izquierda $(-\varepsilon, 0) \subseteq A$, así que solo necesita $[0,\varepsilon) \subseteq S$; y con el 1 pasa lo mismo cambiando de lado, porque es a su *derecha* donde tiene $(1, 1+\varepsilon) \subseteq A$, de modo que le basta con $(1-\varepsilon, 1] \subseteq S$. Es decir: **los abiertos que contienen a** $[A]$ **son los** $\{[A]\} \cup S$ **con** S **abierto en la topología relativa de** $[0,1]$**.**

¿Es T_2? No. Los puntos $[0]$ y $[A]$ no se pueden separar: todo abierto que contenga a $[0]$ y no a $[A]$ tendría que estar contenido en $(0,1)$, y $0 \notin (0,1)$. Así que *todo* abierto que contiene a $[0]$ contiene también a $[A]$.

¿Es compacto? Sí. Aunque $\mathbb{R}$ no sea compacto, cada clase del cociente tiene un representante en el compacto $[0,1] \cup \{2\}$: el punto 2 representa la clase $[A]$. Por tanto

$$\mathbb{R}/A = \pi\big([0,1] \cup \{2\}\big)$$

es imagen continua de un compacto. No se identifica 0 con A: $0 \notin A$.

¿Homeomorfo a un subespacio euclídeo? No. Todo subespacio de un espacio euclídeo es metrizable y, por tanto, T_2; y $\mathbb{R}/A$ no lo es. ■

Resolución del ejercicio 2

Es una superficie compacta sin borde. Cada una de las cinco letras a, b, c, d, e aparece exactamente dos veces en la palabra, luego cada arista del decágono queda identificada con otra: no queda ningún lado libre y el cociente no tiene borde. Los puntos interiores del polígono tienen entornos discales; los de las aristas también, al estar identificadas dos a dos. Queda comprobar los vértices, y ahí está el trabajo.

Las clases de vértices. Se etiquetan los vértices $P_0, \dots, P_9$ de modo que la arista i-ésima va de P_{i-1} a P_i, con $P_{10} = P_0$. Siguiendo cada letra y respetando el sentido, las identificaciones que se obtienen son

$$P_1 \sim P_9, \quad P_1 \sim P_8, \quad P_2 \sim P_7, \quad P_2 \sim P_6, \quad P_3 \sim P_5,$$

$$P_4 \sim P_6, \quad P_3 \sim P_7, \quad P_4 \sim P_9, \quad P_5 \sim P_8.$$

Encadenando: $P_1 \sim P_8 \sim P_5 \sim P_3 \sim P_7 \sim P_2 \sim P_6 \sim P_4 \sim P_9$. Todos esos nueve vértices caen en una sola clase.

Y P_0 **queda solo**: en ninguna de las identificaciones aparece emparejado con otro. Hay, pues, **dos clases de vértices**: $v = 2$.

En P_0 concurren la primera arista, que es e saliendo de P_0, y la última, que es e^{-1} llegando a P_0, es decir, también e saliendo de P_0. El sector angular entre las dos se cierra sobre sí mismo al identificar sus dos lados, y da un disco. Luego también P_0 es un punto de superficie. En la otra clase, los nueve sectores se encadenan en un único círculo al seguir las identificaciones. Como el cociente de este polígono por las parejas de aristas es compacto Hausdorff, queda comprobado que es una superficie compacta sin borde. ■

Observación (El atajo habitual *no* sirve aquí)**.** Es tentador escribir directamente $\pi_1 = \langle a, b, c, d, e \mid eabc^{-1}db^{-1}ca^{-1}d^{-1}e^{-1}\rangle$, con las cinco letras como generadores, y abelianizar.

Si se hace, todas las letras aparecen con exponentes opuestos, la relación abelianizada es trivial y sale $\mathbb{Z}^5$.

Y eso es imposible: el abelianizado del grupo fundamental de una superficie cerrada es $\mathbb{Z}^{2n}$ o $\mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}_2$, y $\mathbb{Z}^5$ tiene rango impar sin torsión. La contradicción delata el error: el atajo supone que *todos* los vértices se identifican en uno solo, y aquí hay dos clases.

El cálculo correcto. Con $v = 2$ clases de vértices y $k = 5$ aristas, el complementario del disco se retrae a un grafo con 2 vértices y 5 aristas, cuyo grupo fundamental es libre de rango

$$k - v + 1 = 5 - 2 + 1 = 4.$$

La arista e une las dos clases de vértices, así que forma un árbol maximal. Al contraerla se borra e de la palabra y Seifert–van Kampen da la presentación que pide el enunciado:

$$\boxed{\pi_1(X) = \langle a, b, c, d \mid abc^{-1}db^{-1}ca^{-1}d^{-1} \rangle.}$$

Al abelianizar, la relación vuelve a ser trivial — todas las letras aparecen con exponentes opuestos — y queda

$$\boxed{(\pi_1)_{ab} \cong \mathbb{Z}^4}$$

La clasificación. Como no aparece factor de torsión, la superficie es **orientable**, y $\mathbb{Z}^{2n} = \mathbb{Z}^4$ da $n = 2$:

$$\boxed{\text{Es } M_2\text{, la suma conexa de dos toros, de género 2}}$$

■

Otra vía (por la característica, que es la comprobación obligatoria). Con $k = 5$ y $v = 2$,

$$\chi = 1 - k + v = 1 - 5 + 2 = -2.$$

Y $\chi(M_n) = 2 - 2n = -2$ da $n = 2$. ✓

Merece la pena subrayar que esta vía detecta el error del atajo en tres líneas: si uno hubiera supuesto $v = 1$, habría obtenido $\chi = -3$, impar, incompatible con una superficie orientable.

Resolución del ejercicio 3

$D \setminus A$ retrae sobre ∂D. Se elige un punto $a \in A$, que existe por ser A no vacío, y que está en el interior de D. Se define

$$r : D \setminus A \to \partial D$$

enviando cada x al punto donde la semirrecta que sale de a y pasa por x corta a ∂D. Está bien definida y es continua en todo punto distinto de a, y $D \setminus A \subseteq D \setminus \{a\}$; y si $x \in \partial D$, la semirrecta lo corta en el propio x, luego $r(x) = x$. Es una retracción. ■

Observación (Una inversión en el enunciado original)**.** La segunda pregunta escribe $D \setminus A$ como retracto de deformación de ∂D, aunque ese espacio ni siquiera está contenido en ∂D. La indicación sobre dos puntos aclara la pregunta pretendida: si ∂D es siempre retracto de deformación de $D \setminus A$. Esta es la que se resuelve.

¿Es siempre ∂D retracto de deformación de $D \setminus A$? No. Basta el ejemplo que sugiere el enunciado: $A = \{a, b\}$ con dos puntos distintos del interior. Entonces $D \setminus A$ es un disco menos dos puntos, que se retrae a una unión puntual de dos circunferencias, luego

$$\pi_1(D \setminus A) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z},$$

mientras que $\pi_1(\partial D) = \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Si ∂D fuese retracto de deformación, los dos grupos serían isomorfos; pero $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ no es abeliano y $\mathbb{Z}$ sí. ■

Si $B \neq \mathbb{R}^2$ es retracto del plano, su complementario no es acotado.

Primero, B **es contráctil**: es un retracto del espacio contráctil $\mathbb{R}^2$, y un retracto de un contráctil es contráctil. En particular B es simplemente conexo.

Supóngase ahora, por reducción al absurdo, que $\mathbb{R}^2 \setminus B$ es acotado. No es vacío porque $B \neq \mathbb{R}^2$, así que existe $p \notin B$. Y por ser acotado, existe $R > 0$ con $\mathbb{R}^2 \setminus B \subseteq B(0, R)$ y $p \in B(0, R)$.

Tomando $R' > R$, la circunferencia C de centro 0 y radio R' está contenida en B. Se la considera como un lazo, y se comparan dos afirmaciones:

- En B, que es simplemente conexo, $[C] = 1$.
- En $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$, el lazo C rodea a p una vez, luego su clase es un generador de $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}) \cong \mathbb{Z}$ y **no** es trivial.

Pero $B \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$, y la inclusión induce un homomorfismo que lleva la clase trivial en la clase trivial. Contradicción. ■

Resolución del ejercicio 4

Cuántas palabras hay. Sobre un triángulo hay tres aristas y cada una lleva a o a^{-1}, luego $2^3 = 8$ palabras. Pero muchas dan el mismo espacio: girar el triángulo permite rotar cíclicamente la palabra, y cambiar el nombre a por a^{-1} invierte todos los símbolos. Agrupando:

$$\{aaa\}, \quad \{aaa^{-1}, aa^{-1}a, a^{-1}aa\}, \quad \{aa^{-1}a^{-1}, a^{-1}a^{-1}a, a^{-1}aa^{-1}\}, \quad \{a^{-1}a^{-1}a^{-1}\}.$$

La primera clase y la cuarta se corresponden por $a \leftrightarrow a^{-1}$, y lo mismo las dos centrales. Quedan, pues, **dos tipos de homeomorfismo**:

$$w_1 = aaa, \qquad w_2 = aa^{-1}a.$$

El segundo es el **sombrero bobo**. De momento hay como máximo dos tipos; los grupos fundamentales calculados a continuación demostrarán que son distintos.

Los vértices se identifican en uno solo en los dos casos, como se comprueba siguiendo las aristas, de modo que aquí sí vale el atajo: un generador por letra y la palabra como única relación.

Grupo fundamental del sombrero bobo.

$$\pi_1 = \langle a \mid a\, a^{-1}a \rangle = \langle a \mid a \rangle = \{1\}.$$

El sombrero bobo es **simplemente conexo**.

Grupo fundamental de aaa.

$$\pi_1 = \langle a \mid a^3 \rangle \cong \mathbb{Z}_3.$$

■

Observación (Ninguno de los dos es una superficie)**.** Conviene decirlo porque el enunciado no lo dice y el alumno tiende a suponerlo. En los dos casos la arista a aparece **tres** veces en el perímetro, luego en el cociente hay tres «hojas» pegadas a lo largo de ella. Un punto interior de esa arista tiene por entorno tres semidiscos pegados por su diámetro, que no es homeomorfo a un disco.

El sombrero bobo es el ejemplo estándar de espacio **simplemente conexo, contractible y sin embargo nada evidente**: no es un disco, no es una superficie, y no se puede colapsar con movimientos elementales.

Y el espacio *aaa* tiene $\pi_1 \cong \mathbb{Z}_3$, lo que descarta de paso que sea una superficie: la única superficie cerrada con grupo fundamental finito no trivial es el plano proyectivo, con $\mathbb{Z}_2$.

Qué buscaba este examen

- **Ejercicio 1.** Manejar la topología cociente a mano, sin recetas: describir los abiertos, detectar la pérdida de la separación y darse cuenta de que la compacidad sí se conserva.
- **Ejercicio 2.** Ejecutar el procedimiento del polígono de identificaciones y, sobre todo, **no dar por hecho que todos los vértices se identifican**. Es el motivo por el que aquí falla el atajo de tomar una letra por generador.
- **Ejercicio 3.** Distinguir retracto de retracto de deformación, y usar la contractibilidad de un retracto de un contráctil.
- **Ejercicio 4.** Contar cocientes salvo homeomorfismo usando las simetrías del polígono, y calcular grupos fundamentales de espacios que no son superficies.

Errores típicos

- **Aplicar el atajo del polígono sin contar los vértices.** En el ejercicio 2 produce $\mathbb{Z}^5$, que no corresponde a ninguna superficie cerrada. La comprobación con la característica lo detecta.
- **Decir que $\mathbb{R}/A$ no es compacto porque $\mathbb{R}$ no lo es.** La compacidad no se hereda hacia atrás, pero sí por imágenes continuas, y aquí el cociente sí lo es.
- **Confundir retracto con retracto de deformación** en el ejercicio 3: la primera parte es cierta siempre y la segunda es falsa, y el enunciado está deliberadamente montado para que se note.
- **Olvidar la simetría $a \leftrightarrow a^{-1}$** en el ejercicio 4 y contestar que hay cuatro tipos en vez de dos.

B.8 Primera convocatoria de 2023-24, parte de topología

Es el examen más antiguo del banco reciente, y el único en el que la trampa del polígono aparece dos veces seguidas: primero por una cancelación y después por el recuento de vértices.

Ficha

Asignatura	Geometría y topología de superficies, parte de topología
Convocatoria	Primera, curso 2023-24
Fecha	10 de junio de 2024
Estructura	Cuatro problemas: 3 + 2 + 3 + 2 puntos

Enunciado

Problema 1 [3 puntos]. Consideramos el polígono de identificaciones dado por la palabra

$$abe^{-1}ff^{-1}eca^{-1}c^{-1}db^{-1}d^{-1},$$

y sea X el cociente por esas identificaciones. Se pide:
(a) mostrar que X es una superficie compacta sin borde;
(b) calcular el grupo fundamental de X y su abelianizado;
(c) clasificar la superficie.

Problema 2 [2 puntos]. Consideremos un homomorfismo de grupos $\varphi : \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.
(a) Demostrar que φ no puede ser inyectivo ni sobreyectivo.
(b) Usando el apartado anterior, probar que no existen aplicaciones continuas $f : S^1 \vee P^2\mathbb{R} \to S^1 \vee S^1$ y $g : S^1 \vee S^1 \to S^1 \vee P^2\mathbb{R}$ tales que alguna de las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$ sea homotópica a la identidad correspondiente. Aquí $P^2\mathbb{R}$ denota al plano proyectivo.

Problema 3 [3 puntos]. Se considera $X = [0, 1]$ con la topología relativa de la euclídea, y $A \subseteq X$ un abierto. Si A es un intervalo, se pide:
(a) mostrar todos los tipos de homeomorfía que se pueden obtener como un espacio cociente X/A;
(b) verificar si alguno de esos cocientes no es Hausdorff;
(c) verificar si alguno de esos cocientes no es compacto.

Problema 4 [2 puntos]. Responder a las siguientes cuestiones:
(a) De manera análoga a como se construyen los modelos de las superficies, dar una relación de equivalencia sobre el disco cerrado unidad B^2 tal que el grupo fundamental del cociente admita la presentación $\langle a, b \mid a^2b^{-2}\rangle$.
(b) Describir una identificación entre dos discos cerrados que dé lugar a un espacio cociente cuyo grupo fundamental tenga la presentación $\langle a, b, c \mid a^2b^{-2}, a^4c^{-2}\rangle$.

ANTES DE LAS SOLUCIONES. Si estás simulando el examen, termina tu intento antes de seguir leyendo.

Resolución del problema 1

Qué está pasando. La palabra tiene doce letras y seis símbolos distintos, y lo primero que hay que ver es que **no está reducida**: contiene el trozo ff^{-1}, que es un par cancelable, y al quitarlo aparece otro, $e^{-1}e$. Quien se lance a aplicar el atajo «letras = generadores» sobre la palabra tal como viene obtiene un grupo con seis generadores y una superficie equivocada.

(a) X es una superficie compacta sin borde.

Compacta: X es la imagen continua del polígono, que es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$, luego compacto; y la imagen continua de un compacto es compacta.

Sin borde, y superficie: hay que ver que todo punto tiene un entorno homeomorfo a un disco, y se comprueba en los tres tipos de punto.

- *Interior del polígono*: el punto ya tiene un disco entero a su alrededor y la identificación no lo toca.
- *Interior de una arista*: cada una de las seis letras aparece **exactamente dos veces** en la palabra, luego cada arista del cociente proviene de dos lados del polígono. Un entorno se obtiene pegando dos semidiscos por su diámetro, y eso es un disco. Si alguna letra apareciera una sola vez, ese lado quedaría libre y ahí habría borde; no ocurre.
- *Vértices*: hay que agrupar los doce vértices del polígono en clases y ver que los sectores angulares de cada clase se pegan en cadena cerrada, dando un disco. Se hace numerando $V_0, \dots, V_{11}$ los vértices, orientando cada lado según su exponente e identificando origen con origen y extremo con extremo. Salen **tres** clases:

$$\{V_0, V_1, V_2, V_6, V_7, V_8, V_9, V_{10}, V_{11}\}, \qquad \{V_3, V_5\}, \qquad \{V_4\}.$$

En las tres, los sectores se cierran en ciclo y el entorno es un disco.

La clase $\{V_4\}$, que consta de un solo vértice, es la punta del pico que forman los lados f y f^{-1}, pegados entre sí: al coserlos, ese pico se cierra sobre sí mismo y desaparece. Esa es exactamente la cancelación que se aprovecha en el apartado siguiente.

(b) El grupo fundamental y su abelianizado.

Primer movimiento: reducir la palabra. Un par xx^{-1} en posiciones consecutivas se puede eliminar sin cambiar la superficie, siempre que la palabra no quede reducida a xx^{-1} sola: es coser un pico consigo mismo y aplanarlo. Aquí se aplica dos veces:

$$abe^{-1}\underbrace{ff^{-1}}_{\text{fuera}}eca^{-1}c^{-1}db^{-1}d^{-1} \longrightarrow ab\underbrace{e^{-1}e}_{\text{fuera}}ca^{-1}c^{-1}db^{-1}d^{-1} \longrightarrow abca^{-1}c^{-1}db^{-1}d^{-1}.$$

Queda un octógono con cuatro símbolos.

Segundo movimiento: comprobar los vértices antes de aplicar el atajo. En el octógono, rehaciendo el recuento, los ocho vértices caen en **una sola clase**. Solo entonces vale el procedimiento habitual: se toma U_1 un disco abierto del centro y $U_2 = X$ menos un disco cerrado contenido en U_1; U_1 es contráctil, U_2 se retrae al perímetro, que es una unión puntual de cuatro circunferencias, y la corona $U_1 \cap U_2$ aporta un generador que va a 1 por un lado y a la palabra por el otro. Por Seifert-van Kampen,

$$\boxed{\pi_1(X, x_0) = \langle a, b, c, d \mid abca^{-1}c^{-1}db^{-1}d^{-1}\rangle}$$

Abelianizado. Cada una de las cuatro letras aparece una vez con exponente $+1$ y otra con -1, de modo que al permitir la conmutación la relación se vuelve trivial y no impone nada:

$$\big(\pi_1(X, x_0)\big)_{ab} \cong \mathbb{Z}^4.$$

(c) Clasificación.

Por la tabla, $\mathbb{Z}^{2n}$ corresponde a M_n, y $\mathbb{Z}^4$ da $n = 2$:

$$\boxed{X \cong M_2, \text{ el toro doble, orientable, con } \chi = 2 - 4 = -2}$$

Otra vía (por la característica, que es el control). Sin calcular ningún grupo. Sobre el dodecágono original, $k = 6$ y $v = 3$, luego

$$\chi = 1 - k + v = 1 - 6 + 3 = -2;$$

sobre el octógono reducido, $k = 4$ y $v = 1$, luego $\chi = 1 - 4 + 1 = -2$. Las dos coinciden, como tenían que hacerlo, porque cancelar un par no cambia la superficie. Y como cada letra aparece con los dos exponentes, la superficie es orientable; de $\chi = 2 - 2n = -2$ sale $n = 2$. Mismo resultado en tres líneas.

Resolución del problema 2

(a) φ no es inyectivo. El grupo $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}$ tiene un elemento de orden dos: el generador t del factor $\mathbb{Z}/2$, que cumple $t \neq 1$ y $t^2 = 1$. El grupo $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ es libre con dos generadores y **los grupos libres no tienen torsión**: si $w \neq 1$ es una palabra reducida, se la puede tomar cíclicamente reducida conjugando, y entonces w^n ya está reducida y tiene longitud n veces la de w, luego $w^n \neq 1$ para todo $n \geq 1$.

Ahora bien, $\varphi(t)^2 = \varphi(t^2) = \varphi(1) = 1$, de modo que $\varphi(t)$ tiene orden 1 o 2 en un grupo sin torsión: forzosamente $\varphi(t) = 1$. Como $t \neq 1$, el núcleo no es trivial y φ no es inyectivo. ■

φ no es sobreyectivo. Aquí el instrumento es la abelianización, porque convierte este problema en un cálculo de grupos abelianos sobre $\mathbb{Z}$. No hace falta resolver el problema de isomorfismo de grupos presentados.

Si φ fuera sobreyectivo, también lo sería el homomorfismo inducido entre los abelianizados. Y el abelianizado de un producto libre es la suma directa de los abelianizados, luego

$$\big(\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}\big)_{ab} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}, \qquad \big(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}\big)_{ab} \cong \mathbb{Z}^2.$$

Un homomorfismo $\psi : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$ mata la torsión, porque $\mathbb{Z}^2$ no la tiene: $\psi(\mathbb{Z}_2 \times \{0\}) = \{0\}$. Por tanto la imagen de ψ está generada por la imagen del único generador que queda, el del factor $\mathbb{Z}$, y es un subgrupo **cíclico** de $\mathbb{Z}^2$. Pero $\mathbb{Z}^2$ no es cíclico: hacen falta dos generadores. Luego ψ no es sobreyectivo, y φ tampoco. ■

(b) No hay equivalencia de homotopía ni por un lado ni por el otro.

Los dos grupos fundamentales. Una unión puntual de espacios conexos por caminos con puntos base razonables tiene por grupo fundamental el producto libre de los grupos fundamentales. Con $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ y $\pi_1(P^2\mathbb{R}) = \mathbb{Z}_2$:

$$\pi_1\big(S^1 \vee P^2\mathbb{R}\big) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2, \qquad \pi_1\big(S^1 \vee S^1\big) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Así que f_* es exactamente un homomorfismo del tipo φ del apartado anterior.

El puente entre homotopía y álgebra. Si dos aplicaciones son homotópicas, los homomorfismos que inducen se diferencian en el isomorfismo de cambio de punto base a lo largo del camino que describe el punto base durante la homotopía. En particular, **si una composición es homotópica a la identidad, el homomorfismo que induce es un isomorfismo**, porque conjugar es un automorfismo.

Los dos casos. Supóngase que existieran f y g como en el enunciado.

- Si $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{S^1 \vee S^1}$, entonces $f_* \circ g_*$ es un automorfismo de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$; en particular es sobreyectivo, y por tanto f_* **es sobreyectivo**. Imposible por (a).
- Si $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{S^1 \vee P^2\mathbb{R}}$, entonces $g_* \circ f_*$ es un automorfismo de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$; en particular es inyectivo, y por tanto f_* **es inyectivo**. Imposible también por (a).

Los dos casos son contradictorios, luego no existen tales f y g. ■

Observación (Lo que se ha demostrado de verdad)**.** Se ha demostrado algo más fuerte que «no son homeomorfos»: $S^1 \vee P^2\mathbb{R}$ y $S^1 \vee S^1$ **no son homotópicamente equivalentes**, y ni siquiera hay una aplicación en un sentido que tenga inversa por un lado salvo homotopía. Y el motivo cabe en dos hechos: la torsión impide la inyectividad, y el rango del abelianizado impide la sobreyectividad en ese mismo sentido.

Resolución del problema 3

Qué está pasando. Los tres apartados salen de una sola observación: como A es *abierto*, el punto $* = \pi(A)$ del cociente es un **punto abierto**, y el resto del cociente es $X \setminus A$ con su topología de siempre. Todo lo demás es contar casos.

La estructura del cociente. Sea $\pi : X \to X/A$ la proyección y $* = \pi(A)$.

- $\{*\}$ es abierto, porque $\pi^{-1}(\{*\}) = A$ lo es.
- Sobre $X \setminus A$, la aplicación π es inyectiva y respeta abiertos en los dos sentidos, de modo que $X/A \setminus \{*\}$ es homeomorfo a $X \setminus A$.
- Los únicos puntos que $*$ «ensucia» son los de $\overline{A} \setminus A$, es decir, los extremos de A que no pertenecen a A: todo entorno de uno de ellos contiene a $*$.

Por tanto el tipo de homeomorfía queda determinado por dos datos: el aspecto del cerrado $F = X \setminus A$ y cuántos de sus puntos son extremos de A.

(a) Todos los tipos. Incluyendo el intervalo vacío, los abiertos de $[0,1]$ que son intervalos son $\emptyset$, los (α,β) con $0 \le \alpha < \beta \le 1$, los $[0,\beta)$, los $(\alpha,1]$ y el propio $[0,1]$. Recorriéndolos:

A	tipo de X/A
$\emptyset$	un intervalo cerrado
$[0,1]$	un punto
$[0,\beta)$ o $(\alpha,1]$, con $0 < \beta < 1$ y $0 < \alpha < 1$	intervalo con un punto genérico en un extremo
$[0,1)$ o $(0,1]$	espacio de Sierpiński (dos puntos)
(α,β) con $0 < \alpha < \beta < 1$	dos intervalos cosidos por un punto genérico
$(0,\beta)$ o $(\alpha,1)$ con $0 < \beta < 1$, $0 < \alpha < 1$	un punto y un intervalo cosidos por $*$
$(0,1)$	tres puntos, con $*$ abierto y denso

Son **siete** tipos, contando $A = \emptyset$ (seis si la palabra «intervalo» se reserva para los no vacíos). Los tres tipos finitos tienen uno, dos y tres puntos. Entre los cuatro infinitos, el intervalo cerrado es Hausdorff y los otros tres no. En cada uno de esos tres, $*$ es el único punto cuyo conjunto unitario es abierto; al quitarlo quedan, respectivamente, un intervalo cerrado, dos intervalos cerrados o un intervalo cerrado y un punto aislado. Esto los distingue dos a dos. En la tabla, «punto genérico» solo describe la adherencia en el extremo pegado: $*$ no es denso en todo el cociente salvo en el caso finito indicado.

(b) Cuáles no son Hausdorff. Todos menos dos, y la razón es general:

$$X/A \text{ es Hausdorff} \iff A \text{ es cerrado.}$$

En efecto, si X/A es Hausdorff sus puntos son cerrados, luego $\{*\}$ lo es y $A = \pi^{-1}(\{*\})$ también; y al revés, si A es cerrado en el compacto Hausdorff $[0,1]$, el cociente es compacto Hausdorff. Ahora bien, A es abierto por hipótesis, y en un espacio **conexo** como $[0,1]$ los únicos subconjuntos a la vez abiertos y cerrados son $\emptyset$ y el total. Luego

$$\boxed{\text{solo } A = \emptyset \text{ y } A = [0,1] \text{ dan cocientes Hausdorff}}$$

En todos los demás, el punto $*$ y cualquier extremo de A que no esté en A no se pueden separar: $\{*\}$ es un entorno de $*$, pero *todo* entorno de ese extremo contiene a $*$.

(c) Cuáles no son compactos. Ninguno. La proyección $\pi : X \to X/A$ es continua y sobreyectiva, y la imagen continua de un compacto es compacta; como $[0,1]$ es compacto, X/A lo es siempre, sea cual sea A. ■

Observación (La moraleja del problema)**.** Es un problema de una sola idea, y conviene quedársela: **al pasar al cociente, la imagen de un compacto sigue siendo compacta, pero el cociente puede perder la separación**. La compacidad es una propiedad de imágenes y viaja hacia delante; ser Hausdorff es una propiedad de separación y se rompe en cuanto se pega algo que no estaba cerrado.

Y la comprobación rápida, que sirve en cualquier ejercicio de este tipo: si A es abierto, no vacío y propio en el espacio conexo $[0,1]$, no puede ser cerrado: por eso este cociente no es Hausdorff. La conclusión no se traslada a un abierto que sea también cerrado en un espacio desconectado.

Resolución del problema 4

Qué está pasando. El problema es el procedimiento del polígono **leído al revés**: en lugar de dar una palabra y pedir el grupo, da el grupo y pide la palabra. Como el atajo dice que los generadores son las letras y las relaciones son las palabras del borde, basta escribir cada relación como palabra y repartirla en discos.

(a) Un solo disco. La relación a^2b^{-2} es, leída como palabra,

$$a\,a\,b^{-1}b^{-1},$$

de cuatro letras. Se toma $B^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ y se marcan en su borde los cuatro puntos 1, i, -1, $-i$, que lo parten en cuatro arcos. La relación de equivalencia es la que identifica

- el arco de 1 a i con el arco de i a -1, respetando el sentido de recorrido (los dos son a);
- el arco de -1 a $-i$ con el arco de $-i$ a 1, también respetando el sentido (los dos son b, recorridos al revés del sentido del borde);

y deja fijo todo lo demás. Los cuatro puntos marcados caen entonces en **una sola clase**, que es lo que legitima el atajo, y por Seifert-van Kampen

$$\boxed{\pi_1\big(B^2/\sim\big) = \langle a, b \mid a^2b^{-2}\rangle}$$

Conviene reconocer qué ha salido. La palabra $aab^{-1}b^{-1}$ tiene $k = 2$ y $v = 1$, luego $\chi = 1 - 2 + 1 = 0$; y la letra a aparece dos veces con el mismo exponente, luego no es orientable. De $\chi = 2 - n = 0$ sale $n = 2$: es N_2, la **botella de Klein**. Su abelianizado es $\mathbb{Z}^2$ módulo el vector $(2,-2)$, es decir $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$, como tenía que ser.

(b) Dos discos. Ahora hacen falta *dos* relaciones, y cada disco aporta una: pegar un disco a lo largo de un lazo w añade la relación w y nada más. Se toman

- D_1, con el borde partido en **cuatro** arcos y la palabra $a\,a\,b^{-1}b^{-1}$;
- D_2, con el borde partido en **seis** arcos y la palabra $a\,a\,a\,a\,c^{-1}c^{-1}$;

y se identifican entre sí todos los arcos que llevan la misma letra — los seis arcos a de los dos discos, los dos arcos b y los dos arcos c — respetando el sentido, y todos los puntos marcados en uno solo.

Lo que queda es un espacio X cuyo esqueleto de dimensión uno es la unión puntual de tres circunferencias, $a \vee b \vee c$, con dos discos pegados a lo largo de a^2b^{-2} y de a^4c^{-2}. Aplicando Seifert-van Kampen una vez por cada disco,

$$\boxed{\pi_1(X) = \langle a, b, c \mid a^2b^{-2},\ a^4c^{-2} \rangle}$$

Observación (X no es una superficie, y no tenía que serlo)**.** Merece la pena notarlo porque el enunciado no lo pide y uno tiende a suponerlo. La arista a aparece **seis** veces entre las dos palabras, de modo que en el cociente hay seis «hojas» pegadas a lo largo de ella. Un punto interior de esa arista no tiene ningún entorno homeomorfo a un disco, y X no es una superficie. El enunciado habla de un espacio cociente, no de una superficie. Cada una de las dos caras realiza aquí una relación. Una superficie cerrada también puede describirse con varias caras y relaciones; la clasificación permite elegir una presentación usual con un solo polígono.

Qué buscaba este examen

- **Problema 1.** Que el procedimiento del polígono no es automático: hay que contar los vértices antes de tomar las letras como generadores. Reducir la palabra primero simplifica aquí ese recuento.
- **Problema 2.** Que el grupo fundamental sirve para demostrar que no hay aplicaciones con las composiciones exigidas, y que la herramienta fina no es el grupo sino dos propiedades suyas muy groseras: tener o no torsión, y cuántos generadores necesita el abelianizado.
- **Problema 3.** Distinguir qué propiedades sobreviven a un cociente. La respuesta corta es: la compacidad sí, la separación no.
- **Problema 4.** Leer al revés el mecanismo del polígono, y darse cuenta de que una segunda relación exige un segundo disco.

Errores típicos

- **Aplicar el atajo al dodecágono sin reducir.** Sale $\langle a, b, c, d, e, f \mid w \rangle$, con abelianizado $\mathbb{Z}^6$ y respuesta M_3, es decir, un toro triple con $\chi = -4$. La superficie es M_2 y $\chi = -2$. El recuento $\chi = 1 - k + v = 1 - 6 + 3 = -2$ lo detecta en una línea.
- **Suponer $v = 1$ sin comprobarlo.** En este polígono hay tres clases de vértices, no una, y una de ellas consta de un solo punto.
- **Intentar comparar $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ con $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ manipulando presentaciones.** No hace falta manipularlas aquí: la torsión y el rango del abelianizado deciden las dos obstrucciones.
- **Decir que X/A no es compacto porque A es abierto.** La compacidad viaja por imágenes continuas y el cociente lo es siempre.
- **Contestar que X/A es Hausdorff porque $[0,1]$ lo es.** Ser Hausdorff no se hereda al cociente; hace falta que lo colapsado sea cerrado.
- **En el problema 4, dar una palabra cuyos vértices no se identifiquen todos.** Entonces la presentación que sale no es la pedida, porque el rango del grupo libre baja a $k - v + 1$.

APÉNDICE C

Catálogo de superficies

Este apéndice reúne los coeficientes métricos y las curvaturas de un puñado corto de superficies — cilindro, esfera, cono, hiperboloide de revolución, toro de revolución, catenoide, plano, paraboloide, elipsoide y el tubo alrededor de una curva plana — que son las que reaparecen una y otra vez en los problemas de la parte de geometría. Está en la lista del apéndice *Añadidos y omisiones*.

Observación (Para qué sirve este apéndice)**.** Una vez entendido cómo se obtienen, no hace falta volver a calcular los coeficientes métricos de estas superficies en cada problema. Aquí están calculados una vez, con el detalle que hace falta para usarlos: la parametrización, los coeficientes métricos, el campo normal que induce — que no siempre es el que uno espera —, la curvatura de Gauss, la curvatura geodésica de los paralelos y cuáles son las geodésicas.

Los signos de las curvaturas geodésicas requieren fijar tanto el normal como el sentido de recorrido; se explicitan a continuación.

C.1 Cómo se usa la tabla

Para todas las superficies de revolución de este apéndice se cumplen tres hechos que conviene tener presentes antes de mirar ningún número. Salvo en la parametrización del cilindro, u_1 recorre el perfil y u_2 es el ángulo de giro. Las fórmulas con signo para un paralelo usan u_2 creciente y el normal inducido $\mathbf{N} = (x_{u_1} \times x_{u_2})/|x_{u_1} \times x_{u_2}|$. Al invertir uno solo de esos dos sentidos, cambia el signo de K_g. Los radios y semiejes son positivos.

1. $g_{12} = 0$: meridianos y paralelos se cortan ortogonalmente. En consecuencia, un rectángulo contenido en una carta inyectiva y sin polos tiene cuatro ángulos rectos y $\sum \varphi_i = 2\pi$, sin calcular nada.
2. **Los meridianos son geodésicas**: cada uno está contenido en un plano que corta a la superficie perpendicularmente. Su aceleración normal es paralela al normal de la superficie; si el meridiano es recto, esa aceleración es cero. En ambos casos $K_g = 0$.
3. **Los paralelos casi nunca lo son.** Su curvatura geodésica se obtiene de la fórmula de

Liouville con $\dot{u}_1 = 0$, que se reduce a

$$K_g = \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}, \qquad \oint_{\text{paralelo}} K_g \, ds = \frac{\pi \, \partial g_{22}/\partial u_1}{\sqrt{g}},$$

usando que se da una vuelta completa y que g_{ij} no depende de u_2, de modo que la longitud es $2\pi\sqrt{g_{22}}$. Esa es la única fórmula que hay que recordar.

C.2 Plano

$$K \equiv 0.$$

En coordenadas cartesianas, $g_{ij} = \delta_{ij}$. La curvatura geodésica coincide, salvo signo, con la curvatura de la curva como curva plana. Dos consecuencias que se usan constantemente:

- **Un segmento recto no aporta nada**: $K_g \equiv 0$.
- **Un arco de circunferencia aporta el ángulo que subtiende**, con signo y sin que intervenga el radio: $\int_{\text{arco}} K_g \, ds = \pm\Delta\theta$, porque $K_g = 1/\rho$ y la longitud es $\rho\,\Delta\theta$.

C.3 Cilindro circular

$$x(u, v) = (r\cos u,\ r\,\text{sen}\, u,\ v), \qquad u \in (0, 2\pi),\ v \in \mathbb{R}.$$

$$g_{11} = r^2, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = 1, \qquad \sqrt{g} = r, \qquad K \equiv 0.$$

El campo normal inducido es $\mathbf{N} = (\cos u, \text{sen}\, u, 0)$, el **exterior**.

Geodésicas: las generatrices, los paralelos y las hélices circulares, y ninguna otra. Son las imágenes de las rectas del plano de parámetros.

Curvatura geodésica integral de una curva cerrada simple y suave, recorrida positivamente y que bordee un disco en el cilindro: $\oint K_g \, ds = 2\pi$. Un paralelo no bordea tal disco y su integral es cero.

Observación (El cilindro es plano y eso lo resuelve todo)**.** Con $r = 1$ la matriz de la P.F.F. es la identidad, y en general basta el cambio $\widetilde{u} = ru$ para conseguirlo. La aplicación $(\widetilde{u}, v) \mapsto x$ es entonces una **isometría local**: conserva longitudes, ángulos, curvaturas geodésicas y geodésicas.

Por eso todos los problemas del cilindro se resuelven desenrollándolo: se dibuja la región en el plano $(\widetilde{u}, v)$ y se hace geometría elemental. Es el atajo más rentable de la asignatura, y sirve igual para el cono.

C.4 Esfera

$$x(u,v) = (a\cos u\cos v,\ a\cos u\,\mathrm{sen}\,v,\ a\,\mathrm{sen}\,u), \qquad u \in (-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}),\ v \in (0,2\pi).$$

$$g_{11} = a^2, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = a^2\cos^2 u, \qquad \sqrt{g} = a^2\cos u, \qquad K = \frac{1}{a^2}.$$

Aviso de signo. El campo normal que induce esta parametrización es $\mathbf{N} = -x(u,v)/a$, es decir, el **interior**. Es contraintuitivo y decide todos los signos; conviene calcular $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ siempre y no fiarse.

Geodésicas: los círculos máximos, y solo ellos. En particular, el único paralelo geodésico es el ecuador.

Paralelo de latitud u_0: con el normal interior y v creciente,

$$K_g = -\frac{\mathrm{tg}\,u_0}{a}, \qquad \text{longitud} = 2\pi a\cos u_0, \qquad \left|\oint K_g\,ds\right| = 2\pi|\mathrm{sen}\,u_0|,$$

que **no depende del radio**, por la invariancia de la curvatura geodésica integral bajo semejanzas.

Áreas que conviene tener memorizadas:

$$A(\text{esfera}) = 4\pi a^2, \qquad A(\text{casquete norte desde latitud } u_0) = 2\pi a^2(1-\mathrm{sen}\,u_0),$$

$$A(\text{huso de ángulo } \theta) = 2\theta a^2, \qquad \iint_{S^2} K\,dA = 4\pi.$$

C.5 Cono

$$x(u,v) = (u\cos v,\ u\,\mathrm{sen}\,v,\ u), \qquad u > 0,\ v \in (0,2\pi),$$

que es el cono $x^2 + y^2 = z^2$ con $z > 0$.

$$g_{11} = 2, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = u^2, \qquad \sqrt{g} = \sqrt{2}\,u, \qquad K \equiv 0.$$

Geodésicas: las generatrices y las curvas que se convierten localmente en rectas al desarrollar el cono. El cono es desarrollable: se despliega sobre un sector plano de ángulo $\pi\sqrt{2}$, mediante $\rho = \sqrt{2}\,u$ y $\theta = v/\sqrt{2}$, con lo que la métrica queda $d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$.

Paralelo $u = c$:

$$K_g = \frac{1}{\sqrt{2}\,c}, \qquad \text{longitud} = 2\pi c, \qquad \oint K_g\,ds = \pi\sqrt{2}.$$

Observación (Un dato que conviene tener memorizado)**.** La curvatura geodésica integral de un paralelo del cono **no depende del paralelo**: vale $\pi\sqrt{2}$ para todos.

Es consecuencia de que el cono es invariante por las homotecias de centro el vértice y de que $\oint K_g\,ds$ es invariante por semejanzas, y por eso se puede dar sin calcular nada.

C.6 Toro de revolución

$$x(u,v) = \big((b + a\cos u)\cos v,\ (b + a\cos u)\operatorname{sen} v,\ a\operatorname{sen} u\big), \qquad b > a > 0.$$

$$g_{11} = a^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = (b + a\cos u)^2, \quad \sqrt{g} = a(b + a\cos u), \quad K = \frac{\cos u}{a(b + a\cos u)}.$$

El truco del toro, que hay que tener memorizado:

$$K\sqrt{g} = \cos u \quad \Longrightarrow \quad \iint_R K\,dA = \iint_R \cos u\,du\,dv.$$

La curvatura integral de cualquier región coordenada del toro se calcula de cabeza.

Signo de K: positivo en la mitad exterior $u \in (-\pi/2, \pi/2)$, negativo en la interior, nulo en las dos circunferencias $u = \pm\pi/2$.

Paralelo $u = c$:

$$K_g = \frac{-\operatorname{sen} c}{b + a\cos c}, \qquad \text{longitud} = 2\pi(b + a\cos c), \qquad \oint K_g\,ds = -2\pi\operatorname{sen} c.$$

Curvaturas integrales: el toro entero, 0; la mitad exterior, 4π; la mitad interior, -4π. Y $\chi(T) = 0$.

C.7 Hiperboloide de una hoja

$$x(u,v) = \big(\sqrt{1+u^2}\cos v,\ \sqrt{1+u^2}\operatorname{sen} v,\ u\big),$$

que es el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

$$g_{11} = \frac{1+2u^2}{1+u^2}, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = 1+u^2,$$

$$\sqrt{g} = \sqrt{1+2u^2}, \qquad K = -\frac{1}{(1+2u^2)^2}.$$

Todos sus puntos son **hiperbólicos**. Es una superficie reglada, y de hecho doblemente reglada: por cada punto pasan dos rectas contenidas en ella, que son geodésicas.

Paralelo $u = c$:

$$\oint K_g\,ds = \frac{2\pi c}{\sqrt{1+2c^2}}.$$

El paralelo $u = 0$, la **garganta**, es una geodésica.

Curvatura integral total:

$$\iint_M K\,dA = \lim_{a\to\infty}\Big(-\frac{4\pi a}{\sqrt{1+2a^2}}\Big) = -2\sqrt{2}\,\pi.$$

C.8 Hiperboloide de dos hojas, una hoja

$$x(u,v) = (\operatorname{senh} u \cos v,\ \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v,\ \cosh u), \qquad u \geq 0,$$

la hoja de $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ con $z > 0$. La parametrización es regular para $u > 0$; en $u = 0$ el paralelo colapsa al polo. La superficie sigue siendo regular allí, pero necesita otra carta.

$$g_{11} = \cosh 2u, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = \operatorname{senh}^2 u,$$

$$\sqrt{g} = \operatorname{senh} u \sqrt{\cosh 2u}, \qquad K = \frac{1}{\cosh^2 2u}.$$

Todos sus puntos son **elípticos**: es un cuenco convexo. La región $0 \leq u \leq a$ es un **casquete**, no una corona: su única frontera es el paralelo $u = a$ y $\chi = 1$.

Paralelo $u = a$:

$$\oint K_g \, ds = \frac{2\pi \cosh a}{\sqrt{\cosh 2a}}.$$

Curvatura integral total:

$$\iint_M K \, dA = 2\pi - \sqrt{2}\,\pi = \pi(2 - \sqrt{2}) \simeq 1{,}84.$$

C.9 Catenoide

$$x(u,v) = (\cosh u \cos v,\ \cosh u \operatorname{sen} v,\ u),$$

giro de la catenaria $x = \cosh z$ alrededor de OZ.

$$g_{11} = g_{22} = \cosh^2 u, \qquad g_{12} = 0, \qquad \sqrt{g} = \cosh^2 u, \qquad K = -\frac{1}{\cosh^4 u}.$$

Obsérvese que $g_{11} = g_{22}$: el catenoide admite coordenadas **isotermas**, es decir, conformes. Es además una superficie **mínima**, con $H \equiv 0$.

Paralelo $u = c$:

$$K_g = \frac{\operatorname{senh} c}{\cosh^2 c}, \qquad \text{longitud} = 2\pi \cosh c, \qquad \oint K_g \, ds = 2\pi \operatorname{tgh} c.$$

Curvaturas integrales:

$$\iint_{-1 \leq z \leq 1} K \, dA = -4\pi \operatorname{tgh} 1 \simeq -9{,}57, \qquad \iint_M K \, dA = -4\pi.$$

C.10 Paraboloide de revolución

$$x(u,v) = (u\cos v,\ u\operatorname{sen} v,\ u^2),$$

que es el paraboloide $z = x^2 + y^2$, con $u > 0$ y v angular. El vértice se añade tomando $u = 0$, donde estas coordenadas polares degeneran; una carta regular allí es $(x,y) \mapsto (x, y, x^2+y^2)$.

$$g_{11} = 1 + 4u^2, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = u^2, \qquad \sqrt{g} = u\sqrt{1+4u^2}, \qquad K = \frac{4}{(1+4u^2)^2}.$$

Todos sus puntos son elípticos. La región $0 \le u \le c$ es un casquete con $\chi = 1$.

Paralelo $u = c > 0$:

$$\oint K_g\, ds = \frac{2\pi}{\sqrt{1+4c^2}}.$$

Curvatura integral de la región entre $z = 0$ y $z = c^2$:

$$\iint_R K\, dA = 2\pi\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{1+4c^2}}\Big),$$

que para $c = 1$ vale $2\pi(1 - 1/\sqrt{5})$.

C.11 Tubo alrededor de una curva plana

$$x(s,u) = \alpha(s) + r\big(\cos u\, \mathbf{n}(s) + \operatorname{sen} u\, \mathbf{b}(s)\big),$$

con α una c.r.p.n. plana de curvatura $k(s) > 0$ (para usar su triedro de Frenet) y $r > 0$ tal que $1 - rk(s)\cos u > 0$. Esta condición asegura regularidad local. Para hablar de un tubo sin autointersecciones se exige, además, que la parametrización no solape puntos distintos, salvo la periodicidad angular.

$$g_{11} = (1 - rk\cos u)^2, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = r^2,$$

$$\sqrt{g} = r(1 - rk\cos u), \qquad \mathbf{N} = -(\cos u\, \mathbf{n} + \operatorname{sen} u\, \mathbf{b}), \qquad K = \frac{-k\cos u}{r(1 - rk\cos u)}.$$

Las circunferencias transversales $s =$ cte. son geodésicas: su normal principal apunta al centro, que es la dirección de $\mathbf{N}$.

Curvatura geodésica de las curvas $u =$ cte., con s creciente:

$$K_g = \frac{-k\operatorname{sen} u}{1 - rk\cos u}, \qquad \int K_g\, ds_{\text{arco}} = -\operatorname{sen} u \int_{s_0}^{s_1} k(s)\, ds.$$

Curvatura integral del rectángulo de coordenadas:

$$\iint_R K\, dA = -(\operatorname{sen} u_1 - \operatorname{sen} u_0) \int_{s_0}^{s_1} k(s)\, ds,$$

C.12 Elipsoide

No hace falta parametrizarlo. Todo lo que se necesita de él se obtiene de dos hechos:

- es compacto, conexo, orientable y homeomorfo a una esfera, luego $\iint_M K\,dA = 2\pi\chi = 4\pi$;
- es estrictamente convexo: su aplicación de Gauss es inyectiva y $K > 0$. Por la fórmula de cambio de variables, el área de la imagen esférica de una región coincide con su curvatura integral.

Por las simetrías respecto a los planos de los ejes principales, cada uno de los ocho octantes tiene curvatura integral $\pi/2$, y ese es el área de su imagen esférica. No intervienen los semiejes.

C.13 Resumen en una tabla

En la fila del plano se toma una circunferencia recorrida positivamente. Los demás signos siguen las orientaciones fijadas en cada apartado.

Superficie	K	$\oint K_g\,ds$ de un paralelo	Curvatura integral
Plano	0	2π	0
Cilindro de radio r	0	0 (son geodésicas)	0
Cono $x^2+y^2=z^2$	0	$\pi\sqrt{2}$, siempre	0
Esfera de radio a	$1/a^2$	$-2\pi \operatorname{sen} u_0$	4π
Toro	$\dfrac{\cos u}{a(b+a\cos u)}$	$-2\pi \operatorname{sen} c$	0
Hiperboloide de una hoja	$\dfrac{-1}{(1+2u^2)^2}$	$\dfrac{2\pi c}{\sqrt{1+2c^2}}$	$-2\sqrt{2}\pi$
Hiperboloide de dos hojas, una hoja	$\dfrac{1}{\cosh^2 2u}$	$\dfrac{2\pi\cosh a}{\sqrt{\cosh 2a}}$	$\pi(2-\sqrt{2})$
Catenoide	$-\operatorname{sech}^4 u$	$2\pi \operatorname{tgh} c$	-4π
Paraboloide $z=x^2+y^2$	$\dfrac{4}{(1+4u^2)^2}$	$\dfrac{2\pi}{\sqrt{1+4c^2}}$	2π
Elipsoide	>0	—	4π

Observación (Cómo leer la última columna)**.** Las curvaturas integrales de las superficies no compactas — cilindro, cono, hiperboloides, catenoide, paraboloide — son límites de regiones acotadas, y por tanto **no** las da el corolario para superficies compactas: hay que calcularlas acotando y pasando al límite, como se hace en el capítulo 1.

Las de la esfera, el toro y el elipsoide sí las da el corolario, porque son compactas, y valen $2\pi\chi$: 4π, 0 y 4π respectivamente.

APÉNDICE D

Cómo usar este libro

Observación (Por qué esto va al final)**.** Este apéndice explica la organización, el código visual y la notación. Puede leerse al empezar y consultarse después cuando haga falta.

El libro desarrolla los puntos donde cuesta seguir el razonamiento. Combina preguntas, imágenes geométricas y enunciados formales para que se pueda pasar de una representación a otra. Un dibujo ayuda cuando aclara las hipótesis, la construcción o la cuenta; la justificación la da el argumento matemático.

Una asignatura que son dos.

Conviene saberlo desde la primera página. *Geometría y topología de superficies* tiene dos mitades que no comparten ni los métodos ni el vocabulario, y que se examinan por separado, con enunciados distintos el mismo día.

- La **parte de geometría** gira entera alrededor de un solo teorema, el de Gauss-Bonnet, y es la continuación directa de *Geometría local*. Las herramientas son la curvatura geodésica, la curvatura de Gauss y el elemento de área, y todas vienen de allí.
- La **parte de topología** es topología algebraica elemental: espacios cociente, homotopía, grupo fundamental, el teorema de Seifert-van Kampen y la clasificación de las superficies compactas. Aquí no se deriva nada.

Las dos mitades se tocan en un solo punto, pero es un punto grande: la *característica de Euler-Poincaré*. La parte de topología la construye y la usa para clasificar; la parte de geometría la encuentra al final de una cuenta con integrales y descubre, con asombro, que una integral de curvaturas solo sabe de topología. Ese asombro es la asignatura entera.

Organización y añadidos.

Los ocho capítulos son los del material oficial del profesor, con sus nombres y en su orden: la lección *El Teorema de Gauss-Bonnet*, con sus cinco secciones; su *Material complementario sobre curvas en una superficie*, con cuatro; y los seis temas de la parte de topología, con sus veintiuna secciones. Las secciones de cada capítulo son sus apartados, también con sus nombres. Lo

que está por debajo de eso (las subsecciones y sus títulos) es un corte nuestro dentro de su material. Los títulos dicen de qué trata cada sección y nada más: lo que no está en sus apuntes se registra en el apéndice *Añadidos y omisiones*, que es donde se consulta de una vez. El catálogo de superficies es el añadido más grande.

Lo que se da por sabido.

La asignatura presupone *Geometría local*: el material de origen incluye sus cuatro lecciones como prerrequisito. De los cuatro ingredientes del teorema de Gauss-Bonnet, tres se construyen allí: la curvatura geodésica, la curvatura de Gauss y el elemento de área. Solo la característica de Euler es material nuevo.

Cuando este libro use una pieza de aquel, lo dirá, recordará en dos líneas qué era y citará la sección de nuestro libro de *Geometría local* donde está demostrada (con la numeración del PDF publicado: 3.1 primera forma fundamental y ecuaciones de Gauss, 3.2 medidas, 3.3 curvatura geodésica, 3.4 derivada covariante, 3.5 geodésicas, 4.2 aplicación de Gauss, 4.4 segunda forma fundamental y teorema egregio, 4.5 líneas de curvatura y líneas asintóticas; y, para lo básico, 2.1 definición de superficie y el capítulo 1, de curvas), para que no haga falta ir a buscarla. Pero no la volverá a demostrar.

Para qué leer las demostraciones.

Los exámenes recopilados se centran en enunciar y aplicar resultados y en resolver problemas justificados. Conviene distinguir reproducir una demostración larga de *demostrar lo que se afirma al resolver un problema*: esto último sí se exige. El historial orienta la preparación; las instrucciones de cada convocatoria determinan lo que se pide en ella.

Las demostraciones están aquí para entender *por qué las cosas son verdad*, no para reproducirlas de memoria. Al estudiar el levantamiento de un lazo o el teorema del índice de rotación, interesa reconocer qué problema resuelve cada paso. Lo que sí se pide, todo el tiempo, es decidir qué teorema se aplica, ver qué hipótesis falla en un caso raro y adivinar el resultado antes de calcularlo; y seguir una demostración ayuda a entender por qué funcionan esas decisiones.

La intuición orienta la lectura y las hipótesis permiten comprobarla. Cada demostración larga va precedida de la idea que la predice, sus pasos llevan nombre y uno de ellos está señalado como el núcleo, y al final se dice qué papel jugó cada hipótesis. Detrás de las largas, un párrafo *Lo que hay que llevarse* la resume en tres o cuatro líneas: lo justo para poder reconstruirla. Si el tiempo aprieta, lo que hay que leer es la idea y los nombres de los pasos: con eso se sabe de qué va la prueba. Los detalles permiten comprobar el argumento paso a paso y volver al punto exacto que no se entienda.

El código visual.

Estos son los principales tipos de bloque y su función. Merece la pena aprendérselos aquí y no volver a pensar en ellos.

- **Filete azul.** Una demostración. Va entera y comentada, y con un compromiso explícito: ningún paso se despacha diciendo que es inmediato. Si de verdad cabe en una línea, esa línea está escrita, que ocupa lo mismo y ahorra tener que pararse; y si un paso se parece a otro anterior, se dice qué cambia de uno al otro en lugar de remitir a la analogía. En las largas, cada paso lleva un nombre que dice qué hace, y uno de ellos está marcado como *el núcleo*: es donde está el peso, y todo lo demás es andamiaje para llegar hasta él.

- **Filete ocre, «La idea».** La imagen mental de lo que viene o de lo que acaba de pasar. Si solo hay tiempo para leer una cosa de una sección, es esta.
- **Filete verde, «Antes de leer» y «Repaso intercalado».** El andamiaje de estudio. Se contestan con el libro cerrado.
- **Filete gris fino, «De dónde viene» y «Conexión».** Historia del concepto y enlaces con otras asignaturas. Se pueden saltar sin perder el hilo, pero pueden ayudar a relacionarlas con lo que ya se sabe.
- **Filete azul pizarra, «Diálogo».** Preguntas del lector y sus respuestas. Este bloque crece con el uso: ahí es donde el libro deja de ser de otro.

Intercalados en el texto hay además avisos breves en cursiva verde que empiezan por EXPLÍCATE. No son retóricos. Son el punto exacto donde conviene parar, cerrar el libro y decir en voz alta la respuesta antes de seguir leyendo.

Hay además unos rótulos en negrita, dentro del texto, que se repiten en todo el libro y marcan los peldaños de cada sección. Sirven para saber en qué punto de la subida se está.

- **Un caso a mano.** El ejemplo más sencillo, resuelto entero, antes del resultado general: el disco en polares antes de la integral sobre una región, el toro antes de la superficie de género n.
- **Cómo se lee.** Una fórmula o una definición larga, leída en palabras, término a término.
- **Lo que hay que llevarse.** Detrás de una demostración, lo que basta recordar para rehacerla.
- **Qué se ha ganado.** Al cerrar una sección, qué pregunta del principio ha quedado contestada y cuál queda abierta para la siguiente.
- **Dónde se falla** y **Qué hemos aprendido.** Detrás de un ejercicio o de un caso, el error más probable y la idea que sirve para otros problemas.

Los ejercicios, y por qué aquí se resuelven dos veces.

Van dentro del tema, en el punto donde ya se tiene lo justo para intentarlos, y cada uno trae el enunciado, la resolución detallada y, cuando el problema admite más de un camino, las otras vías. Los que no arrancan sin ayuda llevan antes unas pistas escaladas de menor a mayor. Muchos llevan también, delante de la resolución, *La idea*: qué se va a hacer y por qué por ese camino; y detrás, *Dónde se falla* o *Qué hemos aprendido*. La resolución está a continuación del enunciado a propósito: tapar media página con la mano es más fácil que buscar la solución al final del libro, y así el intento sigue siendo obligatorio.

Varios exámenes de geometría prohíben resolver mediante el cálculo explícito de K_g; otros no incluyen esa restricción o la limitan a un apartado. Por eso se practica la deducción a partir de Gauss–Bonnet, la orientación y la característica de Euler. Cuando el enunciado prohíbe el cálculo directo, este queda como comprobación; en los demás casos puede servir también como solución. Siempre sigue siendo un método matemáticamente válido.

Cuando se ofrecen dos vías, conviene comparar qué dato usa cada una y por qué llegan al mismo resultado. No hace falta repetir una cuenta que ya se domina; sí reconocer cuándo el teorema evita una cuenta innecesaria.

No están todos los ejercicios de las relaciones. Están los que enseñan algo que ningún otro enseña. Cuando un ejercicio procede de una convocatoria concreta, se indica cuál justo debajo del enunciado.

Las conexiones.

Las cajas grises marcadas CONEXIÓN relacionan el contenido con herramientas que ya se

conocen. Se pueden consultar cuando esa relación ayude a entender el paso actual.

- **Hacia atrás**, con lo ya estudiado. Aquí la deuda es enorme y muy concreta: el teorema de Green de *Diferenciación de funciones de varias variables* es el corazón de la demostración central; el teorema de la función inversa interviene, junto con la construcción de familias ortogonales, en la elección local de coordenadas con $g_{12} = 0$; la existencia y unicidad para sistemas lineales de *Ecuaciones diferenciales* es lo que garantiza el transporte paralelo; la compacidad y la conexión de *Topología* sostienen la palabra «región»; y la presentación de grupos por generadores y relaciones, de *Álgebra*, es todo el aparato de la segunda mitad.
- **Hacia dentro**, entre las dos mitades. Es la conexión que la asignatura no subraya y que más ilumina: la característica de Euler-Poincaré se define dos veces, con dos letras distintas, en las dos partes, y es el mismo número.
- **Hacia atrás otra vez, con *Geometría local***, que aquí no es una asignatura vecina sino el prerrequisito declarado.

El ritmo.

El ritmo lo pone el lector. Conviene intentar ejercicios sin consultar la solución y usarla después para comprobar y corregir. Si hace falta, se empieza por un ejemplo resuelto y se intenta luego uno parecido. Conviene volver a algunas preguntas pasados unos días, no solo al terminar la sección. El apéndice *Añadidos y omisiones* dice qué se puede saltar si el tiempo aprieta.

Por qué los repasos mezclan temas.

Los repasos combinan material nuevo con preguntas anteriores. Así se practica *elegir la herramienta*, además de ejecutarla. Esto tiene apoyo experimental: en un ensayo con 787 alumnos de séptimo curso de enseñanza escolar, distribuidos en 54 clases, la práctica intercalada durante cuatro meses produjo una media del 61 % frente al 38 % de la práctica agrupada en una prueba un mes después.[1] Es evidencia en matemáticas escolares, no una estimación de cuánto subirá la nota en esta asignatura. Aquí se usa como criterio para alternar problemas ya comprendidos, sin sustituir la explicación inicial ni la corrección de los intentos.

La notación.

La notación es la del profesor, deliberadamente, hasta en las abreviaturas: una s.r. es una superficie regular, una p.l. es una parametrización local y una c.r.p.n. es una curva regular parametrizada naturalmente. La parte de geometría hereda entera la notación de *Geometría local*, porque es el mismo texto.

El problema es que las dos mitades de la asignatura vienen de tradiciones distintas y usan las mismas letras para cosas distintas. Merece la pena tener localizadas las colisiones antes de tropezar con ellas.

- **S** es la normal intrínseca de una curva en la parte de geometría, y una superficie en la de topología.
- T es un triángulo o una triangulación en geometría; en topología es una topología, y además el número de triángulos de una triangulación.
- A son las aristas en geometría y un subconjunto cualquiera en topología.

[1] Rohrer, Dedrick, Hartwig y Cheung (2020), *A randomized controlled trial of interleaved mathematics practice*, *Journal of Educational Psychology*, 112, 40–52. DOI: 10.1037/edu0000367.

- X es la característica de Euler-Poincaré en los apuntes de geometría y un espacio topológico en los de topología.

Las tres primeras se resuelven solas por contexto y el libro no las toca. La cuarta no, porque las dos mitades usan la letra a la vez y en la misma página. Aquí se toma la convención común: la característica de Euler-Poincaré se escribe siempre χ, que es como la escriben los apuntes de topología, también en la parte de geometría, donde el profesor escribe X. Es el mismo número y la misma suma. Conviene saberlo porque en los enunciados de la parte de geometría aparecerá con la otra letra.

Hay además una diferencia de orden, no de contenido, que despista al compararlos: los apuntes de geometría la definen como *caras más vértices menos aristas* y los de topología como *vértices menos aristas más triángulos*. Es la misma suma con los sumandos cambiados de sitio.

Otras dos, menores:

1. La curvatura geodésica se escribe K_g, con *ka* mayúscula, como en los apuntes y en el material de *Geometría local*. En algún enunciado antiguo aparece k_g; es la misma función.
2. La numeración de los apuntes del profesor (*Definición 1.1.1*, *Teorema 5.1.13*) desaparece. Cuando aquí hace falta citar un resultado anterior, se le llama por lo que dice, no por su número.

La palabra «superficie».

Esta es la trampa más seria de la asignatura y no está señalada en ninguna parte. La palabra *superficie* significa dos cosas distintas en las dos mitades.

En la parte de geometría, una superficie es una s.r. de $\mathbb{R}^3$, en el sentido de *Geometría local*: un subconjunto del espacio que localmente se parametriza de forma regular. En la parte de topología, una superficie es un espacio Hausdorff y con base numerable cuyos puntos tienen entornos homeomorfos a un disco, sin que nadie exija que viva dentro de $\mathbb{R}^3$. La botella de Klein y el plano proyectivo son superficies en el segundo sentido y no lo son nunca en el primero: los propios apuntes de topología advierten de que esas superficies no caben en el espacio de tres dimensiones sin puntos dobles.

La consecuencia práctica es que hay enunciados que solo son ciertos en una de las dos mitades, y el libro lo dirá cada vez que ocurra. El primero aparece ya en el capítulo 1.

APÉNDICE E

Añadidos y omisiones

Qué de este libro no está en el material de origen

Esta lista distingue los apoyos y ampliaciones del libro respecto del material de origen.

- **Las cajas.** *La idea*, *De dónde viene*, *Conexión*, *La pregunta*, *El camino que no se tomó*, *Antes de leer* y *Repaso intercalado*, y los avisos EXPLÍCATE. Son andamiaje: explican, sitúan históricamente y cuentan qué alternativas se descartaron. El contenido matemático que contienen se apoya en el texto principal; algunas conexiones aportan una interpretación adicional, indicada como tal.
- **La subdivisión en subsecciones.** Los capítulos y las secciones son los del profesor, con sus nombres. Las subsecciones (1.1.1, 1.3.3, 3.4.1 y las demás) son cortes nuestros dentro de su material, y sus títulos son nuestros; lo que hay dentro es suyo.
- **Las pistas, las «otras vías» y el «qué deja»** de cada ejercicio. Los enunciados son de las hojas del profesor o de sus exámenes, y cada uno dice de cuál.
- **La subsección de ejercicios del teorema** (1.3.9), que no es una hoja del profesor: son problemas de exámenes anteriores y variaciones sobre el catálogo, y cada uno indica de dónde sale.
- **El apéndice del catálogo de superficies**, identificado aquí como añadido.
- **El apéndice de exámenes**: los enunciados son del profesor; las resoluciones, el «qué buscaba el examen» y los errores típicos son nuestros.
- **Este apéndice** y el de cómo usar el libro.
- **Los enunciados de *Geometría local* reproducidos en las cajas de conexión.** Están ahí para no tener que ir a buscarlos; su sitio es el libro de aquella asignatura, y cada caja dice en qué capítulo y sección.
- **La letra χ en la parte de geometría**, donde el profesor escribe X.
- **Los nombres propios y las fechas que no están en sus apuntes** (Foucault, Hopf como nombre del teorema del índice de rotación, y algún otro). Las tres fechas de la historia del teorema, 1827, 1848 y 1935, sí vienen de su lección.

Material que todavía no se reproduce en el libro:

- Los problemas 1, 2, 3 y 5 de la segunda relación de topología, cuyo enunciado depende de figuras que la copia de texto pierde.
- El examen de topología de la **segunda** convocatoria de 2023-24, cuyo segundo problema pide el grupo fundamental de un espacio dado únicamente por un dibujo: dos esferas unidas por un punto con dos arcos identificados en una de ellas, sin flechas ni etiquetas en la otra. La identificación no queda determinada por la figura y no se inventa. Los otros tres problemas de ese examen sí están resueltos en las notas de trabajo del libro.

Ninguna sección de las lecciones del profesor falta: las cinco de Gauss-Bonnet, las cuatro del material complementario y las veintiuna de los seis temas de topología están todas, con sus nombres y en su orden.

Escalones añadidos en la ampliación de septiembre de 2026

El libro entero se ha ensanchado sin cambiar su estructura, su numeración ni sus enunciados. Los párrafos con rótulo *Un caso a mano*, *Cómo se lee*, *Lo que hay que llevarse*, *Qué se ha ganado*, *Dónde se falla* y *Qué hemos aprendido* son nuestros y explican lo que ya estaba; no añaden resultados. Los argumentos que el material de origen no trae son estos:

- **Capítulo 1.** La deducción de la fórmula de K en una carta ortogonal a partir de la segunda forma fundamental, que el lema del triángulo usaba sin demostrar; el péndulo de Foucault como caso del transporte paralelo, y el plano con dos rejillas como caso de la fórmula de Liouville.
- **Capítulo 2.** Las líneas de curvatura y las asintóticas como sistemas de curvas, con sus ecuaciones reenunciadas de *Geometría local*, y la rejilla de la silla $z = uv$ enderezada con números.
- **Capítulo 4.** El argumento de que concatenar palabras es sumar superficies, y el de que una palabra sin exponentes repetidos da una superficie orientable.
- **Capítulo 7.** La idea de la segunda mitad de la demostración del teorema de Seifert-van Kampen (la cuadrícula de Lebesgue) y el papel de que los dos trozos sean abiertos; cómo se prueba que dos palabras son distintas con un homomorfismo a S_3; cómo se abelianiza cambiando de generadores; el plano proyectivo como cuadrado *abab*.
- **Capítulo 8.** La idea de por qué χ vale $2-2n$ y $2-n$ y no depende de la triangulación (cada operación de la clasificación conserva $V-A+C$, y el modelo es único), que el material de origen enuncia sin prueba; M_2 y M_3 distinguidos contando los elementos de $G/2G$ en sus abelianizados (16 frente a 64); por qué el toro pide una rejilla de 3×3 para triangularse.

En la misma ampliación se han precisado algunas frases. Basta un retracto de deformación, no hace falta que sea fuerte, para que la inclusión induzca un isomorfismo; se dice en la prueba y el enunciado se conserva. Pegar un asa exige enfrentar las orientaciones, porque con media vuelta sale la botella de Klein. Las relaciones de $\mathbb{Z}^n$ se escriben con $i<j$. El sombrero bobo es contráctil y no es una superficie. El catálogo de obstrucciones por homomorfismos incluye la de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ del capítulo 6. La operación de la clasificación que necesita el par entrelazado es la quinta, no la cuarta. El grupo del toro menos un punto se calcula en el capítulo 7, no con la tabla de retractos. No se ha encontrado ningún error matemático de fondo.

Conexiones con mecánica, ondas e integración

Las cajas de conexión añaden tres apoyos: la fórmula de Poisson interpreta el valor algebraico de la derivada covariante; el cilindro distingue isometría local y topología global; la fase acumulada y la circulación enlazan los levantamientos con el cálculo vectorial. Se desarrollan dentro del libro y no requieren haber leído otros apuntes. El ejemplo del campo irrotacional precisa el dominio necesario para aplicar Green–Stokes.

Figuras de las construcciones topológicas

Se incorporan los dibujos originales de cono y suspensión, descomposición de Klein, suma conexa, mezcla de tipos, retracción radial, peine y recubrimiento del toro, así como las retracciones usadas en Seifert–van Kampen. Cada figura indica su página de origen y acompaña el paso que representa; se mantienen los esquemas anteriores que ya eran correctos.

Precisiones en los conceptos previos

En la sección 1.1.1, la curva frontera «exterior» se distingue en las regiones planas acotadas; no se deduce de la compacidad en una superficie general. En la sección 1.1.2, «no tangente» significa que los vectores no son colineales, no simplemente que sean distintos. En la definición de triangulación se comparan triángulos distintos. Son precisiones de las páginas 2–3 de la lección de Gauss-Bonnet del material de origen.

La inducción para $3C = 2A_i + A_e$ se formula para subfamilias de caras, sin suponer que quitar un triángulo deja otra región regular. En la sección 1.1.4, el valor absoluto del jacobiano muestra que la integral $f\,dA$ no requiere orientación; el contexto orientado de la página 5 del material de origen basta, pero esa hipótesis no es necesaria para esta integral.

En la presentación de Gauss-Bonnet se explicitan la orientación positiva, el signo de los ángulos cuspidales según el lado de la región y el alcance local de la carta ortogonal usada en el lema. Al invertir el borde con la normal fija, la integral de $K\,dA$ no cambia de signo. Se precisa asimismo que la restricción orientable pertenece a la formulación aquí demostrada. La nota sobre Hopf se ajusta a su artículo de 1935, que presenta nuevas pruebas de resultados conocidos.

Precisiones en el material de curvas

En el capítulo 2 se explicita el carácter local de las familias regulares y del factor integrante, con $df \neq 0$ y $(M, N) \neq (0, 0)$. Las demostraciones de ortogonalidad incluyen ahora los casos con pendiente infinita, sin dividir por cero. Son precisiones de las páginas 1–5 del material complementario del profesor; se conservan sus fórmulas. El ejemplo explicativo de los ángulos se sustituye por una parametrización oblicua del plano, verificable directamente.

Precisiones en la introducción topológica

En el capítulo 3 se precisa que un punto adherente puede estar fuera del conjunto y que el criterio por topología final supone sobreyectividad. Para el modelo hemisférico del plano proyectivo se sustituye el reflejo $(x, y, z) \mapsto (x, y, |z|)$ del material de origen (p. 15), que no respeta los pares antípodas, por la elección de p o $-p$ con valores en el cociente del hemisferio. Se corrige la palabra del cilindro y se añade un esquema de cuatro pegados, siguiendo las identificaciones dibujadas en la p. 19 del material. El puente con Stokes en Gauss-Bonnet es una lectura adicional del mismo cálculo de Green.

Precisiones en los ejercicios de cocientes

Se distingue la imagen de un conjunto en el cociente de su saturación en el espacio original. En el recubrimiento de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ se usan solo índices impares; aquí la notación significa aplastar los enteros, no el cociente por traslaciones. Se completan las verificaciones de la topología en los tres cocientes del plano y en el cociente por $a \sim 1/a$. Se precisa que una relación abierta implica proyección abierta, aunque el recíproco falla.

En adjunciones se explicita $A \neq \emptyset$ para la conclusión de conexión por caminos, hipótesis omitida en el problema 21 de la relación original; la prueba de separación usa abiertos saturados disjuntos. El cotejo del problema de los cubos confirma la tercera identificación trivial impresa en el original.

Precisiones en clasificación de superficies I

Se explicita el alcance compacto, conexo y sin borde de la clasificación. La definición de orientabilidad de la página 27 del original dice «normal constante»; se corrige por orientaciones locales compatibles y, en superficies regulares de $\mathbb{R}^3$, por un campo normal global continuo. Se distingue una inmersión con autointersecciones de un embebimiento.

Se justifica el cambio de código de la botella de Klein mediante el corte en dos triángulos y su nuevo pegado. En la suma conexa se conserva la banda de Möbius eligiendo el disco fuera de ella, sin afirmar que se conserve el sumando cerrado entero. El símbolo de suma conexa se mantiene y se espacia como operación.

El examen del 14 de mayo de 2018 pide seis superficies en un pentágono: se mantiene su enunciado y se explicita el convenio bajo el cual hay cinco tipos, con un código para cada uno. En la forma normal de Möbius se precisan compacidad, conexión y compatibilidad de orientaciones en los pegados. La prueba local del hexágono usa su enlace, sin confundir quitar un punto con quitar una arista.

Precisiones en homotopía

En el capítulo 5 se explicitan continuidad y puntos base. Se corrige la identidad de la homotopía libre a $f_* = \gamma_\sharp \circ g_*$, de acuerdo con el diagrama de la página 40 del original; un esquema del cuadrado muestra el sentido de las flechas. La prueba de invariancia por equivalencia de homotopía distingue los grupos con diferentes bases antes de concluir la biyectividad. Se precisan también el alcance de los retractos, la continuidad de la contracción del cono y la diferencia entre reparametrizar un camino y acortar su ida y vuelta.

En los ejercicios se recuperan dos distinciones de la relación 3 original: el ocho plano tiene un retracto formado por una superficie de dos asas con membranas, y al perforar una banda de Möbius el resultado depende de si el punto es interior o está en el borde (soluciones, p. 3). Se distingue asimismo el grafo que aparece como retracto de su tipo de homotopía como unión puntual. La circunferencia alejada del origen no es retracto del plano perforado, aunque lo sugería el título de la explicación; se corrige ese título.

Precisiones en el grupo fundamental de la circunferencia

Se explicita la periodicidad uno de la cubierta elegida, frente al dibujo con separaciones 2π de la página 44 del original. Se distingue la elevación de caminos de la de homotopías y se completan las justificaciones de continuidad. La conexión con la integral de dz/z conserva su hipótesis de regularidad a trozos.

En la alternativa que precede a Brouwer se recupera que el punto de la segunda opción pertenece al borde. En la prueba del teorema fundamental del álgebra, la homotopía se evalúa uniformemente en Mz: la página 51 del original mezcla la circunferencia unidad y la de radio M. Se elige además una cota estricta para impedir ceros durante toda la homotopía. Se mantiene la demostración original.

En los ejercicios se explicitan continuidad, intersección no vacía y las reparametrizaciones necesarias. Se construye la retracción de la esfera con dos puntos identificados y se justifica la conexión entre grado de la antipodal y campos tangentes sin ceros.

Precisiones en Seifert-van Kampen

Se formula la construcción de homomorfismos desde una presentación como extensión de las imágenes de los generadores. En el producto libre se usa la presentación simplificada de la nota 5.1.8 del original, con nombres disjuntos para los generadores de ambos factores. Se distinguen las relaciones de cada pieza de las relaciones adicionales impuestas por el solape.

Se recupera el cambio de punto base mediante el camino γ del cálculo del toro (original, pp. 59–60) y el esquema de los abiertos de la figura de ocho (p. 58). La lectura directa de la palabra del polígono se limita a los modelos con un solo vértice; para otros se indica el paso previo del árbol máximo.

Precisiones en la separación de Jordan

Las homotopías del primer lema permanecen en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y terminan en $-p$, no en el punto excluido 0. Se corrige también el dominio de la proyección estereográfica del segundo lema (original, p. 65). En la demostración de separación, los homomorfismos triviales son los inducidos por las inclusiones de las piezas en el total; sus imágenes generan el grupo. Se corrige la confusión de flechas del original, p. 66.

Se distingue la separación demostrada de la versión completa de Jordan. La nota histórica reconoce la existencia de pruebas elementales y la conexión con Poincaré-Bendixson mantiene la hipótesis de ausencia de puntos críticos en el conjunto límite.

Precisiones en ejercicios de grupos fundamentales

El complementario de dos circunferencias engarzadas como eslabones tiene grupo $\mathbb{Z}^2$, no $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$; por tanto este invariante sí distingue el enlace de Hopf del par no enlazado. Se aporta un esquema de los cruces y se justifica el cálculo con un modelo explícito del complementario en S^3.

Para la esfera con un diámetro se construyen los abiertos de Seifert-van Kampen, sin confundir contraer un subespacio en un cociente con una retracción. Se precisan la prueba de ausencia de torsión en grupos libres y el alcance limitado de la comprobación mediante característica de Euler.

Precisiones en la clasificación de superficies

Se explicitan las hipótesis de compacidad, conexión y ausencia de borde. Se distingue la torsión del abelianizado de la contractibilidad de lazos y del cambio de orientación: el centro de una banda de Möbius no tiene orden dos en su grupo fundamental. En triangulaciones se hace explícita la finitud local; se recuperan de las pp. 70, 72–74 y 76 de los apuntes originales seis dibujos que permiten seguir los recuentos y los cortes y pegados. Se corrige la inversión del orden al invertir un bloque de letras, también errada en el texto original de la p. 71. Se precisan la suma de Euler, las descomposiciones celulares de grafos planos y las condiciones de la conexión con Gauss–Bonnet. La fecha de publicación de Euler se contrasta con el archivo de la memoria E230.

Precisiones en los ejercicios de clasificación

Se conservan los códigos y su errata documentada en la Relación 6, y se añade el cálculo del grupo que faltaba para la versión con dos apariciones de d^{-1}. En el ejercicio de cuatro superficies con abelianizado $\mathbb{Z}^2$ se sustituye el ejemplo duplicado (esfera menos tres puntos y plano menos dos puntos son homeomorfos) por un toro con una componente de borde, y se justifican las distinciones. Se precisa que la botella de Klein menos un punto no tiene borde. El cociente por todo el borde incluye ahora el caso $k = 0$ y distingue compacidad de la condición de ser una superficie.

Precisiones en las orientaciones de estudio

Se distingue la restricción de los exámenes sobre el cálculo explícito de curvatura geodésica de la validez matemática de ese método. Las recomendaciones se formulan sin prometer comprensión automática ni resultados de examen. La referencia al ensayo de práctica intercalada precisa su contexto escolar y corrige la media de comparación (38 %, no 37 %). Se mantiene la estructura de preguntas, ejemplos, pistas y repasos.

Precisiones en el catálogo de superficies

Se fijan las orientaciones que determinan el signo de la curvatura geodésica y se corrige el signo de la esfera en la tabla. Las geodésicas del cono incluyen todas las rectas del desarrollo local, no solo las generatrices. Se distingue la degeneración de las coordenadas polares de una singularidad de la superficie, y la regularidad local de un tubo de la ausencia de autointersecciones. Se precisan las hipótesis que permiten aplicar Gauss–Bonnet y el cambio de variables por la aplicación de Gauss.

Precisiones en el examen de topología de julio de 2026

Se justifica el cociente producto por compacidad y separación, y la obstrucción local mediante el enlace. La conexión por caminos de los abiertos del toro se deduce de las hipótesis, sin añadir una nueva. En el modelo con dos pentágonos se distingue el esqueleto de aristas del retracto de una superficie perforada; las dos relaciones se conservan al contraer el árbol maximal. La clasificación por el grupo fundamental se limita a la familia de productos indicada, y la regla de orientabilidad se aplica a un solo polígono. Las indicaciones de estudio admiten el uso de ejemplos resueltos.

Precisiones en el examen de geometría de junio de 2026

Se fijan los sentidos compatibles para comparar las integrales de las dos elipses: como arcos del borde de la región se recorren en sentidos opuestos. La homotecia justifica la igualdad bajo las hipótesis dadas, sin afirmar su recíproco para planos arbitrarios. Se conserva la frontera al quitar discos, se incluye la corrección por la intersección en la aditividad de Euler y se precisa la regularidad local del tubo.

Dos figuras recuperadas de los exámenes

Se incorporan las figuras originales de los pentágonos de julio de 2026 y de los arcos de julio de 2025. Sus soluciones dejan de ser solo un método: se calcula $\pi_1(X)_{ab} = \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}_2$ y se identifica N_4 en el primer caso; en el segundo se cuenta expresamente el giro de π en la punta. En el ejercicio del cilindro se distingue la integral del arco, $\pi/2$, de la integral de la elipse completa, que es cero. Se respeta que la prohibición de calcular esa curvatura se formula en el primer apartado.

Precisiones en los exámenes de junio y marzo de 2025

Se distingue la curvatura positiva de una curva del mero hecho de no ser una recta, y se explicita el argumento local que deduce $K = 0$ de la suma de ángulos en todos los triángulos geodésicos. Se ajustan los dominios angulares de las cartas. Las instrucciones de examen se cotejan por convocatoria: marzo de 2025 no prohíbe integrar K, mientras que junio prohíbe calcular explícitamente K_g. Esta distinción se incorpora también a las orientaciones de estudio.

Precisiones en el examen de topología de julio de 2025

Se conserva la puntuación indeterminada «XXX» del original, sin atribuir un peso a cada ejercicio. Se distingue la obstrucción por grupo fundamental para el cilindro de la no contractibilidad para la esfera. Se recupera la figura de los dos toros: su cálculo explicita si se conserva o se retira el disco superior, un dato que la copia no describe en palabras y que cambia la presentación del grupo.

Precisiones en el examen de topología de junio de 2025

La compacidad del cociente se prueba usando el compacto $[0, 1] \cup \{2\}$, sin identificar incorrectamente 0 con el conjunto colapsado. Se añade la presentación del grupo pedida en el segundo ejercicio, contrayendo la arista que une las dos clases de vértices. Se señala la inversión entre espacio y retracto de deformación en la segunda pregunta del tercer ejercicio del original.

Precisiones en el examen de topología de junio de 2024

Se separan las obstrucciones por torsión y por rango del abelianizado. Los siete cocientes del intervalo se distinguen por cardinalidad, separación y por el espacio que queda al retirar el punto colapsado; se explicita la convención sobre el intervalo vacío. Se evita confundir una presentación usual de superficie con la afirmación de que cualquier presentación debe tener una sola relación.