

Notas de

Matemática discreta

Nota editorial.

Estos apuntes han sido redactados con inteligencia artificial a partir de múltiples materiales, bajo la dirección y revisión del autor. Pueden contener errores; ante cualquier discrepancia, manda el material oficial de la asignatura.

El temario sigue el proyecto docente de la asignatura *Matemática Discreta* (primer curso) del Grado en Matemáticas de la Universidad de Sevilla, y los exámenes resueltos proceden de sus convocatorias. Aun así, el contenido es el de un curso estándar de la materia y puede ser útil a estudiantes de otras universidades. Lo específico de cómo se imparte y se examina en Sevilla está reunido en el apéndice «Qué cae en el examen», que se puede saltar entero.

Versión de septiembre de 2026.

Índice general

1. Combinatoria y métodos de enumeración	1
1.1. Aplicaciones entre conjuntos	2
1.1.1. Definición de función e imagen	2
1.1.2. Inyectiva, sobreyectiva, biyectiva	2
1.1.3. Composición, identidad e inversa	3
1.2. Cardinalidad: finito, infinito, numerable	5
1.2.1. Equipotencia	6
1.2.2. Finitud y vacío	6
1.2.3. Principio del palomar	8
1.2.4. Numerabilidad (contabilidad)	13
1.2.5. Conjunto potencia y Teorema de Cantor	18
1.3. Propiedades del cardinal de conjuntos finitos	20
1.3.1. Principio de adición	21
1.3.2. Principio del producto	22
1.3.3. Principio de inclusión-exclusión	23
1.3.4. Inclusión-exclusión para n conjuntos	25
1.4. Aplicaciones $\mathbb{N}_m \rightarrow X$ con X finito	30
1.4.1. Funciones (variaciones con repetición)	30
1.4.2. Inyecciones (variaciones sin repetición)	31
1.4.3. Biyecciones (permutaciones)	32
1.5. Subconjuntos: combinaciones	37
1.5.1. Combinaciones sin repetición	38
1.5.2. Combinaciones con repetición	43
1.5.3. Permutaciones con repetición	47
1.5.4. Todos los subconjuntos	50
1.6. Números combinatorios y Teorema del Binomio	51
1.6.1. Identidades básicas	51
1.6.2. Binomio de Newton	52

2. Introducción a la teoría de grafos	56
2.1. Grafos simples	57
2.1.1. Definiciones básicas y ejemplos	57
2.1.2. Algunos ejemplos	58
2.1.3. Otros tipos de grafos: digrafos y multigrafos	59
2.2. Adyacencia e incidencia	60
2.2.1. Matrices asociadas a un grafo	61
2.3. Subgrafos y morfismos	66
2.3.1. Subgrafos y operaciones básicas	66
2.3.2. Morfismos de grafos	67
2.4. Conexión y componentes conexas	73
2.5. Invariantes métricos	76
2.6. Puntos de corte y aristas puente	84
2.7. Grafos no separables y bloques	91
2.7.1. Demostración del teorema de caracterización de los bloques	93
2.8. Árboles	98
2.9. Grafos bipartitos	112
3. Grafos Eulerianos y Hamiltonianos	118
3.1. Grafos eulerianos	118
3.1.1. Algoritmo de Fleury	123
3.1.2. Por qué funciona el algoritmo de Fleury	124
3.2. Grafos hamiltonianos	135
4. Conectividad	152
4.1. Conectividad y conectividad lineal	153
4.2. El teorema de Whitney	154
4.3. Ejemplos básicos	157
4.4. Otros resultados sobre conectividad lineal	158
4.5. Grafos n -conexos	167
4.5.1. Grafos 3-conexos y el teorema de Tutte	169
4.6. Conectividad local y el teorema de Menger	173
4.6.1. La demostración del teorema de Menger	176
4.6.2. La demostración del teorema de Dirac	179
5. Planaridad	186
5.1. Grafos planares y planos	187
5.1.1. Primeros ejemplos	187
5.2. Caras de un grafo planar y fórmula de Euler	190
5.3. Consecuencias de la fórmula de Euler	194
5.3.1. La cota del contorno	196
5.4. Caracterización de grafos planares	205
5.4.1. La demostración del teorema de Kuratowski	209

6. Coloración	220
6.1. Consideraciones previas sobre algunas superficies en $\mathbb{R}^3$	220
6.2. Coloración de vértices	223
6.3. Coloración de aristas	236
6.3.1. La demostración del teorema de König	238
A. Ideas intuitivas de las demostraciones	247
B. Añadidos y omisiones	249
C. Qué cae en el examen	252
C.1. El formato	252
C.2. Qué demostraciones caen	253
C.3. Por capítulos	255
D. Exámenes resueltos	261
D.1. Control 1: árboles	261
D.2. Control 2: conectividad y eulerianos	262
D.3. Control 3: planaridad y coloración	262
D.4. Primera convocatoria de 2024–25 (4 de junio de 2025)	262
D.5. Primera convocatoria de 2025–26 (3 de junio de 2026)	264
D.6. Primera convocatoria de junio de 2024 (grupos 2 y 4, 6 de junio)	265
D.7. Segunda convocatoria de julio de 2024 (grupos 2 y 4, 11 de julio)	269
D.8. Primera convocatoria de 2023 (grupos 1 y 4, 6 de junio)	273
D.9. Examen prefinal del grupo 2 (23 de mayo de 2024)	276
D.10. Examen prefinal del grupo 4 (24 de mayo de 2024)	282
D.11. Prueba de evaluación del grupo C (21 de mayo de 2025)	286
E. Lo que este libro da por sabido	291
F. Cómo usar este libro	292

Combinatoria y métodos de enumeración

ANTES DE LEER

Intenta responder estas cuatro preguntas antes de leer. No hace falta resolverlas todas: sirven para reconocer qué problema resuelve cada idea del capítulo.

1. Un pastor que no sabe contar quiere saber si por la noche han vuelto todas sus ovejas. ¿Cómo puede hacerlo sin usar ningún número?
2. ¿Hay tantos números pares como números naturales, o la mitad? Da un argumento a favor de cada respuesta, y decide cuál de los dos vale.
3. En un grupo de $n \geq 2$ personas, ¿por qué tiene que haber siempre dos con el mismo número de amigos dentro del grupo?
4. Repartir diez sillas iguales entre cuatro habitaciones y decidir cuántas cartas de cada palo tendrá una mano de diez cartas son el mismo problema si solo se cuentan los palos y hay al menos diez cartas disponibles de cada uno. ¿Cuál es la traducción?

Las respuestas están, respectivamente, en las secciones 1.1, 1.2 (dos veces: el principio del palomar y la numerabilidad) y 1.5.

Este capítulo es el único del libro que no habla de grafos, y sin embargo es el que sostiene a los otros cinco. Contar es la actividad más antigua de las matemáticas y la menos formalizada hasta hace poco: se sabía contar mucho antes de saber qué significaba que dos colecciones tuvieran el mismo número de cosas. El capítulo empieza justo ahí, en la definición de «mismo tamaño», y termina en el teorema del binomio. Por el camino aparecen las tres herramientas que la teoría de grafos usará en cada página: las biyecciones, el principio del palomar y los números combinatorios.

El recorrido es este: aplicaciones entre conjuntos, cardinalidad, propiedades del cardinal finito, aplicaciones de $\mathbb{N}_m$ en un conjunto finito, subconjuntos y números combinatorios.

1.1 Aplicaciones entre conjuntos

LA PREGUNTA

Imagina un pastor que no sabe contar más allá de tres, pero necesita saber cada noche si ha vuelto todo el rebaño. Por la mañana, al salir cada oveja, mete una piedra en un saco; por la noche, al entrar cada una, saca una piedra. Si el saco queda vacío, están todas. ¿Qué está haciendo exactamente el pastor, y por qué le basta sin conocer ningún número?

LA IDEA: EMPAREJAR ANTES QUE CONTAR

El pastor no cuenta: *empareja*. A cada oveja le corresponde una piedra y a cada piedra una oveja, sin que sobre ni falte ninguna. Ese emparejamiento sin sobras es lo que hoy se llama biyección, y es una idea anterior y más básica que la de número. De hecho, el número «cinco» no es más que el nombre común de todas las colecciones que se pueden emparejar sin sobras con los dedos de una mano.

Toda la combinatoria de este capítulo consiste en hacer lo mismo con más astucia: para contar un conjunto complicado se le empareja con otro que ya se sabe contar. Por eso la sección empieza por las aplicaciones y no por los números.

1.1.1 Definición de función e imagen

Definición. Sean A y B conjuntos. Una **función** (o aplicación) $f : A \rightarrow B$ es una regla que asigna a cada elemento $a \in A$ un único elemento $f(a) \in B$. El conjunto A es el **dominio** de f y B su **codominio**.

Las dos palabras que llevan el peso son *cada* y *único*. Cada elemento del dominio tiene que tener imagen (no vale dejar ovejas sin piedra), y solo una (no vale que una oveja meta dos piedras). No se pide nada sobre el codominio: puede haber elementos de B que no sean imagen de nadie, y puede haber elementos de B que sean imagen de varios. Esas dos libertades son exactamente lo que distinguen las tres clases de funciones de la subsección siguiente.

Definición. La **imagen** (o recorrido) de $f : A \rightarrow B$ es

$$\text{Im}(f) = f(A) = \{f(a) : a \in A\} \subseteq B.$$

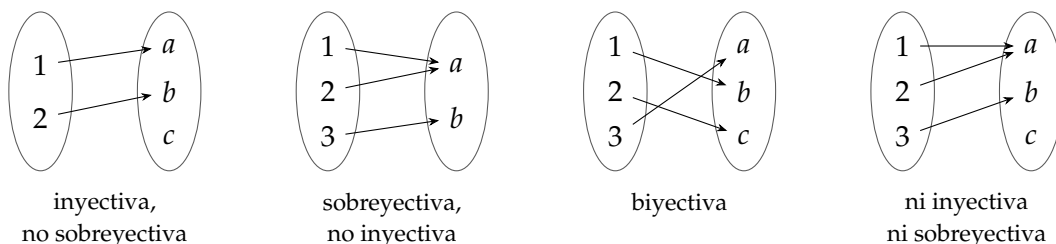
1.1.2 Inyectiva, sobreyectiva, biyectiva

Definición. Sea $f : A \rightarrow B$.

- f es **inyectiva** si $f(a) = f(a')$ implica $a = a'$. Dicho al revés: elementos distintos tienen imágenes distintas.
- f es **sobreyectiva** si para todo $b \in B$ existe $a \in A$ con $f(a) = b$. Es decir, $\text{Im}(f) = B$.
- f es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

Con la imagen del pastor: inyectiva quiere decir que no hay dos ovejas con la misma piedra; sobreyectiva, que no sobra ninguna piedra; biyectiva, las dos cosas a la vez, que es lo que el pastor necesita.

Con conjuntos de dos o tres elementos las tres propiedades se ven de un golpe. Se dibuja el dominio a la izquierda, el codominio a la derecha y una flecha de cada a a su imagen $f(a)$:



Cada propiedad se lee en un lado distinto del dibujo. Que f sea una *función* se comprueba a la izquierda: de cada punto del dominio sale exactamente una flecha. Que sea *inyectiva* se comprueba a la derecha: ningún punto recibe dos flechas. Que sea *sobreyectiva*, también a la derecha: todo punto recibe al menos una. En el primer dibujo sobra la c ; en el segundo, la a recibe dos flechas; en el último pasan las dos cosas a la vez, y por eso tener tres elementos a cada lado no basta para ser biyectiva. Fíjese, de todos modos, en que en ese último dibujo fallan las dos propiedades juntas: con el mismo número de elementos a cada lado no puede fallar solo una, y esa es la proposición de las «sillas justas» de la sección siguiente.

Los dos primeros dibujos adelantan además lo que hará toda la sección siguiente. La inyectiva va de un conjunto de dos elementos a uno de tres, y la sobreyectiva, de uno de tres a uno de dos. No es casualidad: con flechas que no se juntan no se puede ir a un conjunto más pequeño, y con flechas que lo cubren todo no se puede ir a uno más grande. De esas dos frases saldrán el principio del palomar y la definición de «mismo tamaño».

Ejemplo. La función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$, es inyectiva (si $n + 1 = n' + 1$ entonces $n = n'$) pero no sobreyectiva: el 1 no es imagen de nadie, porque $n + 1 = 1$ obligaría a $n = 0 \notin \mathbb{N}$.

La función $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$, $g(k) = k^2$, no es inyectiva ($g(1) = g(-1)$) ni sobreyectiva (el 2 no es un cuadrado). Aquí el codominio es $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, porque $g(0) = 0$: con codominio $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ni siquiera sería una función bien definida.

EXPLÍCATE. Da una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que sea sobreyectiva pero no inyectiva. Hay una muy sencilla que «pierde» un elemento.

1.1.3 Composición, identidad e inversa

Definición. Si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$, su **composición** es $g \circ f : A \rightarrow C$, $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. La **identidad** en A es $\text{id}_A : A \rightarrow A$, $\text{id}_A(a) = a$.

La composición se lee de derecha a izquierda: primero actúa f y después g . Dos propiedades inmediatas que se usarán sin cesar: la composición de inyectivas es inyectiva, y la de sobreyectivas es sobreyectiva. La primera porque si $g(f(a)) = g(f(a'))$, la inyectividad de g da $f(a) = f(a')$ y la de f da $a = a'$. La segunda porque todo $c \in C$ es $g(b)$ para algún b , y ese b es $f(a)$ para algún a , luego $c = g(f(a))$.

Teorema (caracterización de la biyectividad mediante inversa). Una función $f : A \rightarrow B$ es biyectiva si y solo si existe una función $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_A \quad \text{y} \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_B.$$

LA IDEA: LA FLECHA QUE SE PUEDE RECORRER AL REVÉS

Piense en f como un cable que une cada enchufe de A con un enchufe de B . «Tener inversa» significa que puede usted plantarse en B , agarrar cualquier enchufe y seguir su cable hacia atrás hasta A sin dudar. Para eso hacen falta exactamente dos cosas, y ninguna más: que de cada enchufe de B salga *algún* cable hacia atrás (si no, no hay adónde ir: eso es la sobreyectividad) y que salga *uno solo* (si no, no se sabe cuál tomar: eso es la inyectividad).

Esa lectura ya predice el enunciado y, más aún, predice su forma: como son dos exigencias independientes, la inversa viene con dos igualdades y no con una, y cada una de ellas compra una de las dos mitades. **Todo el teorema es que «volver hacia atrás» se descompone en «hay camino de vuelta» y «el camino de vuelta es único»,** que son palabra por palabra la sobreyectividad y la inyectividad.

Observación (la intuición falsa: «basta con despejar»). La tentación es escribir: «si $f(a) = b$, entonces $a = f^{-1}(b)$, y ya está». Pero esa línea no demuestra nada, porque da por hecho justo lo que hay que probar: al escribir $f^{-1}(b)$ se está suponiendo que *existe* un a con $f(a) = b$ y que ese a es *único*. Un despeje puede construir la inversa, pero hay que comprobar que da exactamente una solución en A para cada $b \in B$.

Hay una segunda versión plausible y falsa: creer que con una sola de las dos igualdades basta. No basta. La función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$, admite $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(n) = \max\{n - 1, 1\}$, que cumple $g(f(n)) = \max\{n, 1\} = n$; y sin embargo f no es sobreyectiva, porque nadie va a parar al 1. Falla la otra igualdad: $(f \circ g)(1) = 2 \neq 1$. Una inversa por un lado da media biyectividad, no la biyectividad.

Paso 1: la igualdad $g \circ f = \text{id}_A$ es la que impide que dos elementos se fundan (inyectividad). Supongamos que existe $g : B \rightarrow A$ con $g \circ f = \text{id}_A$ y $f \circ g = \text{id}_B$, y sean $a, a' \in A$ con $f(a) = f(a')$. Aplicamos g a los dos lados:

$$a = (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(f(a')) = (g \circ f)(a') = a'.$$

La primera y la última igualdad son $g \circ f = \text{id}_A$; la del medio es la hipótesis $f(a) = f(a')$. Luego f es inyectiva.

Paso 2: la igualdad $f \circ g = \text{id}_B$ es la que exhibe la preimagen que falta (sobreyectividad). Dado $b \in B$, el candidato natural es $a = g(b)$, y en efecto $f(a) = f(g(b)) = (f \circ g)(b) = b$. Luego f es sobreyectiva, y con el Paso 1, biyectiva.

Paso 3: recíprocamente, la biyectividad permite definir la inversa, y es aquí donde está el peso (el núcleo de la prueba). Lo delicado no es verificar las dos igualdades, sino que el objeto f^{-1} exista siquiera como función. Para cada $b \in B$, la sobreyectividad garantiza que hay algún $a \in A$ con $f(a) = b$ —esto da la *existencia* del valor—, y la inyectividad garantiza que ese a es único —si hubiera dos, tendrían la misma imagen b —, lo que da la *unicidad*. Definimos $f^{-1}(b)$ como ese único a . Es una función bien definida precisamente por la unicidad: sin ella tendríamos una correspondencia que asigna varios valores a un mismo b , y eso no es una función.

Paso 4: comprobación de las dos igualdades. Por construcción $f(f^{-1}(b)) = b$ para todo b , es decir $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$. Y para $a \in A$, el único elemento cuya imagen es $f(a)$ es el propio a , luego $f^{-1}(f(a)) = a$, es decir $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$. ■

Observación (qué papel juega cada hipótesis). Quitando la inyectividad, el Paso 3 sigue produciendo algún a para cada b , pero no uno solo: no hay función inversa, solo una elección arbitraria (y la igualdad que se pierde es $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$). Quitando la sobreyectividad, hay valores de b para los que el Paso 3 no encuentra ningún a : f^{-1} ni siquiera está definida en todo B , y lo que se pierde es $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$. Cada hipótesis sostiene exactamente una de las dos igualdades, que es lo que anunciaba la imagen del cable.

EXPLÍCATE. Construya una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ y una $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ con $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{N}}$ pero $g \circ f \neq \text{id}_{\mathbb{N}}$; es decir, el ejemplo simétrico del que aparece más arriba. ¿Cuál de las dos, f o g , resulta ser sobreyectiva, y cuál inyectiva?

CONEXIÓN: ÁLGEBRA LINEAL

Este teorema es el mismo que se demostró para aplicaciones lineales: una aplicación lineal es un isomorfismo si y solo si tiene inversa lineal. Allí había además un atajo que aquí no existe: si $f : V \rightarrow W$ es lineal entre espacios de la misma dimensión finita, entonces inyectiva, sobreyectiva y biyectiva son equivalentes. En la sección siguiente aparecerá un resultado paralelo para conjuntos finitos del mismo cardinal. La semejanza es que no queda espacio para perder una dirección, o un elemento, sin que sobre otro. Son dos resultados distintos: un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ tiene infinitos elementos, y en él la equivalencia depende de que f sea lineal.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: DEFINIR EL TAMAÑO CONTANDO EN VEZ DE EMPAREJANDO

Una alternativa sería definir « A tiene n elementos» recitando los números $1, 2, \dots, n$ mientras se señalan los elementos, y decir que dos conjuntos tienen el mismo tamaño cuando al contarlos se llega al mismo número. Tiene una ventaja evidente: es lo que todo el mundo hace, y devuelve un número, no una aplicación.

Lo que la hunde es que no se puede aplicar a nada infinito: no hay ningún número al que se llegue contando los naturales. La definición por emparejamiento, en cambio, no necesita saber contar y funciona igual con rebaños que con $\mathbb{N}$. Por eso aquí se empieza por las biyecciones, y por eso el precio que se paga es tener que demostrar (y no dar por obvio) que dos formas distintas de contar un conjunto finito dan el mismo número. Esa demostración es la proposición sobre inyectiva, sobreyectiva y biyectiva de la sección siguiente.

1.2 Cardinalidad: finito, infinito, numerable

LA PREGUNTA

Galileo observó en 1638 que a cada número natural se le puede asignar su cuadrado, $1 \mapsto 1, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 9$, sin que dos naturales compartan cuadrado y sin que sobre ningún cuadrado. Luego hay «tantos» cuadrados como naturales. Pero los cuadrados son solo una parte de los naturales, y una parte cada vez más rala: entre 1 y 100 hay diez, entre 1 y 10 000 hay cien. ¿Hay tantos o hay menos? ¿Y qué significa siquiera la pregunta?

A lo largo de este libro, $\mathbb{N}$ denota el conjunto $\{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_m$ denota $\{1, 2, \dots, m\}$ y $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Conviene fijar el convenio, porque en otros textos el cero sí es natural.

1.2.1 Equipotencia

Definición. Dos conjuntos A y B tienen el **mismo cardinal** si existe una biyección $A \rightarrow B$. Se escribe $|A| = |B|$.

Esta es la respuesta a la paradoja de Galileo: la pregunta «¿hay tantos?» solo tiene sentido una vez que se decide qué significa, y la decisión es «existe una biyección». Con esa decisión, hay tantos cuadrados como naturales, y el hecho de que los cuadrados sean una parte propia deja de ser una contradicción: un conjunto infinito puede ser equipotente a una parte propia suya. Más abajo se precisará la relación con la noción de infinito de Dedekind.

Definición. Sea X un conjunto y $\sim$ una relación en X (un subconjunto de $X \times X$). Se dice que $\sim$ es una **relación de equivalencia** si para todo $x, y, z \in X$:

1. reflexividad: $x \sim x$;
2. simetría: si $x \sim y$, entonces $y \sim x$;
3. transitividad: si $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces $x \sim z$.

Proposición. La relación «tener el mismo cardinal» es una relación de equivalencia.

Reflexiva: id_A es una biyección de A en A . Simétrica: si $f : A \rightarrow B$ es biyección, su inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$ es biyección (tiene inversa, que es f ; y por el teorema de la sección anterior, tener inversa equivale a ser biyectiva). Transitiva: si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ son biyecciones, $g \circ f : A \rightarrow C$ es inyectiva y sobreyectiva por las dos propiedades de la composición vistas antes, luego biyectiva. ■

Intuitivamente, un cardinal recoge «lo que tienen en común todos los conjuntos que se pueden emparejar entre sí». Para comparar tamaños basta trabajar con esas biyecciones, sin entrar en la construcción formal de los cardinales en teoría de conjuntos. Los cardinales finitos son $0, 1, 2, \dots$; el 0 corresponde al conjunto vacío.

1.2.2 Finitud y vacío

Definición. Un conjunto A es **finito** (de cardinal m) si existe una biyección $A \rightarrow \mathbb{N}_m$. Por convenio, $\emptyset$ es finito y $|\emptyset| = 0$.

Proposición. Si A y B son finitos y $|A| = |B|$, entonces para toda $f : A \rightarrow B$ se tiene

$$f \text{ inyectiva} \iff f \text{ sobreyectiva} \iff f \text{ biyectiva}.$$

LA IDEA: LAS SILLAS JUSTAS

La intuición falsa, primero, porque aquí es especialmente peligrosa. Uno lee el enunciado y piensa: «claro, inyectiva y sobreyectiva son lo mismo, es evidente». No lo son, y creerlo es el error que arruina la sección siguiente: la aplicación $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$, es inyectiva y no es sobreyectiva. Lo que hace verdadera a esta proposición no es nada sobre inyecciones y sobreyecciones en general, sino **una propiedad exclusiva de lo finito**, y por eso merece demostración.

La imagen: una sala con las sillas justas. Hay $|A|$ personas y $|B|$ sillas, con el mismo número de unas que de otras, y f es «dónde se sienta cada persona». Inyectiva significa que no hay dos personas en la misma silla; sobreyectiva, que no queda ninguna silla

vacía. Con las sillas justas, las dos cosas son la misma: si nadie comparte silla, no puede sobrar ninguna, porque entonces las personas ocuparían menos sillas de las que hay y habría menos personas que sillas; y si no sobra ninguna silla, no puede haber dos personas juntas, porque entonces harían falta menos personas que sillas.

La imagen predice el enunciado y predice por qué falla en el caso infinito: en una sala con infinitas sillas, «sobra una silla» ya no obliga a nada, porque quitar una silla a un infinito lo deja igual de infinito. **El corazón en una frase: todo el teorema es que en un conjunto finito no cabe una copia de sí mismo más pequeña que él.**

Basta probar que inyectiva implica sobreyectiva y que sobreyectiva implica inyectiva: con eso, cualquiera de las dos implica las dos, es decir, biyectiva. La vuelta no hay que probarla, porque *ser* biyectiva es, por definición, ser inyectiva y sobreyectiva a la vez: de una biyección se lee cada una de las dos propiedades sin hacer nada.

Paso 1: inyectiva $\Rightarrow$ sobreyectiva, contando la imagen (el núcleo de la prueba). Toda la fuerza está en que una inyección conserva el cardinal, de modo que si además dejara sillas libres, el conjunto de partida cabría en algo estrictamente menor que él mismo. Supongamos f inyectiva. La restricción $f : A \rightarrow f(A)$ es entonces biyectiva (inyectiva por hipótesis, sobreyectiva porque hemos recortado el codominio a la imagen), así que $|f(A)| = |A|$. Si f no fuera sobreyectiva existiría $b \in B \setminus f(A)$, luego $f(A) \subsetneq B$. Un subconjunto propio de un conjunto finito tiene estrictamente menos elementos: al menos falta b , así que $|f(A)| \leq |B| - 1$. Entonces $|A| = |f(A)| \leq |B| - 1 < |B| = |A|$, contradicción.

Paso 2: sobreyectiva $\Rightarrow$ inyectiva, tirando un elemento y volviendo a contar. Supongamos f sobreyectiva y no inyectiva. Entonces existen $a \neq a'$ en A con $f(a) = f(a')$. Consideremos $A' = A \setminus \{a'\}$ y la restricción $f|_{A'} : A' \rightarrow B$. Sigue siendo sobreyectiva: todo $b \in B$ era imagen de algún elemento de A , y si ese elemento era a' , también $b = f(a)$ con $a \in A'$. Ahora bien, $|A'| = |A| - 1 = |B| - 1 < |B|$, y una sobreyección de un conjunto finito en otro obliga a que el dominio tenga al menos tantos elementos como el codominio (a cada b se le puede asignar una preimagen, y preimágenes de elementos distintos son distintas, lo que da una inyección $B \rightarrow A'$ y por tanto $|B| \leq |A'|$). Contradicción. ■

El paso «un subconjunto propio de un conjunto finito tiene menos elementos» y el paso «una inyección $B \rightarrow A'$ obliga a $|B| \leq |A'|$ » son los dos hechos intuitivos sobre conjuntos finitos que se están usando. Ambos se demuestran por inducción sobre el cardinal a partir de la definición con $\mathbb{N}_m$, y el apéndice de repaso previo recoge esa inducción. Lo importante ahora es que la proposición es *falsa* para conjuntos infinitos, y eso es lo que la hace interesante.

Observación. La proposición falla en general para conjuntos infinitos: $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$, es inyectiva y no sobreyectiva. Justamente por eso los cuadrados de Galileo pueden ser a la vez una parte propia de $\mathbb{N}$ y tener el mismo cardinal que $\mathbb{N}$.

Teorema. El conjunto $\mathbb{N}$ no tiene cardinal finito.

La idea, en una frase: una lista finita de naturales tiene un elemento más grande que todos, y $\mathbb{N}$ nunca lo tiene, porque siempre queda el siguiente. Toda la demostración es exhibir ese siguiente.

Por reducción al absurdo. Si $\mathbb{N}$ fuera finito existiría $m \in \mathbb{N}$ con $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}_m|$, y por simetría de la equipotencia habría una biyección $f : \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{N}$. Su imagen es el conjunto finito $\{f(1), \dots, f(m)\}$, que tiene un elemento mayor, digamos $f(k)$. El natural $f(k) + 1$ es mayor que todos los de la imagen, luego no está en ella, luego f no es sobreyectiva. Contradicción. ■

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: DEFINIR «INFINITO» POR LO QUE HACE, NO POR LO QUE NO ES

Aquí infinito se define como «no finito». Dedekind propuso en 1888 otra definición: un conjunto es infinito si existe una biyección con una parte propia suya. Es exactamente la propiedad de Galileo convertida en definición, y tiene la ventaja de ser positiva: dice lo que un conjunto infinito *hace*, sin pasar por los números naturales.

Las dos definiciones coinciden para todos los conjuntos que aparecen en este libro, pero demostrar que coinciden en general requiere una forma débil del axioma de elección. Por eso aquí se toma «no finito», que es la definición que no necesita nada más que los naturales. La de Dedekind sigue viva en teoría de conjuntos.

1.2.3 Principio del palomar

LA IDEA: ELEGIR LAS CAJAS

El principio del palomar parte de una idea sencilla: si hay más objetos que cajas, alguna caja contiene al menos dos. Esa observación permite resolver media docena de problemas que, vistos de frente, parecen imposibles.

La razón de esa desproporción entre la sencillez del enunciado y lo potente del uso es que **el teorema no dice cuál es la caja que repite**. Da una existencia sin construcción, y por eso sirve para demostrar que algo tiene que pasar sin tener ni idea de dónde pasa. «Entre trece puntos de un rectángulo de 3×4 , dos están a distancia $\leq \sqrt{2}$ » no se demuestra buscando la pareja: se demuestra partiendo el rectángulo en doce cuadraditos y dejando que el principio haga el trabajo.

Por eso, en la práctica, la dificultad de estos problemas nunca está en aplicar el teorema —elegidos los objetos y las cajas, la conclusión sale de contar y comparar dos números—, sino en **decidir quiénes son los objetos y quiénes las cajas**. Esa es toda la gracia, y es lo que hay que entrenar. Las cajas suelen ser: los restos al dividir entre n ; las regiones en que se parte una figura; los valores posibles de una cantidad que solo puede tomar unos pocos; los subconjuntos de un conjunto pequeño. Cuando se acierta con las cajas, el problema se cae solo; cuando no, no hay manera.

La versión general que viene después es la misma idea afinada: si no basta con «alguna repite» sino que hace falta «alguna tiene al menos tres», se cuenta igual. Y la demostración, en los dos casos, es la de siempre: suponer que no y sumar.

Teorema (principio del palomar). Si se reparten m objetos en n cajas y $m > n$, entonces alguna caja contiene al menos dos objetos.

Si ninguna caja contuviera dos objetos, cada caja tendría a lo sumo uno, y el total de objetos sería a lo sumo n . Esto contradice $m > n$. ■

Dicho con aplicaciones: si $|A| > |B|$, ninguna $f : A \rightarrow B$ es inyectiva. Es la proposición de las sillas justas leída en negativo, con lo que el principio del palomar no es un teorema nuevo sino la otra cara del que ya se demostró.

Definición. Para $x \in \mathbb{R}$, la **función techo** y la **función suelo** son

$$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : x \leq n\}, \quad \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

Teorema (versión general). Si se reparten $m \geq 0$ objetos en $n \geq 1$ cajas, alguna caja contiene al menos $\lceil m/n \rceil$ objetos.

Sea $q = \lceil m/n \rceil$. Si todas las cajas tuvieran a lo sumo $q - 1$ objetos, el total sería a lo sumo $n(q - 1)$. Ahora bien, $q - 1 < m/n$ por definición de techo (q es el menor entero mayor o igual que m/n , luego $q - 1$ es estrictamente menor), así que $n(q - 1) < n \cdot \frac{m}{n} = m$. Habría menos de m objetos. Contradicción. ■

Leída en palabras, la cota dice que alguna caja está en la media o por encima. El cociente m/n es el número medio de objetos por caja, y no pueden quedar todas las cajas por debajo de la media, porque entonces el total también quedaría por debajo. Como lo que hay en una caja es un número entero, «no estar por debajo de m/n » quiere decir «tener al menos m/n redondeado hacia arriba», y eso es $\lceil m/n \rceil$.

Un caso con números. Se reparten 25 objetos en 7 cajas. La media es $25/7 \approx 3,57$, y el teorema asegura una caja con al menos $\lceil 25/7 \rceil = 4$ objetos. La cota no se puede mejorar: el reparto 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3 suma 25 y ninguna caja pasa de 4. Y el principio del palomar de antes es el caso $m = n + 1$, porque $\lceil (n + 1)/n \rceil = 2$.

El descuido típico es redondear hacia abajo. Con 22 objetos en 7 cajas, $\lfloor 22/7 \rfloor = 3$ se queda corto: si todas las cajas tuvieran a lo sumo 3 objetos, habría a lo sumo 21. Luego alguna tiene 4 = $\lceil 22/7 \rceil$. El redondeo va hacia arriba porque un objeto de más sobre un reparto exacto ya obliga a una caja a subir un escalón.

DE DÓNDE VIENE: CAJAS, PALOMAS Y DIRICHLET

La formulación habitual se atribuye a Dirichlet, que la usó en el siglo XIX para aproximar números irracionales por fracciones (el llamado teorema de aproximación de Dirichlet), y en alemán se sigue llamando «principio de los cajones». Se han encontrado enunciados equivalentes bastante anteriores, en un libro de recreaciones matemáticas francés del siglo XVII. El nombre de las palomas es del inglés del siglo XX. Nada de esto cambia el contenido, que es el de la proposición sobre inyecciones entre conjuntos finitos.

Ejercicios: el principio del palomar

Los siete ejercicios siguientes se resuelven todos igual: elegir las cajas de modo que «dos objetos en la misma caja» sea la conclusión que se pide.

Ejercicio 1.1. *Dos personas con el mismo número de amigos* R1.1

Probar que en cualquier grupo X de dos o más personas hay dos miembros de X que tienen igual número de amigos dentro de X . (Se entiende que x es amiga de y si y solo si y es amiga de x .)

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. Si hay n personas, ¿cuántos amigos puede tener una de ellas como mínimo y como máximo?
2. Eso da n valores posibles para n personas. Demasiado justo para el palomar. Hay dos valores que no pueden darse a la vez.

Resolución. Sea $n = |X| \geq 2$. Cada persona tiene entre 0 y $n - 1$ amigos dentro de X , porque no es amiga de sí misma. Son n valores posibles para n personas, y el palomar necesita más objetos que cajas.

La observación que desbloquea el problema es que los valores 0 y $n - 1$ no pueden aparecer los dos a la vez. Si alguien tiene $n - 1$ amigos, es amigo de todos los demás, y entonces nadie puede tener 0 amigos, porque al menos tiene a ese. Recíprocamente, si alguien tiene 0 amigos, nadie puede tener $n - 1$.

Luego el número de amigos toma valores en $\{0, 1, \dots, n - 2\}$ o en $\{1, 2, \dots, n - 1\}$, según el caso. En ambos casos son $n - 1$ cajas para n personas, y por el principio del palomar dos personas caen en la misma caja: tienen el mismo número de amigos. ■

Con tres personas se ve entero. Los números de amigos posibles son 0, 1 y 2, pero el 0 y el 2 se excluyen: si Ana es amiga de las otras dos, ninguna de ellas tiene 0 amigos. Así que los tres valores caen en $\{0, 1\}$ o en $\{1, 2\}$, dos cajas para tres personas.

Lo que deja el ejercicio es una maniobra que se repite: cuando las cajas salen *justas*, tantas como objetos, el palomar no decide nada, y hay que buscar dos cajas que no puedan llenarse a la vez. Se falla en quedarse en las n cajas $0, 1, \dots, n - 1$ y dar el problema por imposible, o en afirmar sin razonarlo que alguna caja queda vacía: la exclusión del 0 y del $n - 1$ es el argumento entero, no un detalle. Con otro vocabulario, las personas son vértices y las amistades, aristas, y el enunciado es que todo grafo finito con dos o más vértices tiene dos vértices del mismo grado; en la sección 2.2 vuelve con ese nombre, junto con el caso infinito, donde falla.

Ejercicio 1.2. *Diez puntos en un triángulo equilátero* R1.3

Sea un triángulo equilátero de lado de longitud 1 y sea X un conjunto de diez puntos interiores al triángulo. Probar que hay un par de puntos de X cuya distancia euclídea es menor o igual que $1/3$.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. Diez puntos: hacen falta nueve cajas. ¿En cuántos triángulos equiláteros de lado $1/3$ se parte un triángulo equilátero de lado 1?
2. ¿Cuál es la mayor distancia entre dos puntos de un triángulo equilátero de lado $1/3$?

Resolución. Se unen los puntos que dividen cada lado en tres partes iguales mediante segmentos paralelos a los lados. Eso parte el triángulo grande en 9 triángulos equiláteros de

lado $1/3$ ($1 + 3 + 5$ por filas). Cada punto de X pertenece a alguno de los nueve triángulos cerrados; si un punto cae sobre una línea divisoria, se le asigna uno cualquiera de los triángulos que la comparten. Así se tiene una aplicación de X (diez elementos) en el conjunto de los nueve triángulos.

Por el principio del palomar, dos puntos distintos $P, Q \in X$ van al mismo triángulo. En un triángulo equilátero de lado ℓ la distancia entre dos puntos cualesquiera es a lo sumo ℓ : el diámetro de un triángulo es su lado mayor, porque la distancia máxima entre dos puntos de un polígono convexo se alcanza entre dos vértices. Luego $d(P, Q) \leq 1/3$. ■

QUÉ DEJA. En los problemas geométricos de palomar, las cajas son una partición de la figura en piezas de diámetro controlado. Lo que hay que cuidar es que la asignación de puntos a piezas sea una función, es decir, que los puntos de las fronteras vayan a una sola pieza.

Ejercicio 1.3. Trece puntos en un rectángulo de 3×4 R1.6

Sea X un conjunto de trece puntos del borde o interiores a un rectángulo de lados 3 y 4 cm. Probar que siempre habrá al menos un par de puntos de X situados a una distancia menor o igual que $\sqrt{2}$.

Resolución. La idea es la del triángulo: trocear la figura en una pieza menos que puntos, y que cada pieza tenga diámetro $\sqrt{2}$. Trece puntos piden doce piezas, y $12 = 3 \cdot 4$ es justo el número de cuadrados de lado 1 que caben en el rectángulo: el enunciado está hecho a medida de esa cuadrícula.

El rectángulo de 3×4 se parte en 12 cuadrados de lado 1. Cada punto de X se asigna a un cuadrado cerrado que lo contenga (uno cualquiera si está en una línea de la cuadrícula). Trece puntos y doce cuadrados: por el palomar hay dos puntos P, Q en el mismo cuadrado. La distancia máxima entre dos puntos de un cuadrado de lado 1 es su diagonal, $\sqrt{2}$. Luego $d(P, Q) \leq \sqrt{2}$. ■

Se falla en dos sitios. Uno es tomar como diámetro del cuadrado su lado, 1, en vez de su diagonal, $\sqrt{2}$: la distancia máxima se alcanza entre vértices opuestos. El otro es dejar los puntos de las líneas de la cuadrícula en dos cuadrados a la vez, con lo que la asignación deja de ser una función y el palomar no se puede aplicar.

Ejercicio 1.4. Ocho sumas en una matriz de 0, 1 y -1 R1.4

Una matriz 3×3 está formada por 0, 1 y -1 . Probar que entre los resultados de las ocho sumas que se obtienen por filas, columnas y diagonales hay al menos dos iguales.

Resolución. Cada una de las ocho sumas (tres filas, tres columnas, dos diagonales) suma tres números del conjunto $\{-1, 0, 1\}$, luego es un entero entre -3 y 3 . Los valores posibles son $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$: siete cajas. Hay ocho sumas. Por el principio del palomar, dos de las sumas coinciden. ■

Aquí los objetos son las ocho sumas y las cajas, los valores que puede tomar una suma. El error está en quedarse con los tres valores de las casillas, $-1, 0$ y 1 , como si fueran las cajas: no lo son, porque lo que se compara son sumas. Antes de comparar hay que contar cuántos valores alcanza una suma de tres casillas, y son siete.

Ejercicio 1.5. *Seis números del 1 al 9* R1.5

Demostrar que cualquier subconjunto $S \subset A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ con $|S| = 6$ debe contener dos elementos cuya suma es 10.

Resolución. Partimos A en cinco bloques:

$$\{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{5\}.$$

Cada elemento de A está en exactamente un bloque, así que asignar a cada elemento de S su bloque es una función de S (seis elementos) en el conjunto de cinco bloques. Por el palomar, dos elementos distintos de S caen en el mismo bloque. Ese bloque no puede ser $\{5\}$, que solo tiene un elemento, luego es una de las cuatro parejas, y sus dos elementos suman 10. ■

Otra vía (por el complementario). Se puede ver que $|S| = 5$ no basta: $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ no tiene dos elementos que sumen 10. Esto muestra que el 6 del enunciado es el mínimo posible, y explica por qué las cajas tienen que ser exactamente las cinco de arriba: con cinco elementos se puede coger uno de cada bloque.

Ejercicio 1.6. *Restos al dividir entre $n - 1$* R1.7

Probar que si se escogen n números naturales cualesquiera siempre habrá al menos dos de ellos que tengan el mismo resto al ser divididos entre $n - 1$.

Resolución. Se supone $n \geq 2$ para que la división entre $n - 1$ tenga sentido. Los restos posibles al dividir entre $n - 1$ son $0, 1, \dots, n - 2$: exactamente $n - 1$ valores. La aplicación que envía cada uno de los n números a su resto va de un conjunto de n elementos a uno de $n - 1$, luego no es inyectiva: dos de los números tienen el mismo resto. ■

Otra vía (la variante con 101 enteros). Si se eligen 101 enteros no negativos, dos de ellos dejan el mismo resto módulo 100 (hay 100 restos posibles), y entonces su diferencia es múltiplo de 100. La formulación «diferencia múltiplo de» y la formulación «mismo resto» son la misma.

Ejercicio 1.7. *Quince múltiplos de cuatro con cifras distintas*

Demostrar que elegidos al azar 15 números naturales múltiplos de 4 y con todas sus cifras distintas, al menos hay dos de ellos cuyas dos últimas cifras suman igual. (Ayuda: si un número es múltiplo de 4, también lo es el formado por sus dos últimas cifras.)

Resolución. Un número N se escribe $N = 100c + r$, donde r es el número formado por sus dos últimas cifras. Como 100 es múltiplo de 4, N es múltiplo de 4 si y solo si lo es r ; esa es la ayuda del enunciado. Además, si N tiene todas sus cifras distintas, las dos últimas son distintas entre sí.

Las terminaciones de dos cifras que son múltiplos de 4 son 00, 04, 08, 12, $\dots$, 96 (veinticinco en total). Quitando las que repiten cifra (00, 44, 88) quedan veintidós terminaciones posibles, con estas sumas de cifras:

04	08	12	16	20	24	28	32	36	40	48	52
4	8	3	7	2	6	10	5	9	4	12	7

56	60	64	68	72	76	80	84	92	96
11	6	10	14	9	13	8	12	11	15

Los valores que aparecen son $2, 3, 4, \dots, 15$: catorce valores distintos. Quince números y catorce sumas posibles: por el principio del palomar, dos de los números elegidos tienen la misma suma de sus dos últimas cifras. ■

La tabla es lo que hace funcionar el argumento, y conviene ver qué papel juega cada hipótesis en ella. Si se dice sin más que la suma de dos cifras va de 0 a 18, salen diecinueve cajas, y quince números no bastan: las cajas tienen que ser los valores *alcanzables*, no los imaginables. Sin la condición de múltiplo de 4, las terminaciones con dos cifras distintas alcanzan diecisiete sumas, del 1 al 17, y el argumento tampoco cierra. Y sin la de cifras distintas volverían 00, 44 y 88, con sumas 0, 8 y 16: la 8 ya estaba, pero la 0 y la 16 son nuevas, y con dieciséis cajas quince números no obligan a nada. Las dos hipótesis, pues, están para recortar las cajas hasta catorce.

1.2.4 Numerabilidad (contabilidad)

Definición. Un conjunto A es **numerable** (o contable) si es finito o si existe una biyección $A \rightarrow \mathbb{N}$.

Numerable quiere decir «se puede poner en fila»: primero, segundo, tercero, sin que quede nadie fuera de la fila. El contenido de esta subsección es que muchos conjuntos que parecen más grandes que $\mathbb{N}$ se pueden poner en fila, y el de la siguiente es que no todos.

Ejemplo ($\mathbb{N}$ es numerable). La identidad es una biyección $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Ejemplo ($\mathbb{Z}$ es numerable). La enumeración $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$ alterna positivos y negativos. Formalmente, define $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ -\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Así $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = -1, f(3) = 2, f(4) = -2$. Su inversa es explícita: $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$,

$$g(z) = \begin{cases} 2z - 1 & \text{si } z \geq 1, \\ -2z & \text{si } z \leq 0. \end{cases}$$

Comprobación: si $z \geq 1$, $g(z) = 2z - 1$ es impar y $f(g(z)) = \frac{2z-1+1}{2} = z$; si $z \leq 0$, $g(z) = -2z$ es par y $f(g(z)) = -\frac{-2z}{2} = z$. Y si n es impar, $f(n) = \frac{n+1}{2} \geq 1$ y $g(f(n)) = 2 \cdot \frac{n+1}{2} - 1 = n$; si n es par, $f(n) = -\frac{n}{2} \leq 0$ y $g(f(n)) = -2 \cdot (-\frac{n}{2}) = n$. Luego f es biyectiva y $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}_0|$.

Falta ver que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}_0|$: la aplicación $n \mapsto n - 1$ es una biyección de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}_0$, con inversa $k \mapsto k + 1$. Componiendo, $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: EL ZIGZAG DE CANTOR

Que haya tantos pares de naturales como naturales es de las cosas que más cuesta tragar la primera vez, porque $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ parece «infinitamente más grande»: para cada n hay ya una fila infinita entera. La respuesta de Cantor es que el tamaño de un conjunto infinito no se mide por lo grande que parece, sino por si se puede *hacer cola*.

Y la cola se hace así. Colóquense los pares en una cuadrícula infinita, (i, j) en la fila i y la columna j . Contarlos fila por fila no vale: la primera fila no se acaba nunca y nunca se llegaría a la segunda. Contarlos columna por columna, tampoco. Pero recorriendo las **diagonales**, sí: primero el par cuya suma vale 2, luego los dos cuya suma vale 3, luego los tres cuya suma vale 4, y así. Cada diagonal es finita, luego se termina, y todo par (i, j) está en la diagonal $i + j$, luego a todo par le llega su turno en un número finito de pasos.

Esa es la idea entera. La fórmula explícita que se escribe a continuación no es más que contar cuántos pares hay antes del turno de (i, j) : todos los de las diagonales anteriores, que son $1 + 2 + \dots$, y los que van delante en su propia diagonal.

Conviene guardar el principio general, porque se usa dos veces más en esta sección: **una unión numerable de conjuntos numerables es numerable**, porque se recorre en diagonal. Con eso caen $\mathbb{Q}$, los polinomios de coeficientes enteros y los números algebraicos.

Teorema ($\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable). Existe una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

El corazón en una frase: toda la dificultad está en **trocear un conjunto infinito en piezas finitas**; una vez troceado, recorrerlo es tan fácil como leer un libro, y las diagonales son ese troceado.

Paso 1: se trocea el plano en piezas finitas. Se consideran las *diagonales* de suma constante

$$D_s = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i + j = s\}, \quad s \geq 2.$$

Cada D_s es finito (tiene exactamente $s - 1$ pares: $(1, s - 1), (2, s - 2), \dots, (s - 1, 1)$) y la unión de todas es $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, porque todo par tiene una suma. Que las piezas sean finitas es justo lo que fallaba al trocear por filas, y por eso el troceo es el paso que decide.

Paso 2: se recorren las piezas en orden, y dentro de cada una también. Se enumera $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ recorriendo sucesivamente $D_2, D_3, D_4, \dots$ y, dentro de cada diagonal, en el orden $(s - 1, 1), (s - 2, 2), \dots, (1, s - 1)$. Sale la lista

$$(1, 1), (2, 1), (1, 2), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (4, 1), \dots$$

Paso 3: a todo par le llega su turno en tiempo finito (el núcleo de la prueba). Todo par (i, j) aparece exactamente una vez: pertenece a la única diagonal D_{i+j} , y dentro de ella ocupa una posición determinada. Como las diagonales anteriores son finitas y son finitas en número —solo hay $i + j - 3$ de ellas—, la posición de (i, j) en la lista es un número natural concreto y no «infinito». Esto define una aplicación $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (al n -ésimo natural, el n -ésimo par de la lista) que es sobreyectiva porque todo par aparece, e inyectiva porque ningún par se repite. ■

Se puede dar la biyección con fórmula: el par (i, j) ocupa el lugar $\frac{(i+j-2)(i+j-1)}{2} + j$, porque antes de su diagonal hay $1 + 2 + \dots + (s - 2)$ pares con $s = i + j$, y dentro de la diagonal es el j -ésimo. No hace falta la fórmula para la demostración, pero conviene saber que existe.

Corolario. Si A y B son conjuntos infinitos numerables, entonces $A \times B$ es numerable.

La idea, en una frase: no hay nada nuevo que enumerar. Se renombran A y B como $\mathbb{N}$, con lo que $A \times B$ se convierte en la cuadrícula $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ del teorema anterior, y esa ya se sabe recorrer en diagonal.

Existen biyecciones $f_1 : A \rightarrow \mathbb{N}$ y $f_2 : B \rightarrow \mathbb{N}$. La aplicación $f : A \times B \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f(a, b) = (f_1(a), f_2(b))$, es una biyección: es inyectiva porque si $(f_1(a), f_2(b)) = (f_1(a'), f_2(b'))$ entonces $f_1(a) = f_1(a')$ y $f_2(b) = f_2(b')$, y la inyectividad de f_1 y f_2 da $a = a'$, $b = b'$; es sobreyectiva porque dado $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ existen a con $f_1(a) = m$ y b con $f_2(b) = n$, y entonces $f(a, b) = (m, n)$. Componiendo con la biyección $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ del teorema, $g \circ f : A \times B \rightarrow \mathbb{N}$ es biyección. ■

Lema. Si X es numerable y $A \subseteq X$, entonces A es numerable.

La idea, en una frase: si de una cola infinita se tacha a algunos, los que quedan siguen formando una cola —basta volver a pasar lista de izquierda a derecha—, y el único punto que hay que cuidar es que al pasar lista no se quede nadie fuera. Dicho de otro modo: el problema se traslada primero a $\mathbb{N}$, donde «de izquierda a derecha» significa algo preciso, y allí se resuelve tomando mínimos sucesivos.

Paso 1: se traslada el problema a un subconjunto de $\mathbb{N}$. Si A es finito, es numerable por definición. Supongamos A infinito. Como X es numerable e infinito (contiene al infinito A), existe una biyección $f : X \rightarrow \mathbb{N}$. La restricción $f|_A : A \rightarrow \mathbb{N}$ es inyectiva, luego $f|_A : A \rightarrow B$ con $B = f(A) \subseteq \mathbb{N}$ es biyectiva, y B es infinito. Basta, pues, enumerar B .

Paso 2: se enumera B tomando mínimos sucesivos (el núcleo de la prueba). Es aquí donde se usa lo único que $\mathbb{N}$ tiene y un conjunto cualquiera no: que sus subconjuntos no vacíos tienen mínimo. Se define

$$b_1 = \min B, \quad b_{n+1} = \min(B \setminus \{b_1, \dots, b_n\}).$$

Está bien definido porque todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene mínimo (es la propiedad de buena ordenación de los naturales, equivalente al principio de inducción) y porque $B \setminus \{b_1, \dots, b_n\}$ nunca es vacío al ser B infinito.

Paso 3: la enumeración no repite ni se deja a nadie. La sucesión es estrictamente creciente por construcción, luego $g : \mathbb{N} \rightarrow B$, $g(n) = b_n$, es inyectiva. Es sobreyectiva porque, dado $b \in B$, solo hay finitos elementos de B menores que b , digamos k de ellos, y entonces $b = b_{k+1}$: nadie se queda esperando indefinidamente su turno, que es exactamente lo que podría temerse de un proceso infinito.

Paso 4: se vuelve a A . Finalmente $(f|_A)^{-1} \circ g : \mathbb{N} \rightarrow A$ es una biyección. ■

Observación (por qué hace falta que B sea infinito). Si B fuera finito, el Paso 2 se detendría: llegaría un n con $B \setminus \{b_1, \dots, b_n\} = \emptyset$ y no habría mínimo que tomar. No es un fallo, es el caso que se apartó en la primera línea del Paso 1: un subconjunto finito ya es numerable por definición. La partición en dos casos no es burocracia, es lo que mantiene bien definida la recurrencia.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: LOS RACIONALES CABEN EN LA CUADRÍCULA

Que $\mathbb{Q}$ sea numerable choca todavía más que lo anterior, porque los racionales están *densos*: entre dos cualesquiera hay infinitos, y sin embargo se pueden poner en fila. La moraleja es que densidad y cantidad no tienen nada que ver.

La idea es que un racional no es una cosa nueva: es un par de enteros. La fracción p/q se manda al punto (p, q) de la cuadrícula que ya se aprendió a recorrer en diagonal, y con eso $\mathbb{Q}$ queda dentro de un conjunto numerable, luego es numerable. Solo hay que tener dos cuidados, y son los dos que la demostración formaliza: que cada racional se escribe de infinitas maneras ($1/2 = 2/4 = 3/6$), lo que se arregla quedándose con la fracción irreducible; y que un subconjunto infinito de un conjunto numerable sigue siendo numerable, que es lo que permite quedarse solo con esas.

El contraste con $\mathbb{R}$, que viene después, es lo que da sentido a todo el capítulo: $\mathbb{Q}$ se puede listar y $\mathbb{R}$ no, y por tanto *casi todos* los números reales son irracionales, en un sentido muy fuerte de «casi todos». No se ha exhibido ninguno, pero se sabe que están casi todos ahí. Otra vez una existencia sin construcción, como en el palomar.

Teorema ($\mathbb{Q}$ es numerable). El conjunto de los números racionales es numerable.

El corazón en una frase: todo el teorema es que un racional **no es un objeto nuevo, sino un par de enteros disfrazado**, y los pares de enteros ya se saben enumerar. Los tres pasos que siguen no hacen otra cosa que quitarle el disfraz con cuidado.

Paso 1: se elige un representante y solo uno para cada racional (el núcleo de la prueba). Aquí está la única dificultad real: un racional tiene infinitas escrituras como fracción, y si se admitieran todas, la correspondencia con los pares no sería biyectiva. También se podrían recorrer todas las fracciones y saltarse las repetidas; aquí elegimos directamente una escritura por racional. Todo racional r se escribe de manera única como fracción irreducible $r = p/q$ con $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ y $\text{mcd}(|p|, q) = 1$. Sea

$$S = \{(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : \text{mcd}(|p|, q) = 1\}, \quad \varphi : S \rightarrow \mathbb{Q}, \varphi(p, q) = p/q.$$

Paso 2: la correspondencia representante $\rightarrow$ racional es biyectiva. φ es sobreyectiva porque todo racional admite una fracción irreducible, y es inyectiva por la unicidad de esa fracción: si $p/q = p'/q'$ con ambas irreducibles y denominadores positivos, entonces $p = p'$ y $q = q'$. (La razón es que $pq' = p'q$ y, como q es primo con p , q divide a q' , y simétricamente q' divide a q , luego $q = q'$ y entonces $p = p'$.)

Paso 3: se hereda la numerabilidad de la cuadrícula. Como $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ son numerables, $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ es numerable por el corolario, y S , al ser un subconjunto suyo, es numerable por el lema. Luego $|\mathbb{Q}| = |S| = |\mathbb{N}|$. ■

Observación (qué papel juega cada pieza). Esta demostración usa dos resultados previos. Sin el corolario del producto no habría dónde meter los pares; sin el lema del subconjunto, el hecho de que S sea solo una parte de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ dejaría la conclusión en el aire, porque quedarse con una parte de una lista infinita no es automáticamente volver a tener una lista. La irreducibilidad, por su parte, no es un adorno de higiene: es lo único que convierte «cada racional tiene alguna fracción» en «cada racional tiene exactamente una».

CONEXIÓN: TOPOLOGÍA Y ANÁLISIS

Aquí intervienen dos propiedades distintas de $\mathbb{Q}$. Su densidad permite encajar, alrededor de cada punto de un abierto de $\mathbb{R}$, un intervalo de extremos racionales contenido en ese abierto. Su numerabilidad hace que solo haya una cantidad numerable de esos intervalos: forman una base numerable. En un espacio métrico ocurre lo mismo con las bolas de centros en un conjunto denso numerable y radios racionales positivos.

Por otra parte, una función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ queda determinada por sus valores en $\mathbb{Q}$ por la densidad, sin necesitar el recuento: si $q_n \rightarrow x$ con $q_n \in \mathbb{Q}$, entonces $f(x) = \lim_n f(q_n)$.

Ejercicios: numerabilidad

Ejercicio 1.8. Pares, impares y enteros R1.2

- Probar que el conjunto de los números pares $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ es numerable.
- Probar que el conjunto de los números impares es numerable.
- ¿Es numerable el conjunto de los números enteros? Razonar la respuesta.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

- Para a) y b) hace falta una biyección con $\mathbb{N}$: escríbela y comprueba las dos propiedades.
- Para c), la enumeración alternada de la teoría ya es la respuesta; alternatively, $\mathbb{Z}$ es unión de tres numerables.

Resolución. a) Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow A$, $f(n) = 2n$. Es inyectiva: $2n = 2n'$ implica $n = n'$. Es sobreyectiva: todo par es $2n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ por definición de A . Luego f es biyección y A es numerable. Obsérvese que A es una parte propia de $\mathbb{N}$ con el mismo cardinal que $\mathbb{N}$: es la paradoja de Galileo con los pares en vez de los cuadrados.

b) Sea B el conjunto de los impares y $g : \mathbb{N} \rightarrow B$, $g(n) = 2n - 1$. Inyectiva por el mismo argumento; sobreyectiva porque todo impar positivo es de la forma $2n - 1$ con $n \geq 1$.

c) Sí. En la teoría se dio la biyección explícita $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ que alterna $0, 1, -1, 2, -2, \dots$, con su inversa, y $\mathbb{N}_0$ es equipotente a $\mathbb{N}$ mediante $n \mapsto n - 1$. Luego $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$. ■

Otra vía (unión de numerables). $\mathbb{Z} = \{0\} \cup \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$. Se puede enumerar $\mathbb{Z}$ intercalando: primero un elemento de la primera parte, luego uno de la segunda, luego uno de la tercera, y así. Es el mismo mecanismo de las diagonales de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: una unión finita de conjuntos numerables es numerable. Para hacerlo riguroso hay que escribir la biyección, que es justo lo que hace la fórmula del ejemplo de la teoría.

Ejercicio 1.9. Números con todos los dígitos distintos R1.12

¿Cuántos elementos tiene el conjunto de números naturales cuyos dígitos en base 10 son todos diferentes? ¿Es finito o infinito?

Resolución. La pregunta tiene dos partes, y la segunda se contesta antes que la primera: un número con todas sus cifras distintas no puede ser muy largo, porque solo hay diez cifras. Para contarlos se parte el conjunto por el número de cifras, que da trozos disjuntos (principio de adición), y cada trozo se cuenta cifra a cifra, con la primera tratada aparte porque es la

única que no puede ser 0.

Hay diez dígitos, luego un número con todas sus cifras distintas tiene a lo sumo diez cifras: el conjunto es **finito**. Contamos cuántos hay de k cifras, para $k = 1, \dots, 10$. La primera cifra no puede ser 0: 9 opciones. Las $k - 1$ restantes deben ser distintas entre sí y distintas de la primera, elegidas entre los 9 dígitos que quedan (ahora sí puede aparecer el 0): son las variaciones sin repetición de 9 elementos tomados de $k - 1$ en $k - 1$, $9 \cdot 8 \cdots (11 - k) = \frac{9!}{(10 - k)!}$. En total,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} 9 \cdot \frac{9!}{(10 - k)!} &= 9(1 + 9 + 72 + 504 + 3024 + 15120 \\ &\quad + 60480 + 181440 + 362880 + 362880) \\ &= 9 \cdot 986\,410 = 8\,877\,690. \end{aligned}$$

■

El sumando $k = 2$ se comprueba a mano. Hay 90 números de dos cifras, del 10 al 99, y repiten cifra los nueve 11, 22, $\dots$, 99: quedan 81, que es $9 \cdot 9$, el término $9 \cdot \frac{9!}{8!}$ de la suma. La primera cifra tiene nueve opciones (no el 0) y la segunda, otras nueve (el 0 sí, la primera no).

Se falla en tratar la primera cifra como las demás y contar $10 \cdot 9 = 90$ números de dos cifras distintas: esa cuenta incluye las cadenas 01, 02, $\dots$, 09, que no son números de dos cifras. Y se falla en la pregunta cualitativa al razonar « $\mathbb{N}$ es infinito, luego el conjunto también»: la cota de diez cifras la da el principio del palomar, porque un número de once cifras reparte once posiciones entre diez dígitos y repite alguno.

1.2.5 Conjunto potencia y Teorema de Cantor

Definición. El conjunto potencia de un conjunto X es

$$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}.$$

Teorema (Cantor). Sea X un conjunto. Entonces $|X| \neq |\mathcal{P}(X)|$.

LA IDEA: EL ARGUMENTO DIAGONAL

La intuición falsa, primero. Después de la sección anterior uno llega convencido de que todo conjunto infinito «se puede poner en fila con maña suficiente»: $\mathbb{Z}$ se ponía, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se ponía, $\mathbb{Q}$ se ponía. Este teorema dice que no, y no por falta de maña: dice que la lista, cualquiera que sea, *fabrica ella misma* el elemento que le falta.

La imagen: la lista que se sabotea a sí misma. Imagine una tabla infinita en la que la fila x contiene la respuesta a la pregunta «¿está y en $f(x)$?», una columna por cada $y \in X$. La lista pretende contener todos los subconjuntos. Se construye entonces el subconjunto D mirando *solo la diagonal* de esa tabla, la casilla (x, x) , y contestando siempre lo contrario: si x está en $f(x)$, D lo deja fuera; si no está, D lo mete. Así D se distingue de la fila x precisamente en la columna x , sea cual sea x : no coincide con ninguna fila, y sin embargo es un subconjunto de X y debería estar en la lista.

El corazón en una frase: D está diseñado para diferir de cada $f(x)$ en el elemento x , y una diferencia por fila es todo lo que hace falta. La misma idea, con dígitos en vez de pertenencias, es con la que Cantor demostró que los reales no son numerables: se construye un número cuya n -ésima cifra difiere de la n -ésima cifra del n -ésimo

número de la lista. Obsérvese, además, qué poco se le pide a X : no se supone finito, ni infinito, ni numerable. El teorema vale para todos a la vez porque el argumento no cuenta nada, solo compara.

Paso 1: se prueba algo más fuerte que lo enunciado. En vez de negar las biyecciones, se niegan las sobreyecciones: se verá que no existe ninguna sobreyección $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$, y como toda biyección es sobreyectiva, con eso basta. Suponemos por reducción al absurdo que $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ es sobreyectiva.

Paso 2: se construye el subconjunto diagonal. Definimos

$$D = \{x \in X : x \notin f(x)\}.$$

Tiene sentido: para cada x , $f(x)$ es un subconjunto de X , y se puede preguntar si x está o no en él. Es la traducción literal de «contestar lo contrario en la diagonal».

Paso 3: la sobreyectividad obliga a que D esté en la lista, y ahí salta todo (el núcleo de la prueba). Como $D \in \mathcal{P}(X)$ y f es sobreyectiva, existe $d \in X$ con $f(d) = D$. Ese d es el único objeto que la hipótesis aporta, y es el que la destruye: preguntemos si $d \in D$,

$$d \in D \iff d \notin f(d) = D.$$

La primera equivalencia es la definición de D aplicada a $x = d$; la igualdad es la elección de d . Se obtiene $d \in D \iff d \notin D$, que es una contradicción. Luego no hay sobreyección, y en particular no hay biyección. ■

El teorema de Cantor implica que existen infinitos de distinto tamaño: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es infinito y no equipotente a $\mathbb{N}$, luego no es numerable. Y $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ tampoco es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, y así sucesivamente.

Observación. En la demostración se ve que no hay sobreyección $X \rightarrow \mathcal{P}(X)$. ¿Hay alguna inyección? La hay, y es muy sencilla: $x \mapsto \{x\}$. Elementos distintos dan conjuntos unitarios distintos. Así que $\mathcal{P}(X)$ es, en un sentido preciso, estrictamente mayor que X : X cabe dentro de $\mathcal{P}(X)$ pero $\mathcal{P}(X)$ no cabe dentro de X .

DE DÓNDE VIENE: CANTOR Y EL INFINITO

Cantor publicó en 1874 la primera demostración de que $\mathbb{R}$ no es numerable, y en 1891 el argumento diagonal en la forma que se ha visto, que vale para cualquier conjunto. La consecuencia, que hay una jerarquía infinita de infinitos, fue recibida con hostilidad por parte de sus contemporáneos, y Cantor pasó los últimos años de su vida entre la defensa de su teoría y episodios de enfermedad. Hilbert escribió más tarde que nadie nos expulsaría del paraíso que Cantor había creado.

Observación (función característica). Cada $x \in X$ puede estar o no estar en un subconjunto $A \subseteq X$: dos opciones independientes. Por eso dar un subconjunto A equivale a dar su **función característica**

$$\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

La aplicación $A \mapsto \chi_A$ es una biyección entre $\mathcal{P}(X)$ y el conjunto $\{0, 1\}^X$ de las funciones

$X \rightarrow \{0, 1\}$: es inyectiva porque dos subconjuntos distintos difieren en algún x , y ahí difieren sus características; es sobreyectiva porque toda $h : X \rightarrow \{0, 1\}$ es la característica de $A = \{x : h(x) = 1\}$.

Proposición (caso finito). Si $|X| = n$, entonces $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

Por la observación, $|\mathcal{P}(X)| = |\{0, 1\}^X|$. Dar una función $h : X \rightarrow \{0, 1\}$ es elegir, para cada uno de los n elementos de X , uno de los dos valores 0 o 1. Son n elecciones independientes con dos opciones cada una, luego $2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n$ funciones. (Esta cuenta se justificará con todo rigor con el principio del producto de la sección siguiente; aquí se usa de manera intuitiva.) ■

Con $X = \{a, b, c\}$ la biyección se puede escribir entera. Cada subconjunto es una cadena de tres ceros y unos, una cifra por elemento, y hay $2^3 = 8$:

000	100	010	001	110	101	011	111
$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{b, c\}$	$\{a, b, c\}$

Agrupados por tamaño salen 1, 3, 3 y 1 subconjuntos de 0, 1, 2 y 3 elementos, y $1 + 3 + 3 + 1 = 8$. Esa fila de números volverá dos veces: son los números combinatorios de la sección 1.5, y los coeficientes de $(a + b)^3$ en el teorema del binomio.

CONEXIÓN: HACIA EL CAPÍTULO DE GRAFOS

La biyección «subconjunto $\leftrightarrow$ función característica» es la que se usa en el capítulo 2 para contar grafos: un grafo con conjunto de vértices fijo es un subconjunto del conjunto de todas las aristas posibles, luego hay $2^{\binom{n}{2}}$ grafos distintos con n vértices dados. La variante inmediata es esta: cuántos grafos con conjunto de vértices W contienen a un grafo dado G como subgrafo; la respuesta es 2^h con h el número de aristas que faltan.

1.3 Propiedades del cardinal de conjuntos finitos

LA PREGUNTA

En una clase de música hay 73 estudiantes; 52 tocan el piano, 25 el violín y 20 la flauta, pero muchos tocan varios instrumentos. El director quiere saber cuántos no tocan ninguno, y no tiene la lista: solo tiene esos totales y cuántos tocan cada pareja de instrumentos y los tres. ¿Le basta con eso, y cómo hace la cuenta sin contar a nadie dos veces?

Hasta aquí se ha definido el cardinal por biyecciones. Esta sección demuestra que el cardinal se comporta con la unión y el producto como uno espera de un número: la unión de dos conjuntos disjuntos suma, el producto cartesiano multiplica, y la unión de conjuntos que se solapan se corrige restando la intersección. Las demostraciones consisten en construir biyecciones explícitas con $\mathbb{N}_{a+b}$ y con $\mathbb{N}_{ab}$, y merece la pena hacerlas una vez con todo detalle: es la única vez en el libro en que «sumar» tiene que demostrarse.

1.3.1 Principio de adición

Teorema (adición). Si A y B son conjuntos finitos con $A \cap B = \emptyset$, $|A| = a$ y $|B| = b$, entonces $|A \cup B| = a + b$.

LA IDEA: PASAR LISTA A LAS DOS COLAS SEGUIDAS

En una línea: se pasa lista a A del 1 al a , se sigue con B del $a + 1$ al $a + b$, y se comprueba que nadie se queda sin número ni recibe dos.

La imagen es literalmente esa: dos colas de personas que se juntan en una sola fila, la de A delante y la de B detrás. Numerar la fila entera de corrido es la biyección con $\mathbb{N}_{a+b}$, y el desplazamiento $+a$ en la segunda mitad no es un truco algebraico: es «empezar a contar donde terminó la primera cola».

Y la imagen predice dónde puede fallar la cosa: si alguien estuviera en las dos colas a la vez, tendría dos números y la lista dejaría de ser una lista. **El corazón en una frase: la hipótesis $A \cap B = \emptyset$ no se usa para contar, se usa para que φ sea siquiera una función.** Todo lo demás —inyectividad y sobreyectividad— sale solo de que los tramos $\{1, \dots, a\}$ y $\{a + 1, \dots, a + b\}$ encajan sin hueco ni solape, que es una propiedad de los números y no de los conjuntos.

Paso 1: se define la numeración de corrido, y la disjunción es lo que la hace una función (el núcleo de la prueba). Hay que construir una biyección entre $A \cup B$ y $\mathbb{N}_{a+b}$. Como $|A| = a$ y $|B| = b$, existen biyecciones $f : A \rightarrow \mathbb{N}_a$ y $g : B \rightarrow \mathbb{N}_b$. Definimos $\varphi : A \cup B \rightarrow \mathbb{N}_{a+b}$ por

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A, \\ a + g(x) & \text{si } x \in B, \end{cases}$$

esto es, numerando primero los elementos de A del 1 al a y después los de B del $a + 1$ al $a + b$. Como $A \cap B = \emptyset$, cada $x \in A \cup B$ pertenece a exactamente uno de los dos conjuntos, luego la definición no es ambigua: este es el único lugar de toda la prueba donde se usa la hipótesis, y es donde descansa el teorema. Además $\varphi(x) \in \mathbb{N}_{a+b}$: si $x \in A$, $f(x) \leq a \leq a + b$; si $x \in B$, $a + 1 \leq a + g(x) \leq a + b$.

Paso 2: inyectividad por separación de tramos. Sean $x, y \in A \cup B$ con $\varphi(x) = \varphi(y)$. Si ambos están en A , entonces $f(x) = f(y)$ y, como f es inyectiva, $x = y$. Si ambos están en B , $a + g(x) = a + g(y)$, luego $g(x) = g(y)$ y $x = y$. Si $x \in A$ e $y \in B$, entonces $\varphi(x) \in \{1, \dots, a\}$ mientras que $\varphi(y) \in \{a + 1, \dots, a + b\}$, que son disjuntos: este caso no puede darse. Igual si $x \in B$ e $y \in A$.

Paso 3: sobreyectividad por reparto de tramos. Sea $n \in \mathbb{N}_{a+b}$. Si $n \leq a$, entonces $n \in \mathbb{N}_a$ y existe $x \in A$ con $f(x) = n$, luego $\varphi(x) = n$. Si $n > a$, entonces $n - a \in \mathbb{N}_b$ y existe $y \in B$ con $g(y) = n - a$, luego $\varphi(y) = a + g(y) = n$. No queda ningún número huérfano porque los dos tramos cubren $\mathbb{N}_{a+b}$ entero. ■

Observación (qué se rompe si los conjuntos se solapan). Si $A \cap B \neq \emptyset$, el Paso 1 se cae: un elemento x de la intersección tendría dos candidatos a imagen, $f(x)$ y $a + g(x)$, y φ dejaría de ser una función. Los Pasos 2 y 3 no se enteran del problema, porque solo hablan de tramos de números. Si uno fuerza la definición eligiendo, digamos, la primera opción, lo que se pierde es la sobreyectividad: sobran exactamente $|A \cap B|$ números sin asignar, y de ahí sale —ni más

ni menos— la corrección $-|A \cap B|$ del principio de inclusión-exclusión de dos subsecciones más adelante.

EXPLÍCATE. Si A y B se solapan, ¿cuántos números de $\mathbb{N}_{a+b}$ se quedan sin usar, y por qué ese número es exactamente el que aparecerá restando en la fórmula de inclusión-exclusión?

Aplicado varias veces, el principio de adición dice que si $A_1, \dots, A_k$ son finitos y disjuntos dos a dos, entonces $|A_1 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + \dots + |A_k|$. En la práctica se usa así: para contar un conjunto, se parte en casos que no se solapen y se suma.

1.3.2 Principio del producto

Teorema (producto). Si A y B son conjuntos finitos con $|A| = a$ y $|B| = b$, entonces $|A \times B| = ab$.

LA IDEA: NUMERAR LAS CASILLAS DE UNA TABLA

La intuición falsa, primero. Uno tiende a pensar que este teorema no necesita demostración: « ab es lo que significa multiplicar, y una tabla de a columnas y b filas tiene ab casillas porque sí». Pero el cardinal se ha definido en este libro por biyecciones con $\mathbb{N}_n$, no contando; mientras no se exhiba una biyección entre $A \times B$ y $\mathbb{N}_{ab}$, la afirmación « $|A \times B| = ab$ » sigue pendiente de justificación. La multiplicación de números naturales y el tamaño de un producto cartesiano son dos cosas distintas, y este teorema es exactamente el puente entre ellas.

La imagen. Coloque los pares (x, y) en una tabla rectangular: la columna la marca $f(x)$ y la fila la marca $g(y)$. Ahora numere las casillas leyendo por filas, como se lee una página: la primera fila se lleva los números $1, \dots, a$; la segunda, $a + 1, \dots, 2a$; y así hasta la fila b , que termina en ab . Esa numeración es la biyección, y la fórmula $\varphi(x, y) = f(x) + a(g(y) - 1)$ no es más que su escritura: «saltar $g(y) - 1$ filas completas de a casillas y avanzar $f(x)$ casillas».

La imagen predice el enunciado y además predice la demostración: si numerar por filas es la biyección, entonces **invertirla es dividir entre a** , con cociente la fila y resto la columna. **El corazón en una frase: toda la demostración es la división euclídea de $n - 1$ entre a** , y las dos comprobaciones que siguen (inyectividad y sobreyectividad) son, respectivamente, la unicidad y la existencia del cociente y el resto.

Si A o B es vacío, también lo es $A \times B$, y la igualdad es $0 = 0$. Supongamos en adelante $a, b \geq 1$, de modo que podremos dividir entre a .

Paso 1: se construye la numeración por filas. Sean $f : A \rightarrow \mathbb{N}_a$ y $g : B \rightarrow \mathbb{N}_b$ biyecciones y definamos $\varphi : A \times B \rightarrow \mathbb{N}_{ab}$ por

$$\varphi(x, y) = f(x) + a(g(y) - 1).$$

Es decir, se colocan los pares en una tabla de b filas y a columnas —fila $g(y)$, columna $f(x)$ — y se numeran las casillas por filas.

Paso 2: la numeración no se sale de la tabla. Como $1 \leq f(x) \leq a$ y $0 \leq g(y) - 1 \leq b - 1$, se tiene $1 \leq \varphi(x, y) \leq a + a(b - 1) = ab$, luego φ efectivamente llega a $\mathbb{N}_{ab}$ y no más allá.

Paso 3: inyectividad, que es la unicidad del cociente y el resto (el núcleo de la

prueba). Aquí es donde se paga el precio: hay que asegurar que dos casillas distintas nunca reciben el mismo número, y lo único que lo garantiza es que la columna cabe estrictamente dentro de un bloque de tamaño a . Supongamos $f(x) + a(g(y) - 1) = f(x') + a(g(y') - 1)$. Reordenando, $f(x) - f(x') = a(g(y') - g(y))$: el miembro izquierdo es una diferencia de dos números entre 1 y a , luego tiene valor absoluto menor que a , y el derecho es un múltiplo de a . Un múltiplo de a de valor absoluto menor que a es 0. Entonces $f(x) = f(x')$, de donde $x = x'$, y a continuación $g(y) = g(y')$, de donde $y = y'$.

Paso 4: sobreyectividad, que es la existencia del cociente y el resto. Dado $n \in \mathbb{N}_{ab}$, se divide $n - 1$ entre a : $n - 1 = aq + r$ con $0 \leq r \leq a - 1$ y $0 \leq q \leq b - 1$ (porque $n - 1 \leq ab - 1$). Tomamos x con $f(x) = r + 1$ e y con $g(y) = q + 1$; entonces $\varphi(x, y) = (r + 1) + aq = n$. El resto localiza la columna y el cociente, la fila. ■

Observación (regla de la multiplicación). Si una selección se construye en k pasos y, después de cualquier elección admisible en los pasos anteriores, el paso i ofrece exactamente n_i opciones, el total es $n_1 n_2 \cdots n_k$. Cada elección parcial tiene el mismo número de continuaciones: al añadir un paso, la cantidad de selecciones se multiplica por ese número.

Cuando las opciones de cada paso forman conjuntos fijos e independientes, es el principio del producto aplicado a $A_1 \times \cdots \times A_k$. Pero basta con que sea constante el número de opciones, aunque cambien cuáles son. Al formar un número de cuatro cifras distintas, el segundo dígito no puede ser el primero; aun así, quedan siempre 9 opciones. No se necesita independencia en el sentido probabilístico.

1.3.3 Principio de inclusión–exclusión

Teorema (inclusión–exclusión para dos conjuntos). Para conjuntos finitos A y B ,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

LA IDEA: CONTAR DOS VECES Y DESCONTAR

La intuición falsa, primero. El término $-|A \cap B|$ invita a leerlo como si la unión «perdiera» los elementos comunes, y de ahí sale el error más repetido del tema: restar dos veces la intersección, una por cada conjunto en que aparece. No es eso lo que pasa. Nadie se pierde: lo que ocurre es que al sumar $|A| + |B|$ los elementos de $A \cap B$ quedan contados *dos* veces en vez de una, y para dejarlos en una hay que descontarlos exactamente *una*, no dos.

La imagen: pasar lista con dos listas. Se pasa lista con la lista de A y después con la de B . Quien está solo en una lista contesta una vez; quien está en las dos contesta dos veces. El total de respuestas es $|A| + |B|$, y para saber cuánta gente hay basta descontar una respuesta a cada uno de los que contestaron dos veces, que son $|A \cap B|$ personas. La imagen predice el enunciado y predice también su demostración: si el problema es que la gente se cuenta un número distinto de veces, la salida es **partir en trozos donde nadie se repita**, y sumar con el principio de adición, que es lo único que ya está demostrado.

El corazón en una frase: la fórmula no cuenta elementos, cuenta respuestas, y la resta es la corrección que convierte respuestas en personas. Con tres conjuntos la

contabilidad es la misma pero más larga: quien está en los tres contesta tres veces en las sumas simples, se le descuentan tres en las intersecciones dobles —con lo que se queda a cero, que es pasarse— y hay que devolverle una.

Paso 1: se parte la unión en trozos donde nadie se repite (el núcleo de la prueba). Es el único movimiento de la demostración, y es el que permite usar el principio de adición, que exige disjunción y es lo único disponible. Se escribe $A \cup B$ como unión de tres conjuntos disjuntos dos a dos:

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B),$$

que son «los de A y solo de A », «los de B y solo de B » y «los de los dos»; cada elemento de la unión cae en uno y solo uno de los tres. El principio de adición da $|A \cup B| = |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B|$.

Paso 2: se parten también A y B , con los mismos trozos. De la misma forma $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ y $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ son uniones disjuntas, luego

$$|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|, \quad |B| = |B \setminus A| + |A \cap B|.$$

Obsérvese que $|A \cap B|$ aparece en las dos: ahí está, escrito, el doble conteo.

Paso 3: se despeja. Sumando las dos igualdades del paso 2 y comparando con la del paso 1, los trozos exclusivos se cancelan y queda $|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$, que es la fórmula. ■

Observación (qué hace la hipótesis, y qué pasa si no hay ninguna). Este teorema no exige que A y B sean disjuntos, y eso es lo que hay que entender: el principio de adición necesitaba $A \cap B = \emptyset$, y aquí esa exigencia no ha desaparecido, se ha *trasladado* a los tres trozos del paso 1, que sí son disjuntos por construcción. Inclusión–exclusión no es un principio nuevo: es el de adición aplicado a una partición que uno se fabrica. Si A y B resultan ser disjuntos, $|A \cap B| = 0$ y la fórmula se reduce al principio de adición, como debe ser.

Con números. ¿Cuántos números del 1 al 30 son múltiplos de 2 o de 3? Sea A el conjunto de los múltiplos de 2 y B el de los múltiplos de 3: $|A| = 15$ y $|B| = 10$. Los que están en los dos son los múltiplos de 6, que son 6, 12, 18, 24, 30, así que $|A \cap B| = 5$, y la fórmula da $|A \cup B| = 15 + 10 - 5 = 20$. Se comprueba contando lo que queda fuera: los que no son múltiplos ni de 2 ni de 3 son 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, que son diez, y $30 - 10 = 20$. Los dos errores de la caja de intuición dan aquí números que se pueden ver. Sin restar nada salen 25, porque 6, 12, 18, 24, 30 han contestado dos veces a la lista. Restando la intersección dos veces salen 15, porque esos cinco han desaparecido de la cuenta.

Teorema (inclusión–exclusión para tres conjuntos). Para conjuntos finitos A, B, C ,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

La idea, en una línea: no se vuelve a empezar, se usa dos veces el caso de dos conjuntos —una para separar C del resto y otra para arreglar el término que sobra— y la distributividad es lo que hace que el término que sobra vuelva a ser una unión de dos.

Paso 1: se agrupa para poder aplicar el caso conocido. Se escribe $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$, es decir, se trata $A \cup B$ como si fuera un solo conjunto, y se aplica el caso de dos:

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|.$$

Paso 2: el término nuevo vuelve a ser una unión de dos (el núcleo de la prueba). Aquí está el único paso que no es rutina: el sustraendo $|(A \cup B) \cap C|$ parece un objeto distinto, y la distributividad lo devuelve al caso ya resuelto, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Otra vez el caso de dos conjuntos:

$$|(A \cap C) \cup (B \cap C)| = |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|,$$

donde la intersección de los dos trozos es $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$, y de ahí sale el término triple con signo +: es un signo menos aplicado a un signo menos.

Paso 3: se sustituye. Metiendo el paso 2 en el paso 1 y usando $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, se obtiene la fórmula. ■

La fórmula de tres conjuntos también se puede comprobar sin álgebra, con la cuenta de la caja de intuición hecha por regiones. Un elemento de la unión está en uno, en dos o en los tres conjuntos, y en cada caso se mira cuántas veces lo cuenta cada bloque de la fórmula:

el elemento está en	simples (+)	dobles (−)	triple (+)	total
un conjunto	1	0	0	1
dos conjuntos	2	1	0	$2 - 1 = 1$
los tres	3	3	1	$3 - 3 + 1 = 1$

Todas las filas terminan en 1: cada elemento de la unión se cuenta exactamente una vez, y eso es lo que afirma la fórmula. Los números de cada fila tampoco son casuales. Un elemento que está en m de los conjuntos aparece en tantas intersecciones de k como maneras hay de elegir k de sus m conjuntos, y la última fila, $3 - 3 + 1$, es $\binom{3}{1} - \binom{3}{2} + \binom{3}{3}$. La demostración del caso general no hará otra cosa que escribir esta tabla para n conjuntos.

1.3.4 Inclusión–exclusión para n conjuntos

Con tres conjuntos la fórmula se recuerda de memoria; con n , ya no, y además deja de ser evidente por qué los signos se alternan. La demostración que sigue es la que explica de dónde salen: cada elemento se cuenta una vez por cada subconjunto de índices al que pertenece, y esos conteos se cancelan por el binomio de Newton.

Teorema (inclusión–exclusión). Sean $A_1, \dots, A_n$ subconjuntos finitos de un conjunto. Entonces

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|.$$

Es decir: se suman los cardinales de los conjuntos, se restan los de las intersecciones de dos, se suman los de las intersecciones de tres, y así alternando hasta la intersección de los n .

LA IDEA: CADA ELEMENTO LLEVA SU PROPIA CONTABILIDAD

La intuición falsa, primero. Con dos y con tres conjuntos uno se explica la fórmula mirando un diagrama de Venn: sumo, me he pasado en los solapes, los quito; me he pasado al quitarlos, los devuelvo. De ahí se salta a creer que la fórmula general es «lo mismo pero con más círculos», y que la demostración consistirá en un dibujo más grande. No es así, por dos razones. La primera, práctica: a partir de cuatro conjuntos no existe un diagrama de Venn que use solo círculos; con otras curvas sí se puede dibujar, pero la figura pierde claridad al crecer el número de conjuntos. La segunda, de fondo: el dibujo sugiere que el coeficiente de cada intersección depende de cómo estén colocados los conjuntos, y no depende de nada de eso.

La imagen correcta: cada elemento paga por su cuenta. Olvide los conjuntos como regiones y mírelos como una lista de asistencia. Fije un elemento x y pregunte solo por él: ¿cuántas veces aparece sumado y cuántas restado en el miembro derecho? Si x pertenece a m de los conjuntos, no importa a cuáles ni cómo se solapen entre sí: x aparecerá en tantas intersecciones de k conjuntos como maneras haya de elegir k de sus m conjuntos. El elemento se cuenta a sí mismo con los signos alternados $+\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \cdots$, y el teorema será cierto si y solo si esa suma vale 1 para todo $m \geq 1$. Es decir: la fórmula se reduce a una identidad numérica sobre números combinatorios, sin conjuntos ni dibujos.

El corazón en una frase: todo el teorema es que $(1 - 1)^m = 0$. Esa es la identidad que hace que las contribuciones de cada elemento se cancelen hasta dejar exactamente una, y explica de una vez por qué los signos *tienen* que alternar: son los del desarrollo de $(1 - 1)^m$.

Paso 1: se cambia el objeto que se cuenta. En vez de manipular la unión, se fija un elemento x de la unión y se cuenta cuántas veces contribuye al miembro derecho. Si se demuestra que cada x de la unión contribuye exactamente 1 y cada x fuera de ella contribuye 0, la igualdad queda probada, porque el miembro derecho no es más que la suma de todas esas contribuciones.

Paso 2: se localizan las intersecciones que contienen a x . Sea $m \geq 1$ el número de conjuntos A_i a los que pertenece x . Entonces x está en exactamente $\binom{m}{k}$ de las intersecciones $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$: son las que se forman eligiendo k de sus m conjuntos, y ninguna otra, porque basta que uno de los índices elegidos no sea de los suyos para que x quede fuera. (El número combinatorio $\binom{m}{k}$ se define con precisión en la sección 1.5, y aquí solo se usa que cuenta los subconjuntos de k elementos de un conjunto de m .)

Paso 3: la cancelación por el binomio (el núcleo de la prueba). La contribución total de x a la derecha es

$$\sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \binom{m}{k} = 1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} = 1 - (1 - 1)^m = 1,$$

donde se ha usado el teorema del binomio (sección 1.6) con $a = 1$, $b = -1$. El truco de la primera igualdad es añadir y quitar el término $k = 0$, que vale $\binom{m}{0} = 1$, para poder reconocer el desarrollo completo de $(1 - 1)^m$; y ese desarrollo es 0 porque $1 - 1 = 0$ y $m \geq 1$.

Paso 4: los elementos de fuera y el recuento final. Cada elemento de la unión contribuye exactamente 1, y los elementos que no están en la unión contribuyen 0 porque no están en ninguna intersección. Luego la derecha vale $|A_1 \cup \dots \cup A_n|$. ■

Observación (qué se rompe si $m = 0$). El Paso 3 necesita $m \geq 1$: si m fuera 0, el desarrollo daría $1 - (1 - 1)^0 = 1 - 1 = 0$, que es justamente la contribución correcta de un elemento que no está en ningún A_i . La fórmula, pues, no falla ahí: se limita a decir lo contrario, y esa es la comprobación de que el argumento cubre los dos casos con la misma cuenta.

Esta demostración usa dos cosas que vienen después en el capítulo, los números combinatorios y el binomio. No hay circularidad: ninguno de esos dos resultados usa inclusión-exclusión. Conviene volver a leerla al terminar el capítulo.

LA IDEA: LA FORMA EN QUE SE USA

Casi nunca se busca $|A_1 \cup \dots \cup A_n|$ directamente. Lo típico es que se pida el número de objetos que cumplen *todas* las propiedades $P_1, \dots, P_n$ («contiene al 1, al 3 y al 7»), y entonces A_i es el conjunto de los que *no* cumplen P_i . Lo pedido es el total menos la unión de los A_i :

$$\text{total} - |A_1| - \dots + |A_1 \cap A_2| + \dots,$$

y las intersecciones son fáciles de contar porque «no contiene al 1 ni al 3» es simplemente contar con menos dígitos.

Ejemplo (cifras en su sitio). **El problema.** Se escriben las cifras $1, 2, \dots, n$ en un orden cualquiera. ¿En cuántas de las $n!$ ordenaciones queda alguna cifra en su sitio, es decir, la cifra i en la posición i ? ¿Y en cuántas no queda ninguna? Es la pregunta del sorteo del amigo invisible: nadie debe sacar su propio nombre.

El caso $n = 3$, a mano. Las seis ordenaciones son 123, 132, 213, 231, 312 y 321. Dejan alguna cifra en su sitio 123 (las tres), 132 (el 1), 213 (el 3) y 321 (el 2): son cuatro. No dejan ninguna 231 y 312: son dos.

La idea. «Alguna cifra en su sitio» es una unión. Si A_i es el conjunto de las ordenaciones con la cifra i en su sitio, se pide $|A_1 \cup \dots \cup A_n|$. Las intersecciones se cuentan solas: fijar k cifras concretas en su sitio deja libres las otras $n - k$, que se ordenan de $(n - k)!$ maneras. No importa *cuáles* sean las k cifras fijadas, solo *cuántas*, y eso hace que todos los términos de un mismo bloque de la fórmula valgan lo mismo.

La cuenta. Hay $\binom{n}{k}$ intersecciones de k conjuntos, todas de tamaño $(n - k)!$, así que

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n - k)! = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}.$$

Con $n = 3$ sale $3 \cdot 2! - 3 \cdot 1! + 1 \cdot 0! = 6 - 3 + 1 = 4$, lo mismo que a mano. Las ordenaciones que no dejan ninguna cifra en su sitio se llaman **desarreglos**; son el complementario, y su número es

$$D_n = n! - |A_1 \cup \dots \cup A_n| = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Con $n = 4$: la unión tiene $4 \cdot 3! - 6 \cdot 2! + 4 \cdot 1! - 1 \cdot 0! = 24 - 12 + 4 - 1 = 15$ elementos, y $D_4 = 24 - 15 = 9$. Son 2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312 y 4321.

Leída en palabras, la fórmula dice: se quitan las ordenaciones con cada cifra en su sitio, se devuelven las que se quitaron dos veces por tener dos, se vuelven a quitar las que tenían tres, y así. La suma $\sum_{k=0}^n (-1)^k / k!$ es el comienzo de la serie de e^{-1} , de modo que la proporción $D_n/n!$ se acerca muy deprisa a $1/e \approx 0,368$: con $n = 6$ ya vale $265/720 \approx 0,3681$. A partir de unas pocas cifras, algo más de un tercio de las ordenaciones no deja ninguna en su sitio, sea cual sea n .

Cuando solo cuentan algunas cifras. Si se pregunta por alguna cifra de un grupo, la unión es solo de los conjuntos de ese grupo. Con $n = 4$ y el grupo $\{1, 2\}$: las ordenaciones con el 1 o el 2 en su sitio son $2 \cdot 3! - 2! = 12 - 2 = 10$. Las intersecciones siguen costando $(n - k)!$; lo único que cambia es cuántas hay de cada tamaño, que son $\binom{n}{k}$ si el grupo tiene k cifras.

Dónde se falla. En sumar $3! + 3! = 12$ sin restar nada: las dos ordenaciones que tienen a la vez el 1 y el 2 en su sitio, 1234 y 1243, se han contado dos veces. Y en creer que el tamaño de una intersección depende de qué cifras se fijan, cuando solo depende de cuántas.

DE DÓNDE VIENE: DE MOIVRE Y LOS JUEGOS DE AZAR

En la *Doctrine of Chances* de 1718, Abraham de Moivre utiliza el método al calcular la probabilidad de que ciertas letras de una permutación ocupen su lugar y otras no (problema XXV). La denominación «fórmula de la criba» recuerda su relación con la criba de Eratóstenes: contar los números hasta N que no son múltiplos de ninguno de varios primos es exactamente una inclusión-exclusión, y en esa forma sigue siendo el ejemplo canónico: «enteros entre 1 y 1000 no divisibles por 2, 3 ni 5».

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: CONTAR EL COMPLEMENTARIO EN VEZ DE LA UNIÓN

Cuando se pide «al menos uno», se puede contar la unión mediante inclusión-exclusión, o contar el complementario («ninguno») y restar del total. Conviene elegir el conjunto más fácil de contar, no el que tenga menos condiciones escritas. Por ejemplo, «ninguna cifra es 7» se cuenta directamente con un alfabeto de nueve dígitos. En cambio, para contar secuencias que contienen al 1, al 3 y al 7, el complementario es «falta al menos uno»: una unión para la que inclusión-exclusión resulta útil. Ambos caminos se pueden combinar; el complementario no exige una sola condición.

Ejercicios: inclusión-exclusión

Ejercicio 1.10. La clase de música R1.8

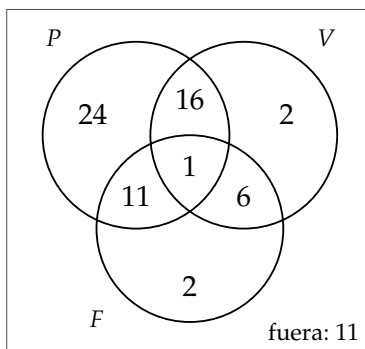
En una clase de música con 73 estudiantes hay 52 que tocan el piano, 25 el violín, 20 la flauta, 17 tocan piano y violín, 12 piano y flauta, 7 violín y flauta y solo una persona toca los tres instrumentos. ¿Hay alguien que no toque ninguno de los tres instrumentos?

Resolución. Con P, V, F los conjuntos de los que tocan piano, violín y flauta, los datos son $|P| = 52, |V| = 25, |F| = 20, |P \cap V| = 17, |P \cap F| = 12, |V \cap F| = 7, |P \cap V \cap F| = 1$. Por inclusión-exclusión,

$$|P \cup V \cup F| = 52 + 25 + 20 - 17 - 12 - 7 + 1 = 62.$$

Como hay 73 estudiantes, $73 - 62 = 11$ no tocan ninguno de los tres. La respuesta es sí: once personas. ■

Otra vía (rellenar el diagrama de dentro afuera). En lugar de aplicar la fórmula, se reparten los estudiantes entre las siete regiones del diagrama de Venn, empezando por el centro. En el centro está la única persona que toca los tres instrumentos. Los 17 de piano y violín incluyen a esa persona, así que en la región «piano y violín, pero no flauta» quedan 16; del mismo modo quedan $12 - 1 = 11$ en «piano y flauta, pero no violín» y $7 - 1 = 6$ en «violín y flauta, pero no piano». Por último, los que tocan solo el piano son $52 - 16 - 11 - 1 = 24$; solo el violín, $25 - 16 - 6 - 1 = 2$; y solo la flauta, $20 - 11 - 6 - 1 = 2$.



Las siete regiones suman $24 + 2 + 2 + 16 + 11 + 6 + 1 = 62$, y quedan fuera $73 - 62 = 11$. Es la misma respuesta, obtenida sin restar ninguna intersección: cada persona se ha colocado en una sola región, y el principio de adición hace el resto. Esta vía es la más segura cuando se pregunta por regiones concretas («solo piano», «exactamente dos instrumentos»), y la fórmula es más rápida cuando solo se pide la unión.

Donde se falla con la fórmula es en el signo del último término: restar la intersección triple en vez de sumarla da 60 y no 62. La tabla de contribuciones que sigue a la demostración del caso de tres conjuntos dice por qué se suma: quien toca los tres instrumentos ya se ha contado tres veces y descontado otras tres, y hay que devolverlo una vez.

Ejercicio 1.11. Cien botellas de agua mineral R1.9

De un total de 100 botellas de agua mineral de distintos manantiales, 40 contienen sílice, 40 calcio, 51 magnesio, 11 sílice y calcio, 12 sílice y magnesio y 13 calcio y magnesio. Suponiendo que todas las botellas contienen al menos uno de estos tres minerales,

- ¿cuántas botellas contienen los tres minerales?
- ¿cuántas contienen solo uno?

Resolución. El ejercicio usa la fórmula de inclusión-exclusión al revés. En la clase de música se conocían todas las intersecciones y se buscaba la unión; aquí la unión se sabe (todas las botellas tienen algún mineral, luego son las cien) y la incógnita es la intersección triple. Después, en b), hay que pasar de «contiene sílice» a «contiene solo sílice», que es una región del diagrama y no un conjunto de los datos.

a) Sean S , C , M los conjuntos de botellas con sílice, calcio y magnesio, y sea $x = |S \cap C \cap M|$. Como toda botella contiene al menos uno de los tres minerales indicados, $|S \cup C \cup M| = 100$. Por inclusión-exclusión,

$$100 = 40 + 40 + 51 - 11 - 12 - 13 + x = 95 + x,$$

luego $x = 5$: cinco botellas contienen los tres minerales.

b) Las botellas que contienen solo sílice son las de S menos las que además contienen calcio o magnesio. Las que contienen sílice y además calcio o magnesio son $|(S \cap C) \cup (S \cap M)| = 11 + 12 - 5 = 18$ (inclusión-exclusión de dos conjuntos, cuya intersección es la triple). Luego solo sílice: $40 - 18 = 22$. Igual, solo calcio: $40 - (11 + 13 - 5) = 21$; solo magnesio: $51 - (12 + 13 - 5) = 31$. En total $22 + 21 + 31 = 74$ botellas contienen exactamente un mineral.

Comprobación: exactamente dos minerales son $(11 - 5) + (12 - 5) + (13 - 5) = 21$; y $74 + 21 + 5 = 100$. ■

Se falla en b) al escribir «solo sílice» como $40 - 11 - 12 = 17$. Las cinco botellas que tienen los tres minerales están a la vez entre las 11 de sílice y calcio y entre las 12 de sílice y magnesio, así que esa resta las quita dos veces; hay que devolverlas una, y sale $17 + 5 = 22$. Es el mismo error de signo que en la clase de música, ahora dentro de un solo conjunto. Y en a), la hipótesis «todas contienen alguno» no es decorativa: es la que convierte el total, 100, en el cardinal de la unión. Sin ella la ecuación tendría dos incógnitas, la triple y las botellas sin ningún mineral, y no se podría resolver.

QUÉ DEJA. Inclusión-exclusión también se usa al revés, para despejar una intersección conocida la unión. Para «exactamente uno», se cuenta cada región exclusiva; el caso de dos conjuntos permite descontar de cada mineral los que también contienen otro.

1.4 Aplicaciones $\mathbb{N}_m \rightarrow X$ con X finito

LA PREGUNTA

Un programa genera claves de ocho símbolos y un banco quiere saber cuántas claves distintas puede repartir antes de que dos clientes coincidan, y cuántas quedarían si prohibiera repetir símbolos. Un fabricante de cerraduras quiere saber cuántas combinaciones tiene una cerradura de tres ruedas. Un jefe de carrera quiere saber cuántos podios distintos pueden darse con treinta corredores. ¿Es el mismo problema o son tres?

Son variantes de uno solo: contar aplicaciones de $\mathbb{N}_m$ en un conjunto X de n elementos. Una clave de longitud m es una función que a cada posición $i \in \mathbb{N}_m$ le asigna un símbolo; prohibir repeticiones es pedir que la función sea inyectiva; y un podio es una inyección de $\{1, 2, 3\}$ en el conjunto de corredores. Todo lo que se llama variaciones y permutaciones es esto.

1.4.1 Funciones (variaciones con repetición)

Teorema (conteo de funciones). Sea X un conjunto con $|X| = n$ y $m \geq 1$. El número de funciones $f : \mathbb{N}_m \rightarrow X$ es n^m .

Para cada $i \in \mathbb{N}_m$ hay n opciones para $f(i)$, y las elecciones son independientes: la imagen de i no restringe la de j . Por la regla de la multiplicación hay $n \cdot n \cdots n = n^m$ funciones.

Con más rigor: el conjunto de funciones $\mathbb{N}_m \rightarrow X$ está en biyección con $X^m = X \times$

$\cdots \times X$ mediante $f \mapsto (f(1), \dots, f(m))$, y el principio del producto aplicado $m - 1$ veces da $|X^m| = n^m$. ■

Con $m = 2$ y $X = \{a, b, c\}$ se pueden escribir todas. Una función $\mathbb{N}_2 \rightarrow X$ es el par $(f(1), f(2))$, y los pares son

$$aa, ab, ac, \quad ba, bb, bc, \quad ca, cb, cc :$$

tres grupos, uno por cada valor de $f(1)$, con tres elementos cada uno, $3^2 = 9$. Las tres funciones aa, bb y cc repiten valor; las seis restantes son las inyecciones de la subsección siguiente.

Definición. Una **variación con repetición** de longitud m sobre X es una m -tupla $(x_1, \dots, x_m) \in X^m$.

Proposición. Si $|X| = n$, el número de variaciones con repetición de longitud m sobre X es n^m . Se denota $VR_{n,m} = n^m$.

Cada tupla $(x_1, \dots, x_m)$ equivale a la función $\mathbb{N}_m \rightarrow X, i \mapsto x_i$, que envía cada posición al elemento que la ocupa, y esa correspondencia es biyectiva. ■

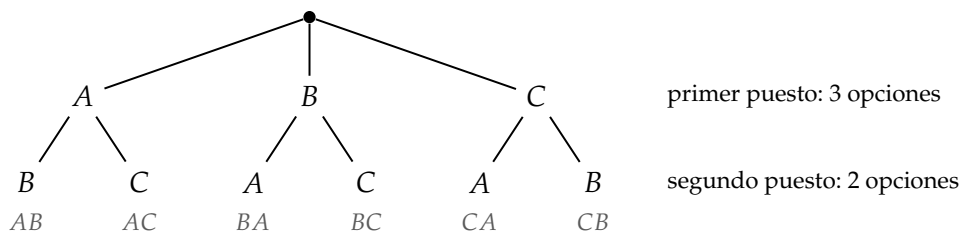
1.4.2 Inyecciones (variaciones sin repetición)

Teorema (número de inyecciones). Sea X un conjunto con $|X| = n$. Si $m \leq n$, el número de inyecciones $f : \mathbb{N}_m \rightarrow X$ es

$$n(n-1) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

La idea. Se construye la inyección posición a posición, y en cada posición hay un símbolo menos disponible que en la anterior porque los ya usados quedan prohibidos: de ahí los factores descendentes $n, n-1, n-2, \dots$ **El corazón en una frase: lo que la regla del producto necesita no es que las elecciones sean libres, sino que su número sea siempre el mismo**, y aquí lo es —en el paso k quedan $n - (k-1)$ opciones sea cual sea lo elegido antes—, porque lo único que importa es *cuántos* símbolos se han gastado, no cuáles.

Se ve en el caso más pequeño con un árbol de decisiones. Tres corredores, A, B y C , se disputan los dos primeros puestos. Cada camino de la raíz a una hoja es un podio:



Las etiquetas de las ramas cambian de un nudo a otro: bajo A cuelgan B y C ; bajo B , cuelgan A y C . Pero de cada nudo del primer nivel salen siempre *dos* ramas, y por eso las hojas son $3 \cdot 2 = 6$. Si el número de ramas cambiara de un nudo a otro, habría que sumarmas una a una en vez de multiplicar.

Paso 1: se elige posición a posición, y el número de opciones no depende de lo ya elegido (el núcleo de la prueba). Se elige $f(1)$: n opciones. Después $f(2)$, que no puede repetir $f(1)$: $n - 1$ opciones, sea cual sea $f(1)$. En general, para $f(k)$ quedan $n - (k - 1)$ opciones, porque hay que evitar los $k - 1$ valores ya usados, que son distintos entre sí. La regla de la multiplicación se aplica porque el número de opciones en cada paso no depende de las elecciones anteriores, solo de cuántas se han hecho. El total es $n(n - 1) \cdots (n - m + 1)$, que son m factores, y multiplicando y dividiendo por $(n - m)!$ se obtiene $n! / (n - m)!$.

Paso 2: el caso $m > n$, que la fórmula cubre sola. Si $m > n$ no hay ninguna inyección, por el principio del palomar, y la fórmula del producto también da 0 porque aparece el factor $n - n = 0$. La hipótesis $m \leq n$ del enunciado no es, pues, una restricción del resultado sino de la escritura con factoriales: $(n - m)!$ no tiene sentido con $n - m$ negativo, mientras que el producto descendente sí. ■

Definición. Una **variación sin repetición** de longitud m sobre X es una m -tupla $(x_1, \dots, x_m) \in X^m$ con todos sus elementos distintos.

Proposición. Si $|X| = n$ y $0 \leq m \leq n$, el número de variaciones sin repetición de longitud m sobre X es $n(n - 1) \cdots (n - m + 1) = n! / (n - m)!$. Se escribe $V_{n,m}$. Si $m > n$, es 0.

Cada tupla sin repetición equivale a una función $\mathbb{N}_m \rightarrow X$ inyectiva, mediante la misma correspondencia $i \mapsto x_i$. ■

1.4.3 Biyecciones (permutaciones)

Definición. Dado un conjunto X , una **permutación** de X es una biyección $X \rightarrow X$.

Teorema (número de permutaciones). Si $|X| = n$, el número de biyecciones $X \rightarrow X$ es $n!$.

Es el caso $m = n$ del teorema de inyecciones: con $|\mathbb{N}_n| = |X|$, una inyección $\mathbb{N}_n \rightarrow X$ es automáticamente biyectiva por la proposición de la sección 1.2, y las biyecciones $X \rightarrow X$ están en correspondencia con las biyecciones $\mathbb{N}_n \rightarrow X$ componiendo con una biyección fija $\mathbb{N}_n \rightarrow X$. El número es $n! / (n - n)! = n! / 0! = n!$. ■

LA IDEA: LAS TRES PREGUNTAS QUE DECIDEN LA FÓRMULA

Ante cualquier problema de contar configuraciones de longitud m con n símbolos, hay que hacerse dos preguntas: ¿importa el orden? y ¿se pueden repetir símbolos? Si el orden importa, estamos en esta sección: con repetición n^m , sin repetición $n! / (n - m)!$, y si además $m = n$, $n!$. Si el orden no importa, estamos en la sección siguiente. La tercera pregunta, ¿hay restricciones adicionales?, es la que hace que estos problemas no sean una fórmula sino un razonamiento: casi siempre hay que partir en casos (principio de adición) o pasar al complementario.

Con esto quedan contestadas las tres preguntas que abrían la sección, y son en efecto el mismo problema con distintas condiciones. Una cerradura de tres ruedas con los diez dígitos

es una función de las tres ruedas en los dígitos, sin restricción: $10^3 = 1000$ combinaciones. Un podio con treinta corredores es una inyección de los tres puestos en los corredores: $30 \cdot 29 \cdot 28 = 24\,360$. Y las claves de ocho símbolos dependen del alfabeto; si son las veintiséis letras y los diez dígitos, hay $36^8 \approx 2,82 \cdot 10^{12}$ claves, y prohibir repetir símbolos deja $36 \cdot 35 \cdots 29 \approx 1,22 \cdot 10^{12}$, algo menos de la mitad. Lo que la sección no ha tratado es el caso en que el orden no importa: una mano de cartas o un turno de guardia no son listas sino conjuntos, y eso es lo que cuenta la sección siguiente.

CONEXIÓN: INFERENCIA ESTADÍSTICA Y TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

Al registrar el orden de las extracciones, una muestra de tamaño m de una población de n individuos tiene n^m resultados posibles con reemplazamiento y $n!/(n-m)!$ sin reemplazamiento ($m \leq n$). Son equiprobables si en cada extracción se elige uniformemente entre los individuos disponibles. Son exactamente estas dos fórmulas, y son las que están debajo de la distribución binomial y de la hipergeométrica que se usaron en Inferencia estadística el cuatrimestre pasado. La definición clásica de probabilidad, casos favorables entre casos posibles, convierte estos recuentos en probabilidades cuando el modelo es finito y equiprobable.

Ejemplo (juntos y separados). El problema. Cinco personas, entre ellas Ana y Blas, se sientan en cinco butacas seguidas. ¿De cuántas maneras pueden hacerlo si Ana y Blas quieren estar juntos? ¿Y si no pueden estar juntos?

El caso pequeño, a mano. Con cuatro personas A, B, C y D hay $4! = 24$ ordenaciones, y en 12 de ellas A y B están juntos:

$ABCD \quad ABDC \quad BACD \quad BADC \quad CABD \quad CBAD$
 $CDAB \quad CDBA \quad DABC \quad DBAC \quad DCAB \quad DCBA$

Se ve la estructura: A y B aparecen siempre como un bloque, AB o BA , y ese bloque se mueve entre C y D como si fuera una persona más.

La idea para «juntos»: la técnica del bloque. Se atan en un bloque las personas que deben ir juntas, se ordena el bloque junto con las demás como un objeto más, y después se ordena lo que hay dentro del bloque. Con cuatro personas, el bloque, C y D son tres objetos, que se ordenan de $3! = 6$ maneras, y el bloque se escribe AB o BA : $6 \cdot 2 = 12$, como en la lista. Con cinco personas, el bloque y las otras tres son cuatro objetos:

$$4! \cdot 2! = 48 \text{ maneras con Ana y Blas juntos.}$$

Para «separados», dos caminos. El primero es el complementario: $5! - 48 = 120 - 48 = 72$. El segundo es la **técnica de los huecos**, que cuenta directamente y es la cómoda cuando son más de dos las personas que no pueden quedar juntas. Se sientan primero las tres personas sin restricción, de $3! = 6$ maneras. Entre ellas y en los dos extremos quedan cuatro huecos, marcados con $\square$ en $\square C \square D \square E \square$, y Ana y Blas tienen que ir a dos huecos distintos, uno en cada uno, porque dos personas en un mismo hueco quedarían juntas. Elegir hueco para Ana y otro distinto para Blas es una variación $V_{4,2} = 12$. En total, $6 \cdot 12 = 72$, lo mismo que por el complementario.

La fórmula general. Si hay n personas y k de ellas no pueden quedar dos juntas, las $n - k$ restantes se ordenan de $(n - k)!$ maneras y dejan $n - k + 1$ huecos, de los que las k personas ocupan k distintos, en orden:

$$(n - k)! \cdot V_{n-k+1,k} = (n - k)! \frac{(n - k + 1)!}{(n - 2k + 1)!} \quad (2k \leq n + 1).$$

Se lee así: primero se colocan los que no molestan, y luego cada uno de los que no pueden tocarse ocupa un hueco propio. Con $n = 5$ y $k = 2$ sale $3! \cdot 4 \cdot 3 = 72$. Con siete personas y tres que no pueden estar dos juntas, $4! \cdot V_{5,3} = 24 \cdot 60 = 1440$. Si $2k > n + 1$ no hay huecos suficientes y el número es 0.

Dónde se falla. En olvidar el orden interno del bloque, que da 24 en vez de 48. En contar solo los huecos entre personas, $n - k - 1$, y olvidar los dos de los extremos. Y en confundir «ninguna pareja junta» con «no todos juntos»: con tres personas, que las tres no estén seguidas es el complementario del bloque de tres, y es otra cuenta distinta de la de los huecos.

Ejercicios: variaciones y permutaciones

Ejercicio 1.12. Capicúas con dígitos pares R1.11

- a) ¿Cuántos números capicúas de 5 cifras se pueden hacer con los dígitos pares?
 - b) ¿Cuántos de ellos empiezan por 2?
 - c) ¿Cuántos tienen 3 cifras diferentes?
-

Resolución. Los dígitos pares son 0, 2, 4, 6, 8. Un capicúa de cinco cifras tiene la forma $abcba$ y queda determinado por (a, b, c) .

a) a no puede ser 0 (el número tendría menos de cinco cifras): 4 opciones. b y c pueden ser cualquiera de los 5 dígitos. Por la regla de la multiplicación, $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$.

b) $a = 2$ fijo; b y c libres: $5 \cdot 5 = 25$.

c) Que las tres cifras a, b, c sean diferentes: a entre 4 opciones, b entre las 4 restantes (ahora sí puede ser 0), c entre las 3 que quedan: $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$. ■

Todo el ejercicio descansa en la primera frase: un capicúa de cinco cifras es una terna (a, b, c) disfrazada, y contar capicúas es contar ternas. Se falla en dos sitios. Uno es permitir $a = 0$, que da $5^3 = 125$ y cuenta como capicúas de cinco cifras cadenas como 02420, que no lo son. El otro, en c), es quitar el 0 también de b y c : la restricción de no empezar por 0 afecta solo a la primera cifra.

Ejercicio 1.13. Una familia en el cine R1.14

Una familia formada por los padres y 3 hijos van al cine. Se sientan en 5 butacas consecutivas.

- a) ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse?
 - b) ¿Y si los padres deciden sentarse en los extremos?
 - c) ¿Y si los padres deciden no sentarse en los extremos?
-

Resolución. a) Cinco personas en cinco butacas: una biyección entre personas y butacas, $5! = 120$.

b) Los padres ocupan las dos butacas extremas, de 2 formas (quién a la izquierda). Los tres hijos ocupan las tres butacas centrales de $3! = 6$ formas. Total $2 \cdot 6 = 12$.

c) Las butacas no extremas son tres. Los dos padres se sientan en dos de ellas, en orden (importa cuál ocupa cada uno): variaciones $V_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$. Los hijos ocupan las tres butacas restantes: $3! = 6$. Total $6 \cdot 6 = 36$.

Comprobación: las formas en que exactamente un padre está en un extremo son 120 –

$12 - 36 = 72$; y directamente, elegir el padre que va al extremo (2), el extremo (2), la butaca central del otro padre (3) y los hijos (3!): $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 72$. ■

Otra vía (por el complementario, en c)). El apartado c) también puede contarse como total menos «algún padre en un extremo», pero esa unión de dos sucesos exige inclusión-exclusión y es más largo que sentar a los padres primero. Aquí el camino directo gana.

Ejercicio 1.14. *Palabras con las letras de aurelio* R1.15

Considera el conjunto de letras $B = \{a, u, r, e, l, i, o\}$ y supongamos que cualquier elección ordenada de ellas forma una palabra.

- ¿Cuántas palabras distintas de 7 letras distintas puedes formar con las letras de B ?
- ¿Y si admites letras repetidas en una misma palabra?

Resolución. a) Una palabra de siete letras distintas con las siete letras de B es una biyección $\mathbb{N}_7 \rightarrow B$: hay $7! = 5040$.

b) Una palabra de siete letras con repeticiones permitidas es una función cualquiera $\mathbb{N}_7 \rightarrow B$: hay $7^7 = 823\,543$. ■

Ejercicio 1.15. *Podios y banderas* R1.16

En una carrera ciclista participan 5 países con 6 corredores cada uno.

- ¿Cuántos podios distintos pueden ocurrir?
- En la ceremonia de entrega de medallas se izan de forma ordenada las banderas de los países a los que pertenecen los tres ganadores. ¿Cuántos posibles izamientos hay? ¿En cuántos de esos izamientos aparece la bandera del país A ?

Resolución. a) Hay 30 corredores. Un podio es una variación sin repetición de 30 elementos tomados de 3 en 3: $V_{30,3} = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24\,360$.

b) Un izamiento es una sucesión ordenada de tres países, con repetición posible (los tres ganadores pueden ser del mismo país): $VR_{5,3} = 5^3 = 125$. Los izamientos en los que no aparece A son las sucesiones de tres países elegidos entre los otros cuatro: $4^3 = 64$. Luego aparece A en $125 - 64 = 61$ izamientos. ■

Los dos apartados cuentan el mismo podio con dos alfabetos distintos, y eso es lo que decide la fórmula. En a) los símbolos son los corredores, que no se repiten: variaciones sin repetición. En b) los símbolos son los países, y dos corredores del mismo país izan la misma bandera: variaciones con repetición. Se falla en arrastrar la fórmula de a) a b) y contar $V_{5,3} = 60$ izamientos, que deja fuera todos los que repiten bandera. Y en la segunda pregunta de b), en contar «aparece A » como «elegir el puesto de A y rellenar los otros dos», $3 \cdot 4^2 = 48$: eso cuenta solo los izamientos con exactamente una bandera de A . Faltan los 12 con dos y el que tiene tres, y $48 + 12 + 1 = 61$. El complementario evita esa partición.

Ejercicio 1.16. *Números de cuatro cifras distintas con los dígitos del 1 al 7* R1.18

Considera los dígitos del 1 al 7.

- ¿Cuántos números de 4 cifras distintas puedes formar con ellos?

- b) ¿Cuántos de esos números contienen el dígito 7?
c) ¿Cuántos de los números del apartado a) no contienen al 7?
-

Resolución. a) Variaciones sin repetición de 7 dígitos tomados de 4 en 4: $V_{7,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$. No hay problema con el cero porque no está entre los dígitos.

c) Sin el 7 quedan seis dígitos: $V_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

b) Por el principio de adición, los 840 números se parten en los que contienen al 7 y los que no: $840 - 360 = 480$. Directamente: se elige la posición del 7 (4 opciones) y se rellenan las otras tres posiciones con dígitos distintos del 1 al 6: $V_{6,3} = 120$. Total $4 \cdot 120 = 480$. Coincide. ■

Otra vía (la misma cuenta con nueve dígitos, examen de 2023). Con los dígitos del 1 al 9 y números de 7 cifras distintas: a) $V_{9,7} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 181\,440$. b) Contienen el 1, el 2 y el 3: se eligen las posiciones de esos tres dígitos, en orden, $V_{7,3} = 210$, y se rellenan las cuatro posiciones restantes con dígitos distintos de los seis que quedan, $V_{6,4} = 360$: $210 \cdot 360 = 75\,600$. c) Contienen alguno de 1, 2, 3: el complementario son los números de siete cifras distintas formados solo con los seis dígitos del 4 al 9, y no hay ninguno, porque siete cifras distintas no caben en seis dígitos (palomar). Luego todos los 181 440 contienen alguno.

Ejercicio 1.17. *Lo mismo, con repetición* R1.19

Considera de nuevo los dígitos del 1 al 7.

- a) ¿Cuántos números de 4 cifras puedes formar con ellos?
b) ¿Cuántos de esos números contienen al 7?
c) ¿Cuántos no contienen al 7?
-

Resolución. a) $VR_{7,4} = 7^4 = 2401$.

c) Sin el 7: $VR_{6,4} = 6^4 = 1296$.

b) $2401 - 1296 = 1105$.

La vía directa del ejercicio anterior, «elige la posición del 7 y rellena», da $4 \cdot 6^3 = 864$, que no es la respuesta: ese producto cuenta solo los números con exactamente un 7. Con repetición permitida hay que añadir los que tienen dos, tres y cuatro setes, contados por casos disjuntos: exactamente dos setes, $\binom{4}{2} \cdot 6^2 = 216$ (posiciones de los dos setes y relleno de las otras dos); exactamente tres, $\binom{4}{3} \cdot 6 = 24$; los cuatro, 1. En total $864 + 216 + 24 + 1 = 1105$, que coincide con la resta del complementario. ■

Ejercicio 1.18. *Números de la seguridad social* R1.26

¿Cuántos números de la seguridad social (secuencias de nueve dígitos) tienen al menos una vez cada uno de los dígitos 1, 3 y 7?

Resolución. «Contiene el 1, el 3 y el 7» son tres condiciones que tienen que cumplirse a la vez, y contarlas de frente es incómodo, porque cada dígito puede aparecer una vez o varias. Su negación, en cambio, es «le falta al menos uno de los tres», que es una unión de tres conjuntos fáciles: a los que les falta un dígito concreto se les cuenta con un alfabeto más pequeño. Es la forma de uso de la inclusión-exclusión que se describió tras su demostración general.

Sea U el conjunto de secuencias de nueve dígitos, $|U| = 10^9$. Sean A_1, A_3, A_7 los subconjuntos de secuencias que *no* contienen al 1, al 3 y al 7, respectivamente. Lo pedido es $|U| - |A_1 \cup A_3 \cup A_7|$.

Una secuencia que no contiene al 1 es una variación con repetición de los otros nueve dígitos: $|A_1| = 9^9$, e igual para A_3 y A_7 . Una que no contiene ni al 1 ni al 3 usa ocho dígitos: $|A_1 \cap A_3| = 8^9$, e igual para las otras dos intersecciones dobles. La triple usa siete: 7^9 . Por inclusión-exclusión,

$$|A_1 \cup A_3 \cup A_7| = 3 \cdot 9^9 - 3 \cdot 8^9 + 7^9,$$

y por tanto la respuesta es

$$\begin{aligned} 10^9 - 3 \cdot 9^9 + 3 \cdot 8^9 - 7^9 &= 1\,000\,000\,000 - 1\,162\,261\,467 \\ &\quad + 402\,653\,184 - 40\,353\,607 \\ &= 200\,038\,110. \end{aligned}$$

■

La cuenta que tiente es la de la otra vía del ejercicio de los dígitos del 1 al 7: elegir en qué posiciones van el 1, el 3 y el 7, $V_{9,3} = 504$ maneras, y rellenar las otras seis libremente, 10^6 . Da 504 000 000, más del doble de lo correcto. Allí funcionaba porque las cifras no se repetían y cada dígito tenía una sola posición; aquí una secuencia con dos unos se cuenta una vez por cada uno de ellos que se elija como «el» 1. Con secuencias de longitud 3 sobre el alfabeto $\{1, 3, x\}$ se ve en pequeño: las que contienen el 1 y el 3 son 12, y la cuenta de posiciones da $V_{3,2} \cdot 3 = 18$, porque 113, por ejemplo, sale dos veces. El otro fallo posible es de signo: el término 7^9 , el de las que no tienen ninguno de los tres, se resta en la respuesta final porque se sumaba en la unión.

QUÉ DEJA. El patrón «contiene todos los símbolos de una lista» es inclusión-exclusión con $A_i =$ «no contiene el i -ésimo». Las intersecciones se cuentan quitando dígitos.

1.5 Subconjuntos: combinaciones

LA PREGUNTA

La lotería primitiva paga a quien acierte seis números entre cuarenta y nueve, y no importa en qué orden se marquen. Quien apuesta quiere saber contra cuántas combinaciones compite. La cuenta ingenua, $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$, da más de diez mil millones, y es falsa por mucho. ¿Qué está contando de más, y cuántas apuestas distintas hay de verdad?

Las tres fórmulas de la sección anterior cuentan configuraciones en las que el orden importa: una clave, un podio, una palabra. Esta sección cuenta las que no lo tienen: un subconjunto, una mano de cartas, un turno de guardia. Se llaman *combinaciones*, y la idea de todas las demostraciones es la misma: contar primero con orden, que ya se sabe hacer, y después descontar las repeticiones que el orden introduce.

1.5.1 Combinaciones sin repetición

Definición. Dado un conjunto X con $|X| = n$, una **combinación** de elementos de X tomados de k en k es un subconjunto $A \subseteq X$ con $|A| = k$. Es decir, una selección de k elementos de X sin permitir repeticiones y sin tener en cuenta el orden.

Teorema (binomial). Si $|X| = n$ y $0 \leq k \leq n$, el número de subconjuntos $A \subseteq X$ con $|A| = k$ es

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

donde $\binom{n}{k}$ se llama **número combinatorio** « n sobre k ». También se escribe $C_{n,k}$.

LA IDEA: CONTAR CON ORDEN Y DIVIDIR POR EL ORDEN

En una línea: se cuenta de más a propósito, con orden, y después se divide por exactamente las veces que se ha contado de más. Eso es la demostración entera; lo que sigue son dos párrafos de detalle.

La imagen es la de la lotería. El producto $49 \cdot 48 \cdots 44$ cuenta apuestas *ordenadas*: la apuesta $\{3, 17, 22, 30, 41, 45\}$ aparece una vez por cada orden en que se pueda escribir, y hay $6! = 720$ órdenes. Cada apuesta real está contada 720 veces. Si uno se cree que el sobreconteo es siempre el mismo número, ya sabe el resultado antes de demostrarlo:

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{720} = 13\,983\,816.$$

Casi catorce millones, frente a más de diez mil millones de ordenaciones. La imagen predice el enunciado: un cociente de un producto de k factores descendentes entre $k!$, que es exactamente $n! / (k!(n-k)!)$.

Dónde está la dificultad, que no está donde parece. El movimiento «cuenta con orden, divide por el orden» solo es lícito si **todas las clases tienen el mismo tamaño**; si unas apuestas se contarán 720 veces y otras 360, dividir por 720 sería absurdo. Aquí sí lo tienen, $k!$, porque los k elementos son distintos y sus $k!$ ordenaciones son de verdad distintas. Toda la prueba consiste en asegurar esa igualdad de tamaños. En la subsección siguiente, con repeticiones permitidas, esa igualdad se rompe, y por eso allí la fórmula ya no saldrá dividiendo.

Paso 1: se cuenta con orden, que es lo que ya se sabe hacer. Se consideran las variaciones sin repetición de longitud k sobre X : las k -tuplas $(x_1, \dots, x_k)$ con todos los x_i distintos. Por el teorema de las inyecciones, hay

$$n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

de ellas.

Paso 2: se agrupan las tuplas por el subconjunto que forman, y las clases resultan todas del mismo tamaño (el núcleo de la prueba). Se agrupan las tuplas según el subconjunto que forman sus elementos. Cada subconjunto $A \subseteq X$ con $|A| = k$ genera exactamente $k!$ tuplas distintas: todas las formas de ordenar sus k elementos, que son las permutaciones de A . Que sean $k!$ y no menos es la consecuencia de que los

elementos de A son distintos dos a dos, y es el punto en el que descansa el teorema. Y dos subconjuntos distintos generan tuplas distintas, porque una tupla determina su conjunto de componentes: las clases son, en efecto, disjuntas.

Paso 3: se despeja. El conjunto de las $n!/(n-k)!$ tuplas queda partido en clases disjuntas, una por cada subconjunto de tamaño k , y todas las clases tienen $k!$ elementos. Por el principio de adición,

$$\frac{n!}{(n-k)!} = (\text{número de subconjuntos}) \cdot k!,$$

y despejando se obtiene la fórmula. ■

Dos convenios que usan todos los ejercicios: $\binom{n}{0} = 1$, porque el único subconjunto de tamaño 0 es el vacío (y $0! = 1$ hace que la fórmula lo dé), y $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$, porque un conjunto de n elementos no tiene subconjuntos de más de n elementos. También tomamos $\binom{n}{k} = 0$ para $k < 0$. Una selección ordenada de longitud 0 es la tupla vacía, única: los productos vacíos valen 1.

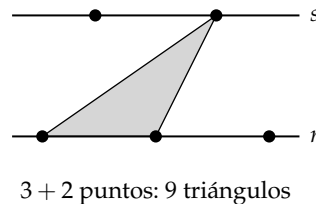
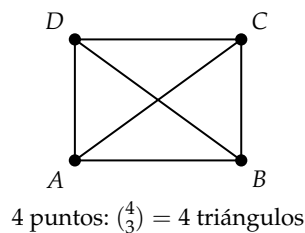
EXPLÍCATE. Sin usar la fórmula, solo contando subconjuntos: ¿por qué $\binom{n}{1} = n$ y $\binom{n}{n} = 1$? ¿Y por qué $\binom{n}{n-1} = n$?

CONEXIÓN: TEORÍA DE LA PROBABILIDAD E INFERENCIA

Los números combinatorios son los coeficientes de la distribución binomial, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, y de la hipergeométrica, que cuenta muestras sin reemplazamiento con $\binom{N}{n}$ en el denominador. Ambas se usaron en Inferencia estadística el cuatrimestre pasado. La razón de que aparezca $\binom{n}{k}$ en la binomial es exactamente este teorema: hay $\binom{n}{k}$ maneras de elegir en qué k de los n ensayos ocurre el éxito.

Ejemplo (triángulos con vértices en puntos dados). **El problema.** Se marcan varios puntos en el plano. ¿Cuántos triángulos tienen sus tres vértices entre los puntos marcados?

El caso pequeño, a mano. Con cuatro puntos sin tres alineados hay cuatro triángulos, porque cada uno se obtiene dejando fuera uno de los cuatro puntos. En el dibujo de la izquierda son ABC , ABD , ACD y BCD .



La idea. Un triángulo queda determinado por su conjunto de vértices, sin orden: ABC y BAC son el mismo triángulo. Así que, mientras no haya tres puntos alineados, contar triángulos es contar subconjuntos de tres puntos: con n puntos hay $\binom{n}{3}$ triángulos. Con cuatro sale $\binom{4}{3} = 4$, como a mano, y con cinco, $\binom{5}{3} = 10$.

Cuando hay puntos alineados. Tres puntos de una misma recta no forman triángulo. Si entre los n puntos hay k en una misma recta, y ningún otro trío está alineado, hay que quitar

los $\binom{k}{3}$ tríos sacados de esa recta: quedan $\binom{n}{3} - \binom{k}{3}$ triángulos. Con seis puntos de los que tres están alineados, $20 - 1 = 19$.

Dos rectas paralelas. Se marcan n puntos en una recta r y m en otra recta s paralela, como en el dibujo de la derecha. Un triángulo no puede tener sus tres vértices en la misma recta, así que tiene dos en una y uno en la otra. Contando por casos disjuntos (dos en r o dos en s) y con la regla del producto en cada caso,

$$\binom{n}{2}m + n\binom{m}{2}.$$

Por el complementario sale lo mismo: de todos los tríos, $\binom{n+m}{3}$, se quitan los que están enteros en r o enteros en s , que dan $\binom{n+m}{3} - \binom{n}{3} - \binom{m}{3}$. Las dos expresiones coinciden para todo n y m , como se comprueba desarrollando. En el dibujo, $n = 3$ y $m = 2$: $3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 9$ por casos, y $10 - 1 - 0 = 9$ por el complementario. Si las rectas no son paralelas sino secantes en un punto que no está marcado, la cuenta no cambia: los únicos tríos alineados siguen siendo los de una misma recta.

Dónde se falla. En contar tríos ordenados, $n(n-1)(n-2)$, que cuenta cada triángulo $3! = 6$ veces. Y en olvidar que un trío alineado no es un triángulo: con puntos en rectas, la pregunta que decide todo es cuáles son los tríos alineados.

Ejercicios: combinaciones sin repetición

Ejercicio 1.19. Turnos de vacaciones R1.10

En una oficina trabajan 4 hombres y 6 mujeres. Se están haciendo turnos de 5 personas para cubrir el período de vacaciones.

- a) ¿Cuántos turnos diferentes podremos elegir?
 - b) ¿En cuántos de ellos no habría ningún hombre?
 - c) ¿En cuántos habría exactamente un hombre?
 - d) ¿En cuántos habría exactamente dos mujeres?
-

Resolución. Un turno es un conjunto de personas, sin orden: se cuenta con combinaciones. Cuando el enunciado fija cuántos hombres y cuántas mujeres lleva, el turno se parte en dos elecciones que no se estorban, la de los hombres entre los hombres y la de las mujeres entre las mujeres, y se multiplica.

- a) Un turno es un subconjunto de 5 elementos de un conjunto de 10: $\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252$.
- b) Sin hombres, las 5 personas se eligen entre las 6 mujeres: $\binom{6}{5} = 6$.
- c) Exactamente un hombre: se elige el hombre, $\binom{4}{1} = 4$ formas, y las otras 4 personas entre las 6 mujeres, $\binom{6}{4} = 15$ formas. Las dos elecciones son independientes, luego $4 \cdot 15 = 60$.
- d) Exactamente dos mujeres, y por tanto tres hombres: $\binom{6}{2}\binom{4}{3} = 15 \cdot 4 = 60$.

Comprobación: partiendo los 252 turnos por el número h de hombres, $h = 0, 1, 2, 3, 4$ dan $\binom{6}{5} + \binom{4}{1}\binom{6}{4} + \binom{4}{2}\binom{6}{3} + \binom{4}{3}\binom{6}{2} + \binom{4}{4}\binom{6}{1} = 6 + 60 + 120 + 60 + 6 = 252$. ■

La comprobación es más que un control. Dice que elegir cinco personas entre diez es lo mismo que decidir cuántos hombres entran y elegirlos por separado, y en general $\binom{a+b}{k} = \sum_h \binom{a}{h}\binom{b}{k-h}$, que se llama identidad de Vandermonde. Se demuestra exactamente así, partiendo los subconjuntos por cuántos elementos toman de cada grupo.

Se falla en c) al contar «exactamente un hombre» eligiendo el hombre, 4 formas, y las otras cuatro personas entre las nueve que quedan, $\binom{9}{4} = 126$: salen 504 turnos, más que los 252 que hay en total, y ese exceso ya delata el error. Las nueve que quedan incluyen tres hombres, así que la cuenta admite turnos con varios hombres, y además cuenta cada uno tantas veces como hombres tiene, una por cada hombre que se pueda tomar como «el elegido». Si un resultado supera el total, se ha contado algo varias veces.

Ejercicio 1.20. *Cinco personas de un taller* R1.13

En un taller trabajan 6 hombres y 4 mujeres. Según el número de sus fichas se han escogido al azar 5 personas.

- a) ¿De cuántas formas podemos hacer la elección?
- b) ¿En cuántos casos no habría ninguna mujer?
- c) ¿En cuántos casos no habría ningún hombre?

Resolución. a) $\binom{10}{5} = 252$, como antes: el reparto entre hombres y mujeres no cambia el total.
 b) Sin mujeres, los cinco se eligen entre los seis hombres: $\binom{6}{5} = 6$.
 c) Sin hombres haría falta elegir cinco personas entre cuatro mujeres, y eso es imposible: $\binom{4}{5} = 0$. La frase «según el número de sus fichas» solo dice que la elección se hace sin mirar a quién se elige, es decir, que todas las selecciones cuentan igual. ■

Ejercicio 1.21. *Guardias con y sin Juan* R1.22

En la planta de un hospital hay 16 enfermeros que deben distribuirse en turnos para hacer guardias.

- a) ¿Cuántas guardias diferentes de 4 enfermeros pueden formar?
- b) Un enfermero se llama Juan. ¿En cuántas de esas guardias estará Juan?
- c) ¿En cuántas de las guardias no estará Juan?

Resolución. a) $\binom{16}{4} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{4!} = 1820$.

b) Fijado Juan en la guardia, faltan 3 enfermeros elegidos entre los otros 15: $\binom{15}{3} = 455$.

c) Sin Juan, los 4 se eligen entre 15: $\binom{15}{4} = 1365$.

Y en efecto $455 + 1365 = 1820$: toda guardia o contiene a Juan o no lo contiene. ■

Otra vía (la identidad de Pascal, antes de enunciarla). Lo que se acaba de comprobar con números, $\binom{15}{3} + \binom{15}{4} = \binom{16}{4}$, es la identidad de Pascal de la sección siguiente, y esta demostración con Juan es exactamente la que se dará allí: los subconjuntos que contienen a un elemento fijo más los que no lo contienen.

Ejercicio 1.22. Subconjuntos de las letras de A R1.20

Considera el conjunto de letras $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

- a) ¿Cuántos subconjuntos de 5 elementos tiene A ?
 b) ¿Cuántos subconjuntos de 2 elementos tiene A ?

Resolución. a) $\binom{7}{5} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5!} = 21$.

b) $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$.

No es casualidad que coincidan: elegir los cinco elementos que entran en un subconjunto es lo mismo que elegir los dos que se quedan fuera. La aplicación $B \mapsto A \setminus B$ es una biyección entre los subconjuntos de 5 elementos y los de 2. Es la identidad de simetría $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, que se demuestra en la sección siguiente. ■

Ejercicio 1.23. Las fichas de un n -dominó R1.17

Una ficha de un n -dominó es una pieza formada por dos cuadrados unidos por un lado. Cada cuadrado puede ser blanco o contener de uno a n puntos. Por ejemplo, el dominó usual es un 6-dominó. ¿Cuántas fichas diferentes tiene un n -dominó?

Resolución. Cada cuadrado lleva un valor de $V = \{0, 1, \dots, n\}$, donde 0 es el cuadrado blanco; $|V| = n + 1$. Una ficha se puede girar, así que la ficha con valores i y j es la misma que la de valores j e i : una ficha es un par *no ordenado* de valores, con repetición permitida (las fichas dobles).

Se cuentan por casos disjuntos. Fichas con dos valores distintos: subconjuntos de 2 elementos de V , $\binom{n+1}{2}$. Fichas dobles: una por cada valor, $n + 1$. Por el principio de adición,

$$\binom{n+1}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)n}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Para $n = 6$ salen $\frac{7 \cdot 8}{2} = 28$ fichas, que son las del dominó usual. ■

La tentación es contar pares ordenados de valores, $(n+1)^2 = 49$ para el dominó usual, y dividir entre 2 porque una ficha se puede girar. Sale 24,5, que ni siquiera es entero. Una ficha con dos valores distintos aparece dos veces entre los pares ordenados, $(2, 5)$ y $(5, 2)$, pero una doble aparece una sola vez: las clases no tienen el mismo tamaño y no se puede dividir. Separar las dobles lo arregla, $(49 - 7)/2 + 7 = 28$, y es la partición en casos que se ha hecho arriba.

Otra vía (como combinación con repetición). Una ficha es una combinación con repetición de $n + 1$ valores tomados de 2 en 2, y la fórmula de la subsección siguiente da $\binom{(n+1)+2-1}{2} = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$. Coincide. Este ejercicio es el puente entre las dos subsecciones: la cuenta por casos y la fórmula general dan lo mismo.

1.5.2 Combinaciones con repetición

Definición. Sea X un conjunto con $|X| = n$. Una **combinación con repetición** de elementos de X tomados de k en k es una función

$$m : X \rightarrow \mathbb{N}_0 \quad \text{tal que} \quad \sum_{x \in X} m(x) = k,$$

donde $m(x)$ indica cuántas veces se elige x . Es decir, una selección de k elementos de X permitiendo repeticiones y sin tener en cuenta el orden.

La definición merece una lectura. Cuando no importa el orden y sí puede haber repeticiones, lo único que distingue una selección de otra es *cuántas veces* aparece cada elemento. Por eso se define como una función de multiplicidades y no como una tupla ni como un subconjunto. Diez sillas iguales repartidas en cuatro habitaciones es exactamente esto: a cada habitación, cuántas sillas le tocan, con la condición de que sumen diez.

Teorema. Sea X un conjunto con $|X| = n \geq 1$ y $k \geq 0$. El número de combinaciones con repetición de elementos de X tomados de k en k es

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}.$$

Se denota $\text{CR}_{n,k}$.

LA IDEA: LA FILA DE ESTRELLAS CON TABIQUES

La intuición falsa, primero. Lo natural es repetir el truco de la subsección anterior: contar tuplas con repetición, n^k , y dividir por $k!$ para olvidar el orden. No funciona, y conviene ver por qué antes de empezar, porque el motivo dicta la demostración. Las clases **no tienen todas el mismo tamaño**: con $X = \{a, b\}$ y $k = 2$, las tuplas son $(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)$, y mientras la selección « a y b » se reparte en dos tuplas, « a dos veces» ocupa una sola. Dividir 4 entre 2 da 2, y las selecciones son tres. Dividir presupone clases iguales; con repeticiones dejan de serlo.

La imagen que sí funciona. Como no se puede descontar, no se descuenta: se empareja con algo que ya se sabe contar. Imagine los n elementos de X como n habitaciones en fila y las k elecciones como k estrellas idénticas que hay que repartir entre ellas. Para separar las habitaciones bastan $n - 1$ tabiques. Una selección es entonces, literalmente, una fila de objetos: k estrellas y $n - 1$ tabiques colocados en algún orden, y nada más, porque las estrellas son indistinguibles entre sí y los tabiques también.

Y aquí la imagen **predice el enunciado**: si la fila tiene $k + (n - 1)$ casillas y lo único que hay que decidir es cuáles de ellas llevan estrella, la respuesta tiene que ser un número combinatorio, y no otro que $\binom{n+k-1}{k}$. Decidir dónde van los tabiques en vez de las estrellas da $\binom{n+k-1}{n-1}$, que es el mismo número: por eso el teorema enuncia las dos formas.

El corazón en una frase: todo el teorema es que *elegir con repetición es elegir sin repetición las posiciones de los tabiques*.

Paso 1: se traduce la selección a una lista de multiplicidades. Se enumera $X = \{a_1, \dots, a_n\}$. Una combinación con repetición queda determinada por los números

$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}_0^n$, donde $x_i = m(a_i)$ es el número de veces que se elige a_i , con la condición

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k.$$

Contar selecciones es, pues, contar soluciones enteras no negativas de esa ecuación.

Paso 2: se codifica cada lista como una fila de estrellas y tabiques. Se representa cada solución $(x_1, \dots, x_n)$ mediante una cadena formada por k estrellas y $n - 1$ barras: primero x_1 estrellas, luego una barra, luego x_2 estrellas, otra barra, y así hasta las x_n estrellas finales:

$$\underbrace{\star \cdots \star}_{x_1} \mid \underbrace{\star \cdots \star}_{x_2} \mid \cdots \mid \underbrace{\star \cdots \star}_{x_n}.$$

Las barras separan las estrellas en n bloques, y el tamaño del bloque i es x_i . Un bloque puede estar vacío (dos barras seguidas, o una barra al principio o al final), que corresponde a $x_i = 0$; que se permitan bloques vacíos es justo lo que hace falta para que la codificación no pierda soluciones.

Paso 3: la codificación es una biyección (el núcleo de la prueba). Aquí está todo el peso: si la correspondencia no fuera biyectiva, contar cadenas no contaría selecciones y el argumento se vendría abajo. Es inyectiva porque dos soluciones distintas difieren en algún x_i y entonces sus cadenas difieren en el tamaño del bloque i . Es sobreyectiva porque toda cadena de k estrellas y $n - 1$ barras se lee, sin ambigüedad, como una lista de n tamaños de bloque que suman k . Obsérvese que aquí no se ha descontado nada: es exactamente la maniobra que la división por $k!$ no podía hacer.

Paso 4: se cuentan las cadenas, que ya es un problema resuelto. La cadena tiene $k + n - 1$ símbolos, y queda determinada al decidir cuáles de esas $k + n - 1$ posiciones ocupan las k estrellas: es un subconjunto de k posiciones de un total de $k + n - 1$, luego hay $\binom{k+n-1}{k}$ cadenas. Elegir las posiciones de las $n - 1$ barras da lo mismo, $\binom{k+n-1}{n-1}$, y las dos expresiones coinciden por la simetría del número combinatorio. ■

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: DIVIDIR POR $k!$ TAMBIÉN CON REPETICIÓN

La alternativa. Definir el número de combinaciones con repetición como $n^k/k!$, por analogía con el caso sin repetición, donde el número de subconjuntos es el de variaciones partido por $k!$.

Su ventaja. Es la primera idea que se le ocurre a cualquiera, y da una fórmula cerrada sin construcciones auxiliares.

Qué la hunde. Que puede dar un entero equivocado, como $2^2/2! = 2$ cuando la respuesta es 3, o ni siquiera un entero, como $3^2/2! = 4,5$. La división por $k!$ presupone que cada selección se cuenta $k!$ veces entre las tuplas, y con repeticiones una selección con elementos repetidos se cuenta menos veces. El fallo no es de cálculo sino de estructura: las clases son desiguales. Lo que se adoptó en su lugar, la biyección con cadenas de estrellas y barras, es un ejemplo de la estrategia del pastor de la primera sección: no contar, emparejar con algo que ya se sabe contar.

DE DÓNDE VIENE: LAS ESTRELLAS Y BARRAS

William Feller utiliza cadenas de estrellas y barras en su tratado *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* para contar ocupaciones de casillas (volumen I, sección II.5). En física la misma cuenta aparece al repartir k bosones indistinguibles entre n estados de una partícula: la estadística de Bose–Einstein. Las partículas son las estrellas y los estados, los bloques.

Ejercicios: combinaciones con repetición

Ejercicio 1.24. *Diez sillas iguales en cuatro habitaciones* R1.23

¿De cuántas maneras distintas (en cuanto a número) se pueden repartir 10 sillas iguales en 4 habitaciones?

Resolución. Sea x_i el número de sillas que van a la habitación i . Un reparto es una solución de

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \quad x_i \in \mathbb{N}_0,$$

es decir, una combinación con repetición de las 4 habitaciones tomadas de 10 en 10: a cada silla se le asigna una habitación, sin orden entre sillas porque son iguales. Por el teorema,

$$CR_{4,10} = \binom{10+4-1}{10} = \binom{13}{10} = \binom{13}{3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{6} = 286.$$

■

Otra vía (estrellas y barras a mano). Diez estrellas y tres barras: $\star\star\star|\star|\star\star\star|\star\star$ es el reparto $(3, 1, 4, 2)$. Hay que elegir en cuáles de las 13 posiciones van las tres barras: $\binom{13}{3} = 286$. Escribir una cadena concreta es la mejor manera de convencerse de que la biyección funciona, y de acordarse de que las barras son $n - 1$ y no n .

El error más frecuente es intercambiar los papeles y calcular $CR_{10,4} = \binom{13}{4} = 715$, como si se eligieran cuatro cosas entre diez tipos. La pregunta que lo aclara es qué se repite: se repiten las habitaciones, porque varias sillas van a la misma, y las sillas no se distinguen. Las habitaciones son el conjunto X , con $n = 4$, y las sillas son las $k = 10$ elecciones. Con la cadena delante no hay confusión posible: diez estrellas, una por silla, y tres barras, una menos que habitaciones.

Ejercicio 1.25. *Bolas de dos colores en cuatro recipientes* R1.27

- ¿De cuántas maneras se pueden colocar 10 bolas iguales en 4 recipientes?
- ¿Y si se dispone de 7 bolas iguales de color rojo y de 3 bolas también iguales pero de color verde?

Resolución. a) Es el ejercicio anterior: $CR_{4,10} = \binom{13}{3} = 286$.

b) Ahora un reparto queda determinado por dos cosas: cuántas bolas rojas van a cada recipiente y cuántas verdes. Las rojas se reparten de $CR_{4,7} = \binom{10}{7} = \binom{10}{3} = 120$ maneras, y las verdes de $CR_{4,3} = \binom{6}{3} = 20$ maneras. Cualquier reparto de rojas es compatible con cualquier reparto de verdes, luego por la regla de la multiplicación hay $120 \cdot 20 = 2400$ repartos.

Obsérvese que $2400 > 286$: distinguir dos colores crea más configuraciones, porque un mismo reparto en número total, digamos $(3, 1, 4, 2)$, se puede realizar de muchas formas según cuántas de las tres bolas del primer recipiente sean rojas. ■

La idea de b) es que dos colores son dos problemas del apartado a) puestos uno al lado del otro: las rojas no ven a las verdes. Un atajo que parece natural es tratar cada par (recipiente, color) como una caja, ocho en total, y repartir diez bolas en ellas: $CR_{8,10} = \binom{17}{10} = 19\,448$. Es falso, porque esa cuenta admite repartos con cualquier número de rojas, de cero a diez, y el

enunciado fija siete. De hecho 19 448 es la suma, sobre el número r de rojas, de $CR_{4,r} \cdot CR_{4,10-r}$, y los 2400 buscados son solo el sumando $r = 7$.

Ejercicio 1.26. *Monomios de grado diez en tres variables* R1.25

Dado un monomio de tres variables $x^a y^b z^c$, se define su grado como el número $a + b + c$, donde $a, b, c \in \mathbb{N}_0$. Responder razonadamente:

- ¿Cuántos monomios distintos del tipo anterior y de grado 10 hay?
- ¿En cuántos de ellos aparecen tan solo dos de las tres variables?
- ¿En cuántos de ellos aparecen las tres variables?

Resolución. a) Un monomio $x^a y^b z^c$ de grado 10 es una terna $(a, b, c) \in \mathbb{N}_0^3$ con $a + b + c = 10$: una combinación con repetición de las tres variables tomadas de 10 en 10 (cada «unidad de grado» elige una variable). Hay

$$CR_{3,10} = \binom{12}{10} = \binom{12}{2} = 66.$$

c) Que aparezcan las tres variables es $a, b, c \geq 1$. Con $a' = a - 1, b' = b - 1, c' = c - 1$, la ecuación se convierte en $a' + b' + c' = 7$ con $a', b', c' \in \mathbb{N}_0$, cuyas soluciones son $CR_{3,7} = \binom{9}{7} = \binom{9}{2} = 36$.

b) Que aparezcan exactamente dos variables: se elige cuál falta, 3 opciones, y las otras dos tienen exponentes ≥ 1 que suman 10. Con el mismo cambio de variable, $a' + b' = 8$ tiene $CR_{2,8} = \binom{9}{8} = 9$ soluciones (en efecto: a va de 1 a 9 y b queda determinado). Total $3 \cdot 9 = 27$.

Comprobación: los monomios en que aparece una sola variable son x^{10}, y^{10}, z^{10} , tres. Y $36 + 27 + 3 = 66$. ■

Otra vía (el complementario en c)). Aparecen las tres variables si y solo si no falta ninguna. Los monomios en que falta x son las soluciones de $b + c = 10$, $CR_{2,10} = 11$, e igual para y y z ; los que carecen de dos variables son los tres puros. Por inclusión-exclusión, faltan variables en $3 \cdot 11 - 3 = 30$ monomios (la intersección triple, sin ninguna variable, es imposible con grado 10). Luego aparecen las tres en $66 - 30 = 36$. Coincide.

QUÉ DEJA. Las restricciones «al menos uno de cada» se absorben con un cambio de variable que baja el total; las restricciones «exactamente estas variables» se cuentan eligiendo primero cuáles.

Ejercicio 1.27. *Helados de tres capas* R1.24

Con los sabores plátano, chocolate, limón, fresa y vainilla se quieren formar helados de tres capas, separadas unas de las otras por galletas. Se pregunta:

- ¿Cuántos helados distintos se podrán formar?
- ¿Cuántos de ellos tendrán vainilla en alguna de sus capas?
- ¿Cuántos de ellos tendrán un sabor repetido solo una vez?

Resolución. El enunciado no dice explícitamente si dos helados con los mismos sabores en distinto orden son distintos. Como las capas están apiladas y separadas por galletas, un helado tiene una capa inferior, una central y una superior, y lo natural es que el orden cuente. Se resuelve con esa lectura y se indica después la otra.

a) Cada una de las tres capas toma uno de los 5 sabores, con repetición permitida: $VR_{5,3} = 5^3 = 125$.

b) Los helados sin vainilla usan solo los otros cuatro sabores: $4^3 = 64$. Luego tienen vainilla en alguna capa $125 - 64 = 61$.

c) Un sabor repetido solo una vez: exactamente dos capas llevan el mismo sabor y la tercera otro distinto. Se elige el sabor repetido, 5 opciones; el sabor de la capa restante, 4 opciones; y qué dos de las tres capas llevan el repetido, $\binom{3}{2} = 3$ opciones. Total $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Comprobación: los helados con tres sabores distintos son $V_{5,3} = 60$, los de un solo sabor son 5, y $60 + 60 + 5 = 125$. ■

Otra vía (si el orden de las capas no cuenta). Entonces un helado es una combinación con repetición de 5 sabores tomados de 3 en 3: a) $CR_{5,3} = \binom{7}{3} = 35$; b) sin vainilla, $CR_{4,3} = \binom{6}{3} = 20$, luego con vainilla $35 - 20 = 15$; c) un sabor repetido exactamente dos veces y otro distinto: $5 \cdot 4 = 20$ (comprobación: $\binom{5}{3} = 10$ con tres sabores distintos, 5 con uno solo, y $10 + 20 + 5 = 35$). Conviene decir siempre qué lectura se toma y por qué; con esa frase, cualquiera de las dos cuentas es correcta.

1.5.3 Permutaciones con repetición

Teorema (permutaciones con repetición). Sean $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ con $n_1 + \dots + n_k = n$. El número de palabras de longitud n con n_i símbolos iguales del tipo i es

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

Se denota $PR_n^{n_1, \dots, n_k}$.

La idea. Una palabra con letras repetidas es difícil de contar mirando las letras, y fácil de contar mirando las *posiciones*: escribir la palabra MATEMATICA es lo mismo que decidir qué tres de las diez casillas se llevan la A, qué dos de las siete que quedan se llevan la M, y así hasta agotar las casillas. Con eso el problema deja de ser de palabras y pasa a ser un reparto de posiciones en k elecciones sucesivas, que es justo lo que la regla del producto sabe contar. El caso más pequeño ya lo muestra: con las letras A, A y B hay tres palabras, AAB, ABA y BAA, porque lo único que hay que decidir es en cuál de las tres casillas va la B; la fórmula da $3!/(2!1!) = 3$. **El corazón en una frase: no se ordenan letras, se reparten casillas.** La cascada de factoriales que aparece al final no aporta ninguna idea nueva; es la misma cuenta escrita en limpio.

Paso 1: se reparten las posiciones, un símbolo cada vez (el núcleo de la prueba).

Una palabra queda determinada por qué posiciones ocupa cada símbolo, y esa es la traducción que hace el teorema. Se eligen las posiciones del símbolo 1: $\binom{n}{n_1}$ opciones. Entre las $n - n_1$ posiciones restantes se eligen las del símbolo 2: $\binom{n-n_1}{n_2}$ opciones, *sea cual sea la elección anterior* —y esa independencia del número de opciones respecto de la elección previa es lo que autoriza a multiplicar—. Se continúa hasta el símbolo k , al que le quedan exactamente n_k posiciones. Por la regla del producto, el total es

$$\binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \cdots \binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k}.$$

Paso 2: la cascada de factoriales se cancela. Al escribir cada binomio con factoriales,

los denominadores y numeradores intermedios se cancelan en cadena:

$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdots \frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!0!} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

El último factor termina en $0!$ porque, al llegar al símbolo k , no sobra ninguna posición: ahí es donde se usa la hipótesis $n_1 + \cdots + n_k = n$, y sin ella la cadena no se cerraría. ■

Ejemplo (anagramas). Las palabras que se forman con las letras de MATEMATICA, que tiene diez letras con tres A, dos M, dos T, una E, una I y una C, son

$$\text{PR}_{10}^{3,2,2,1,1,1} = \frac{10!}{3!2!2!} = \frac{3\,628\,800}{24} = 151\,200.$$

Si las diez letras fueran distintas habría $10!$ palabras; las tres A se pueden intercambiar entre sí de $3!$ formas sin cambiar la palabra, y lo mismo las dos M y las dos T. Esa es la otra lectura de la fórmula: $n!$ dividido por las permutaciones internas de cada grupo de símbolos iguales, y aquí sí se puede dividir porque cada palabra se cuenta exactamente $n_1! \cdots n_k!$ veces.

EXPLÍCATE. En el ejemplo, ¿por qué aquí sí vale «contar con orden y dividir» y en las combinaciones con repetición no valía? Piensa en qué tamaño tienen las clases en cada caso.

Ejemplo (etiquetas y bloques). El problema. Se colocan en una estantería varios libros de cada materia. Según cómo se plantee, los libros de una misma materia se distinguen o no, y tienen que ir juntos o no. Son cuatro problemas distintos, y conviene ver de una vez qué cambia de uno a otro.

El caso pequeño, a mano. Dos libros de Álgebra, a_1 y a_2 , y dos de Geometría, g_1 y g_2 .

- *Sin distinguir los libros de una materia.* Lo que se ve en la estantería es una palabra con dos A y dos G: AAGG, AGAG, AGGA, GAAG, GAGA y GGAA. Son seis, que es $\frac{4!}{2!2!}$.
- *Distinguiéndolos.* Cuatro libros distintos se ordenan de $4! = 24$ maneras. Cada palabra de la lista anterior se abre en $2! \cdot 2! = 4$ ordenaciones: AGAG, por ejemplo, en $a_1g_1a_2g_2$, $a_1g_2a_2g_1$, $a_2g_1a_1g_2$ y $a_2g_2a_1g_1$.
- *Agrupados por materia y distinguiéndolos.* Primero se decide el orden de los bloques, Álgebra delante o detrás ($2!$), y después el orden dentro de cada bloque ($2! \cdot 2!$): 8 colocaciones.
- *Agrupados y sin distinguir.* Solo quedan AAGG y GGAA: 2.

La idea. Puestos en una tabla, los cuatro números muestran que las dos decisiones actúan por separado:

	sin agrupar	agrupados por materia
sin distinguir	$6 = \frac{4!}{2!2!}$	$2 = 2!$
distinguiendo	$24 = 4!$	$8 = 2! \cdot 2! \cdot 2!$

En las dos columnas, pasar de no distinguir a distinguir multiplica por $2! \cdot 2! = 4$. Es la razón de los anagramas: poner etiquetas a los libros de cada materia abre cada colocación sin etiquetas en exactamente $2! \cdot 2!$ colocaciones, ni más ni menos, estén agrupados o no. Agrupar, en cambio, sustituye la palabra entera por el orden de los bloques, que es una permutación de las materias.

La cuenta general. Con k materias, n_i libros de la materia i y $n = n_1 + \cdots + n_k$ libros en total, la tabla es

	sin agrupar	agrupados por materia
sin distinguir	$\frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}$	$k!$
distinguiendo	$n!$	$k! n_1! \cdots n_k!$

Se lee así: la fila de abajo es la de arriba multiplicada por los órdenes internos, $n_1! \cdots n_k!$, y la columna de la derecha cambia la palabra de n letras por la de k bloques.

Una variante que parece nueva y no lo es. Si los libros se distinguen pero dentro de cada materia tienen que quedar en orden alfabético, sin estar agrupados, hay tantas colocaciones como sin distinguirlos. Con a_1 antes que a_2 y g_1 antes que g_2 son $a_1 a_2 g_1 g_2$, $a_1 g_1 a_2 g_2$, $a_1 g_1 g_2 a_2$, $g_1 a_1 a_2 g_2$, $g_1 a_1 g_2 a_2$ y $g_1 g_2 a_1 a_2$: seis, como las palabras. De las $n_i!$ maneras de ordenar los libros de la materia i solo una respeta el alfabeto, así que fijar el orden interno equivale a borrar las etiquetas. Agrupados y en orden alfabético, quedan $k!$.

Dónde se falla. En olvidar el orden de los bloques en la casilla de agrupados y distinguidos: $2! \cdot 2! = 4$ en vez de 8. En creer que no distinguir los libros obliga a juntarlos: 2 en vez de 6. Y en multiplicar por los órdenes internos cuando el enunciado ya los fija, por ejemplo con el orden alfabético: 8 en vez de 2.

CONEXIÓN: EL COEFICIENTE MULTINOMIAL

El mismo número $\frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}$ es el coeficiente de $x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}$ en $(x_1 + \cdots + x_k)^n$, por la misma razón por la que $\binom{n}{k}$ es el coeficiente del binomio de la sección siguiente: al desarrollar el producto de n factores hay que decidir de cuáles se toma cada variable. Y es también el número de formas de partir un conjunto de n elementos en k bloques etiquetados de tamaños $n_1, \dots, n_k$, que es como reaparece en la distribución multinomial de Probabilidad.

CONEXIÓN: DE CONTAR OCUPACIONES A CALCULAR PROBABILIDADES

En un modelo probabilístico con n elecciones independientes entre k resultados, una realización completa es una palabra de longitud n . El vector $(n_1, \dots, n_k)$ sólo recuerda cuántas veces aparece cada resultado. Son dos objetos distintos: una palabra concreta y el resumen de sus ocupaciones.

Si cada resultado tiene probabilidad $p_i > 0$, toda palabra con esas ocupaciones tiene probabilidad $p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$. Hay $n!/(n_1! \cdots n_k!)$ palabras distintas con el mismo resumen. Sus sucesos son disjuntos, así que sumar sus probabilidades da

$$\mathbb{P}(N_1 = n_1, \dots, N_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!} p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}, \quad \sum_i n_i = n.$$

La distribución multinomial contiene, por tanto, un recuento y un peso probabilístico. La fórmula combinatoria cuenta las palabras; la independencia justifica multiplicar las probabilidades de las elecciones.

Por ejemplo, al lanzar tres monedas equilibradas hay $2^3 = 8$ palabras equiprobables, pero sólo cuatro números posibles de caras: 0, 1, 2, 3. Las ocupaciones tienen probabilidades $1/8, 3/8, 3/8, 1/8$, porque corresponden a 1, 3, 3, 1 palabras. Contar cuatro ocupaciones no autoriza a asignar probabilidad $1/4$ a cada una.

La fórmula de estrellas y barras responde a otra pregunta: cuántos vectores $(n_1, \dots, n_k)$ no negativos suman n . La respuesta es $\binom{n+k-1}{k-1}$, sin asignarles probabilidades. Geométricamente son los puntos enteros de $\sum_i n_i = n, n_i \geq 0$; al dividir por $n > 0$ se sitúan en el simplex $\sum_i q_i = 1, q_i \geq 0$ que también aparece al describir distribuciones. Este paso de estados detallados a ocupaciones es útil tanto en probabilidad como en modelos de partículas; el modelo debe especificar qué estados considera equiprobables.

1.5.4 Todos los subconjuntos

Teorema. Si $|X| = n$, entonces $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$ y

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

La idea, en una línea: el teorema no es un resultado nuevo, es el mismo conjunto $\mathcal{P}(X)$ contado de dos maneras —de golpe, decidiendo para cada elemento si entra o no; y por tamaños, agrupando los subconjuntos según cuántos elementos tienen— y la identidad es lo que sale de igualar las dos cuentas. Es la técnica del doble recuento, la misma que reaparecerá en el lema del apretón de manos del capítulo 2.

Con $n = 3$, a mano. Los subconjuntos de $X = \{a, b, c\}$ se cuentan de golpe decidiendo, para cada uno de los tres elementos, si entra o no: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ maneras. Contados por tamaños son $\emptyset$ (uno); $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ (tres); $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ (tres); y $\{a, b, c\}$ (uno). Es decir, $\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8$. Las dos cuentas miden el mismo conjunto y por eso coinciden. La demostración escribe esto mismo para un n cualquiera.

La igualdad $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$ ya se probó en la sección 1.2, con las funciones características. Para la suma, se parte $\mathcal{P}(X)$ según el tamaño de cada subconjunto:

$$\mathcal{P}(X) = \bigsqcup_{k=0}^n \{A \subseteq X : |A| = k\},$$

unión disjunta porque cada subconjunto tiene un único tamaño, y todos los tamaños posibles van de 0 a n . El bloque k tiene $\binom{n}{k}$ elementos por el teorema binomial de la sección 1.5 —el que cuenta subconjuntos, no el binomio de Newton de la sección siguiente—, y el principio de adición da $|\mathcal{P}(X)| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$. Igualando con 2^n se obtiene la identidad. ■

LA IDEA: LAS CUATRO FÓRMULAS EN UNA TABLA

Todo lo contado en las dos últimas secciones cabe en una tabla con dos preguntas: ¿importa el orden? y ¿se puede repetir?

	con repetición	sin repetición
importa el orden	$\text{VR}_{n,k} = n^k$	$\text{V}_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$
no importa el orden	$\text{CR}_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$	$\text{C}_{n,k} = \binom{n}{k}$

Y fuera de la tabla, las permutaciones con repetición, $\text{PR}_n^{n_1, \dots, n_k}$, que son palabras con un inventario de letras fijado de antemano. La dificultad nunca está en la tabla: está en reconocer en qué casilla cae el problema y en tratar las restricciones adicionales por casos o por el complementario.

1.6 Números combinatorios y Teorema del Binomio

LA PREGUNTA

En 1654 dos jugadores tienen que interrumpir una partida a varias rondas antes de que acabe, y quieren repartirse la apuesta de forma justa según lo que le falta ganar a cada uno. La pregunta llegó a Pascal, que se la escribió a Fermat, y de ese intercambio de cartas nació la teoría de la probabilidad. Lo que Pascal necesitó para responder fue una tabla de números combinatorios y sus relaciones entre sí. ¿Qué relaciones son esas, y por qué una tabla de subconjuntos decide cómo repartir dinero?

1.6.1 Identidades básicas

Proposición (simetría). Para $n \geq 0$ y $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Se obtiene de la definición: $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$. Y tiene una demostración sin fórmulas, que es la que conviene recordar: la aplicación $A \mapsto X \setminus A$ es una biyección entre los subconjuntos de k elementos y los de $n-k$ elementos de X , porque tomar el complementario dos veces devuelve el conjunto de partida. Elegir quién entra es lo mismo que elegir quién se queda fuera. ■

Proposición (identidad de Pascal). Para $n \geq 1$ y $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Se cuentan los subconjuntos de tamaño k de $\{1, \dots, n\}$ separando en dos clases según contengan o no al elemento n . Los que no lo contienen son subconjuntos de tamaño k de $\{1, \dots, n-1\}$: hay $\binom{n-1}{k}$. Los que sí lo contienen quedan determinados por sus otros $k-1$ elementos, que forman un subconjunto de tamaño $k-1$ de $\{1, \dots, n-1\}$: hay $\binom{n-1}{k-1}$. Las dos clases son disjuntas y cubren todos los subconjuntos, luego por el principio de adición suman $\binom{n}{k}$. ■

Es exactamente la cuenta de las guardias con y sin Juan de la sección anterior: $\binom{16}{4} = \binom{15}{4} + \binom{15}{3}$.

LA IDEA: EL TRIÁNGULO

La identidad de Pascal dice que cada número combinatorio es la suma de los dos que

tiene encima cuando se disponen en triángulo, con $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ en los bordes:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
 \end{array}$$

La fila n contiene $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$. La simetría es que cada fila se lee igual del derecho y del revés; la suma de la fila n es 2^n , que es el teorema de todos los subconjuntos. Con el triángulo se calculan números combinatorios pequeños sin factoriales, y es la herramienta con la que Pascal resolvió el problema de la partida interrumpida: los números de la fila cuentan de cuántas maneras puede terminar la partida con cada resultado.

DE DÓNDE VIENE: UN TRIÁNGULO CON MUCHOS NOMBRES

El triángulo se conocía siglos antes de Pascal: aparece en obras de matemáticos indios, persas y chinos entre los siglos X y XIII, y en Italia se llama triángulo de Tartaglia. Pascal lo estudió sistemáticamente en su *Traité du triangle arithmétique* de 1654, escrito el mismo año de su correspondencia con Fermat, y ahí demostró sus propiedades por inducción, que es una de las primeras apariciones explícitas de ese método. El nombre que quedó en la mayor parte de Europa es el suyo.

1.6.2 Binomio de Newton

Teorema (del binomio). Para $a, b \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

La idea, en una frase: el binomio no es una fórmula que haya que recordar, es un problema de contar disfrazado. **Multiplicar n paréntesis es elegir una letra en cada uno**, y el coeficiente de $a^{n-k} b^k$ cuenta de cuántas maneras se pueden elegir *cuáles* k paréntesis aportan la b : eso es elegir un subconjunto de k factores entre n , y por eso el coeficiente es $\binom{n}{k}$ y no cualquier otro número.

Con $n = 3$ se puede hacer entero a mano. Al multiplicar $(a + b)(a + b)(a + b)$ sin agrupar nada salen $2^3 = 8$ productos, uno por cada manera de elegir letra en cada paréntesis:

$$aaa, \quad aab, \quad aba, \quad abb, \quad baa, \quad bab, \quad bba, \quad bbb.$$

Los que llevan una sola b son aab, aba y baa , uno por cada paréntesis que puede aportar esa b , y los tres valen a^2b : el coeficiente de a^2b es $3 = \binom{3}{1}$. Agrupando todos, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, y los coeficientes 1, 3, 3, 1 son la fila 3 del triángulo de Pascal.

Se desarrolla $(a + b)^n$ como producto de n factores iguales a $(a + b)$:

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b) \cdots (a + b)}_{n \text{ factores}}.$$

Al multiplicar, cada término del resultado se obtiene eligiendo en cada uno de los n factores una de sus dos letras, a o b , y multiplicando las n letras elegidas. Para que salga $a^{n-k}b^k$ hay que elegir b en exactamente k de los factores y a en los $n - k$ restantes. El término $a^{n-k}b^k$ aparece, pues, una vez por cada subconjunto de k factores de los n , y hay $\binom{n}{k}$ de ellos. Ese es su coeficiente. ■

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: DEMOSTRARLO POR INDUCCIÓN

La alternativa. Probar el teorema por inducción sobre n , usando la identidad de Pascal: si vale para $n - 1$, se multiplica $(a + b)^{n-1}$ por $(a + b)$ y se agrupan los términos con el mismo exponente, y los coeficientes que salen son $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$.

Su ventaja. Es completamente mecánica y no exige interpretar nada.

Qué le falta. Que no explica *por qué* los coeficientes cuentan subconjuntos: solo comprueba que la fórmula se propaga. La demostración por elección de factores, que es la que se ha dado arriba, dice de dónde sale cada coeficiente, y es la que se generaliza al multinomio sin cambiar una palabra. Las dos son correctas; se elige la que enseña más.

Corolario. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ y $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ para $n \geq 1$.

La primera es el binomio con $a = b = 1$, y coincide con el teorema de todos los subconjuntos. La segunda es el binomio con $a = 1, b = -1$: $(1 - 1)^n = 0^n = 0$ si $n \geq 1$. ■

La segunda identidad es la que cerró la demostración del principio de inclusión–exclusión general de la sección 1.3.4, donde se había dejado pendiente. Con ella el capítulo queda sin cabos sueltos.

Ejemplo (la partida interrumpida). **El problema.** Ana y Blas, igual de hábiles, juegan una partida a varias rondas; cada ronda la gana uno de los dos con probabilidad $1/2$, sin que influyan las rondas anteriores, y gana la apuesta el primero que llegue a un número fijado de rondas ganadas. La partida se interrumpe cuando a Ana le faltan 2 rondas y a Blas 3. ¿Cómo se reparte la apuesta de forma justa?

La idea. Lo justo es repartir en proporción a la probabilidad que tiene cada uno de ganar si la partida hubiera seguido. La dificultad es que la partida puede terminar en dos, tres o cuatro rondas más, y esos finales no son igual de probables. La salida es imaginar que se juegan siempre cuatro rondas, aunque la partida quede decidida antes. Cuatro rondas, que son $2 + 3 - 1$, bastan para decidirla: si Ana gana al menos dos, Blas gana como mucho dos y no llega a sus tres; si Ana gana como mucho una, Blas gana al menos tres. Jugar rondas de más no cambia quién gana.

La cuenta. Las $2^4 = 16$ sucesiones de ganadores de cuatro rondas son igual de probables, y cada una queda determinada por el subconjunto de rondas que gana Ana. Ana se lleva la

apuesta en las que gana al menos dos:

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 6 + 4 + 1 = 11.$$

A Ana le corresponden 11/16 de la apuesta y a Blas, 5/16. Los números 1, 4, 6, 4, 1 que se han sumado son la fila 4 del triángulo.

En general, si a Ana le faltan r rondas y a Blas s , se imaginan $r + s - 1$ rondas, y la parte de Ana es

$$\frac{1}{2^{r+s-1}} \sum_{k=r}^{r+s-1} \binom{r+s-1}{k},$$

que se lee así: la suma de un tramo de la fila $r + s - 1$ del triángulo, dividida entre la suma de la fila entera, que es 2^{r+s-1} . Esta es la respuesta a la pregunta que abría la sección: una tabla de subconjuntos decide el reparto porque cada final de la partida es un subconjunto de rondas, las que gana Ana, y todos esos finales son igual de probables.

Dónde se falla. En contar los finales tal como ocurrirían, de dos, tres o cuatro rondas, como si fueran igual de probables. Son diez: seis en los que gana Ana (AA, ABA, BAA, ABBA, BABA, BBAA) y cuatro en los que gana Blas (BBB, AB BB, BAB B, BBAB), y repartir 6 a 4 es injusto con Ana. El final AA, por ejemplo, tiene probabilidad 1/4, y el final ABBA, solo 1/16. Completar hasta cuatro rondas es precisamente lo que iguala las probabilidades, y así se recupera $4/16 + 2 \cdot 2/16 + 3 \cdot 1/16 = 11/16$.

Ejercicios: números combinatorios

Ejercicio 1.28. Subconjuntos de cardinal impar R1.21

¿De cuántas formas diferentes se puede elegir un subconjunto de cardinal impar de un conjunto de 10 elementos?

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. Es la suma $\binom{10}{1} + \binom{10}{3} + \dots + \binom{10}{9}$. Compara las dos identidades del corolario.
2. Hay también una biyección directa entre los subconjuntos pares y los impares: fija un elemento y mételo o sácalo.

Resolución. Sean I la suma de los $\binom{10}{k}$ con k impar y P la de los k pares. Por el corolario, $P + I = 2^{10}$ y $P - I = \sum (-1)^k \binom{10}{k} = 0$. Luego $P = I = 2^9 = 512$. Hay 512 subconjuntos de cardinal impar. ■

Otra vía (una biyección entre pares e impares). Fijado un elemento x_0 del conjunto, la aplicación que a cada subconjunto A le asigna $A \cup \{x_0\}$ si $x_0 \notin A$ y $A \setminus \{x_0\}$ si $x_0 \in A$ cambia el cardinal en una unidad, luego lleva pares en impares y viceversa, y es su propia inversa: aplicada dos veces devuelve A . Es una biyección entre los subconjuntos pares y los impares, así que hay tantos de unos como de otros, $2^{10}/2 = 512$. Esta vía vale para cualquier $n \geq 1$ y no usa el binomio.

QUÉ DEJA. Las dos identidades del corolario, sumadas y restadas, separan los términos pares de los impares. Y cuando dos familias tienen el mismo tamaño, buscar la biyección suele ser más rápido que sumar.

REPASO INTERCALADO: CAPÍTULO 1

Preguntas cortas, a libro cerrado. Las tres primeras son de este capítulo; en los capítulos siguientes el bloque mezclará temas.

1. Da una función $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ inyectiva y no sobreyectiva. ¿Puede existir una así de $\mathbb{N}_5$ en $\mathbb{N}_5$? ¿Por qué?
2. ¿Cuántas cadenas de k estrellas y $n - 1$ barras hay, y qué cuentan?
3. Sin calcular, ¿por qué $\binom{20}{3} = \binom{20}{17}$? ¿Y por qué $\binom{20}{3} = \binom{19}{3} + \binom{19}{2}$?
4. Un número de cinco cifras distintas con los dígitos del 1 al 9: ¿variación o combinación? ¿Y un subconjunto de cinco dígitos?
5. ¿Cuántos elementos tiene $\mathcal{P}(\mathbb{N}_4)$, y cuántos de ellos tienen exactamente dos elementos?

Introducción a la teoría de grafos

ANTES DE LEER

Cuatro preguntas antes de empezar. No hace falta acertarlas: hace falta intentarlas.

1. El plano del metro de una ciudad no respeta ni las distancias ni las formas de las calles, y sin embargo sirve para ir de un sitio a otro. ¿Qué información conserva y cuál tira?
2. En una reunión, ¿puede ocurrir que exactamente tres personas hayan dado un número impar de apretones de manos?
3. Dos químicos escriben dos fórmulas con los mismos átomos y los mismos enlaces, pero dibujadas de forma distinta. ¿Cómo se decide si tienen la misma estructura de enlaces?
4. Una red de carreteras en la que quitar un solo cruce parte el país en dos. ¿Qué tiene de especial ese cruce, y cómo se detecta sin quitarlo?

Las respuestas están en las secciones 2.1, 2.2, 2.3 y 2.6.

Este capítulo es el que da el vocabulario de todo lo que sigue. Los cuatro capítulos restantes hablan de grafos, y cada uno usa las palabras que se definen aquí: vértice, arista, grado, subgrafo, isomorfismo, camino, ciclo, conexión, punto de corte, árbol, bipartito. El recorrido tiene nueve apartados y se sigue apartado por apartado.

Salvo que se indique expresamente lo contrario, trabajaremos con grafos finitos. Cuando aparezca un grafo infinito, como en el ejercicio de los grados, se avisará: algunas pruebas usan que existe un camino de longitud máxima o que el número de componentes es finito.

2.1 Grafos simples

LA PREGUNTA

En 1933 se publicó el plano del metro de Londres que el delineante Harry Beck había ideado en 1931. Simplificaba las distancias y las curvas, pero conservaba el orden de las estaciones y las conexiones entre líneas. La propuesta había sido rechazada al principio por resultar demasiado radical; al publicarse, tuvo una buena acogida y sirvió de modelo para otras redes de metro. ¿Qué es exactamente lo que ese plano conserva, y por qué con eso basta?

2.1.1 Definiciones básicas y ejemplos

Los grafos se definen aquí de una manera que sorprende la primera vez: como caso particular de un objeto de la topología combinatoria, los complejos simpliciales. Se da esa definición y después se traduce a la forma que se usa en la práctica.

Definición (complejo simplicial abstracto). Un **complejo simplicial abstracto** es un par (V, Σ) donde V es un conjunto y $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(V)$ es una familia de subconjuntos finitos de V que satisface:

- (i) $\{v\} \in \Sigma$ para todo $v \in V$;
- (ii) si $\tau \in \Sigma$ y $\emptyset \neq \sigma \subseteq \tau$, entonces $\sigma \in \Sigma$.

Los elementos de Σ se llaman **caras** (o **símplices**).

Definición. Un complejo simplicial abstracto (V, Σ) es **k -dimensional** si toda cara $\sigma \in \Sigma$ verifica $|\sigma| \leq k + 1$. Con este convenio, k -dimensional significa *dimensión a lo sumo k* : no se exige que haya una cara de cardinal $k + 1$.

Definición (grafo simple). Un **grafo simple** es un complejo simplicial abstracto 1-dimensional (V, Σ) . Las caras de cardinal 1 se llaman **vértices** y las de cardinal 2 se llaman **aristas**.

LA IDEA: QUÉ DICE LA DEFINICIÓN POR COMPLEJOS

Un complejo simplicial es una colección de «piezas» (puntos, segmentos, triángulos, tetraedros) cerrada por tomar caras: si el triángulo $\{a, b, c\}$ está, también están sus tres lados y sus tres vértices. La condición (ii) es exactamente eso. La condición (i) dice que todo elemento de V aparece como pieza de dimensión cero.

Limitar la dimensión a 1 es prohibir triángulos *rellenos* y piezas mayores: solo quedan puntos y segmentos. Tres aristas formando el borde de un triángulo sí están permitidas; lo que falta es la cara $\{a, b, c\}$. Eso es un grafo: puntos, algunos de ellos unidos por segmentos. La única información que se conserva es *qué pares de puntos están unidos*, que es lo que conserva el plano de Beck. Ni longitudes, ni posiciones, ni formas.

En la práctica se usa la descripción equivalente siguiente, que es la que aparece en todos los enunciados.

Observación (notación estándar). Un **grafo simple finito** es un par

$$G \equiv (V(G), A(G)),$$

donde $V(G)$ es un conjunto finito de vértices y $A(G)$ es un conjunto de subconjuntos de $V(G)$ de cardinal 2:

$$A(G) \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V(G), u \neq v\}.$$

Un elemento $\{u, v\} \in A(G)$ se denota uv .

Las dos presentaciones son equivalentes: dado un complejo simplicial abstracto 1-dimensional (V, Σ) con V finito, se toma $V(G) = V$, identificando cada v con la cara $\{v\}$, y $A(G)$ como la familia de caras de cardinal 2. Así, cada arista es efectivamente un par de elementos de $V(G)$. Recíprocamente, dado $(V(G), A(G))$, se toma Σ como la unión de los $\{v\}$ y de las aristas, y la condición (ii) se cumple porque los subconjuntos no vacíos de una arista $\{u, v\}$ son $\{u\}$, $\{v\}$ y la propia arista.

Observación. En un grafo simple no hay **lazos** (una arista vv , que sería un conjunto de cardinal 1) ni **aristas múltiples** (la misma arista repetida, porque $A(G)$ es un conjunto).

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: POR QUÉ DEFINIR UN GRAFO COMO COMPLEJO SIMPLICIAL

La alternativa, que es la habitual en casi todos los libros, es definir directamente $G = (V, A)$ con A un conjunto de pares no ordenados, y no mencionar complejos.

Su ventaja. Es más corta, y es la que se usa en todos los enunciados y todas las resoluciones. Nadie piensa en caras al dibujar un grafo.

Lo que se gana con la de aquí. Que el grafo aparece como el primer peldaño de una escalera: los complejos 2-dimensionales añaden triángulos, los 3-dimensionales tetraedros, y con ellos se triangulan superficies y se calcula su característica de Euler. Ese es el punto de vista de la topología combinatoria, y es el que reaparece en el capítulo de planaridad al estudiar las regiones delimitadas por las aristas. Esas regiones no son necesariamente triángulos: para describir una superficie mediante un complejo simplicial hay que triangularla. Las dos definiciones de grafo son equivalentes; se elige la que enseña de dónde viene el objeto.

Definición (orden y tamaño). Sea G un grafo simple finito. Su **orden** es $|V(G)|$ y su **tamaño** es $|A(G)|$.

EXPLÍCATE. Un grafo de orden n : ¿cuál es el mayor tamaño que puede tener, y por qué? Es un número combinatorio del capítulo anterior.

2.1.2 Algunos ejemplos

Definición (grafo completo). El **grafo completo** de orden n es el grafo K_n con $V(K_n) = \{1, \dots, n\}$ y

$$A(K_n) = \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Proposición. Para $n \in \mathbb{N}$, $|A(K_n)| = \binom{n}{2}$.

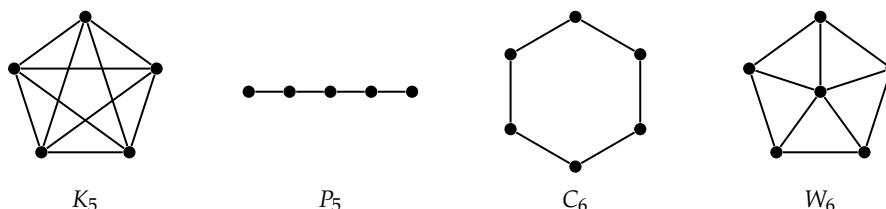
Una arista de K_n es un subconjunto de dos elementos de $\{1, \dots, n\}$, y están todas las posibles. El número de subconjuntos de dos elementos de un conjunto de n es $\binom{n}{2}$ por el teorema binomial del capítulo 1. ■

Definición (grafo camino y grafo ciclo). El **grafo camino** P_n ($n \geq 1$) se define por $V(P_n) = \{1, \dots, n\}$ y

$$A(P_n) = \{i(i+1) : 1 \leq i \leq n-1\}.$$

El **grafo ciclo** C_n ($n \geq 3$) se define como P_n más la arista $n1$.

Definición (rueda). Para $n \geq 4$, la **rueda** W_n es el grafo $W_n := K_1 + C_{n-1}$, donde la suma de grafos se define en la sección 2.6: un vértice central unido a todos los de un ciclo de $n - 1$ vértices.



EXPLÍCATE. Sin dibujar: ¿cuántas aristas tienen P_n , C_n y W_n ? Comprueba con las figuras.

2.1.3 Otros tipos de grafos: digrafos y multigrafos

Existen otros tipos de grafos, además de los simples. No serán el foco de este curso, pero conviene saber qué son para no confundirlos.

Definición (grafo dirigido). Un **grafo dirigido** (o digrafo) es un par $D = (V, E)$ donde V es un conjunto de vértices y $E \subseteq V \times V$ es un conjunto de **aristas ordenadas** (u, v) .

Definición (multigrafo). Un **multigrafo** permite aristas múltiples entre dos vértices y, según el convenio, puede permitir lazos. Una formalización común es dar un conjunto E de aristas y una aplicación

$$\iota : E \longrightarrow \{\{u, v\} : u, v \in V\},$$

donde la fibra $\iota^{-1}(\{u, v\})$ codifica la multiplicidad.

CONEXIÓN: MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

El algoritmo PageRank que ordena las páginas de la web trabaja sobre un digrafo: las páginas son los vértices y cada enlace es una arista ordenada, de la página que enlaza a la enlazada. Que la arista tenga dirección es esencial ahí, porque un enlace de la página A a la B transfiere importancia de A a B y no al revés. Los grafos simples de este capítulo son el caso en que la relación es simétrica, como la amistad o la adyacencia de dos países.

DE DÓNDE VIENE: DE LOS PUENTES A LA PALABRA «GRAFO»

El primer problema resuelto con un grafo es el de los siete puentes de Königsberg, que Euler trató en 1736 y que se verá en el capítulo 3. La palabra «grafo» es muy posterior: la introdujo Sylvester en 1878, por analogía con las fórmulas gráficas de la química, en las que los átomos son puntos y los enlaces segmentos. Y el primer libro dedicado enteramente a la teoría de grafos es el de Dénes Kőnig, de 1936, exactamente dos siglos después de Euler.

2.2 Adyacencia e incidencia

LA PREGUNTA

En una recepción con muchos invitados, cada uno estrecha la mano de algunos otros. Al final se pregunta a cada invitado a cuántas personas ha saludado. ¿Puede ser que exactamente tres personas contesten un número impar? La respuesta no depende de quién saludó a quién, ni de cuántos invitados había. ¿Por qué?

Definición (adyacencia e incidencia). Sea $G = (V, A)$ un grafo simple.

1. Dos vértices $u, v \in V$ son **adyacentes** si $uv \in A$.
2. Un vértice $v \in V$ y una arista $e \in A$ son **incidentes** si $v \in e$.
3. Dos aristas $e, f \in A$ son **adyacentes** si comparten un extremo, es decir, $e \cap f \neq \emptyset$.

Definición (grado de un vértice). Sea $G = (V, A)$ un grafo simple y $v \in V$. El **grado** de v es

$$\text{grad}_G(v) = |\{u \in V : uv \in A\}|.$$

Definición (valencia de un grafo y regularidad). Para un grafo finito con al menos un vértice, la **valencia** de G es

$$\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} \text{grad}_G(v).$$

Se dice que G es **k -regular** si $\text{grad}_G(v) = k$ para todo $v \in V(G)$.

Un aviso de vocabulario que ahorra confusiones. «Valencia» del grafo designa aquí el grado **máximo** $\Delta(G)$, mientras que en los enunciados de los ejercicios se escribe $\delta(v)$ para el grado de un vértice y $\delta(G)$ para el grado **mínimo**. En este libro grad y $\delta(v)$ son lo mismo, $\Delta(G)$ es el máximo y $\delta(G)$ el mínimo, y cada vez que aparezca «valencia» se dirá cuál de los dos es.

Lema (del apretón de manos). Sea $G = (V, A)$ un grafo simple finito. Entonces

$$\sum_{v \in V} \text{grad}_G(v) = 2|A|.$$

Se considera el conjunto de pares incidentes

$$I = \{(v, e) \in V \times A : v \in e\}$$

y se cuenta su cardinal de dos maneras. Contando por vértices: para cada v hay exactamente $\text{grad}_G(v)$ aristas incidentes, luego $|I| = \sum_{v \in V} \text{grad}_G(v)$. Contando por aristas: cada $e = \{u, v\}$ aporta exactamente dos pares incidentes, (u, e) y (v, e) , luego $|I| = 2|A|$. Igualando las dos cuentas se obtiene la identidad. ■

LA IDEA: CONTAR DOS VECES

La demostración es la técnica de **doble recuento** en estado puro, y es la que usa la mayor parte de las demostraciones de esta asignatura: se elige un conjunto de pares, se cuenta por la primera coordenada y por la segunda, y se igualan. Aquí cada apretón de manos tiene exactamente dos manos, así que la suma de todas las manos es el doble

de los apretones. Lo único que hay que hacer es escribir con precisión qué pares se están contando.

Corolario. En todo grafo simple finito, el número de vértices de grado impar es par.

La suma de todos los grados es $2|A|$, que es par. Una suma de enteros es par si y solo si el número de sumandos impares es par: los sumandos pares no cambian la paridad, y cada sumando impar la cambia. Luego hay un número par de vértices de grado impar. ■

Esa es la respuesta a la pregunta de la recepción: exactamente tres personas con un número impar de saludos es imposible, sea cual sea la fiesta. Y es la respuesta al ejercicio de las postales que viene enseguida.

2.2.1 Matrices asociadas a un grafo

Definición. Sea G un grafo simple con $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $A(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$.

1. La **matriz de incidencia** de G es $B(G) \in \mathcal{M}_{n \times m}(\{0, 1\})$ dada por $B(G)_{ij} = 1$ si $v_i \in e_j$ y 0 si no.
2. La **matriz de adyacencia** de G es $A(G) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\{0, 1\})$ dada por $A(G)_{ij} = 1$ si $i \neq j$ y $v_i v_j \in A(G)$, y 0 en otro caso.
3. La **matriz diagonal de grados** de G es $D(G) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{N}_0)$ con $D(G)_{ii} = \text{grad}_G(v_i)$ y $D(G)_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

La notación $A(G)$ se usa tanto para el conjunto de aristas como para la matriz de adyacencia. El contexto los distingue: pertenencia $uv \in A(G)$ para las aristas, entradas $A(G)_{ij}$ y productos para la matriz. Cuando el grafo esté claro, llamaremos A a la matriz.

Proposición. Para todo grafo simple finito G se cumple $B(G) B(G)^t = A(G) + D(G)$.

Sea $M = BB^t$. Por definición del producto,

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^m B_{ik} B_{jk}.$$

El sumando $B_{ik} B_{jk}$ vale 1 exactamente cuando la arista e_k es incidente a la vez en v_i y en v_j . Si $i \neq j$, en un grafo simple hay a lo sumo una arista entre v_i y v_j ; por tanto $M_{ij} = 1$ si $v_i v_j \in A(G)$ y $M_{ij} = 0$ si no, es decir, $M_{ij} = A_{ij}$. Si $i = j$, M_{ii} cuenta el número de aristas incidentes en v_i , que es $\text{grad}_G(v_i) = D_{ii}$, y además $A_{ii} = 0$. Luego $M = A + D$. ■

El caso más pequeño, a mano. En el camino abc , con las aristas en el orden $e_1 = ab$ y $e_2 = bc$, la matriz de incidencia tiene una fila por vértice y una columna por arista, y el

producto sale así:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad BB^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_A + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_D.$$

Leída en palabras, la entrada (i, j) de BB^t es el producto de la fila de v_i por la fila de v_j , y cuenta las aristas que tocan a la vez a los dos vértices. Fuera de la diagonal eso vale 1 o 0 según sean vecinos o no, y es la matriz A . En la diagonal, una fila multiplicada por sí misma cuenta las aristas que tocan a ese vértice, y es su grado. El 2 del centro es el grado de b , el único vértice que toca las dos aristas.

CONEXIÓN: ÁLGEBRA LINEAL

La matriz de adyacencia convierte un grafo en un objeto del álgebra lineal, y eso permite importar toda su maquinaria. Dos ejemplos que no entran en este curso pero que conviene conocer: la entrada (i, j) de A^k cuenta los recorridos de longitud k de v_i a v_j , y los autovalores de A permiten reconocer si el grafo es bipartito. Para contar las componentes conexas se usa otra matriz, el **laplaciano** $L = D - A$: su número es la multiplicidad del autovalor 0. La idea se ve en la identidad

$$x^t L x = \sum_{\{u,v\} \in A(G)} (x_u - x_v)^2.$$

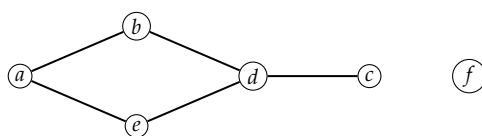
El núcleo de L está formado por los vectores constantes en cada componente: una constante libre por componente. Como L es simétrica, la dimensión del núcleo coincide con esa multiplicidad. Es el mismo movimiento que en Modelización: el PageRank es un autovector de una matriz construida a partir del digrafo de la web.

Ejercicios: grafos, grados y matrices

Ejercicio 2.1. Un grafo dado por sus aristas R2.1

Sea el grafo G tal que $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $A(G) = \{ab, ae, bd, cd, de\}$. Se pide: a) representarlo gráficamente; b) obtener su matriz de adyacencia; c) obtener su matriz de incidencia; d) obtener el subgrafo de G inducido por $\langle b, c, d, f \rangle$ y representarlo gráficamente; e) ídem con el subgrafo $G - d$.

Resolución. a) El grafo tiene seis vértices y cinco aristas. Los grados son $\text{grad}_G(a) = 2$, $\text{grad}_G(b) = 2$, $\text{grad}_G(c) = 1$, $\text{grad}_G(d) = 3$, $\text{grad}_G(e) = 2$, $\text{grad}_G(f) = 0$; suman $10 = 2 \cdot 5$, como manda el lema del apretón de manos.



b) Con los vértices en el orden a, b, c, d, e, f , la matriz de adyacencia tiene un 1 en la posición

(i, j) si $v_i v_j$ es arista:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es simétrica, tiene ceros en la diagonal y la fila de f es nula. La suma de cada fila es el grado del vértice.

c) Con las aristas en el orden $e_1 = ab$, $e_2 = ae$, $e_3 = bd$, $e_4 = cd$, $e_5 = de$, la matriz de incidencia es 6×5 , con un 1 en (i, j) si el vértice v_i es extremo de e_j :

$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cada columna tiene exactamente dos unos, los dos extremos de la arista; cada fila suma el grado.

d) El subgrafo inducido por $S = \{b, c, d, f\}$ tiene como aristas todas las de G con los dos extremos en S : bd y cd . Es el camino bdc junto con el vértice aislado f .

e) $G - d$ tiene vértices $\{a, b, c, e, f\}$ y las aristas de G que no tocan a d : ab y ae . Es el camino bae con dos vértices aislados, c y f .



■

Ejercicio 2.2. De la matriz de adyacencia al dibujo R2.2

Obtener la matriz de incidencia y una representación gráfica del grafo cuya matriz de adyacencia es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resolución. La matriz es simétrica con diagonal nula, así que es la matriz de adyacencia de un grafo simple. Se leen las aristas encima de la diagonal, fila a fila:

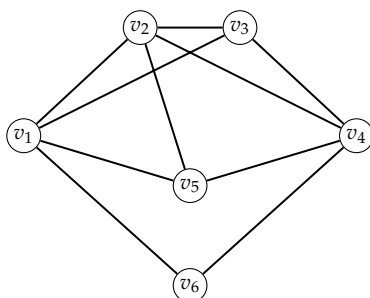
$$v_1 v_2, v_1 v_3, v_1 v_5, v_1 v_6, v_2 v_3, v_2 v_4, v_2 v_5, v_3 v_4, v_4 v_5, v_4 v_6.$$

Son diez aristas. Los grados (sumas de las filas) son 4, 4, 3, 4, 3, 2, que suman $20 = 2 \cdot 10$.

Con las aristas en ese orden, $e_1, \dots, e_{10}$, la matriz de incidencia es 6×10 :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para dibujarlo conviene notar que v_1 y v_4 no son adyacentes y ambos tienen grado 4, y que v_6 solo se une a ellos dos; eso sugiere colocarlos a izquierda y derecha.



■

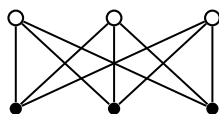
Ejercicio 2.3. Postales entre amigos R2.3

Cinco amigos salen de vacaciones al mismo tiempo y a diferentes lugares. Deciden que, al llegar a su destino, cada uno de ellos enviará una postal a tres de los restantes. ¿Es posible que cada amigo reciba postales de precisamente los tres a los que él les envió las suyas? Razonar la respuesta en caso de ser negativa, o representar mediante un grafo dicha situación en caso afirmativo. Contestar a la misma cuestión si ahora son seis los amigos que marchan de viaje.

Resolución. Si la situación es posible, se define el grafo cuyos vértices son los amigos, con una arista entre dos de ellos cuando se envían postal mutuamente. Cada amigo envía a tres y recibe de esos mismos tres, luego cada vértice tiene grado 3: sería un grafo **3-regular**.

Con cinco amigos, la suma de los grados sería $5 \cdot 3 = 15$, que es impar. Pero por el lema del apretón de manos la suma de los grados es el doble del número de aristas, luego es par. Contradicción: **con cinco amigos es imposible**.

Con seis amigos la suma sería $18 = 2 \cdot 9$: no hay obstrucción de paridad, y hace falta un ejemplo. Vale el grafo bipartito completo $K_{3,3}$: los amigos se dividen en dos grupos de tres y cada uno envía postal a los tres del otro grupo. Cada vértice tiene grado 3 y la relación es simétrica.



$K_{3,3}$: seis amigos, tres postales cada uno

■

Otra vía (otro ejemplo con seis). También sirve el prisma triangular: dos triángulos abc y $a'b'c'$ con las aristas aa', bb', cc' . Es 3-regular con seis vértices y **no** es isomorfo a $K_{3,3}$, porque tiene triángulos y $K_{3,3}$ no tiene ninguno (sección 2.3). Son los dos únicos grafos 3-regulares de orden 6 salvo isomorfismo.

Qué hemos aprendido. Las dos mitades de la pregunta piden herramientas distintas. Para decir que no basta una obstrucción: en un grafo k -regular de orden n los grados suman nk , y esa suma tiene que ser par. Para decir que sí, que la obstrucción desaparezca no basta: hay que construir el grafo. En general existe un grafo k -regular de orden n exactamente cuando nk es par y $k \leq n - 1$. Para k par se sientan los n vértices en una mesa redonda y cada uno se une a los $k/2$ más próximos por cada lado. Para k impar, n es par, y a esa construcción con $k - 1$ se le añaden las aristas entre vértices enfrentados. Con tres postales, siete amigos tampoco pueden y ocho sí.

Dónde se falla. En leer «enviar postal» como una relación con dirección. El grafo es simple porque se exige que las postales sean mutuas; sin esa exigencia el problema sería de digrafos, y cinco amigos no tendrían obstrucción ninguna: basta que cada uno escriba a los tres que le siguen en la mesa redonda. El otro fallo es el contrario, dar por posible el caso de seis porque la suma sale par, sin exhibir el grafo.

Ejercicio 2.4. Dos vértices con el mismo grado R2.4

Probar que en todo grafo finito con dos o más vértices hay siempre dos vértices con el mismo grado. ¿Ocurre lo mismo si el grafo es infinito?

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. En un grafo de orden n , ¿entre qué valores está el grado de un vértice? Son n valores para n vértices: demasiado justo.
2. Para el caso infinito, intenta construir un grafo en el que cada vértice tenga un grado distinto. Con grados finitos tienen que ser todos distintos, luego no acotados.

Resolución. Sea G de orden $n \geq 2$. Cada grado está en $\{0, 1, \dots, n - 1\}$, porque un vértice es adyacente a lo sumo a los otros $n - 1$. Son n valores posibles para n vértices, y el principio del palomar no decide todavía. Pero los valores 0 y $n - 1$ no pueden darse a la vez: un vértice de grado $n - 1$ es adyacente a todos los demás, y entonces ninguno tiene grado 0. Luego los grados toman valores en un conjunto de a lo sumo $n - 1$ elementos, $\{0, \dots, n - 2\}$ o $\{1, \dots, n - 1\}$, y por el principio del palomar dos vértices tienen el mismo grado.

Caso infinito. La conclusión falla. Se construye un grafo con vértices $v_1, v_2, v_3, \dots$ en el que v_n y v_m , con $n < m$, son adyacentes si y solo si $m \leq 2n$. El grado de v_n es el número de $m > n$ con $m \leq 2n$, que son n , más el número de $m < n$ con $n \leq 2m$, es decir $m \geq n/2$, que son $\lfloor n/2 \rfloor$. Luego

$$\text{grad}_G(v_n) = n + \lfloor n/2 \rfloor,$$

que vale 1, 3, 4, 6, 7, 9, ... y es estrictamente creciente en n . Todos los grados son finitos y distintos: no hay dos vértices con el mismo grado. ■

QUÉ DEJA. El argumento finito es el del capítulo anterior con las cajas 0 y $n - 1$ incompatibles. El contraejemplo infinito muestra que el palomar necesita que las cajas sean finitas: con infinitos grados posibles, cada vértice puede tener el suyo.

2.3 Subgrafos y morfismos

LA PREGUNTA

En 1874 el matemático Arthur Cayley quiso contar cuántas moléculas distintas pueden formarse con n átomos de carbono y los hidrógenos que les corresponden, los alcanos. Dos fórmulas dibujadas de forma distinta pueden ser la misma molécula, y dos que se parecen pueden no serlo. ¿Cuándo dos dibujos de puntos y segmentos representan «lo mismo», y qué se puede calcular de un dibujo que no cambie al redibujarlo?

2.3.1 Subgrafos y operaciones básicas

Definición (subgrafo). Sea $G = (V, A)$ un grafo simple. Un grafo $H = (V_H, A_H)$ es un **subgrafo** de G , y se escribe $H \subseteq G$, si

$$V_H \subseteq V, \quad A_H \subseteq A \cap \{\{u, v\} : u, v \in V_H, u \neq v\}.$$

Es decir, un subgrafo se obtiene quitando vértices (con sus aristas) y, además, quitando aristas sueltas. La segunda condición solo dice que las aristas que se conservan deben ser aristas de G entre vértices que se conservan.

Definición (subgrafo inducido). Sea $S \subseteq V(G)$. El **subgrafo inducido** por S es

$$G[S] = (S, \{uv \in A(G) : u, v \in S\}).$$

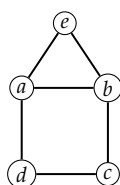
La diferencia con un subgrafo cualquiera es que el inducido se queda con *todas* las aristas de G entre los vértices de S : solo se eligen los vértices, las aristas vienen solas. También se escribe $\langle S \rangle$, notación que reaparece en el ejercicio de las matrices.

Definición (complementario). Sea $G = (V, A)$ un grafo simple. Su **complementario** es el grafo $\bar{G}$ con

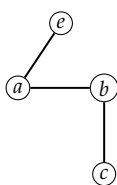
$$V(\bar{G}) = V, \quad A(\bar{G}) = \{uv : u, v \in V, u \neq v, uv \notin A\}.$$

El complementario conserva los vértices y cambia todas las aristas por las que faltaban: es el negativo fotográfico del grafo. Sirve para lo mismo que el complementario de un conjunto en el capítulo 1: cuando una propiedad es difícil de contar o de comprobar, a menudo su contraria es fácil, y $\bar{G}$ es el sitio donde mirarla.

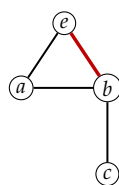
Las tres construcciones se ven de una vez en un grafo pequeño. Sea G la «casa»: el cuadrado $a b c d$ con el tejado e unido a a y a b , seis aristas en total.



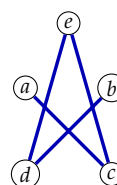
G , la casa



H : subgrafo



$G[\{a, b, c, e\}]$



$\bar{G}$

El subgrafo H y el inducido por $\{a, b, c, e\}$ tienen los mismos vértices y se diferencian en una sola arista, be (en rojo): el inducido está obligado a quedársela, porque sus dos extremos

se han conservado, y H ha decidido tirarla. El complementario tiene las $\binom{5}{2} - 6 = 4$ aristas que faltaban en la casa, ac, bd, ce y de , y puestas en fila forman el camino $a c e d b$: el negativo de la casa es un P_5 .

Definición (unión e intersección de grafos). Sean $G = (V, A)$ y $H = (V, B)$ grafos simples con el mismo conjunto de vértices V . Su **unión** es el grafo $G \cup H := (V, A \cup B)$ y su **intersección** es $G \cap H := (V, A \cap B)$.

Obsérvese que aquí se exige el *mismo* conjunto de vértices, y entonces unir e intersectar es simplemente unir e intersectar aristas: los dos grafos son dos redes tendidas sobre las mismas ciudades. En la sección 2.6 hará falta la versión que admite conjuntos de vértices distintos, y por eso allí se define aparte y con otro símbolo.

Definición (eliminación de un vértice o de una arista). Sea $G = (V, A)$ un grafo simple.

1. Dado $v \in V(G)$, $G - v := (V(G) \setminus \{v\}, \{e \in A(G) : v \notin e\})$.
2. Dado $a \in A(G)$, $G - a := (V(G), A(G) \setminus \{a\})$.

Las dos eliminaciones no son simétricas, y la asimetría importa: quitar un vértice se lleva por delante todas las aristas que lo tocaban, mientras que quitar una arista deja intactos sus dos extremos, que se quedan en el grafo aunque sea con grado menor. Son exactamente las dos averías de una red —cae un nodo, cae un cable—, y la diferencia entre las dos es el asunto de toda la sección 2.6 y del capítulo 4: por eso las dos operaciones se definen aquí juntas y por separado.

Proposición. Si $G = (V, A)$ tiene orden n , entonces $A(G) \cap A(\overline{G}) = \emptyset$ y $G \cup \overline{G} \simeq K_n$.

Por definición $V(G \cup \overline{G}) = V$. Dados $u \neq v$ en V , la arista uv pertenece exactamente a uno de los dos grafos: a G si $uv \in A$, y a $\overline{G}$ si no. Luego $A(G) \cap A(\overline{G}) = \emptyset$ y $A(G \cup \overline{G}) = A(G) \cup A(\overline{G})$ contiene todos los pares de elementos distintos de V . Al numerar los n vértices se obtiene un isomorfismo con K_n . ■

En particular $|A(G)| + |A(\overline{G})| = \binom{n}{2}$: el complementario tiene las aristas que le faltan a G para ser completo. Esa cuenta es la clave de los ejercicios sobre grafos autocomplementarios.

2.3.2 Morfismos de grafos

Definición (morfismo de grafos). Un **morfismo** f entre grafos simples G y H es una aplicación $f : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que

$$uv \in A(G) \iff f(u)f(v) \in A(H).$$

Se escribe $f : G \rightarrow H$. Si f es además una biyección, se dice que f es un **isomorfismo**. Si entre dos grafos G y H existe un isomorfismo, se escribe $G \simeq H$.

LA IDEA: UN ISOMORFISMO ES UN CAMBIO DE NOMBRES

Dos grafos son isomorfos cuando son el mismo grafo con los vértices llamados de otra manera: f es el diccionario que traduce los nombres, y la condición dice que dos vértices están unidos en G exactamente cuando sus traducciones lo están en H . Eso es lo que Cayley necesitaba para comparar estructuras de enlaces: un diccionario entre los átomos que respeta sus tipos y los enlaces. La disposición espacial de la molécula

es otra información que el grafo no registra.

Obsérvese que la definición de arriba pide la doble implicación también para morfismos que no son biyectivos. Es más exigente que la habitual en otros libros, donde un morfismo solo conserva aristas en un sentido, y hay que tenerlo en cuenta al comparar.

Proposición. Si $f : G \rightarrow H$ y $g : H \rightarrow K$ son morfismos, entonces $g \circ f : G \rightarrow K$ es un morfismo.

Sean $u, v \in V(G)$. Como f es morfismo, $uv \in A(G)$ si y solo si $f(u)f(v) \in A(H)$; y como g es morfismo, eso ocurre si y solo si $g(f(u))g(f(v)) \in A(K)$. Encadenando las dos equivalencias, $uv \in A(G)$ si y solo si $(g \circ f)(u)(g \circ f)(v) \in A(K)$. ■

Lema. Si $f : G \rightarrow H$ es un isomorfismo, entonces $f^{-1} : H \rightarrow G$ también lo es.

f^{-1} es biyectiva por serlo f . Dados $u, v \in V(H)$, hay que ver que $uv \in A(H)$ si y solo si $f^{-1}(u)f^{-1}(v) \in A(G)$. Aplicando la condición de morfismo de f a los vértices $f^{-1}(u)$ y $f^{-1}(v)$ de G : $f^{-1}(u)f^{-1}(v) \in A(G)$ si y solo si $f(f^{-1}(u))f(f^{-1}(v)) = uv \in A(H)$, que es lo que se quería. ■

Con la composición y la inversa, «ser isomorfos» es una relación de equivalencia entre grafos, exactamente como «tener el mismo cardinal» lo era entre conjuntos en el capítulo 1. Un grafo «salvo isomorfismo» es una clase de esa relación: el dibujo sin los nombres.

Definición (invariante). Una función I definida para grafos simples se llama **invariante** si $G \simeq H$ implica $I(G) = I(H)$.

Proposición. Si $f : G \rightarrow H$ es un isomorfismo, entonces para todo $v \in V(G)$ se cumple $\text{grad}_G(v) = \text{grad}_H(f(v))$.

La idea, en una frase: el grado de v no es un número suelto, es el tamaño de un conjunto —el de sus vecinos—, y un isomorfismo transporta ese conjunto entero al de vecinos de $f(v)$; contar antes o después del transporte da lo mismo. **El corazón está en que el transporte funciona en los dos sentidos**, y eso es exactamente lo que hace falta pedir para que la imagen no se quede corta.

Paso 1: el grado se reescribe como el cardinal de un conjunto. Sea $v \in V(G)$. Se definen los conjuntos de vecinos

$$I_v := \{u \in V(G) : uv \in A(G)\}, \quad J_{f(v)} := \{w \in V(H) : wf(v) \in A(H)\},$$

de modo que $|I_v| = \text{grad}_G(v)$ y $|J_{f(v)}| = \text{grad}_H(f(v))$. Se considera la restricción $f|_{I_v} : I_v \rightarrow V(H)$, que es inyectiva por serlo f . Se verá que su imagen es exactamente $J_{f(v)}$; con eso será una biyección $I_v \rightarrow J_{f(v)}$ y los dos cardinales coinciden.

Paso 2: los vecinos de v van a parar a vecinos de $f(v)$. Sea $u \in I_v$. Entonces $uv \in A(G)$ y, como f conserva la adyacencia, $f(u)f(v) \in A(H)$, es decir, $f(u) \in J_{f(v)}$.

Paso 3: y no falta ninguno, porque la inversa también es isomorfismo (el núcleo de la prueba). Esta es la mitad que de verdad usa la hipótesis completa: con una aplicación

que solo conservara la adyacencia hacia delante, la imagen podría caer dentro de $I_{f(v)}$ sin llenarlo, y los grados podrían diferir. Sea $w \in I_{f(v)}$, es decir, $wf(v) \in A(H)$. Como f es biyectiva existe un único $u \in V(G)$ con $f(u) = w$. Como f^{-1} es también isomorfismo, $wf(v) \in A(H)$ implica $uv \in A(G)$, luego $u \in I_v$ y $w = f(u) \in f(I_v)$. ■

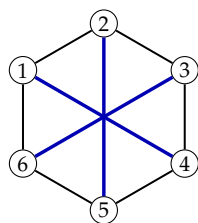
Corolario. Son invariantes: el orden, el tamaño, la valencia y el número de vértices de grado k , para cada $k \in \mathbb{N}_0$ (también para los vértices aislados).

El orden, porque un isomorfismo es una biyección entre los conjuntos de vértices. El tamaño, porque $uv \mapsto f(u)f(v)$ es una biyección entre $A(G)$ y $A(H)$ (inyectiva por serlo f en vértices, sobreyectiva porque f^{-1} es morfismo). La valencia y el número de vértices de grado k , porque f lleva cada vértice a otro del mismo grado, por la proposición. ■

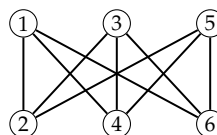
LA IDEA: PARA QUÉ SIRVEN LOS INVARIANTES

Los invariantes sirven para lo negativo: **si un invariante difiere, los grafos no son isomorfos**. Es la manera de demostrar que dos grafos son distintos sin probar las $n!$ biyecciones. Para demostrar que sí son isomorfos, la vía directa es exhibir una biyección y comprobar que conserva la adyacencia en ambos sentidos. De ahí el orden natural de trabajo: primero se calculan invariantes (orden, tamaño, lista de grados, ciclos cortos) y, si todos coinciden, se busca el diccionario.

Ejemplo (un diccionario, a mano). **El problema.** El hexágono 1 2 3 4 5 6 con sus tres diagonales largas 14, 25 y 36 no se parece a $K_{3,3}$ dibujado en dos filas: el primero tiene la simetría de una rueda y el segundo son dos filas de tres puntos con todas las aristas cruzando de una a otra. ¿Son el mismo grafo?



el hexágono con sus diagonales



$K_{3,3}$ con los nombres traducidos

Los invariantes baratos, primero. Los dos grafos tienen orden 6 y tamaño 9, y los dos son 3-regulares. Eso no prueba nada, pero dice que merece la pena buscar el diccionario.

La idea para encontrarlo. En $K_{3,3}$ cada arista une una fila con la otra. En el hexágono, cada arista une un número par con uno impar: los lados unen números consecutivos y las diagonales unen números que se diferencian en 3. Eso sugiere el diccionario: los impares 1, 3, 5 a la fila de arriba y los pares 2, 4, 6 a la de abajo, que es lo que muestra el dibujo de la derecha.

La comprobación, arista a arista. Las nueve aristas del hexágono, 12, 23, 34, 45, 56, 61, 14, 25 y 36, unen cada una un impar con un par, así que van a parar a aristas de $K_{3,3}$, y son nueve distintas. Como $K_{3,3}$ tiene exactamente nueve aristas, son todas. Eso da la vuelta gratis: si

dos vértices son adyacentes en $K_{3,3}$, su arista es la imagen de una del hexágono, y por ser la aplicación biyectiva, de la del par correspondiente. La doble implicación de la definición se cumple y los dos grafos son isomorfos.

Dónde se falla. En dar el isomorfismo por probado porque los grados coinciden. El prisma triangular del ejercicio de las postales también es 3-regular con seis vértices, y no es isomorfo a $K_{3,3}$: tiene triángulos. Y en comprobar las aristas solo hacia delante sin contar: aquí basta porque hay nueve a cada lado; sin esa cuenta, faltaría la vuelta.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: DEFINIR EL ISOMORFISMO CON MATRICES

La alternativa. Decir que G y H son isomorfos cuando sus matrices de adyacencia A_G y A_H cumplen $A_H = PA_G P^t$ para alguna matriz de permutación P .

Su ventaja. Es una condición algebraica que un ordenador puede comprobar mecánicamente, y es la que se usa en la práctica computacional.

Lo que pierde. Que la matriz depende de haber numerado los vértices, y la numeración no es parte del grafo. La definición por aplicaciones habla del grafo sin pasar por ninguna numeración y permite hablar también de morfismos que no son biyectivos. La idea de conservar la estructura mediante aplicaciones reaparece en los complejos simpliciales. Las dos son equivalentes para grafos finitos; se usa la que no depende de una elección arbitraria.

DE DÓNDE VIENE: CAYLEY Y LOS ISÓMEROS

Cayley publicó en 1874 y 1875 los recuentos de árboles que le permitieron contar los alcanos $C_n H_{2n+2}$: un alcano es un árbol cuyos vértices internos son los carbonos, y dos alcanos con la misma fórmula son isómeros *constitucionales* cuando sus árboles de enlaces no son isomorfos. Aquí se cuenta la conectividad, no la estereoisomería. Los árboles se definen en la sección 2.8; la pregunta de Cayley es la de esta sección: cuándo dos dibujos son el mismo objeto. Es uno de los primeros usos de la teoría de grafos fuera de las matemáticas, y de ahí tomó Sylvester la palabra «grafo».

Ejercicios: complementario, grados e isomorfismo

Ejercicio 2.5. Un triángulo en G o en $\overline{G}$ R2.5

Dado un grafo G de orden mayor o igual que 6, probar que G o $\overline{G}$ ha de contener un triángulo.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. Fija un vértice v . Tiene al menos cinco vértices más, y cada uno de ellos o es vecino de v en G o lo es en $\overline{G}$. Palomar.
2. Con tres vecinos de v en el mismo grafo, mira qué pasa entre ellos.

Resolución. Sea v un vértice de G . Los otros vértices son al menos cinco, y cada uno de ellos es adyacente a v en exactamente uno de los dos grafos G y $\overline{G}$, porque $A(G)$ y $A(\overline{G})$ son disjuntos y su unión contiene todas las aristas posibles. Por el principio del palomar (cinco objetos en dos cajas), hay al menos tres vértices u_1, u_2, u_3 adyacentes a v en el mismo grafo, digamos en G ; el otro caso es idéntico cambiando G por $\overline{G}$.

Ahora se mira qué pasa entre u_1, u_2, u_3 . Si alguna de las tres aristas $u_1 u_2, u_1 u_3, u_2 u_3$ está en G , digamos $u_1 u_2$, entonces v, u_1, u_2 forman un triángulo en G . Si ninguna está en G , las

tres están en $\overline{G}$, y entonces u_1, u_2, u_3 forman un triángulo en $\overline{G}$. En cualquier caso hay un triángulo en uno de los dos. ■

Otra vía (en el lenguaje de la fiesta). Es el enunciado clásico «en toda reunión de seis personas hay tres que se conocen entre sí o tres que no se conocen entre sí». Conocerse es G , no conocerse es $\overline{G}$. Y el 6 es óptimo: el ciclo C_5 no tiene triángulos y su complementario es otro C_5 , que tampoco los tiene. Con cinco personas puede no haber ni tres conocidos ni tres desconocidos.

Dónde se usa el seis. Solo en el primer paso. Con seis vértices, v tiene cinco vecinos repartidos entre dos grafos, y el palomar obliga a que tres caigan en el mismo. Con cinco vértices tendría cuatro, que pueden repartirse dos y dos, y el argumento se para ahí. El pentágono muestra que eso no es una debilidad del argumento: el enunciado es falso con cinco.

QUÉ DEJA. El par $(G, \overline{G})$ es una partición de las aristas de K_n en dos colores, y muchos enunciados sobre « G o su complementario» son enunciados sobre colorear K_n con dos colores. Ese punto de vista es el del capítulo 6.

Ejercicio 2.6. Grafos autocomplementarios R2.6

Indicar razonadamente cuál es el menor número de vértices n de un grafo autocomplementario (isomorfo a su complementario). Dar ejemplos de grafos autocomplementarios de orden n y $n + 1$ para ese valor de n . En general, dado un grafo autocomplementario de orden n , demostrar que o bien n o bien $n - 1$ ha de ser un múltiplo de 4.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. Si $G \simeq \overline{G}$, tienen el mismo tamaño. Y entre los dos suman $\binom{n}{2}$ aristas.
2. Para el ejemplo pequeño, prueba con el camino de cuatro vértices y dibuja su complementario.

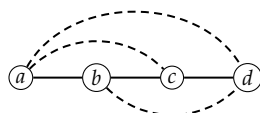
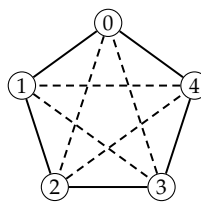
Resolución. La condición sobre n . Si $G \simeq \overline{G}$, el tamaño es invariante, luego $|A(G)| = |A(\overline{G})|$. Como $|A(G)| + |A(\overline{G})| = \binom{n}{2}$ por la proposición del complementario, se tiene $2|A(G)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, es decir,

$$|A(G)| = \frac{n(n-1)}{4},$$

que tiene que ser un entero. Luego 4 divide a $n(n-1)$. Como n y $n-1$ son consecutivos, uno de ellos es impar y no aporta ningún factor 2, así que el 4 tiene que dividir al otro: n o $n-1$ es múltiplo de 4.

El menor n . El enunciado omite excluir los casos triviales: el grafo vacío ($n = 0$) y el de un vértice ($n = 1$) son autocomplementarios. Para que la petición de ejemplos de ambos órdenes n y $n + 1$ tenga el sentido no trivial previsto, se entiende $n \geq 2$. En ese caso los valores permitidos son $n = 4, 5, 8, 9, \dots$ El menor es $n = 4$, y el ejemplo es el camino P_4 : si sus vértices son $a b c d$ con aristas ab, bc, cd , el complementario tiene las aristas ac, ad, bd , que forman el camino $c a d b$. La aplicación $a \mapsto c, b \mapsto a, c \mapsto d, d \mapsto b$ es un isomorfismo de P_4 en su complementario, como se comprueba arista a arista: $ab \mapsto ca, bc \mapsto ad, cd \mapsto db$.

Para $n + 1 = 5$ el ejemplo es el ciclo C_5 : su complementario tiene las $\binom{5}{2} - 5 = 5$ aristas que unen vértices a distancia 2 en el ciclo, y esas cinco aristas forman otro ciclo de longitud 5 (la estrella de cinco puntas). El isomorfismo envía el vértice i al $2i$ módulo 5.

 P_4 (continuo) y $\overline{P_4}$ (discontinuo) C_5 y su complementario

Dónde se falla. En tomar la condición sobre n por una garantía. La cuenta de aristas solo descarta: dice dónde no buscar, y para cada valor permitido hay que construir un ejemplo, como aquí con 4 y 5. Y en dar por probado el isomorfismo porque P_4 y su complementario tienen tres aristas cada uno: eso es necesario, y lo que lo prueba es el diccionario $a \mapsto c, b \mapsto a, c \mapsto d, d \mapsto b$, comprobado arista a arista.

Ejercicio 2.7. Sucesiones de grados R2.7

Un conjunto ordenado en orden decreciente de números enteros no negativos $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ se denomina **conjunto gráfico** si existe un grafo tal que, al ordenar en orden decreciente las valencias de todos sus vértices, se obtenga dicho conjunto. Razonar si los siguientes tres conjuntos son o no gráficos:

$$C_1 : \{1, 1, 1, 1, 1, 1\}, \quad C_2 : \{5, 4, 3, 2, 2, 1\}, \quad C_3 : \{5, 5, 4, 4, 0\}.$$

Resolución. C_1 : seis vértices de grado 1. La suma es 6, par, y hay un grafo: tres aristas disjuntas, $3K_2$. **Es gráfico.**

C_2 : la suma es $5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 = 17$, impar. Por el lema del apretón de manos ningún grafo tiene suma de grados impar. **No es gráfico.**

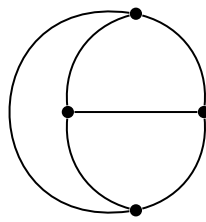
C_3 : son cinco vértices y uno de ellos tendría grado 5; pero en un grafo simple de orden 5 el grado máximo es 4. **No es gráfico.** Aunque se corrigiera ese valor, el conjunto seguiría siendo imposible: dos vértices de grado 4 serían adyacentes a todos los demás, incluido el de grado 0, que no tiene ningún vecino.

Qué hemos aprendido. Antes de buscar un grafo conviene pasar tres filtros, del más barato al más caro: que la suma sea par, por el apretón de manos, que es lo que tumba C_2 ; que ningún grado pase de $n - 1$, que es lo que tumba C_3 ; y que los grados altos quepan junto a los bajos, porque un vértice de grado $n - 1$ da al menos un vecino a todos los demás, que es lo que tumba C_3 incluso corregido. Pasar los filtros no prueba nada: para decir que un conjunto *sí* es gráfico hay que dar el grafo, como en C_1 .

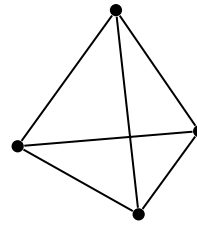
Dónde se falla. En creer que la paridad basta. El conjunto $\{3, 3, 1, 1\}$ suma 8, no tiene ningún grado mayor que $n - 1 = 3$ y aun así no es gráfico: los dos vértices de grado 3 serían adyacentes a todos los demás, y entonces cada uno de los otros dos tendría grado al menos 2.

Ejercicio 2.8. ¿Son isomorfos? R2.8

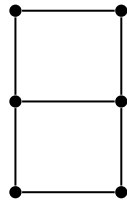
Decidir si son isomorfos los grafos de cada pareja.



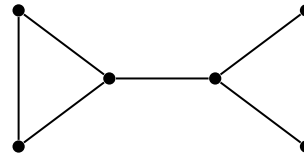
(a), izquierda



(a), derecha



(b), izquierda



(b), derecha

Resolución. (a) *Sí son isomorfos.* El dibujo de la izquierda tiene cuatro vértices: los dos extremos del segmento horizontal, L y R , y los dos puntos donde se juntan las curvas, arriba T y abajo B . Sus aristas son LR (el segmento), TL , TR , BL , BR (los cuatro arcos interiores) y TB (el arco exterior): seis aristas entre cuatro vértices, todas las posibles. Es K_4 . El de la derecha es el tetraedro, cuatro vértices y sus seis aristas: también K_4 . Cualquier biyección entre los conjuntos de vértices es un isomorfismo, porque en los dos grafos todo par de vértices es adyacente.

(b) *No son isomorfos.* Los invariantes baratos coinciden: los dos tienen orden 6, tamaño 7 y grados 3, 3, 2, 2, 2, 2. Hace falta uno más fino. El de la derecha contiene triángulos (los dos de la pajarita). El de la izquierda no contiene ninguno: sus únicos ciclos son los dos cuadrados de la escalera y el rectángulo exterior, todos de longitud par. Un isomorfismo lleva ciclos en ciclos de la misma longitud (la imagen de un recorrido es un recorrido, por ser f morfismo, y f es inyectiva), luego llevaría un triángulo a un triángulo. Como uno tiene y el otro no, no existe isomorfismo. ■

Otra vía (otro invariante para (b)). En el de la derecha, cada vértice de grado 2 tiene sus dos vecinos adyacentes entre sí; en el de la izquierda, ninguno. Un isomorfismo conservaría esa propiedad. Es la existencia de triángulos expresada mediante los vecinos de un vértice; cualquiera de las dos formulaciones basta para distinguir los grafos.

2.4 Conexión y componentes conexas

LA PREGUNTA

Cuando un cable submarino se rompe, parte de la red de internet deja de poder hablar con el resto, pero no toda: dentro de cada trozo la comunicación sigue. Los ingenieros necesitan saber, antes de que ocurra, en cuántos trozos puede partirse la red y qué tiene que fallar para que eso pase. ¿Qué significa exactamente que dos puntos de una

red «puedan hablar», y cómo se parte una red en trozos que no se comunican?

Definición (recorrido, camino simple y ciclo). Sea G un grafo simple. Un **recorrido** en G es una $(\ell + 1)$ -tupla de vértices

$$(v_0, v_1, \dots, v_\ell) \in V(G)^{\ell+1}$$

tal que $v_{i-1}v_i \in A(G)$ para todo $i = 1, \dots, \ell$. Su **longitud** es ℓ . Además:

1. Un **camino simple** (o **arco**) es un recorrido $(v_0, \dots, v_\ell)$ cuyos vértices $v_0, \dots, v_\ell$ son todos distintos.
2. Un **ciclo** es un recorrido $(v_0, \dots, v_\ell)$ con $\ell \geq 3$ tal que $v_0 = v_\ell$ y $v_0, v_1, \dots, v_{\ell-1}$ son distintos.

Un recorrido puede repetir vértices y aristas, es el paseo de quien va y vuelve. Un camino simple no repite nada. Un ciclo es un camino simple cerrado, y se le pide longitud al menos 3 para que sea de verdad una vuelta: con $\ell = 2$ sería (u, v, u) , ir y volver por la misma arista.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: ADMITIR CICLOS DE LONGITUD DOS

La alternativa. Definir ciclo como cualquier recorrido cerrado sin vértices repetidos salvo el primero y el último, sin exigir $\ell \geq 3$. Entonces (u, v, u) sería un ciclo para toda arista uv .

Su ventaja. Es una definición más corta, y en multigrafos, donde dos vértices pueden estar unidos por dos aristas distintas, el recorrido que va por una y vuelve por la otra es razonable llamarlo ciclo.

Qué cambiaría en los grafos simples. Toda arista estaría en un ciclo, así que dejaría de valer la caracterización de puente como «arista que no está en ningún ciclo» (sección 2.6). Todo grafo con una arista tendría contorno 2 y ninguno con aristas sería acíclico: la definición de árbol solo admitiría el grafo de un vértice. El 3 de la definición es lo que hace que «ciclo» signifique dar una vuelta y no un paso adelante y otro atrás.

Proposición. Si existe un recorrido entre dos vértices u y v , entonces existe un camino simple entre u y v .

LA IDEA: RECORTAR LOS BUCLES

Si un paseo pasa dos veces por el mismo sitio, todo lo que hay entre las dos pasadas es un rodeo que se puede quitar. Quitando rodeos hasta que no quede ninguno se obtiene un camino que no repite nada. La proposición dice que, para saber si dos puntos se comunican, da igual admitir paseos con rodeos que exigir caminos limpios: la relación es la misma.

El corazón en una frase: cada recorte deja un recorrido estrictamente más corto, y una cantidad entera y no negativa no puede bajar para siempre. Ese es el motor de la demostración y la única razón por la que el proceso termina; sin él, «quitar rodeos hasta que no quede ninguno» sería una instrucción y no un argumento. Esta proposición es pequeña pero se usa después sin nombrarla en cada paso donde se concatenan dos caminos y hace falta volver a tener un camino simple: es lo que sostiene la desigualdad triangular de la sección siguiente.

Paso 1: se corta un rodeo. Sea $(v_0, v_1, \dots, v_\ell)$ un recorrido de u a v , es decir, $v_0 = u$, $v_\ell = v$ y $v_{k-1}v_k \in A(G)$ para todo k . Si el recorrido repite algún vértice, existen índices $i < j$ con $v_i = v_j$. En tal caso la tupla $(v_0, \dots, v_i, v_{j+1}, \dots, v_\ell)$, que se obtiene saltando el tramo entre las dos apariciones, sigue siendo un recorrido de u a v . Si $j < \ell$, la única adyacencia nueva es $v_i v_{j+1} \in A(G)$, que se cumple porque $v_i = v_j$. Si $j = \ell$, se conserva solo $(v_0, \dots, v_i)$: termina en $v_i = v_\ell = v$ y no hay ninguna adyacencia nueva que comprobar.

Paso 2: el proceso termina porque la longitud es un entero que baja (el núcleo de la prueba). Se repite el procedimiento mientras haya repeticiones. Como la longitud baja estrictamente en cada paso, tras un número finito de pasos se obtiene un recorrido sin vértices repetidos, es decir, un camino simple de u a v . Aquí es donde se usa, sin decirlo, que las longitudes son enteros no negativos: en un conjunto así no hay cadenas estrictamente decrecientes infinitas. ■

Un recorte, a mano. En el grafo del ejercicio «Un grafo dado por sus aristas», con las aristas ab, ae, bd, cd, de y el vértice aislado f , el paseo

$$(v_0, \dots, v_7) = (a, b, d, e, a, b, d, c)$$

es un recorrido de a a c de longitud 7: da la vuelta al cuadrado $abde$ y luego sale hacia c . Pasa dos veces por a , en las posiciones 0 y 4. Saltando el tramo entre las dos, como en el paso 1, queda $(v_0, v_5, v_6, v_7) = (a, b, d, c)$, que ya no repite nada: un camino simple de longitud 3. Todo el cuadrado era un rodeo, y un solo corte lo ha quitado entero.

Definición (conexión). Dos vértices $u, v \in V(G)$ están **conectados** si existe un recorrido (equivalentemente, un camino simple) entre u y v .

Proposición. La relación «estar conectados» es una relación de equivalencia en $V(G)$.

Reflexiva: el recorrido (v) , de longitud 0, conecta v consigo mismo. *Simétrica:* invertir un recorrido de u a v , $(v_\ell, \dots, v_0)$, da un recorrido de v a u , porque las adyacencias son las mismas leídas al revés. *Transitiva:* concatenar un recorrido de u a v con uno de v a w , pegando por v , da un recorrido de u a w . ■

Definición (componentes conexas y grafo conexo). Las clases de equivalencia de la relación de conexión se llaman **componentes conexas**. El grafo es **conexo** si tiene una única componente conexa. El conjunto de componentes conexas de G se denota $\pi_0(G)$.

Las componentes son los «trozos» de la pregunta inicial: dentro de cada uno todo se comunica, y entre dos distintos no hay ningún recorrido. Un vértice aislado es una componente por sí solo. El número de componentes es $|\pi_0(G)|$, y un grafo es conexo cuando vale 1. En el grafo del recorte de antes hay dos componentes, $\{a, b, c, d, e\}$ y $\{f\}$: el vértice f no tiene ninguna arista y es un trozo él solo, así que $|\pi_0(G)| = 2$ y el grafo no es conexo.

Proposición (la conexión es un invariante). Si $G \simeq H$, entonces G y H tienen el mismo número de componentes conexas.

La idea, en una frase: un isomorfismo no solo empareja vértices, empareja **recorridos**, y como «estar en la misma componente» significa «haber un recorrido», las componentes se

emparejan solas. **Todo el enunciado es que la relación de conexión viaja con el isomorfismo;** contar componentes es después contar las clases de una relación que ya se sabe que es la misma a los dos lados.

Paso 1: un isomorfismo transporta recorridos, en los dos sentidos. Sea $f : V(G) \rightarrow V(H)$ un isomorfismo. Si $(v_0, \dots, v_\ell)$ es un recorrido en G , entonces para todo i se tiene $v_{i-1}v_i \in A(G)$ y, por la condición de isomorfismo, $f(v_{i-1})f(v_i) \in A(H)$. Luego $(f(v_0), \dots, f(v_\ell))$ es un recorrido en H . Así, si hay un recorrido entre u y v , lo hay entre $f(u)$ y $f(v)$. Aplicando el mismo argumento a f^{-1} , que también es isomorfismo, se obtiene la implicación inversa: u y v están conectados en G si y solo si $f(u)$ y $f(v)$ lo están en H .

Paso 2: la aplicación inducida entre componentes es una biyección (el núcleo de la prueba). Lo delicado no es que Φ sea biyectiva, sino que *esté bien definida*: Φ actúa sobre clases, y hay que garantizar que el resultado no depende del representante que se elija dentro de la clase. Ahí es donde se gasta el Paso 1. La aplicación entre conjuntos de componentes

$$\Phi : \pi_0(G) \rightarrow \pi_0(H), \quad \Phi([u]) = [f(u)],$$

cumple lo que debe. *Está bien definida*: si $[u] = [u']$, entonces u y u' están conectados en G , luego $f(u)$ y $f(u')$ lo están en H , y $[f(u)] = [f(u')]$. *Es inyectiva*: si $[f(u)] = [f(u')]$, entonces $f(u)$ y $f(u')$ están conectados en H , luego u y u' lo están en G , y $[u] = [u']$. *Es sobreyectiva*: toda componente de H contiene algún vértice w , y como f es biyectiva $w = f(u)$ para algún u , luego $[w] = \Phi([u])$. Una biyección entre $\pi_0(G)$ y $\pi_0(H)$ da $|\pi_0(G)| = |\pi_0(H)|$. ■

CONEXIÓN: TOPOLOGÍA

La notación viene de la topología: $\pi_0(X)$ es el conjunto de componentes por caminos de X . En un espacio general pueden diferir de las componentes conexas; en la realización topológica de un grafo coinciden. Se construye uniendo los vértices con segmentos, y sus componentes son exactamente los trozos definidos aquí. En Geometría y topología de superficies π_0 aparece al lado de π_1 : este último estudia lazos según cómo se pueden deformar, y así detecta agujeros; no es simplemente un número de agujeros.

2.5 Invariantes métricos

LA PREGUNTA

En 1967 el psicólogo Stanley Milgram entregó cartas a personas de Nebraska con el encargo de hacerlas llegar a un desconocido de Boston pasando solo por conocidos. Las que llegaron necesitaron, de media, unos seis pasos. De ahí viene la frase «seis grados de separación». Para poder decir «seis» hace falta una noción de distancia en una red que no tiene ni metros ni mapa. ¿Cómo se mide una distancia cuando lo único que hay son vértices y aristas, y qué números describen «lo grande» que es una red?

Definición (distancia en grafos). Sea G un grafo conexo. Para $u, v \in V(G)$ se define la **distancia** $d_G(u, v)$ como la mínima longitud de un camino simple que une u con v .

Como el grafo es conexo, entre dos vértices siempre hay algún camino, y las longitudes son enteros no negativos, así que el mínimo existe. Un camino que realiza la distancia se llama **geodésica**. El nombre recuerda al de Geometría local, aunque allí una geodésica no tiene por qué minimizar la longitud entre extremos lejanos; aquí sí exigimos el mínimo.

Proposición. La función d_G es una distancia.

La idea. De las tres propiedades, dos son inmediatas y la tercera es la única que tiene contenido, así que conviene saber de antemano dónde mirar. Que la distancia sea no negativa y que se anule solo en $u = v$ es leer la definición; que sea simétrica es que un camino recorrido al revés mide lo mismo. **La desigualdad triangular es la que cuesta, y cuesta por una razón concreta: al pegar el camino más corto de u a v con el más corto de v a w no se obtiene un camino simple, sino un recorrido,** que puede repetir vértices si los dos tramos se cruzan. La distancia está definida como mínimo sobre caminos simples, no sobre recorridos, así que ese objeto pegado no sirve tal cual y hay que limpiarlo. El instrumento de limpieza es la proposición de recortar rodeos de la sección anterior, y limpiar solo puede acortar: de ahí el « $\leq$ » y no el « $=$ ».

Hay que comprobar las tres propiedades de una métrica.

Paso 1: no negatividad y separación, por definición. $d(u, v) \geq 0$ por ser una longitud, y $d(u, v) = 0$ si y solo si hay un camino de longitud 0 de u a v , es decir, si y solo si $u = v$.

Paso 2: simetría, porque un camino se recorre en los dos sentidos. Invertir un camino no cambia su longitud, luego los caminos de u a v y los de v a u tienen las mismas longitudes y el mismo mínimo.

Paso 3: desigualdad triangular, pegando y limpiando (el núcleo de la prueba). Concatenar un camino mínimo de u a v con uno mínimo de v a w da un recorrido de u a w de longitud $d(u, v) + d(v, w)$. Eliminando repeticiones como en la proposición de la sección anterior se obtiene un camino simple de longitud menor o igual, luego $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$. ■

Observación (qué hace la hipótesis de conexión). d_G solo es una distancia en un grafo *conexo*. Si G no lo es, dos vértices de componentes distintas no están unidos por ningún camino, el mínimo se toma sobre el conjunto vacío y $d_G(u, v)$ no está definida —o vale $+\infty$, según el convenio, que ya no es una distancia con valores reales—. Por eso la conexión aparece en el enunciado y no como adorno: es lo que garantiza que el conjunto sobre el que se minimiza no sea vacío.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: MEDIR CON LA REGLA SOBRE EL DIBUJO

La alternativa. Definir la distancia entre dos vértices como la distancia euclídea entre los puntos que los representan en el dibujo.

Su ventaja. Es la distancia de siempre, y en muchas redes reales (carreteras, cables) la longitud física importa.

Qué la hunde. Que el dibujo no es parte del grafo: el mismo grafo tiene infinitos dibujos, y dos vértices pueden estar muy cerca en uno y muy lejos en otro. Una distancia definida así no sería un invariante, y la pregunta de Milgram no tendría respuesta, porque la red de conocidos no tiene dibujo. La distancia por número de aristas solo usa la estructura del grafo, y por eso es la

que se adopta. Cuando las longitudes físicas importan de verdad, se añaden como pesos en las aristas, y eso es otro objeto, el grafo ponderado, que no entra en este curso.

Definición (funciones métricas). Sea G un grafo simple. El contorno y la circunferencia se definen aunque no sea conexo; para las funciones que usan d_G suponemos además que G es conexo.

1. *Contorno y circunferencia.* Se definen

$$g(G) := \inf\{\ell : G \text{ contiene un ciclo de longitud } \ell\},$$

$$c(G) := \sup\{\ell : G \text{ contiene un ciclo de longitud } \ell\}.$$

Por convenio, si G no contiene ciclos entonces $g(G) = \infty$ y $c(G) = 0$.

2. *Excentricidad.* Para $v \in V(G)$, $\varepsilon_G(v) := \sup_{u \in V(G)} d_G(v, u)$.

3. *Diámetro.* $\text{diam}(G) := \sup_{u, v \in V(G)} d_G(u, v) = \sup_{v \in V(G)} \varepsilon_G(v)$.

4. *Radio y centro.* $r(G) := \inf_{v \in V(G)} \varepsilon_G(v)$ y $Z(G) := \{v \in V(G) : \varepsilon_G(v) = r(G)\}$.

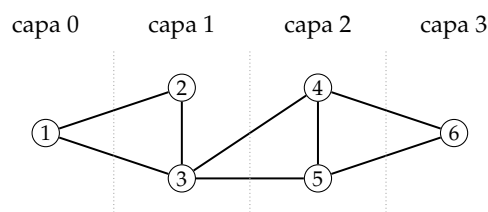
Los nombres son los de la geometría y conviene leerlos así. El **contorno** es la longitud del ciclo más corto: en un grafo con triángulos vale 3. La **circunferencia** es la del ciclo más largo. La **excentricidad** de un vértice es lo lejos que está el vértice más lejano: mide lo mal situado que está. El **diámetro** es la mayor distancia que hay en el grafo, y el **radio** la excentricidad de los vértices mejor situados, que forman el **centro**. En un grafo finito estos supremos e ínfimos son máximos y mínimos cuando los conjuntos correspondientes no están vacíos; si no hay ciclos se aplica el convenio indicado arriba. En los ejercicios se abrevia $d(G)$ o $d(G)$ para el diámetro y $r(G)$ para el radio.

Ejemplo. En el ciclo C_6 con vértices $1, \dots, 6$: contorno y circunferencia valen 6, porque el único ciclo es el propio grafo; la distancia entre 1 y 4 es 3 y ninguna es mayor, luego todos los vértices tienen excentricidad 3, el diámetro es 3, el radio es 3 y el centro es todo el grafo. En el camino P_5 con vértices $1, \dots, 5$: no hay ciclos, $g = \infty$ y $c = 0$; las excentricidades son 4, 3, 2, 3, 4, el diámetro es 4, el radio 2 y el centro $\{3\}$. En general, para un ciclo de orden n el diámetro es $\lfloor n/2 \rfloor$, que es la observación con la que se resuelve el ejercicio del contorno y el diámetro.

Ejemplo (las capas de distancia). **El problema.** La excentricidad de un vértice pide su distancia a todos los demás, y cada distancia es un mínimo sobre caminos. Probar caminos uno a uno no es un método: en un grafo de doce vértices hay demasiados. Hace falta obtener todas las distancias desde un vértice de una sola pasada.

La idea. Se reparte el grafo en capas alrededor de un vértice u , como las ondas que deja una piedra en el agua. La capa 0 es $\{u\}$ y la capa 1 son los vecinos de u . En general, la capa $k + 1$ está formada por los vecinos de la capa k que no están en ninguna capa anterior. Cada vértice v acaba en la capa número $d(u, v)$, por dos razones que se comprueban en una línea cada una. Un vértice a distancia $k + 1$ tiene un vecino a distancia k : el penúltimo vértice de una geodésica que llega a él. Y un vecino de la capa k que no ha aparecido antes está a distancia a lo sumo $k + 1$, por la desigualdad triangular, y no menos, porque habría aparecido antes. La excentricidad de u es el número de la última capa.

El caso a mano. Se toma el grafo del ejercicio «Potencias de un grafo», más abajo: los vértices $1, \dots, 6$ y las aristas 12, 23, 34, 45, 56, 13, 35 y 46. Desde el vértice 1 las capas son $\{1\}$, $\{2, 3\}$, $\{4, 5\}$ y $\{6\}$, y el dibujo las pone en columnas.



Repitiendo la pasada desde cada vértice sale la tabla completa:

vértice	capas	excentricidad
1	{1}, {2, 3}, {4, 5}, {6}	3
2	{2}, {1, 3}, {4, 5}, {6}	3
3	{3}, {1, 2, 4, 5}, {6}	2
4	{4}, {3, 5, 6}, {1, 2}	2
5	{5}, {3, 4, 6}, {1, 2}	2
6	{6}, {4, 5}, {3}, {1, 2}	3

La columna de la derecha lo da todo: el diámetro es su máximo, 3; el radio, su mínimo, 2; y el centro, los vértices donde se alcanza el mínimo, {3, 4, 5}.

Qué se ha ganado. Un procedimiento que cuesta una pasada por vértice y que no deja nada a la vista: ninguna distancia se estima, todas se leen en la tabla. Es el que se usa en el ejercicio «Estudio de un grafo dibujado» de la sección de bloques, y reaparece en la sección de grafos bipartitos, donde lo que importa de cada capa es solo si su número es par o impar.

Dónde se falla. En volver a poner en una capa un vértice que ya estaba en otra anterior: aparecería a más distancia de la que tiene. Y en dar la excentricidad al encontrar el primer vértice lejano, sin terminar las capas: la excentricidad es el número de la *última* capa, y solo se sabe cuál es la última cuando ya no quedan vértices.

Proposición. Son invariantes la distancia, el contorno, la circunferencia, el radio, el diámetro y la excentricidad.

Para distancia y excentricidad, «invariantes» significa que sus valores se conservan al transportar los vértices mediante el isomorfismo.

La idea, en una frase: ninguna de estas cantidades se calcula mirando los nombres de los vértices; todos se calculan mirando *longitudes de caminos y de ciclos*, y un isomorfismo empareja los caminos de G con los de H conservando la longitud. Si los conjuntos de longitudes son los mismos, los mínimos, los máximos y los supremos que se tomen sobre ellos también lo son.

Un isomorfismo $f : G \rightarrow H$ lleva caminos simples de u a v en caminos simples de $f(u)$ a $f(v)$ de la misma longitud, y f^{-1} hace lo mismo al revés, como se vio al probar que la conexión es invariante; luego los conjuntos de longitudes de caminos entre u, v y entre $f(u), f(v)$ son iguales y $d_G(u, v) = d_H(f(u), f(v))$. Lo mismo vale para ciclos, con lo que contorno y circunferencia coinciden. Y todo lo demás se define a partir de las distancias con supremos e ínfimos, que se conservan al conservarse los conjuntos sobre los que se toman. ■

Los invariantes son útiles para detectar que dos grafos **no** son isomorfos: si un invariante da distinto en los dos, no puede haber isomorfismo. El contorno, en particular, es el que decidió la pareja (b) del ejercicio de isomorfismo: 4 en la escalera, 3 en la pajarita.

DE DÓNDE VIENE: EL MUNDO PEQUEÑO

En el experimento de Milgram la mayoría de las cadenas no llegó al destinatario. La longitud media de las que llegaron no determina el diámetro: este mira el par más alejado, y las cadenas encontradas tampoco tienen por qué ser caminos mínimos.

Entre matemáticos hay una distancia con nombre propio, el **número de Erdős**: la distancia hasta Paul Erdős en el grafo de coautoría. Es finita solo en su componente conexa. Dentro de una componente finita, la excentricidad de un autor es el mayor de sus números de distancia a otros autores, y el diámetro es la mayor de esas excentricidades.

Ejercicios: caminos, ciclos y distancias

Ejercicio 2.9. *Un arco y un ciclo largos* R2.9

Dado un grafo G , se denota $\delta(G) = \min\{\delta(v) : v \in V(G)\}$. Probar que todo grafo G contiene un arco de longitud $\delta(G)$ y un ciclo de longitud al menos $\delta(G) + 1$ (suponiendo $\delta(G) \geq 2$).

Resolución. La idea. Un camino que ya no se puede alargar por un extremo tiene dentro de sí a todos los vecinos de ese extremo. Si el extremo tiene muchos vecinos, el camino tiene que ser largo para alojarlos a todos; y el vecino más alejado a lo largo del camino, unido al extremo, cierra un ciclo que los contiene a todos. Las dos mitades del ejercicio salen de mirar los vecinos del extremo de un arco de longitud máxima.

Aquí $\delta(v)$ es el grado de v , como en el enunciado, y $\delta(G)$ el grado mínimo. Se supone G finito y no vacío. La finitud importa: el camino infinito en ambas direcciones tiene grado mínimo 2 y no contiene ningún ciclo.

El arco. Sea $\alpha = (u_0, u_1, \dots, u_k)$ un arco de longitud máxima en G , que existe porque el grafo es finito. Todo vértice w adyacente a u_k tiene que pertenecer al conjunto $U = \{u_0, \dots, u_{k-1}\}$: si no estuviera en el arco, $(u_0, \dots, u_k, w)$ sería un arco de longitud $k + 1$, contra la maximalidad. Por tanto los vecinos de u_k son a lo sumo los k vértices de U , y

$$\delta(G) \leq \delta(u_k) \leq |U| = k = \text{longitud}(\alpha).$$

Luego α tiene longitud al menos $\delta(G)$, y recortando sus primeros vértices se obtiene un arco de longitud exactamente $\delta(G)$.

El ciclo. Supóngase $\delta(G) \geq 2$. Entonces $\delta(u_k) \geq 2$ y u_k tiene al menos dos vecinos, todos dentro de U . Sea i_0 el **menor** índice tal que u_{i_0} es adyacente a u_k ; como uno de los vecinos es u_{k-1} y hay otro, $i_0 < k - 1$. El camino cerrado

$$C = (u_{i_0}, u_{i_0+1}, \dots, u_{k-1}, u_k, u_{i_0})$$

es un ciclo, porque sus vértices son distintos salvo el primero y el último y su longitud es $k - i_0 + 1 \geq 3$. Y todos los vecinos de u_k están en $\{u_{i_0}, \dots, u_{k-1}\}$, por la elección de i_0 como el menor índice, así que $\delta(u_k) \leq k - i_0$. Por tanto

$$\text{longitud}(C) = k - i_0 + 1 \geq \delta(u_k) + 1 \geq \delta(G) + 1.$$



Dónde se falla. En cerrar el ciclo con un vecino cualquiera de u_k . Si se toma el de índice más alto después de u_{k-1} , el ciclo puede ser un triángulo aunque el grado mínimo sea grande: es el vecino de índice *menor* el que garantiza que el ciclo contiene a todos los demás vecinos de u_k , y con ellos la longitud. Y en olvidar la finitud, que es la que asegura que existe un arco de longitud máxima: el camino infinito en los dos sentidos tiene grado mínimo 2 y ningún ciclo.

QUÉ DEJA. «Toma un arco de longitud máxima y mira los vecinos de su extremo» es una de las tres o cuatro ideas que resuelven la mitad de las demostraciones de esta asignatura. El extremo de un arco maximal solo tiene vecinos dentro del arco.

Ejercicio 2.10. Contorno y diámetro R2.10

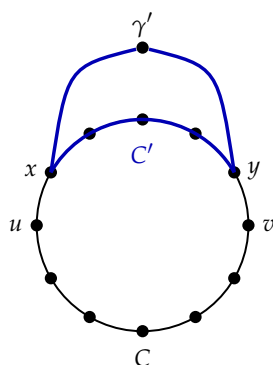
Demostrar que en todo grafo conexo G se cumple la desigualdad $g(G) \leq 2 \operatorname{diam}(G) + 1$.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. Si no hay ciclos, el contorno es ∞ y la desigualdad falla para un árbol finito. Falta la hipótesis de que haya algún ciclo. Con ella, toma uno de longitud mínima.
2. En un ciclo de orden n hay dos vértices a distancia $\lfloor n/2 \rfloor$ dentro del ciclo. Si esa distancia supera al diámetro, hay un atajo en G , y el atajo fabrica un ciclo más corto.

Resolución. Hay una hipótesis omitida en el enunciado original. Con el convenio $g = \infty$ para grafos acíclicos, un árbol finito es un contraejemplo: su diámetro es finito. La versión correcta que vamos a demostrar supone que G contiene algún ciclo. El enunciado de la relación no indica un convenio diferente para el contorno.

La idea. Un ciclo de longitud mínima está «tenso»: no admite atajos. Dentro de él, dos vértices opuestos están a distancia $\lfloor g(G)/2 \rfloor$ dando la vuelta por el ciclo. Si el diámetro del grafo fuera pequeño, esos dos vértices estarían mucho más cerca por fuera del ciclo, y ese atajo, pegado a la parte corta del ciclo, cerraría un ciclo más corto que el mínimo. Así que un contorno grande obliga a un diámetro grande, y la cuenta exacta es la del enunciado. En el dibujo, C es un ciclo de doce vértices y u, v son opuestos: cada mitad de C entre ellos tiene seis aristas. La geodésica de u a v va de u a x , sale de C por el vértice de arriba, vuelve en y y llega a v : cuatro aristas. Su tramo de fuera, γ' , tiene dos aristas, y junto con el arco corto de C entre x e y , de cuatro, forma el ciclo C' , en azul, de seis: más corto que C , que se suponía mínimo. Esa es la contradicción que busca la prueba.



Sea entonces C un ciclo de longitud mínima, $\operatorname{longitud}(C) = g(G)$, que es también su

orden. En un ciclo de orden n la distancia máxima entre dos de sus vértices, medida dentro del ciclo, es $\lfloor n/2 \rfloor$. Se razona por reducción al absurdo: supóngase $g(G) \geq 2 \text{diam}(G) + 2$. Entonces

$$\left\lfloor \frac{g(G)}{2} \right\rfloor \geq \text{diam}(G) + 1,$$

luego hay dos vértices u, v de C cuya distancia *dentro de* C es al menos $\text{diam}(G) + 1$. Pero $u, v \in V(G)$, y en G hay una geodésica γ de u a v de longitud $d_G(u, v) \leq \text{diam}(G)$: un atajo estrictamente más corto que cualquiera de los dos arcos de C entre u y v .

Ese atajo produce un ciclo más corto que C . Un camino dentro de C entre u y v es necesariamente uno de los dos arcos de C , y ambos miden al menos $\lfloor g(G)/2 \rfloor$, más que γ ; luego γ usa alguna arista que no pertenece a C . Se toma un tramo γ' entre dos visitas consecutivas a vértices de C que contenga una de esas aristas. Sus vértices interiores están fuera de C ; puede ser también una sola cuerda, sin vértices interiores. Sus extremos x, y están en C , son distintos porque una geodésica no repite vértices, y su longitud es a lo sumo la de γ , es decir, $\leq \text{diam}(G)$. El camino cerrado C' formado por γ' y el más corto de los dos arcos de C entre x e y es un ciclo (sus vértices son distintos, y tiene longitud ≥ 3 porque si γ' fuera una sola arista xy fuera de C , el arco corto de C entre x e y mediría al menos 2). Su longitud es

$$\text{longitud}(C') \leq \text{diam}(G) + \left\lfloor \frac{g(G)}{2} \right\rfloor \leq \left(\left\lfloor \frac{g(G)}{2} \right\rfloor - 1 \right) + \left\lfloor \frac{g(G)}{2} \right\rfloor < g(G),$$

usando la hipótesis $\text{diam}(G) \leq \lfloor g(G)/2 \rfloor - 1$. Contradicción con la minimalidad de C . ■

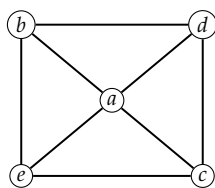
Qué hemos aprendido. La cota no se puede mejorar: el ciclo impar C_{2k+1} tiene contorno $2k + 1$ y diámetro k , y la cumple con igualdad; también el grafo de Petersen, con contorno 5 y diámetro 2, que reaparece en los capítulos de planaridad y de coloración. Los ciclos pares se quedan a uno: C_{2k} tiene contorno $2k$ y diámetro k . El contorno vuelve en el capítulo de planaridad, en la cota del contorno (sección 5.3.1).

Dónde se falla. En pegar la geodésica γ entera al arco corto de C . La geodésica puede entrar y salir de C varias veces, y lo que se obtiene al pegarla no es un ciclo. Por eso se toma solo un tramo γ' entre dos visitas consecutivas a C que use una arista de fuera: sus vértices interiores no tocan C , y el pegado sí cierra un ciclo.

Ejercicio 2.11. Añadir un vértice adyacente a todos R2.11

Sea G el grafo con $V(G) = \{b, c, d, e\}$ y $A(G) = \{bd, be, cd, ce\}$. Se considera un vértice nuevo a . Determinar el contorno, la circunferencia y el diámetro del grafo $G + a$.

Resolución. Las aristas bd, dc, ce, eb forman el ciclo $bdc eb$: G es C_4 . Según la definición de suma de la sección 2.6, $G + a$ tiene $V(G + a) = \{a, b, c, d, e\}$ y $A(G + a) = A(G) \cup \{ab, ac, ad, ae\}$: es la rueda W_5 .



Contorno: a, b, d forman un triángulo (ab, bd, da son aristas), y 3 es la menor longitud posible de un ciclo: $g(G + a) = 3$.

Circunferencia: el ciclo $a b d c e a$ pasa por los cinco vértices y tiene longitud 5, la máxima posible con cinco vértices: $c(G + a) = 5$.

Diámetro: a es adyacente a todos, luego dos vértices cualesquiera están a distancia ≤ 2 pasando por a . Y hay pares no adyacentes, como b y c : $\text{diam}(G + a) = 2$. ■

Ejercicio 2.12. Potencias de un grafo R2.12

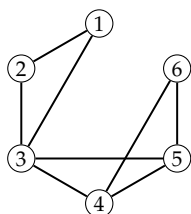
Sea G un grafo. Se denomina **potencia enésima** de G a otro grafo, denotado G^n , tal que $V(G^n) = V(G)$ y, para todo $u, v \in V(G)$ distintos, la arista $uv \in A(G^n)$ si y solo si $d(u, v) \leq n$ en G . Dar un ejemplo de un grafo de orden mayor o igual que 5 y tamaño 8, y representar su cuadrado y su cubo.

Resolución. Se ha explicitado $u \neq v$, omitido en el original, para que la potencia siga siendo un grafo simple sin lazos. Se toma G con $V(G) = \{1, \dots, 6\}$ y las ocho aristas 12, 23, 34, 45, 56, 13, 35, 46: el camino 123456 con tres cuerdas.

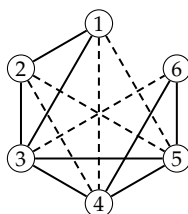
Se calculan las distancias de los pares no adyacentes. $d(1, 4) = 2$ por 134; $d(1, 5) = 2$ por 135; $d(1, 6) = 3$ por 1356, y no hay nada más corto porque los vecinos de 1 son 2 y 3 y ninguno es adyacente a 6; $d(2, 4) = 2$ por 234; $d(2, 5) = 2$ por 235; $d(2, 6) = 3$ por 2356; $d(3, 6) = 2$ por 356. Los demás pares son adyacentes.

Cuadrado. G^2 tiene las ocho aristas de G más las cinco de distancia 2: 14, 15, 24, 25, 36. Trece aristas; le faltan solo 16 y 26 para ser completo.

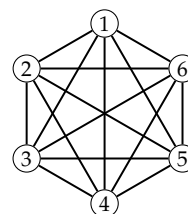
Cubo. G^3 añade las de distancia 3, 16 y 26, y ya tiene las quince aristas posibles: $G^3 = K_6$, porque el diámetro de G es 3.



G : 8 aristas



G^2 : 13 aristas



$G^3 = K_6$

■

Ejercicio 2.13. Radio y diámetro R2.16

Probar que si G es un grafo conexo, entonces $r(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2r(G)$.

Resolución. $r(G) \leq \text{diam}(G)$. Por definición, $r(G) = \min_v \varepsilon(v)$ y $\text{diam}(G) = \max_v \varepsilon(v)$, y el mínimo de una lista finita no supera a su máximo.

$\text{diam}(G) \leq 2r(G)$. Sea z un vértice central, es decir, con $\varepsilon(z) = r(G)$, que existe porque el grafo es finito. Dados dos vértices cualesquiera u, v , la desigualdad triangular da

$$d(u, v) \leq d(u, z) + d(z, v) \leq \varepsilon(z) + \varepsilon(z) = 2r(G),$$

porque la distancia de z a cualquier vértice es a lo sumo su excentricidad. Tomando el máximo sobre todos los pares u, v se obtiene $\text{diam}(G) \leq 2r(G)$. ■

Otra vía (las dos cotas se alcanzan). El camino P_3 tiene radio 1 y diámetro 2: $\text{diam} = 2r$. El ciclo C_6 tiene radio y diámetro 3: $\text{diam} = r$. Luego ninguna de las dos desigualdades se puede mejorar en general. Dar los dos ejemplos es la mitad de la respuesta cuando el enunciado pregunta si las cotas son óptimas.

2.6 Puntos de corte y aristas puente

LA PREGUNTA

En 1964 Paul Baran, un ingeniero de la corporación RAND, publicó un informe sobre cómo debería estar construida una red de comunicaciones para seguir funcionando después de un ataque nuclear. Su idea fue comparar redes centralizadas, con un nodo del que cuelga todo, con redes distribuidas, con rutas alternativas. Fue uno de los antecedentes de las redes de conmutación de paquetes que hicieron posible internet. La pregunta que Baran se hizo es exactamente la de esta sección: en una red dada, ¿qué nodos y qué enlaces son aquellos cuya pérdida, ella sola, parte la red en dos?

Definición (punto de corte y arista puente). Sea G un grafo.

1. Un vértice $v \in V(G)$ es un **punto de corte** si el número de componentes conexas de $G - v$ es estrictamente mayor que el de G : $|\pi_0(G - v)| > |\pi_0(G)|$.
2. Una arista $a \in A(G)$ es una **arista puente** (o **puente**) si $|\pi_0(G - a)| > |\pi_0(G)|$.

Quitar una arista que no es puente deja el número de componentes como estaba. Al quitar un vértice hay una excepción: si estaba aislado, desaparece una componente entera y el número baja en uno. Si no estaba aislado ni era punto de corte, el número se conserva. En un grafo conexo con al menos dos vértices, un punto de corte es un vértice cuya eliminación desconecta el grafo; un puente es una arista que hace lo mismo.

Ejemplo. En el camino 1 2 3 4, los vértices 2 y 3 son puntos de corte y las tres aristas son puentes. En el ciclo C_n no hay ni puntos de corte ni puentes: quitar un vértice deja un camino, quitar una arista también. En K_n con $n \geq 3$ tampoco. En dos triángulos que comparten un único vértice, el vértice compartido es punto de corte y no hay ningún puente.

Proposición. La existencia y el número de puntos de corte y de puentes son invariantes por isomorfismo.

La idea, en una frase: ser punto de corte no es una propiedad de v , es una propiedad de $G - v$, y quitar un vértice conmuta con renombrarlos todos: da igual quitar y luego traducir que traducir y luego quitar. Con eso, la invarianza del número de componentes, que ya está demostrada, se hereda sola.

Un isomorfismo $f : G \rightarrow H$ induce, por restricción, un isomorfismo $G - v \simeq H - f(v)$: la biyección f restringida a $V(G) \setminus \{v\}$ sigue conservando adyacencias. Si v es un punto de corte de G , entonces $G - v$ tiene más componentes que G ; como el número de componentes es invariante (sección 2.4), $H - f(v)$ tiene más componentes que H , y $f(v)$ es un punto de corte de H . Aplicando lo mismo a f^{-1} , f es una biyección entre los puntos de corte de G y los de H . Para los puentes el argumento es idéntico con

$$G - a \simeq H - f(a).$$

■

Proposición. Sea G un grafo y sea uv un puente. Si $\delta(u) \geq 2$, entonces u es un punto de corte.

LA IDEA: EL PEAJE Y LA ADUANA

Un puente es una carretera por la que pasa *toda* la comunicación entre dos orillas. La pregunta es si el pueblo que hay a un extremo del puente es igual de crítico que el puente mismo, y la respuesta razonable es que sí *con una condición*: que ese pueblo tenga algo detrás. Si u es un fondo de saco, un pueblo al que solo llega el puente y nada más, cerrarlo no incomunica a nadie, porque no había nadie al otro lado de u . Pero si u tiene algún otro vecino x , entonces x solo podía hablar con v pasando por u , y cerrar u los separa.

El corazón en una frase: $\text{grad}_G(u) \geq 2$ es exactamente la manera de decir que *detrás de u hay alguien a quien dejar aislado*, y ese alguien es el testigo que convierte a u en punto de corte.

Paso 1: el puente separa de verdad las dos orillas. Como uv es un puente, en $G - uv$ los vértices u y v quedan en componentes conexas distintas (si siguieran en la misma, cada componente de G seguiría conexa al quitar uv y el número de componentes no cambiaría). **Paso 2: la hipótesis de grado produce el testigo.** Sea U la componente conexa de $G - uv$ que contiene a u . Como $\delta(u) \geq 2$, el vértice u tiene algún vecino $x \neq v$. La arista ux no es la eliminada, luego $ux \in A(G - uv)$ y $x \in U$.

Paso 3: el vecino x y el otro extremo v quedan separados al borrar u (el núcleo de la prueba). Aquí se cierra el argumento, y el mecanismo es que un camino de x a v que evitara u sería también un camino de u a v que evitaría la arista uv , contra el hecho de que es puente. Se afirma que en $G - u$ los vértices x y v quedan en componentes distintas. Si no fuera así, existiría en $G - u$ un camino P de x a v ; entonces, en G , la arista ux seguida de P sería un camino de u a v que no usa la arista uv , y ese camino sobreviviría en $G - uv$, dejando a u y v en la misma componente. Contradicción. Por tanto x y v , que en G están en la misma componente (unidos por xuv), quedan en componentes distintas de $G - u$: al eliminar u aumenta el número de componentes, y u es punto de corte. ■

Corolario. El único grafo conexo con un puente pero sin puntos de corte es K_2 .

Sea G conexo con un puente uv y sin puntos de corte. Por la proposición anterior, $\delta(u) \leq 1$ y $\delta(v) \leq 1$; como uv es arista, $\delta(u) = \delta(v) = 1$. Entonces $\{u, v\}$ es una componente conexa de G (ningún otro vértice es adyacente a u ni a v), y como G es conexo, $G = K_2$. Y K_2 cumple lo pedido: su arista es un puente y sus dos vértices no son puntos de corte, porque $K_2 - u = K_1$ sigue teniendo una componente. ■

Observación. El recíproco no vale: la existencia de puntos de corte no implica la existencia de puentes. La pajarita del ejemplo anterior tiene un punto de corte y ningún puente. En la

otra dirección la implicación es casi cierta: en un grafo conexo con al menos tres vértices, todo puente tiene un extremo de grado ≥ 2 , y ese extremo es punto de corte.

LA IDEA: VÉRTICES Y ARISTAS CRÍTICOS

Un puente es una arista por la que pasa toda la comunicación entre sus dos orillas; un punto de corte es un vértice por el que pasa toda la comunicación entre dos partes. Los dos teoremas que siguen dicen exactamente eso, y son los que se usan en los ejercicios: para probar que v es punto de corte se exhiben dos vértices tales que todo camino entre ellos pasa por v ; para probar que una arista no es puente basta meterla en un ciclo.

Teorema (caracterización de los puntos de corte). Sea G un grafo conexo y $v \in V(G)$. Son equivalentes:

- (a) v es un punto de corte de G .
- (b) Existe una partición $V(G) \setminus \{v\} = U \sqcup W$ en subconjuntos no vacíos tal que, para todo $u \in U$ y todo $w \in W$, el vértice v pertenece a todo camino que une u con w .

La idea. Las dos condiciones dicen lo mismo desde los dos lados de una misma frontera. (a) mira el grafo *después* de quitar v y cuenta trozos; (b) mira el grafo *antes* y habla de por dónde pasan los caminos. El puente entre las dos es una sola observación: « u y w **quedan en componentes distintas de $G - v$** » y «**todo camino de u a w en G pasa por v** » son la misma afirmación leída dos veces, porque un camino de u a w que evitara v es exactamente un camino en $G - v$. Sabiendo eso, la demostración solo tiene que fabricar la partición en un sentido y leerla en el otro.

Paso 1: (a) $\Rightarrow$ (b), la partición la dan las propias componentes (el núcleo de la prueba).

Si v es punto de corte, $G - v$ tiene al menos dos componentes conexas. Sea U el conjunto de vértices de una de ellas y $W = V(G) \setminus (U \cup \{v\})$ el resto, no vacío porque hay otra componente. Si existiera en G un camino entre algún $u \in U$ y algún $w \in W$ que no pasara por v , ese camino estaría contenido en $G - v$ y u, w estarían en la misma componente de $G - v$, contra la elección de U .

Paso 2: (b) $\Rightarrow$ (a), la partición dada separa componentes. Si todo camino de U a W pasa por v , en $G - v$ no hay ningún camino entre un vértice de U y uno de W , luego $G - v$ tiene al menos dos componentes, mientras que G tiene una. Por tanto v es punto de corte. ■

Observación (qué hace la hipótesis de conexión). La conexión de G solo se usa en el paso 2, y ahí es imprescindible: es lo que permite decir «mientras que G tiene una componente». Sin ella, U y W podrían estar ya en componentes distintas de G , con lo que quitar v no aumentaría nada y v no sería punto de corte pese a cumplir (b) de forma vacía. En el paso 1, en cambio, la conexión no interviene: la partición se fabrica sola a partir de las componentes de $G - v$.

Teorema (caracterización de los puentes). Sea G un grafo y $a \in A(G)$. Las condiciones (a) y (b) son equivalentes. Si además G es conexo, también son equivalentes a (c):

- (a) a es una arista puente.
- (b) a no pertenece a ningún ciclo de G .

- (c) Existe una partición $V(G) = U \sqcup W$ en subconjuntos no vacíos tal que a pertenece a todo camino que une un vértice de U con uno de W .

LA IDEA: EL RODEO O SU AUSENCIA

La intuición falsa, primero. Es tentador pensar que una arista es puente cuando «parece un cuello de botella», es decir, cuando el dibujo se estrecha ahí. Eso no es un criterio: la pajarita —dos triángulos pegados por un vértice— tiene un cuello evidéntísimo y *ninguna* de sus aristas es puente, porque todas están en un triángulo. Lo crítico ahí es el vértice, no ninguna arista.

La imagen. Una arista es prescindible exactamente cuando existe un rodeo: otra ruta entre sus dos extremos. Y una ruta alternativa entre los extremos de uv , junto con la propia uv , es un ciclo. De modo que «hay rodeo» y «hay ciclo por la arista» son la misma frase dicha de dos maneras.

El corazón en una frase: todo el teorema es que *un rodeo más la arista es un ciclo*, y por eso las dos implicaciones se prueban con el mismo gesto —pegar la arista al camino, o quitar la arista del ciclo— hecho en direcciones opuestas.

Paso 1, (a) $\Rightarrow$ (b) por contrarrecíproco: si hay ciclo, el resto del ciclo es el rodeo. Supóngase que $a = uv$ pertenece a un ciclo. Recorriendo el resto del ciclo se obtiene un camino de u a v que no usa la arista uv , y ese camino sigue existiendo en $G - a$. Por tanto u y v siguen conectados en $G - a$, todo lo que estaba conectado a través de uv lo sigue estando por el rodeo, y el número de componentes no aumenta: a no es puente.

Paso 2, (b) $\Rightarrow$ (a): si hubiera rodeo, se cerraría un ciclo prohibido (el núcleo de la prueba). Es la implicación que hace útil el teorema, porque convierte la ausencia de ciclos por la arista en una afirmación sobre componentes conexas. Sea $a = uv$ y supóngase que a no está en ningún ciclo. Si en $G - a$ existiera un camino de u a v , añadiéndole la arista uv se obtendría un ciclo que contiene a a (el camino tiene longitud ≥ 2 porque $uv \notin A(G - a)$, luego el ciclo tiene longitud ≥ 3). Contradicción. Así que u y v quedan desconectados en $G - a$, la componente que los contenía se parte, y a es puente.

Paso 3, sobre (c): la partición requiere conexión. La fuente omite esta hipótesis, que se ha explicitado en el enunciado. Para grafos conexos la condición (c) es equivalente a las anteriores, y en ese caso se prueba como el teorema anterior: si a es puente, U es la componente de u en $G - a$ y W el resto, y todo camino de U a W tiene que salir de U por una arista que no esté en $G - a$, es decir, por a ; recíprocamente, si todo camino de U a W usa a , en $G - a$ no hay caminos de U a W y el grafo, que era conexo, se parte. Para grafos no conexos la condición (c) es engañosa: si U y W ya estaban en componentes distintas no hay ningún camino entre ellos y la condición se cumple vacíamente para cualquier arista. Por eso la caracterización que conviene usar es (b). ■

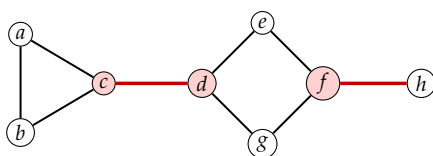
EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: DEFINIR EL PUENTE POR EL CICLO

La alternativa. Tomar (b) como definición: puente es una arista que no está en ningún ciclo. Muchos libros lo hacen así.

Su ventaja. Es una condición local y fácil de comprobar en un dibujo: para ver que una arista no es puente basta señalar un ciclo que la contenga.

Por qué no se toma aquí. Porque la definición por componentes es la misma para vértices y para aristas, y es la que mide lo que de verdad importa: cuántos trozos quedan. La condición del ciclo no tiene análogo para vértices, ya que un vértice puede estar en muchos ciclos y ser punto de corte a la vez (el centro de la pajarita). Con la definición por componentes, los dos conceptos se tratan igual y el teorema de arriba es un resultado, no un convenio.

Ejemplo (puntos de corte y puentes, a mano). **El problema.** En un grafo dibujado, localizar todos los puntos de corte y todos los puentes sin borrar los vértices y las aristas uno a uno y contar componentes cada vez. Se toma este grafo: un triángulo abc , una arista cd , un cuadrado $defg$ y una hoja h colgada de f .



Los puentes, por los ciclos. Por la caracterización de los puentes, basta ver qué aristas no están en ningún ciclo. Las tres del triángulo están en el ciclo abc y las cuatro del cuadrado en el ciclo $defg$: ninguna de esas siete es puente, y ni siquiera hace falta quitarlas. Quedan cd y fh . La arista fh no está en ningún ciclo porque h tiene grado 1, y un ciclo entra y sale de cada vértice por dos aristas distintas. La arista cd tampoco: sin ella, el triángulo queda por un lado y el resto por otro, sin ninguna arista entre los dos trozos. Los puentes son cd y fh , en rojo.

Los puntos de corte, por los caminos obligados. Tres salen gratis de la proposición del puente: c , d y f son extremos de un puente y tienen grado $3 \geq 2$, luego son puntos de corte. El cuarto extremo de puente, h , tiene grado 1 y no lo es: quitar una hoja no separa nada. Falta mirar los vértices que no tocan ningún puente, porque un punto de corte no tiene por qué tocarlo; el centro de la pajarita lo muestra. Aquí son a , b , e y g , y ninguno separa. Al quitar a , el vértice b sigue unido a c , y c al resto; al quitar b pasa lo mismo con a . Al quitar e o g del cuadrado queda el camino $d g f$ o $d e f$, que mantiene todo unido.

Qué se ha ganado. El grafo tiene tres puntos de corte, c , d y f , y dos puentes, cd y fh , y cada afirmación tiene su testigo: un ciclo para cada arista que no es puente, dos vértices separados para cada punto de corte. Los trozos que quedan entre los puntos de corte —el triángulo, la arista cd , el cuadrado y la arista fh — son las piezas de la sección siguiente.

Dónde se falla. En creer que los dos extremos de un puente son siempre puntos de corte: h no lo es. Y en buscar los puntos de corte donde el dibujo se estrecha: e y g parecen cuellos del cuadrado y no separan nada, porque el cuadrado ofrece siempre el otro lado.

Más operaciones

Definición (unión, intersección y suma). Sean G y H grafos. Se definen

$$G \sqcup H := (V(G) \cup V(H), A(G) \cup A(H)), \quad G \sqcap H := (V(G) \cap V(H), A(G) \cap A(H)).$$

Si $V(G) \cap V(H) = \emptyset$, la **suma** de G y H es el grafo

$$G + H := (V(G) \cup V(H), A(G) \cup A(H) \cup \{uv : u \in V(G), v \in V(H)\}) :$$

la unión de los dos, más todas las aristas posibles entre un vértice de G y uno de H .

Observación. Dos casos particulares con nombre propio:

1. *Adición de un vértice:* $G + K_1$ añade un vértice adyacente a todos los de G . Es lo que se hizo en el ejercicio del contorno de $G + a$: $C_4 + K_1 = W_5$.
2. *Adición de una arista:* dados $u \neq v$ no adyacentes en G , el grafo $G + uv$ se obtiene añadiendo la arista uv . También se escribe $G + K_2$, aunque no es una suma en el sentido de arriba sino la unión $G \sqcup K_2$ con K_2 el grafo de vértices u, v y arista uv .

Ejemplo. En estas sumas se toman copias con conjuntos de vértices disjuntos, y las igualdades se entienden salvo isomorfismo. Así, $K_m + K_n = K_{m+n}$, y si $\overline{K_m}$ denota el grafo de m vértices sin aristas, $\overline{K_m} + \overline{K_n}$ es el bipartito completo $K_{m,n}$ de la sección 2.9. La rueda es $W_n = C_{n-1} + K_1$.

Ejercicios: puntos de corte y puentes

Ejercicio 2.14. *Dos vértices que no son puntos de corte* EXÁMENES DE JUNIO 2011 Y MAYO 2024

Sea G un grafo conexo con al menos dos vértices. Probar que G tiene al menos dos vértices que no son puntos de corte. • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

Resolución. La idea. Un punto de corte es una puerta: hay vértices a los que solo se llega pasando por él. Un vértice que está en el borde del grafo, tan lejos como se pueda de algún otro, no puede ser la puerta de nadie, porque lo que hubiera detrás de esa puerta estaría todavía más lejos. Las dos vías que siguen eligen ese borde de dos maneras, con los extremos de un diámetro o con los extremos de un camino que ya no se puede alargar, y las dos terminan igual: si el vértice elegido separara algo, lo separado permitiría ir más lejos que el máximo que se había elegido. En el grafo del ejemplo de los puntos de corte, el diámetro es 5 y lo realizan, por ejemplo, a y h ; ni a ni h separan nada, mientras que detrás de c , que sí es puerta, quedan a y b .

Primera vía: los extremos de un diámetro.

Paso 1: se eligen los dos candidatos. Como G es conexo y tiene al menos dos vértices, $\text{diam}(G) \geq 1$ y existen u, v con $d(u, v) = \text{diam}(G)$; en particular $u \neq v$. Se prueba que u no es punto de corte, y por simetría tampoco lo será v .

Paso 2: si u fuera una puerta, habría alguien detrás. Supóngase que u es punto de corte. Entonces $G - u$ tiene al menos dos componentes; v está en una de ellas, y sea w un vértice de otra. Por el teorema de caracterización de los puntos de corte, todo camino de w a v pasa por u .

Paso 3: ese alguien estaría más lejos que el diámetro (el núcleo de la prueba). En particular una geodésica de w a v pasa por u , y se parte en un tramo de w a u , de longitud ≥ 1 , y otro de u a v , de longitud $\geq d(u, v)$. Luego

$$d(w, v) \geq 1 + d(u, v) = 1 + \text{diam}(G) > \text{diam}(G),$$

lo que contradice que el diámetro es la mayor distancia. Por tanto u no es punto de corte, y v tampoco.

Segunda vía: los extremos de un arco maximal. Sea $\alpha = (u_0, u_1, \dots, u_k)$ un arco de longitud máxima en G , con $k \geq 1$ porque hay alguna arista. Se prueba que u_0 no es punto de corte (y lo mismo vale para u_k). Si lo fuera, $G - u_0$ tendría una componente C que no contiene a

u_1 , mientras que $u_1, \dots, u_k$ están todos en la componente de u_1 , unidos por el propio arco. Como G es conexo, u_0 tiene algún vecino w en C (si no, C sería también una componente de G distinta de la de u_0). Y $w \notin \{u_1, \dots, u_k\}$, así que $(w, u_0, u_1, \dots, u_k)$ es un arco de longitud $k + 1$: contradicción con la maximalidad de α . ■

Encapsulado. Lo que hay que llevarse para reconstruir la prueba cabe en tres líneas. Se toman u y v a distancia máxima. Si u separara, un vértice w de otra componente de $G - u$ solo llegaría a v pasando por u . Entonces $d(w, v) \geq 1 + d(u, v)$, que es más que el diámetro. La segunda vía es la misma idea con un arco de longitud máxima: el vecino de u_0 al otro lado de la puerta alargaría el arco.

Qué hace cada hipótesis. La conexión la necesita la prueba más que el resultado: sin ella el diámetro no está definido. La conclusión sigue siendo cierta en cualquier grafo con dos vértices o más, porque un punto de corte de G lo es también de su componente, y un vértice aislado nunca es punto de corte (al quitarlo, las componentes bajan). Basta aplicar el ejercicio a una componente con dos vértices o más, y si no la hay, todos los vértices están aislados. Que haya al menos dos vértices es lo que da dos candidatos distintos: K_1 tiene uno solo.

Otra vía (lo que dice de los árboles). En un árbol los vértices que no son puntos de corte son exactamente las hojas (sección 2.8), y este ejercicio, leído en un árbol, dice que todo árbol con al menos dos vértices tiene al menos dos hojas. Es el ejercicio 2.19 de la relación, demostrado con el mismo arco maximal.

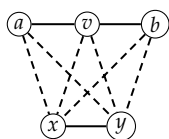
QUÉ DEJA. Los extremos de un arco maximal (o de un diámetro) nunca son puntos de corte. Es la tercera vez que el arco maximal resuelve un ejercicio de este capítulo.

Ejercicio 2.15. *Puntos de corte y suma de grafos* EXAMEN DE NOVIEMBRE 2013

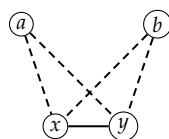
- (a) Si G es un grafo conexo con un punto de corte v y H es otro grafo conexo, ¿es v un punto de corte de $G + H$?
- (b) Probar que si G y H son conexos y $|V(G)| + |V(H)| \geq 3$, entonces $G + H$ no tiene puntos de corte ni puentes.

Resolución. La idea. En $G + H$ cada vértice de G ve a todos los de H , y al revés: H hace de plaza a la que dan todas las calles de G . Quitar un vértice de G no puede dejar aislado a nadie, porque todos siguen dando a la plaza. Y ninguna arista es imprescindible, porque cada una tiene un triángulo a mano con un vértice del otro lado.

(a) **Falso.** Sea G el camino $a v b$, en el que v es punto de corte, y $H = K_2$ con vértices x, y . En $G + H$ el vértice v es adyacente a a, b, x, y , y al quitarlo queda el grafo de vértices a, b, x, y con aristas xy, ax, ay, bx, by , que es conexo. Luego v no es punto de corte de $G + H$. El mismo argumento muestra que *ningún* vértice de G es punto de corte de $G + H$ en cuanto H tiene al menos un vértice, que es el apartado (b).



$G + H$



$G + H - v$: conexo

- (b) *Puntos de corte.* Sea $z \in V(G + H)$; por simetría, $z \in V(G)$. El grafo $(G + H) - z$

contiene a H entero, que es conexo y no vacío, y cada vértice de $G - z$ es adyacente a todos los vértices de H . Por tanto todo vértice de $(G + H) - z$ está conectado con cualquier vértice de H , y $(G + H) - z$ es conexo. Como $G + H$ también lo es, z no es punto de corte.

Puentes. Basta ver que cada arista está en un triángulo. Una arista uu' interior a G forma triángulo con cualquier $h \in V(H)$: $u u' h u$. Lo mismo para una arista interior a H . Sea ahora una arista cruzada uh con $u \in V(G)$, $h \in V(H)$. Si $|V(G)| \geq 2$, como G es conexo u tiene un vecino u' en G , y $u u' h u$ es un triángulo. Si $|V(G)| = 1$, entonces $|V(H)| \geq 2$, h tiene un vecino h' en H y $u h h' u$ es un triángulo. En todos los casos la arista está en un ciclo y no es puente. ■

Dónde se falla. En olvidar la hipótesis $|V(G)| + |V(H)| \geq 3$. El grafo $K_1 + K_1 = K_2$ es conexo y no tiene puntos de corte, pero su única arista es un puente. Es el único caso en que falla, y es justo el caso en que no hay tercer vértice con el que formar un triángulo. En (a), el fallo es el contrario: dar la respuesta sin el contraejemplo. Un «falso» se prueba con un solo ejemplo, pero hay que exhibirlo entero, con el grafo y la comprobación.

2.7 Grafos no separables y bloques

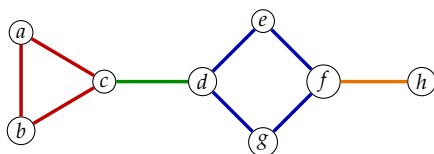
LA PREGUNTA

Una vez localizados los puntos débiles de una red, la pregunta siguiente es qué queda entre ellos. Un ingeniero que analiza una estructura, un biólogo que mira una red de proteínas o un sociólogo que estudia un grupo humano quieren lo mismo: partir el sistema en piezas sólidas, sin punto débil interno, unidas entre sí por los puntos críticos, como cuentas en un collar. ¿Existe siempre esa descomposición, es única, y cómo se reconoce una pieza «sólida» sin tener que probar a quitar cada uno de sus vértices?

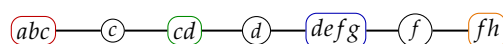
Definición (grafo no separable y bloque). Un grafo G es **no separable** si es conexo y no tiene puntos de corte. Un **bloque** de G es un subgrafo $B \subseteq G$ que es no separable y maximal (respecto de la inclusión) entre los subgrafos no separables de G .

Son no separables K_1 , K_2 , los ciclos, los completos, las ruedas, y en general cualquier grafo conexo «sin cintura». Un bloque de G es un trozo no separable que no se puede agrandar dentro de G sin que aparezca un punto de corte. Los bloques de la pajarita son sus dos triángulos; los de un camino son sus aristas; los de un grafo no separable, él mismo.

Los bloques de un grafo concreto. En el grafo del ejemplo de los puntos de corte de la sección anterior hay cuatro bloques: el triángulo abc , la arista cd , el cuadrado $defg$ y la arista fh . A la izquierda del dibujo van pintados de colores distintos; a la derecha, el esquema de cómo se enganchan, con un nudo por bloque, un nudo por punto de corte y una línea cada vez que un punto de corte pertenece a un bloque.



los cuatro bloques



bloques y puntos de corte

Cómo se encuentran a mano. Cada puente es un bloque él solo, un K_2 . Las demás aristas se agrupan con una regla: dos aristas van al mismo bloque exactamente cuando hay un ciclo que pasa por las dos. Las dos mitades de esa regla salen de esta sección: un ciclo está entero dentro de un único bloque (proposición de abajo), y dentro de un bloque con tres o más vértices dos aristas cualesquiera están en un ciclo común (el teorema de caracterización). Aquí, el ciclo abc junta las aristas del triángulo y el ciclo $defg$ las del cuadrado, y ningún ciclo pasa a la vez por una arista del triángulo y otra del cuadrado, porque tendría que cruzar el puente cd dos veces.

Qué se ha ganado. La respuesta a la pregunta del principio de la sección, en un caso concreto. La descomposición existe y es única, porque cada arista está en un solo bloque. Las piezas se tocan solo en los puntos de corte, y el esquema de la derecha no tiene ciclos, que es lo que dice el ejercicio de la estructura de los bloques. Aquí el esquema es un camino porque cada punto de corte está en dos bloques exactamente. Si de d colgara además otra hoja, d estaría en tres bloques y el esquema se ramificaría.

Proposición. Sea G un grafo. Entonces:

- (a) toda arista de G pertenece al menos a un bloque de G ;
- (b) ninguna arista pertenece a dos bloques distintos.

En particular, cada arista de G está en exactamente uno de sus bloques.

La idea, en una frase: los bloques parten las aristas del grafo en cajas sin solapamiento, y las dos mitades de la prueba son «cada arista encuentra caja» —porque el grafo es finito y siempre hay un maximal— y «no encuentra dos» —porque dos cajas que compartieran una arista se fundirían en una mayor, contra la maximalidad—.

Paso 1, (a): toda arista está en algún bloque, por maximalidad. Sea $e \in A(G)$ y sea $\mathcal{F}$ la familia de los subgrafos de G que contienen a e y son no separables. No es vacía: el subgrafo formado por e y sus dos extremos es un K_2 , conexo y sin puntos de corte. Como G es finito, $\mathcal{F}$ tiene un elemento maximal respecto de la inclusión, y ese maximal es un bloque que contiene a e : cualquier subgrafo no separable que lo contuviera contendría a e y estaría en $\mathcal{F}$.

Paso 2, (b): dos bloques con una arista común se pegarían en uno mayor (el núcleo de la prueba). Es aquí donde se demuestra algo, porque hay que ver que pegar dos piezas no separables por una arista compartida vuelve a dar una pieza no separable, y eso no es evidente. Supóngase que e pertenece a dos bloques distintos B_1 y B_2 . Se prueba que $B_1 \sqcup B_2$ es no separable, lo que contradice la maximalidad de B_1 (porque $B_1 \subsetneq B_1 \sqcup B_2$, ya que $B_1 \neq B_2$ y ninguno contiene al otro por maximalidad). Es conexo, porque B_1 y B_2 son conexos y comparten los extremos de e . Sea v un vértice cualquiera de $B_1 \sqcup B_2$; hay que ver que $(B_1 \sqcup B_2) - v$ es conexo. Los grafos $B_1 - v$ y $B_2 - v$ son conexos (si $v \in B_i$, porque v no es punto de corte de B_i ; si $v \notin B_i$, porque $B_i - v = B_i$), y comparten al menos un extremo de e , ya que v es a lo sumo uno de los dos. La unión de dos grafos conexos con un vértice en común es conexa, y $(B_1 \sqcup B_2) - v = (B_1 - v) \sqcup (B_2 - v)$. Luego $B_1 \sqcup B_2$ no tiene puntos de corte.

Todo el paso cabe en una frase —« v separaría vértices de B_1 o de B_2 »—; lo de arriba es esa frase con todos los detalles. ■

Proposición. Todo ciclo de G está contenido completamente en un único bloque.

Sea C un ciclo de G . Es conexo y no tiene puntos de corte (quitar un vértice de un ciclo deja un camino), luego es no separable. La familia de subgrafos no separables de G que contienen a C no es vacía y tiene un maximal, que es un bloque que contiene a C . Si dos bloques distintos contuvieran a C , cualquier arista de C estaría en dos bloques distintos, contra la proposición anterior. ■

Teorema (caracterización de los bloques). Sea G un grafo conexo con al menos 3 vértices. Son equivalentes:

- (a) G es un bloque (es decir, no separable).
- (b) Cualquier par de vértices de G están en un ciclo común.
- (c) Cualquier par formado por un vértice y una arista de G están en un ciclo común.
- (d) Cualquier par de aristas de G están en un ciclo común.

LA IDEA: DOS CAMINOS QUE NO SE TOCAN

Que dos vértices estén en un ciclo común es lo mismo que decir que hay dos caminos entre ellos sin vértices interiores comunes. Y eso es exactamente lo que hace que ningún vértice los pueda separar: quitar un vértice rompe a lo sumo uno de los dos caminos. El teorema dice que esa redundancia local, par a par, equivale a la ausencia global de puntos de corte. En el capítulo 4 el mismo enunciado se llama teorema de Whitney y se generaliza a k caminos con el teorema de Menger.

2.7.1 Demostración del teorema de caracterización de los bloques

La implicación (a) $\Rightarrow$ (b) es la versión para $k = 2$ del teorema de Whitney del capítulo 4, y su argumento, una inducción sobre la distancia, es el que hay que tener visto para entender Menger. Las implicaciones fáciles se hacen primero.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: LA CIUDAD SIN PLAZAS CRÍTICAS

Un bloque es una ciudad en la que ninguna plaza es crítica: se puede cerrar cualquiera de ellas y la gente sigue pudiendo ir de cualquier sitio a cualquier sitio. El teorema dice que en una ciudad así, dadas dos plazas cualesquiera, existe un *paseo circular* que pasa por las dos. Y eso ya no es evidente: la hipótesis habla de lo que ocurre al quitar una plaza, y la conclusión pide construir un circuito entero.

La construcción se acerca por pasos, y el paso es siempre el mismo. Si las dos plazas son vecinas, la calle que las une no puede ser un puente (un puente tiene un extremo crítico, salvo en la ciudad de dos plazas), y una calle que no es puente está en algún circuito: ya está. Si están más lejos, se mira la penúltima plaza del camino más corto entre ellas, que está un paso más cerca; por lo ya hecho, esa penúltima y la primera están en un circuito C . Falta colar en C la última plaza v . Y ahí es donde se gasta la hipótesis: como la penúltima plaza no es crítica, cerrándola sigue habiendo camino de v hasta C ; se sigue ese camino hasta que toca C por primera vez y se sustituye por él el tramo de C que iba de un extremo a otro pasando por la penúltima plaza. Sale un circuito nuevo que pasa por la primera plaza y por v .

Merece la pena quedarse con la *forma* del argumento, porque es la misma que la del teorema de Menger: no se prueba de golpe, se prueba desplazando un vértice cada vez y usando la conexión para tender el desvío. Reconocer esta forma de construir un desvío ayuda a seguir después el argumento de Menger.

Paso 1, (d) $\Rightarrow$ (c): se cambia un vértice por una arista incidente suya. Dados un vértice u y una arista f , como G es conexo con al menos dos vértices, u tiene alguna arista incidente e . Si $e \neq f$, un ciclo que contenga a e y f contiene a u y f . Si $e = f$, entonces u es extremo de f y basta un ciclo por f y cualquier otra arista, que existe porque G es conexo con al menos 3 vértices.

Paso 2, (c) $\Rightarrow$ (b): lo mismo por el otro extremo. Dados dos vértices u, v , sea f una arista incidente a v ; un ciclo que contenga a u y a f contiene a u y a v .

Paso 3, (b) $\Rightarrow$ (a): un ciclo ofrece siempre dos caminos, y un punto de corte no puede cortarlos los dos. Supóngase que v es punto de corte. Sean u, w vértices en componentes distintas de $G - v$. Un ciclo que contenga a u y w se parte en dos caminos de u a w sin vértices interiores comunes; v está a lo sumo en uno de ellos, y el otro es un camino de u a w en $G - v$. Contradicción.

Paso 4, (a) $\Rightarrow$ (b): inducción sobre la distancia, colando un vértice cada vez (el núcleo de la prueba). Aquí está todo el peso del teorema, y es la única implicación que no es contabilidad: hay que fabricar un ciclo que no existía, y se fabrica acercando el objetivo un paso cada vez. Sea G un bloque con al menos 3 vértices y sean $u \neq v$. Se prueba por inducción sobre $k = d(u, v)$ que u y v están en un ciclo común.

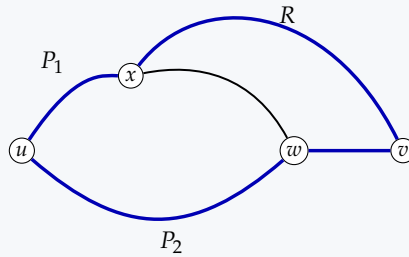
Caso base $k = 1$. La arista uv no es puente: si lo fuera, por el corolario de la sección anterior G sería K_2 , que no tiene 3 vértices. Por la caracterización de los puentes, uv está en un ciclo, que contiene a u y v .

Paso inductivo $k \geq 2$: se tiende un desvío que evita w y se injerta en el ciclo. Sea $u = w_0, w_1, \dots, w_k = v$ una geodésica y sea $w = w_{k-1}$, de modo que $d(u, w) = k - 1$ y $wv \in A(G)$. Por hipótesis de inducción hay un ciclo C por u y w , que se descompone en dos caminos P_1, P_2 de u a w sin vértices interiores comunes. Si v está en C , no hay nada que probar. Supóngase $v \notin C$.

Como w no es punto de corte, $G - w$ es conexo y existe en él un camino Q de u a v . Sea x el último vértice de Q que pertenece a C (existe porque $u \in C$), y sea R el tramo de Q desde x hasta v : sus vértices interiores están fuera de C , y $w \notin R$ porque Q evita w . Hay dos casos.

Si $x = u$: el camino cerrado P_1 (de u a w), la arista wv y R recorrido al revés (de v a u) es un ciclo, porque P_1 vive en C , v e interior de R están fuera de C , y w solo aparece una vez. Contiene a u y a v .

Si $x \neq u$: entonces $x \neq w$, y x es un vértice interior de P_1 o de P_2 ; supóngase $x \in P_1$. El camino cerrado formado por P_2 (de u a w), la arista wv , R al revés (de v a x) y el tramo de P_1 desde x hasta u es un ciclo: P_1 y P_2 solo comparten u y w , v y el interior de R están fuera de C , y $x \neq w$. Contiene a u y a v .



Paso 5, (b) $\Rightarrow$ (c) y (c) $\Rightarrow$ (d): el truco de subdividir, que convierte una arista en un vértice. Dada una arista $e = xy$, sea G' el grafo que se obtiene sustituyendo e por un camino xzy con un vértice nuevo z . Si G es un bloque con al menos 3 vértices, G' también: es conexo; $G' - z = G - e$ es conexo porque e no es puente (caso $k = 1$ de arriba); $G' - x$ es $G - x$ con un vértice z colgado de y , conexo (igual con $G' - y$, intercambiando los papeles de x y y : queda $G - y$ con z colgado de x); y $G' - t$ para $t \notin \{x, y, z\}$ es $G - t$ con e subdividida, conexo. Ahora, dado un vértice u , por (a) $\Rightarrow$ (b) aplicado a G' hay un ciclo de G' por u y z , que pasa necesariamente por xz y zy ; sustituyendo el tramo xzy por la arista e se obtiene un ciclo de G por u y e . Eso prueba (c) a partir de (a), y como (b) $\Rightarrow$ (a) ya está, prueba (b) $\Rightarrow$ (c). Para (c) $\Rightarrow$ (d), dadas dos aristas distintas e, f , se subdivide e con z y se aplica (c) a z y f en G' . Si las dos aristas coinciden, basta un ciclo por esa arista, cuya existencia ya da (c). ■

Encapsulado. Tres ideas bastan para reconstruir la prueba. Un ciclo por dos vértices son dos caminos sin vértices interiores comunes, y un vértice solo puede cortar uno de ellos: de ahí (b) $\Rightarrow$ (a). Para (a) $\Rightarrow$ (b) se avanza por una geodésica colando un vértice cada vez; el desvío que evita el penúltimo vértice existe porque ese vértice no es de corte, y se injerta en el ciclo que ya se tenía. Y subdividir una arista la convierte en un vértice, lo que traslada a las aristas lo probado para los vértices: (c) y (d).

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: DESCOMPONER EN PIEZAS MÁXIMAS DE OTRO TIPO

La alternativa. Partir un grafo en sus subgrafos completos maximales (las «camarillas», cliques) en vez de en sus bloques. Es lo que hacen los sociólogos cuando buscan grupos de amigos en una red.

Su ventaja. Un completo es la pieza más sólida posible, y las camarillas se ven a simple vista. **Qué la hunde como descomposición.** Que las camarillas se solapan de cualquier manera (una arista puede estar en muchas) y no detectan por sí solas la ausencia de puntos de corte: un ciclo largo no tiene camarillas mayores que una arista y sin embargo es una sola pieza sin puntos débiles. Los bloques están hechos a medida de la pregunta «¿dónde se rompe?»: cada arista está en exactamente uno, dos bloques distintos comparten a lo sumo un vértice, y ese vértice es un punto de corte. Es el ejercicio siguiente, y la estructura que describe (bloques y puntos de corte alternados, sin ciclos entre ellos) forma un árbol por cada componente conexa de G .

Ejercicios: bloques

Ejercicio 2.16. *La estructura de los bloques*

Sea G un grafo y sean $B_1 \neq B_2$ dos bloques de G . Probar:

- B_1 y B_2 tienen a lo sumo un vértice en común.
- Si tienen un vértice v en común, entonces v es un punto de corte de G .
- Todo punto de corte de G pertenece al menos a dos bloques.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

- Para (a), repite el argumento de «la unión de dos no separables con dos vértices en común es no separable».
- Para (b), si v no fuera punto de corte, los dos bloques seguirían comunicados al quitarlo. Un camino entre ellos que evite v permitiría agrandar B_1 .

Resolución. La idea. Las tres afirmaciones se prueban con el gesto de la proposición de las aristas. Si dos piezas no separables se tocan en dos sitios, o se pueden unir por un camino que evita su punto de contacto, su unión sigue siendo no separable y contradice la maximalidad. Por eso dos bloques solo pueden tocarse en un vértice, y ese vértice tiene que ser el único paso entre ellos.

(a) Supóngase que B_1 y B_2 comparten dos vértices $u \neq u'$. Entonces $B_1 \sqcup B_2$ es conexo (comparten vértices) y no tiene puntos de corte: para todo t , los grafos $B_1 - t$ y $B_2 - t$ son conexos y comparten al menos uno de u, u' , luego su unión es conexa. Así $B_1 \sqcup B_2$ es no separable y contiene estrictamente a B_1 , contra la maximalidad.

(b) Sea $B_1 \cap B_2 = \{v\}$ (solo el vértice, sin aristas, por (a) y por la proposición de las aristas). Los dos bloques tienen al menos dos vértices: si $B_1 = K_1 = \{v\}$ fuera un bloque, v sería un vértice aislado de G y no podría estar en $B_2 \neq B_1$. Existen pues $x \in V(B_1) \setminus \{v\}$ e $y \in V(B_2) \setminus \{v\}$. Supóngase que v no es punto de corte. La componente de G que contiene a v sigue siendo conexa al quitarlo: no puede desaparecer, pues contiene también a x e y . Por tanto hay un camino de x a y en $G - v$; tómese uno, P , cuyos vértices interiores no estén en $B_1 \sqcup B_2$ (basta recortar P entre su último vértice en B_1 y el primer vértice posterior en B_2 , y renombrar x, y). Sea $H = B_1 \sqcup B_2 \sqcup P$. Se afirma que H es no separable, lo que contradice la maximalidad de B_1 . Es conexo. Sea t un vértice de H :

- si $t = v$: $(B_1 - v) \sqcup P \sqcup (B_2 - v)$ es conexo, porque $B_1 - v$ y $B_2 - v$ son conexos y P los une sin pasar por v ;
- si $t \in B_1, t \neq v$: $B_1 - t$ es conexo y contiene a v , B_2 está entero, y lo que queda de P cuelga de $y \in B_2$ (si $t = x$) o de x y de y (si t no está en P); conexo. Simétrico si $t \in B_2$;
- si t es interior de P : $B_1 \sqcup B_2$ es conexo a través de v y los dos trozos de $P - t$ cuelgan de x y de y ; conexo.

Luego v es punto de corte de G .

(c) Sea v punto de corte de G , y sean u, w vecinos de v en componentes distintas de $G - v$ (existen: la componente de v se divide en al menos dos al quitarlo, y en cada una hay algún vecino de v , porque en G estaban unidas a v). Las aristas vu y vw están cada una en un bloque; si fuera el mismo bloque B , entonces $B - v$ sería conexo y contendría un camino de u a w que evita v , imposible. Luego v está en dos bloques distintos. ■

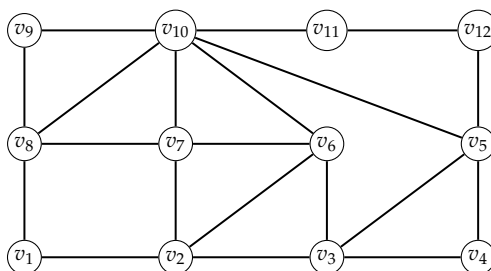
QUÉ DEJA. Los bloques se pegan por puntos de corte y solo por ellos, de uno en uno. El grafo cuyos vértices son los bloques y los puntos de corte, con un bloque unido a los puntos de corte que contiene,

es un árbol si G es conexo; si no, hay un árbol por cada componente. Es la imagen de las piezas unidas por puntos críticos de la pregunta inicial.

Ejercicio 2.17. Estudio de un grafo dibujado EXAMEN DE NOVIEMBRE 2011

Sea G el grafo de la figura, con 12 vértices y 20 aristas. Se pide:

- calcular su diámetro, su radio y su circunferencia;
- decir si tiene puntos de corte y si tiene puentes;
- dar un subgrafo spanning y conexo de G que contenga exactamente 3 bloques.



Resolución. La idea. Son tres preguntas distintas, y hay un orden que ahorra trabajo. Primero se escriben la lista de aristas y los grados, que sirven de comprobación: los grados tienen que sumar el doble de las aristas. Las distancias se sacan con las capas del ejemplo de la sección de invariantes métricos, sin fiarse de la vista. Y para (b) conviene buscar un ciclo que pase por todos los vértices, porque si existe liquida a la vez la circunferencia, los puntos de corte y casi todos los puentes.

Las aristas son $v_1v_2, v_1v_8, v_2v_3, v_2v_6, v_2v_7, v_3v_4, v_3v_5, v_3v_6, v_4v_5, v_5v_{10}, v_5v_{12}, v_6v_7, v_6v_{10}, v_7v_8, v_7v_{10}, v_8v_9, v_8v_{10}, v_9v_{10}, v_{10}v_{11}, v_{11}v_{12}$. Los grados son 2, 4, 4, 2, 4, 4, 4, 4, 2, 6, 2, 2, que suman 40.

(a) *Excentricidades.* Se da para cada vértice una geodésica hasta su vértice más lejano; para comprobar que ningún otro queda más lejos, se exploran los vecinos por capas de distancia hasta alcanzar todos los vértices.

$$\begin{array}{llll}
 \varepsilon(v_1) = 4 & v_1v_2v_3v_5v_{12} & \varepsilon(v_7) = 3 & v_7v_{10}v_{11}v_{12} \\
 \varepsilon(v_2) = 3 & v_2v_3v_5v_{12} & \varepsilon(v_8) = 3 & v_8v_{10}v_5v_4 \\
 \varepsilon(v_3) = 3 & v_3v_5v_{12}v_{11} & \varepsilon(v_9) = 3 & v_9v_{10}v_5v_4 \\
 \varepsilon(v_4) = 3 & v_4v_5v_{10}v_8 & \varepsilon(v_{10}) = 2 & v_{10}v_5v_4 \\
 \varepsilon(v_5) = 3 & v_5v_{10}v_8v_1 & \varepsilon(v_{11}) = 3 & v_{11}v_{10}v_5v_4 \\
 \varepsilon(v_6) = 3 & v_6v_{10}v_{11}v_{12} & \varepsilon(v_{12}) = 4 & v_{12}v_{11}v_{10}v_8v_1
 \end{array}$$

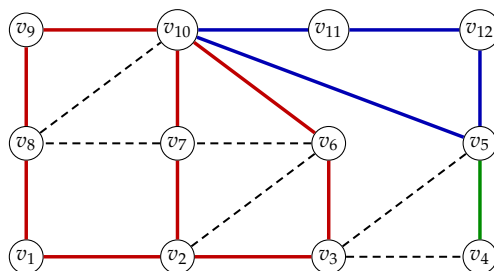
Por ejemplo, $d(v_1, v_{12}) = 4$: los vecinos de v_1 son v_2, v_8 , los de v_{12} son v_5, v_{11} , y ningún vecino de v_1 es adyacente a un vecino de v_{12} , luego no hay camino de longitud ≤ 3 . Las capas desde los dos extremos de la tabla lo confirman. Desde v_1 son $\{v_1\}$, $\{v_2, v_8\}$, $\{v_3, v_6, v_7, v_9, v_{10}\}$, $\{v_4, v_5, v_{11}\}$ y $\{v_{12}\}$: cinco capas, excentricidad 4. Desde v_{10} son $\{v_{10}\}$, $\{v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{11}\}$ y $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_{12}\}$: tres capas, excentricidad 2. Y $\varepsilon(v_{10}) = 2$ porque v_{10} es adyacente a $v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{11}$ y cada uno de los otros cinco vértices es adyacente a alguno de ellos. Por tanto

$$\text{diam}(G) = 4, \quad r(G) = 2, \quad Z(G) = \{v_{10}\}.$$

Circunferencia. El ciclo $v_1v_2v_7v_6v_3v_4v_5v_{12}v_{11}v_{10}v_9v_8v_1$ pasa por los doce vértices (todas sus aristas están en la lista), luego $c(G) = 12$, el máximo posible.

(b) No hay puentes: cada arista está en un ciclo. Las doce del ciclo hamiltoniano anterior, por él mismo; las ocho restantes en los ciclos siguientes (siete triángulos y un cuadrado): v_2v_6 en $v_2v_6v_7$, v_2v_3 en $v_2v_3v_6$, v_3v_5 en $v_3v_4v_5$, v_6v_{10} en $v_6v_7v_{10}$, v_7v_{10} en el mismo, v_8v_{10} en $v_8v_9v_{10}$, v_7v_8 en $v_7v_8v_{10}$, v_5v_{10} en $v_5v_{10}v_{11}v_{12}$. Tampoco hay puntos de corte: el ciclo hamiltoniano C contiene todos los vértices, y $C - t$ es un camino, conexo, que sigue conteniendo a todos los demás vértices; luego $G - t \supseteq C - t$ es conexo para todo t . (G es, de hecho, un bloque.)

(c) Se toma el subgrafo S con los 12 vértices y las 14 aristas siguientes:



rojo: B_1 ; azul: B_2 ; verde: B_3 ; discontinuo: aristas quitadas

- B_1 : el ciclo $v_1v_2v_3v_6v_{10}v_9v_8v_1$ más el camino $v_2v_7v_{10}$, que une dos vértices del ciclo. Es no separable: cualquier par de sus vértices está en un ciclo común (si uno de ellos es v_7 , se usa el ciclo $v_2v_7v_{10}v_9v_8v_1v_2$ o el $v_2v_7v_{10}v_6v_3v_2$).
- B_2 : el ciclo $v_{10}v_{11}v_{12}v_5v_{10}$.
- B_3 : la arista v_5v_4 , un K_2 .

S es conexo (los tres trozos se tocan) y spanning. Sus puntos de corte son v_{10} , que separa B_1 de B_2 , y v_5 , que separa B_2 de B_3 ; y ningún otro vértice lo es, porque cada $B_i - t$ es conexo. Los bloques de S son exactamente B_1, B_2, B_3 : cada uno es no separable, y no se puede agrandar dentro de S porque cualquier subgrafo mayor contendría a v_{10} o v_5 como punto de corte. Son tres, como se pedía. ■

Qué hemos aprendido. El ciclo que pasa por los doce vértices es la herramienta del ejercicio: da la circunferencia máxima, prueba que no hay puntos de corte y deja solo ocho aristas a las que hay que buscar un ciclo aparte. En (c) el trabajo es el inverso: se quitan aristas hasta que aparezcan puntos de corte donde se quieren, y después se comprueba que cada pieza es no separable y que no se puede agrandar.

Dónde se falla. En (a), en dar una excentricidad por una geodésica encontrada, sin comprobar que no queda nada más lejos: las capas son esa comprobación. En (c), en contar los bloques de G en lugar de los del subgrafo S , que son los que se piden, y en olvidar que una arista suelta como v_5v_4 también es un bloque, un K_2 .

2.8 Árboles

LA PREGUNTA

En 1926 la compañía eléctrica de Moravia del Sur encargó al matemático Otakar Borůvka que diseñara la red que llevaría la electricidad a todos los pueblos de la región gastando el menor cable posible. La primera observación de Borůvka fue que la red óptima no puede contener ningún circuito cerrado: si lo tuviera, quitando un tramo del circuito todo seguiría conectado y se ahorraría cable. La red más barata que

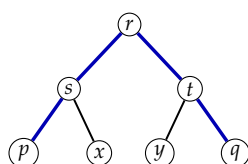
conecta todo es la que no tiene nada de sobra. ¿Qué estructura tiene una red conexa en la que cada enlace es imprescindible, y qué se puede decir de ella con solo saber cuántos nodos tiene?

Definición (árbol y bosque). Un grafo G es **acíclico** si no contiene ciclos, es decir, si C_n no es subgrafo de G para ningún $n \geq 3$. Un grafo es un **árbol** si es conexo y acíclico. Un grafo es un **bosque** si es disconexo y acíclico.

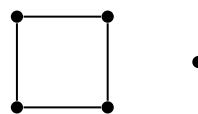
Observación. Un bosque es un grafo cuyas componentes conexas son árboles: una unión disjunta de árboles. (Muchos libros llaman bosque a todo grafo acíclico, conexo o no; aquí la palabra se reserva para el caso disconexo.)

Los árboles son los grafos conexos mínimos, en el sentido de Borůvka: quitar cualquier arista los desconecta. Los caminos P_n y las estrellas $K_{1,n}$ son árboles; un ciclo no lo es. El teorema siguiente reúne cuatro maneras de decir «árbol», y es el resultado del capítulo que más se usa después; se le llama «el teorema de caracterización de árboles».

Antes del enunciado, dos dibujos que conviene tener delante. A la izquierda, un árbol de siete vértices: entre las hojas p y q hay un único camino, en azul, y cualquier arista que se quite deja a alguien incomunicado. A la derecha, un cuadrado con un vértice suelto: cinco vértices y cuatro aristas, la misma cuenta que un árbol de cinco vértices, y sin embargo en el cuadrado sobra una arista y al vértice suelto le falta la suya.



un árbol: camino único de p a q



C_4 y un vértice suelto: 5 y 4

Teorema (caracterización de los árboles). Sea G un grafo con al menos un vértice. Son equivalentes:

- (a) G es un árbol.
- (b) Cualquier par de vértices de G están unidos por un único camino simple en G .
- (c) G es conexo y toda arista es un puente.
- (d) G es conexo y $|V(G)| = |A(G)| + 1$.

El enunciado no necesita pedir más de una arista: la demostración vale igual sin ese requisito, y el caso K_1 (un vértice, cero aristas) cumple las cuatro condiciones.

LA IDEA: CUATRO MANERAS DE DECIR «NO SOBRA NADA»

La intuición falsa, y hay dos. La primera es creer que la cuenta de aristas basta por sí sola: « n vértices y $n - 1$ aristas, luego árbol». No. Un cuadrado con un vértice suelto al lado tiene cinco vértices y cuatro aristas, y ni es conexo ni es acíclico. La cuenta correcta de aristas es compatible con tener un ciclo de más en un sitio y un trozo suelto en otro: los dos defectos se compensan en el recuento. Por eso (d) lleva pegada la palabra «conexo», y por eso quitarla arruina el teorema.

La segunda es creer que las cuatro condiciones son equivalentes «por definición», de puro evidentes. No lo son: (b) habla de caminos, (c) de puentes y (d) de un número,

y cada implicación cuesta un argumento distinto. Es justamente esa disparidad la que hace útil el teorema: da cuatro herramientas intercambiables, y en cada problema conviene una.

La imagen: la red de Borůvka, tensada al máximo. Piense en el grafo como una red de cables que conecta pueblos, y que un contable ha ido recortando hasta que ya no se puede recortar más sin dejar a alguien a oscuras. ¿Qué aspecto tiene esa red?

- No puede tener **rodeos**: un rodeo es cable de sobra, porque cortando un tramo todo seguiría conectado. Eso es (a), *acíclico*.
- Entre dos pueblos hay **una ruta y solo una**: dos rutas distintas serían, otra vez, un rodeo. Eso es (b).
- **Cada cable es imprescindible**: cortar cualquiera deja a alguien incomunicado. Eso es (c), toda arista es puente.
- Y el número de cables está **determinado**: uno por cada pueblo salvo el primero: al construir el árbol desde un pueblo inicial y extender la parte ya conectada, cada cable incorpora exactamente un pueblo nuevo. Eso es (d), $|A(G)| = |V(G)| - 1$.

La imagen predice el enunciado entero: las cuatro frases no son cuatro propiedades que resulten coincidir, son cuatro maneras de mirar la misma red mínima —desde los ciclos, desde los caminos, desde las aristas y desde la aritmética—.

El corazón en una frase: *al hacer crecer un árbol desde un vértice, cada arista que lo extiende incorpora exactamente un vértice nuevo*, y las cuatro condiciones son formas de decir que ninguna arista se dedica a otra cosa. La demostración recorre el ciclo $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$, que es la manera económica de probar cuatro equivalencias: con cuatro implicaciones en lugar de las doce que harían falta una a una.

Paso 1, $(a) \Rightarrow (b)$: dos caminos distintos siempre esconden un ciclo. Sea G un árbol y sean u, v dos vértices. Hay al menos un camino por ser conexo. Supóngase que hay dos caminos distintos C_1 y C_2 de u a v . Si solo tienen en común los vértices u y v , concatenando C_1 con C_2 recorrido al revés se obtiene un ciclo, contradicción. Si tienen más vértices en común, sea w el primer vértice después de u , contando desde u a lo largo de C_1 , en el que los dos caminos vuelven a coincidir tras haberse separado (existe porque son distintos y ambos terminan en v). Los tramos de C_1 y C_2 entre el punto de separación y w son dos caminos sin vértices interiores comunes con los mismos extremos, y juntos forman un ciclo. Contradicción. Luego el camino es único.

Paso 2, $(b) \Rightarrow (c)$: una arista que no fuera puente daría un segundo camino. Si todo par de vértices está unido por un camino, G es conexo. Sea $e = uv$ una arista. Si e no fuera puente, existiría en $G - e$ un camino C de u a v , y entonces u y v estarían unidos por dos caminos distintos, C y (u, v) : contradicción. Luego toda arista es puente.

Paso 3, $(c) \Rightarrow (d)$: se corta por un puente y se suman las cuentas de las dos mitades (el núcleo de la prueba). Es el único paso que produce el número, y el único que necesita inducción: hay que convertir una propiedad cualitativa —toda arista es puente— en una igualdad aritmética, y aquí se hace partiendo el grafo y sumando. Por inducción sobre el número n de vértices. Si $n = 1$, hay cero aristas y $1 = 0 + 1$. Si $n = 2$ y G es conexo, tiene exactamente una arista y $2 = 1 + 1$. Sea $n \geq 3$ y supóngase (d) cierta para grafos conexos con menos de n vértices en los que toda arista es puente. Sea

$e = uv$ una arista de G . Como es puente, $G - e$ tiene más de una componente; y tiene exactamente dos, porque quitar una arista aumenta el número de componentes a lo sumo en uno: todo vértice x de la componente de e tenía en G un camino hasta u , y si ese camino usaba e , cortándolo justo antes de e se obtiene un camino de x a v o a u en $G - e$; así que en $G - e$ todo vértice sigue conectado a u o a v . Sean $G_1 \ni u$ y $G_2 \ni v$ las dos componentes de $G - e$. Cada una es conexa, tiene menos de n vértices, y todas sus aristas son puentes (una arista de G_1 que no fuera puente de G_1 estaría en un ciclo de $G_1 \subseteq G$ y no sería puente de G). Por hipótesis de inducción, $|V(G_i)| = |A(G_i)| + 1$ para $i = 1, 2$, y como las aristas de G son las de G_1 , las de G_2 y e ,

$$|V(G)| = |V(G_1)| + |V(G_2)| = |A(G_1)| + |A(G_2)| + 2 = |A(G)| + 1.$$

Paso 4, (d) $\Rightarrow$ (a): se borran aristas de ciclos y la cuenta obliga a que no hubiera ninguna. Sea G conexo con $|V(G)| = |A(G)| + 1$. Falta ver que es acíclico. Si G contiene un ciclo, sea e una arista suya; e no es puente, luego $G - e$ es conexo y tiene una arista menos. Se repite mientras queden ciclos: tras k pasos se llega a un grafo G' conexo y acíclico, es decir, un árbol, con los mismos vértices que G y con $|A(G')| = |A(G)| - k$. Por la implicación (a) $\Rightarrow$ (d), ya probada a través de (b) y (c), $|V(G')| = |A(G')| + 1$. Entonces

$$|V(G)| = |V(G')| = |A(G)| - k + 1 = |V(G)| - k,$$

de donde $k = 0$: no había ningún ciclo, y G es un árbol. ■

Encapsulado. La prueba es un ciclo de cuatro implicaciones, y cada una tiene una sola idea. Dos caminos distintos entre los mismos vértices esconden un ciclo: (a) $\Rightarrow$ (b). Una arista que no fuera puente daría un segundo camino entre sus extremos: (b) $\Rightarrow$ (c). Cortar por un puente parte el grafo en dos árboles, y las cuentas de las dos mitades se suman: (c) $\Rightarrow$ (d), que es el núcleo. Y si hubiera ciclos, quitar aristas de ellos daría un árbol con menos aristas de las que la cuenta permite: (d) $\Rightarrow$ (a).

Observación (cuál de las cuatro conviene en cada momento). Las cuatro condiciones son intercambiables, pero no son igual de útiles según lo que se quiera hacer. Si ya sabemos que el grafo es conexo, (d) permite *reconocer* un árbol contando vértices y aristas; la conexión hay que justificarla aparte. Las que sirven para *sacar consecuencias* son (b) y (c): casi todos los argumentos posteriores del libro empiezan con «como en un árbol hay un único camino entre u y v ...» o con «como toda arista de un árbol es puente...». Y (a) es la que se usa para *descartar*: basta exhibir un ciclo.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: DEFINIR ÁRBOL POR LA CUENTA DE ARISTAS

La alternativa. Tomar (d) como definición: árbol es un grafo conexo con $n - 1$ aristas. Es la más fácil de comprobar.

Su ventaja. Una vez comprobada la conexión, basta comparar dos números, sin buscar ciclos.

Por qué no se toma. Porque «conexo y acíclico» es lo que se usa en las demostraciones (cada arista es puente, cada par de vértices tiene un único camino), y porque la cuenta de aristas sin la conexión no dice nada: el grafo formado por un cuadrado C_4 y un vértice aislado tiene 5 vértices y 4 aristas, la cuenta exacta de un árbol, y no es un árbol ni de lejos —tiene un ciclo

y está partido en dos—. La proposición siguiente aclara exactamente qué añade la cuenta de aristas: con $n - 1$ aristas, conexo y acíclico son lo mismo.

Proposición. Sea G un grafo con $|V(G)| = |A(G)| + 1$. Entonces G es conexo si y solo si G es acíclico.

LA IDEA: $n - 1$ ARISTAS ES EL FILO DE LA NAVAJA

Un grafo con n vértices necesita al menos $n - 1$ aristas para estar conectado, y admite como mucho $n - 1$ sin cerrar ningún ciclo. Los dos límites se alcanzan a la vez, y ahí está el teorema: al fijar exactamente $n - 1$ aristas, el grafo se queda **sin margen para las dos cosas al mismo tiempo**. Si además de conectar tuviera un ciclo, el ciclo se comería una arista que hacía falta para llegar a algún sitio; si además de no tener ciclos estuviera partido en dos trozos, faltaría la arista que los une.

El corazón en una frase: con $n - 1$ aristas justas, sobrar y faltar son la misma cosa contada dos veces, y por eso la conexión y la ausencia de ciclos se implican mutuamente. Las dos mitades de la demostración son, en el fondo, la misma cuenta hecha en los dos sentidos: una fabrica una arista de más, la otra echa en falta $k - 1$.

Sea $n = |V(G)|$, de modo que $|A(G)| = n - 1$.

Paso 1 ($\Rightarrow$): si hubiera un ciclo, se exhiben n aristas distintas y no hay tantas (el núcleo de la prueba). La maniobra es asignar a cada vértice de fuera del ciclo una arista propia, sin repetir ninguna ni tocar las del ciclo; conseguido eso, la cuenta se cierra sola. Supóngase G conexo con un ciclo C de $k \geq 3$ vértices, que tiene k aristas. A cada uno de los $n - k$ vértices x que no están en C se le asigna la primera arista de un camino más corto de x a C (existe por ser G conexo). Esas $n - k$ aristas son distintas entre sí y distintas de las de C : la arista asignada a x va de x a un vértice x' con $d(x', C) = d(x, C) - 1$, luego dos vértices distintos no pueden recibir la misma arista (si x recibiera xx' y x' recibiera $x'x$, sus distancias a C diferirían en 1 en los dos sentidos). Por tanto $|A(G)| \geq k + (n - k) = n$, contra $|A(G)| = n - 1$.

Paso 2 ($\Leftarrow$): si estuviera partido, cada trozo se llevaría su propia arista de menos. Supóngase G acíclico y desconexo, con componentes $G_1, \dots, G_k$, $k \geq 2$. Cada G_i es conexa y acíclica, un árbol, y por el teorema $|V(G_i)| = |A(G_i)| + 1$. Sumando, $|V(G)| = |A(G)| + k$, contra $|V(G)| = |A(G)| + 1$. Luego $k = 1$: el número de componentes es exactamente el desfase entre vértices y aristas. ■

Definición (hoja). Sea T un árbol. Una **hoja** de T es un vértice de grado uno.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: POR ALGÚN SITIO HAY QUE DEJAR DE CRECER

Un árbol no puede ser todo ramificación: en cuanto se empieza a caminar por él, en algún momento hay que llegar a un final. Y como no hay ciclos, no se puede volver por donde no se ha ido, así que ese final es de verdad, un vértice del que ya no sale nada nuevo. Eso es una hoja.

La forma corta de verlo, y la que conviene tener siempre a mano porque reaparece en media docena de demostraciones, es el **argumento del camino más largo**. Tómese

en el árbol un camino simple lo más largo posible, cosa que existe porque el grafo es finito. Sus dos extremos tienen que ser hojas: si un extremo tuviera otro vecino, o bien ese vecino está fuera del camino, y entonces el camino se podía alargar (contradicción), o bien está dentro, y entonces se cierra un ciclo (imposible en un árbol). Dos extremos, dos hojas.

Ese argumento vale mucho más que este teorema, porque no usa que el grafo sea un árbol hasta el último paso. Es el mismo que prueba que todo grafo con grado mínimo ≥ 2 tiene un ciclo, y el que aparece en el ejercicio 2.9 sobre arcos y ciclos largos.

Teorema. Todo árbol no trivial (con al menos dos vértices) tiene al menos dos hojas.

El corazón en una frase: un árbol no puede crecer indefinidamente ni volver sobre sí mismo, luego tiene que **acabarse por los dos lados**, y cada final es una hoja. Se dan dos demostraciones porque las dos técnicas —inducción por corte de puente y argumento del camino maximal— reaparecen a lo largo de todo el capítulo.

Primera vía, por inducción.

Paso 1: la base. Sea T un árbol con $n \geq 2$ vértices. Si $n = 2$, $T = K_2$ y sus dos vértices son hojas. Sea $n \geq 3$ y supóngase el resultado para árboles con menos de n vértices. T tiene $n - 1 \geq 2$ aristas.

Paso 2: el caso fácil, cuando toda arista tiene una hoja por extremo. Si toda arista tiene una hoja por extremo, hay al menos dos hojas (dos aristas distintas no pueden compartir la misma hoja, porque una hoja solo tiene una arista).

Paso 3: si no, se parte el árbol por un puente y se aplica la hipótesis a cada mitad (el núcleo de la prueba). Lo que hace funcionar la inducción es que en un árbol *toda* arista es puente, de modo que siempre se puede cortar y quedan exactamente dos árboles más pequeños. Sea $e = uv$ una arista con u y v de grado ≥ 2 . Como e es puente, $T - e$ es un bosque con dos árboles $T_1 \ni u$ y $T_2 \ni v$, ambos no triviales (porque u y v conservan al menos un vecino) y con menos de n vértices. Por hipótesis de inducción cada uno tiene al menos dos hojas; T_1 tiene una hoja $u' \neq u$ y T_2 una hoja $v' \neq v$. Los grados de u' y v' en T son los mismos que en T_1 y T_2 , porque la única arista que falta es e , que no los toca. Luego u' y v' son dos hojas de T .

Segunda vía, con el arco maximal (ejercicio 2.21): los dos extremos del camino más largo no tienen adónde seguir. Sea $(u_0, \dots, u_k)$ un arco de longitud máxima en T , con $k \geq 1$. Todos los vecinos de u_0 están en el arco (si no, se alargaría), y solo puede ser vecino suyo u_1 : si $u_0 u_i$ fuera arista con $i \geq 2$, $(u_0, u_1, \dots, u_i, u_0)$ sería un ciclo. Luego $\delta(u_0) = 1$, y lo mismo para u_k : son dos hojas. ■

Definición (árbol spanning). Sea G un grafo. Un subgrafo $T \subseteq G$ es un **árbol spanning** de G (o árbol generador, o árbol maximal) si es un árbol y $V(T) = V(G)$.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: QUITAR ARISTAS DE CICLOS HASTA QUE NO QUEDEN

Este teorema dice que dentro de todo grafo conexo hay un esqueleto mínimo que ya lo mantiene de una pieza, y que ese esqueleto es un árbol. La demostración es un algoritmo, y merece la pena leerla como tal porque es exactamente lo que se hace a

mano en los ejercicios.

Mientras quede un ciclo, se elige una arista de ese ciclo y se borra. La clave es que **una arista de un ciclo nunca es un puente**: sus dos extremos siguen comunicados dando la vuelta por el resto del ciclo. Así que borrarla no desconecta nada. Se repite, y como cada paso quita una arista y hay un número finito, el proceso para. Cuando para no queda ningún ciclo, y lo que hay es un grafo conexo, acíclico y con todos los vértices: un árbol spanning.

La otra implicación no tiene misterio: si dentro del grafo hay un árbol que llega a todos los vértices, el grafo está conectado, porque ya lo está el árbol.

Lo que hay que llevarse es la cuenta que sale de aquí y que se usa constantemente: un árbol spanning tiene $|V(G)| - 1$ aristas, luego *todo grafo conexo tiene al menos $|V(G)| - 1$ aristas*, y las que le sobren son exactamente las que cierran ciclos. Ese par de frases resuelve por sí solo muchos verdaderos o falsos.

Teorema. Un grafo es conexo si y solo si tiene un árbol spanning.

Paso 1: ($\Rightarrow$) se adelgaza el grafo quitando aristas de ciclos, y la conexión no se pierde nunca (el núcleo de la prueba). Sea G conexo. Si es acíclico, él mismo es su árbol spanning. Si no, tiene un ciclo C ; sea e una arista de C . Como e no es puente, $G - e$ sigue siendo conexo, con los mismos vértices. Ese es el punto en el que descansa todo: la caracterización de los puentes garantiza que una arista de un ciclo *nunca* es puente, así que el adelgazamiento es gratis y se puede repetir sin vigilar nada. Se repite con $G - e$: mientras haya ciclos se quita una arista de uno de ellos sin perder la conexión. El número de aristas es finito, luego el proceso termina, y termina en un subgrafo conexo, acíclico y con todos los vértices de G : un árbol spanning.

Paso 2: ($\Leftarrow$) el árbol ya conecta, y el grafo tiene más aristas, no menos. Si T es un árbol spanning de G , dos vértices cualesquiera de G son vértices de T , y el camino que los une en T es un camino en G . Luego G es conexo. ■

Observación. La demostración es un algoritmo: quitar aristas de ciclos hasta que no queden. Con $|A(G)| - (|V(G)| - 1)$ aristas quitadas se acaba, porque el árbol final tiene exactamente $|V(G)| - 1$. Para minimizar además el coste de una red ponderada hay algoritmos que construyen el árbol añadiendo aristas, como los de Borůvka y Kruskal. Son algoritmos distintos; comparten la idea de unir componentes sin crear ciclos.

Corolario. Todo grafo con n vértices y menos de $n - 1$ aristas es desconexo.

Si G fuera conexo tendría un árbol spanning T , con $|A(T)| = n - 1$ por el teorema de caracterización. Pero $|A(G)| \geq |A(T)| = n - 1$, contra la hipótesis. ■

Otra vía (los dos vértices que no son puntos de corte, con un árbol spanning). El árbol spanning da una tercera prueba del ejercicio de los dos vértices que no son puntos de corte (sección 2.6), y es la más corta. Sea G conexo con al menos dos vértices y sea T un árbol spanning suyo, que tiene al menos dos hojas. Si ℓ es una de ellas, $T - \ell$ sigue siendo un árbol, porque una hoja solo puede ser extremo de un camino y ningún camino entre los demás

vértices pasa por ella. Además $T - \ell$ contiene todos los vértices de $G - \ell$, así que $G - \ell$ es conexo y ℓ no es punto de corte. La hoja lo es del árbol, no de G : en G puede tener grado alto, y da igual, porque para mantener unido al resto basta el esqueleto, y el esqueleto no la necesita. Con las dos hojas salen los dos vértices.

Ejemplo (la cuenta de aristas, arista a arista). **El problema.** Muchas preguntas comparan el número de aristas con el de vértices: si hay más aristas que vértices, ¿tiene que haber un ciclo?; con tantas aristas, ¿puede ser conexo? Todas se contestan con una sola imagen.

La idea. Se construye el grafo añadiendo sus aristas una a una a los n vértices sueltos, que al principio son n componentes. Cada arista nueva hace una de dos cosas. O une dos componentes distintas, y entonces el número de componentes baja en uno; o une dos vértices que ya estaban comunicados, y entonces cierra un ciclo con el camino que ya los unía, y el número de componentes no cambia. Si k es el número de aristas del segundo tipo,

$$|\pi_0(G)| = n - |A(G)| + k.$$

Leída en palabras: cada arista que une trozos ahorra una componente, y las que no ahorran nada son exactamente las que cierran ciclos. En particular $k = 0$ si y solo si el grafo es acíclico.

El caso a mano. Seis vértices $1, \dots, 6$ y las aristas en este orden: 12, 34, 23, 13 y 56. Las componentes pasan de 6 a 5, 4, 3, 3 y 2. La cuarta arista, 13, une dos vértices que ya estaban comunicados por 1 2 3 y cierra el triángulo; es la única del segundo tipo. Al final, $|\pi_0(G)| = 2 = 6 - 5 + 1$.

Qué se ha ganado. Tres consecuencias que se leen en la fórmula, sin más argumento que $|\pi_0(G)| \geq 1$ y $k \geq 0$.

- $|\pi_0(G)| \geq n - |A(G)|$. Con menos de $n - 1$ aristas hay al menos dos componentes, que es el corolario de arriba; dicho al revés, un grafo conexo tiene al menos $n - 1$ aristas.
- $k \geq |A(G)| - n + 1$. Con $|A(G)| \geq n$ alguna arista cierra un ciclo, así que el grafo tiene un ciclo.
- Un grafo acíclico con c componentes tiene exactamente $n - c$ aristas; con $c = 1$ es la cuenta $n - 1$ de los árboles.

El número $k = |A(G)| - n + |\pi_0(G)|$ no depende del orden en que se añadan las aristas, porque los otros tres términos no dependen de él. Para un grafo conexo es $|A(G)| - n + 1$, el número de ecuaciones de malla de Kirchhoff de la caja de historia que sigue.

Dónde se falla. En leer las cuentas al revés. Tener $n - 1$ aristas no hace conexo a un grafo: el cuadrado con un vértice suelto del principio de la sección tiene cinco vértices y cuatro aristas. Y tener un ciclo no obliga a tener n aristas o más: un triángulo con tres vértices sueltos tiene seis vértices y tres aristas. Las implicaciones van en un solo sentido, y los contraejemplos del sentido falso son siempre del mismo tipo: un ciclo en un sitio y un trozo suelto en otro.

DE DÓNDE VIENE: LOS ÁRBOLES ANTES DE LOS GRAFOS

Los árboles nacieron dos veces antes de que existiera la teoría de grafos. Kirchhoff, en 1847, los usó para resolver circuitos eléctricos. En una red conexa, cada arista que queda fuera de un árbol spanning cierra un ciclo con el camino del árbol entre sus extremos. Estos ciclos son independientes: cada uno contiene una arista exterior al árbol que no aparece en los otros. Son $|A(G)| - |V(G)| + 1$, tantas como ecuaciones de malla independientes se necesitan. Cayley estudió los árboles en 1857 y después los aplicó al recuento de isómeros de los alcanos C_nH_{2n+2} . Su esqueleto de carbonos es un árbol con grados a lo sumo 4; contar sus estructuras de enlaces es contar estos árboles salvo isomorfismo. La palabra «árbol» es suya. El resultado más famoso

de Cayley sobre el tema, que hay n^{n-2} árboles distintos con vértices $1, \dots, n$, no entra en este curso.

Ejercicios: árboles

Ejercicio 2.18. Árboles con uno y con dos centros R2.13

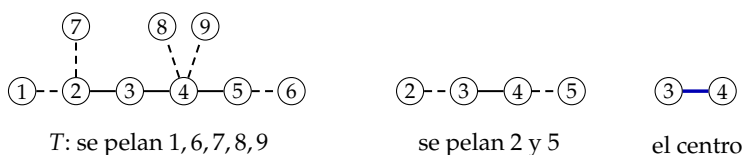
Dado un grafo G conexo, un vértice de G se denomina **central** si tiene excentricidad mínima. Dar ejemplos de árboles (a) con un punto central; (b) con dos puntos centrales.

Resolución. (a) El camino $P_5 = 1\,2\,3\,4\,5$ tiene excentricidades $4, 3, 2, 3, 4$: su único vértice central es 3. También la estrella $K_{1,n}$ con $n \geq 2$, cuyo centro tiene excentricidad 1 y cuyas hojas tienen excentricidad 2. (b) El camino $P_4 = 1\,2\,3\,4$ tiene excentricidades $3, 2, 2, 3$: sus vértices centrales son 2 y 3, adyacentes. También K_2 , con sus dos vértices de excentricidad 1. En general un camino con un número impar de vértices tiene un centro y con un número par tiene dos. ■

Ejercicio 2.19. El centro de un árbol R2.14

Se denomina **centro** de un grafo al conjunto de sus vértices centrales. Probar que el centro de un árbol está formado por un único vértice o por dos vértices adyacentes.

Resolución. La idea. Pelar el árbol como una cebolla. Si se quitan a la vez todas las hojas, lo que queda sigue siendo un árbol, todas las excentricidades bajan exactamente en uno y el centro no se mueve, porque ninguna hoja era central. Se repite mientras se pueda: al final quedan un vértice, o dos unidos por una arista, y eso es el centro. En el árbol del dibujo, el camino $1\,2\,3\,4\,5\,6$ con una hoja 7 colgada de 2 y dos hojas 8 y 9 colgadas de 4, la primera pelada quita 1, 6, 7, 8 y 9 y deja el camino $2\,3\,4\,5$; la segunda deja la arista $3\,4$. En los vértices que quedan tras la primera pelada, las excentricidades pasan de $4, 3, 3, 4$ a $3, 2, 2, 3$, y el centro es $\{3, 4\}$ desde el principio.



Por inducción sobre el número n de vértices de T . Si $n = 1$, el centro es el único vértice; si $n = 2$, $T = K_2$ y el centro son sus dos vértices, adyacentes.

Sea $n \geq 3$. Se necesitan dos hechos. *Primero*: para todo vértice v , algún vértice a distancia $\varepsilon(v)$ de v es una hoja. En efecto, si w está a distancia $\varepsilon(v)$ de v y $\delta(w) \geq 2$, w tiene un vecino w' fuera del único camino de v a w , y entonces $d(v, w') = \varepsilon(v) + 1$ (el camino de v a w' es el de v a w seguido de ww' , porque en un árbol el camino es único), contradicción. *Segundo*: ninguna hoja es central. Si u es una hoja con vecino v , para todo $x \neq u$ el único camino de u a x pasa por v , luego $d(u, x) = d(v, x) + 1$; y $d(v, u) = 1 \leq \varepsilon(u) - 1$ porque $\varepsilon(u) \geq 2$ cuando $n \geq 3$. Por tanto $\varepsilon(v) = \varepsilon(u) - 1 < \varepsilon(u)$, y u no tiene excentricidad mínima.

Sea T' el subgrafo que resulta de quitar a T todas sus hojas. No es vacío, porque un árbol con $n \geq 3$ vértices tiene algún vértice de grado ≥ 2 (si todos tuvieran grado ≤ 1 , las aristas serían disjuntas y el grafo no sería conexo). Es un árbol: es acíclico por ser subgrafo de T , y es conexo porque el camino entre dos vértices de T' no pasa por hojas (una hoja solo puede ser extremo de un camino). Y tiene menos de n vértices. Para $v \in V(T')$ se tiene $\varepsilon_{T'}(v) = \varepsilon_T(v) - 1$: los vértices de T' a distancia d de v tienen $d \leq \varepsilon_T(v) - 1$ (por el primer hecho, más allá de un vértice de grado ≥ 2 siempre hay otro vértice, luego ninguno de ellos está a distancia $\varepsilon_T(v)$), y el penúltimo vértice de un camino de longitud $\varepsilon_T(v)$ desde v está en T' y a distancia $\varepsilon_T(v) - 1$. Como los centrales de T están en T' (segundo hecho) y las excentricidades bajan todas en uno, el centro de T es el centro de T' , que por hipótesis de inducción es un vértice o dos adyacentes en T' , y por tanto en T . ■

Dónde se falla. En aplicar el resultado fuera de los árboles: en un ciclo C_n todos los vértices tienen la misma excentricidad y el centro es el grafo entero. Lo que se usa del árbol es que los caminos son únicos. Por eso quitar las hojas no acorta ningún camino entre los vértices que quedan, y las excentricidades bajan exactamente en uno, ni más ni menos.

Ejercicio 2.20. *Estrellas y diámetro dos* R2.17 y 2.18

Los grafos bipartitos completos $K_{1,n}$ se llaman **estrellas**.

- (a) Probar que un árbol con $p \geq 3$ vértices tiene diámetro 2 si y solo si es una estrella.
- (b) Dado un grafo conexo G , ¿son ciertas las siguientes afirmaciones? Si G tiene diámetro 2, entonces tiene una estrella spanning. Si G tiene una estrella spanning, entonces tiene diámetro igual a 2.

Resolución. La idea. En un árbol la distancia entre dos vértices es la longitud del único camino que los une, así que diámetro 2 significa que no hay ningún camino de tres aristas. La única manera de conseguirlo es que todas las aristas compartan un mismo vértice, y eso es una estrella. En (b) las dos implicaciones caen con los ejemplos más pequeños posibles.

(a) En un árbol el único camino entre dos vértices es una geodésica, luego la distancia es la longitud de ese camino. Una estrella $K_{1,n}$ con $n \geq 2$ es un árbol (conexa, $n + 1$ vértices, n aristas) y tiene diámetro 2: dos hojas están a distancia 2 pasando por el centro. Recíprocamente, sea T un árbol con $p \geq 3$ vértices y $\text{diam}(T) = 2$. Tiene alguna arista $a = uv$. Si existieran x, y con $xu \in A(T)$ y $yv \in A(T)$, $x \neq v$, $y \neq u$, entonces $xuvy$ sería un camino (y por tanto la geodésica) de longitud 3, contra $\text{diam}(T) = 2$. Luego al menos uno de los extremos, digamos v , es una hoja. Todo camino de v a otro vértice empieza por vu y tiene longitud a lo sumo 2; por tanto todos los demás vértices son adyacentes a u , y ninguno a v . Como T es acíclico, no hay aristas entre esos vértices (formarían un triángulo con u). Así T es la estrella con centro u .

(b) *La primera es falsa.* C_4 tiene diámetro 2 y ninguna estrella spanning: una estrella spanning de un grafo con 4 vértices es $K_{1,3}$ y necesita un vértice de grado 3, y en C_4 todos tienen grado 2. *La segunda es falsa.* K_n con $n \geq 3$ contiene la estrella spanning $K_{1,n-1}$ (un vértice y sus $n - 1$ aristas), pero $\text{diam}(K_n) = 1$. ■

Dónde se falla. En la segunda afirmación de (b), en olvidar que el diámetro puede quedarse por debajo de 2. Con una estrella spanning, dos vértices cualesquiera están a lo sumo a distancia 2, pasando por el centro; el diámetro es entonces *a lo sumo* 2, y vale 1 exactamente cuando el grafo es completo.

Ejercicio 2.21. Los extremos de un arco maximal R2.19

Sea T un árbol no trivial y sea $P = u_0 u_1 \dots u_n$ un arco de longitud máxima en T (en T no hay arcos de longitud $> n$). Probar que $\delta(u_0) = \delta(u_n)$. Como consecuencia, probar que un árbol no trivial tiene más de una hoja.

Resolución. Todo vecino w de u_0 está en P : si no, $w u_0 u_1 \dots u_n$ sería un arco de longitud $n + 1$. Y el único vértice de P que puede ser vecino de u_0 es u_1 : si $u_0 u_i$ fuera arista con $i \geq 2$, entonces $u_0 u_1 \dots u_i u_0$ sería un ciclo en T . Luego $\delta(u_0) = 1$; por el mismo argumento $\delta(u_n) = 1$, y $\delta(u_0) = \delta(u_n)$. Como T tiene más de un vértice y es conexo, tiene alguna arista y por tanto algún arco de longitud ≥ 1 ; un arco de longitud máxima tiene $u_0 \neq u_n$, y son dos hojas. ■

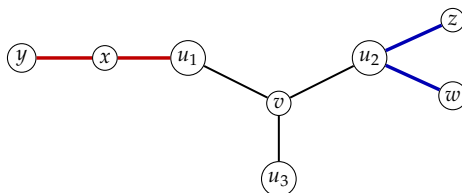
Ejercicio 2.22. Hojas y grado máximo R2.20; CONTROL 1.1

Sea T un árbol y sea v un vértice de valencia $k \geq 1$. Probar, siguiendo los dos pasos de abajo, que T tiene al menos k hojas.

1. Demostrar que $T - v$ tiene k componentes conexas.
2. Justificar que cada componente conexa de $T - v$ contiene al menos una hoja de T .

• CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

Resolución. La idea. Quitar v deja k ramas, una por cada vecino, porque en un árbol dos vecinos de v solo se comunican a través de v . Y cada rama termina en alguna parte: caminando por ella y alejándose de v , tarde o temprano se llega a un vértice del que no sale nada nuevo, que es una hoja de T . Son k ramas, y cada una aporta su punta. En el dibujo, v tiene grado 3 y sus tres ramas acaban en cuatro hojas: y, z, w y u_3 , que es una rama de un solo vértice.



Paso 1. $T - v$ tiene k componentes, una por vecino. Sean $u_1, \dots, u_k$ los vecinos de v . En $T - v$ dos de ellos, u_i y u_j , no pueden estar en la misma componente: un camino de u_i a u_j en $T - v$, junto con $u_j v u_i$, sería un ciclo de T . Luego hay al menos k componentes. Y no hay más: todo vértice $x \neq v$ está unido a v por un camino en T , cuya última arista es $u_i v$ para algún i ; quitando v queda un camino de x a u_i en $T - v$. Así cada vértice está en la componente de algún u_i , y $T - v$ tiene exactamente k componentes $T_1 \ni u_1, \dots, T_k \ni u_k$.

Paso 2. Cada componente aporta una hoja de T (el núcleo de la prueba). Cada T_i es un árbol (conexa por ser componente, acíclica por ser subgrafo de T). Si $T_i = \{u_i\}$, entonces u_i solo tiene a v como vecino en T , y es una hoja de T . Si T_i tiene al menos dos vértices, tiene al menos dos hojas por el teorema; de ellas, a lo sumo una es u_i , que es el único vértice de T_i adyacente a v (todo vecino de v en T_i es algún u_j , y solo u_i está en T_i). Cualquier otra hoja h de T_i tiene en T el mismo grado que en T_i , porque la única arista de T que no está en $T - v$ y toca a T_i es $u_i v$. Luego h es hoja de T . En los dos casos, cada T_i aporta una hoja de T , distintas por estar en componentes distintas: al menos k hojas. ■

Encapsulado. En un árbol, dos vecinos de v solo se comunican a través de v , así que $T - v$ tiene una componente por vecino. Cada componente es un árbol: o es un solo vértice, que ya es hoja de T , o tiene dos hojas, de las que a lo sumo una toca a v , y la otra es hoja de T . Una hoja por rama y k ramas.

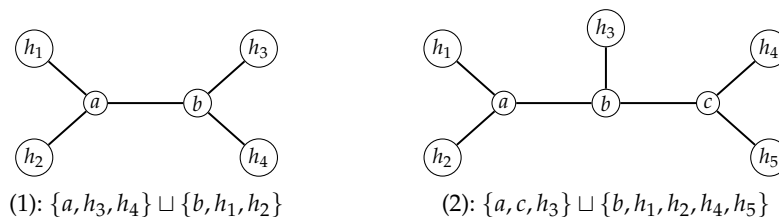
Dónde se falla. En el paso 2, en tomar una hoja cualquiera de T_i : puede ser u_i , que en T tiene además la arista hacia v y no es hoja de T . Por eso hacen falta dos hojas en T_i y no una. En el dibujo, la rama de u_1 es el camino $u_1 x y$, con hojas u_1 e y , y solo y es hoja de T .

QUÉ DEJA. Quitar un vértice de grado k a un árbol lo parte en exactamente k árboles: en un árbol, cada arista es su propio puente. Es la imagen que resuelve casi todo lo de árboles.

Ejercicio 2.23. *El recíproco, y dos árboles bipartitos* CONTROL 1.2

Sea T un árbol con k hojas ($k > 1$). ¿Es cierto que T tiene un vértice de grado k ? En caso negativo, aportar (si es posible) dos contraejemplos que cumplan: (1) tiene exactamente 4 hojas y ningún vértice de grado 4; (2) tiene exactamente 5 hojas y todos sus vértices de grado mayor que 1 tienen grado 3. Para cada uno de los ejemplos, dar una partición del conjunto de vértices que muestre que ambos grafos son bipartitos.

Resolución. Es falso. (1) Dos vértices adyacentes a, b , cada uno con dos hojas colgando: 6 vértices, grados 3, 3, 1, 1, 1, 1, cuatro hojas y grado máximo 3. (2) Un camino $a b c$ con dos hojas en a , una en b y dos en c : 8 vértices, grados 3, 3, 3 para a, b, c y 1 para las cinco hojas.



Las particiones se obtienen coloreando por la paridad de la distancia a a : en cada arista los extremos están a distancias de paridades distintas, luego todas las aristas cruzan. Que todo árbol es bipartito se prueba en general en la sección 2.9. ■

Ejercicio 2.24. *La fórmula de las hojas y las arañas* CONTROL 1.3

Sea T un árbol y L el conjunto de sus hojas. Demostrar que

$$|L| = 2 + \sum_{v \in V(T): \delta(v) \geq 2} (\delta(v) - 2). \quad (1)$$

Una k -**araña** es un árbol en el que todo vértice que no es hoja tiene grado $k > 2$. Demostrar, usando (1), que si una k -araña tiene exactamente k hojas, entonces tiene un único vértice que no es hoja. • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. Escribe $V(T) = L \sqcup I$ con I los vértices de grado ≥ 2 , y suma los grados de dos maneras.

Resolución. La idea. Un camino tiene exactamente dos hojas, sus extremos. Cada vértice de grado 3 abre una rama más, y cada rama acaba en una hoja; en general, un vértice de grado d abre $d - 2$ ramas además de las dos por las que pasa el camino. La fórmula (1) dice eso: se parte de las dos hojas de un camino y se suma una hoja por cada rama de más. La prueba formal no sigue ramas: cuenta los grados de dos maneras, con el apretón de manos y con la cuenta $|A(T)| = |V(T)| - 1$ de los árboles.

La fórmula requiere que T tenga al menos dos vértices: para K_1 el lado izquierdo es 0 y el derecho 2. Bajo esa hipótesis, sea $I = \{v \in V(T) : \delta(v) \geq 2\}$, de modo que $V(T) = L \sqcup I$ (en un árbol con al menos dos vértices no hay vértices de grado 0). Por el lema del apretón de manos y el teorema de caracterización,

$$\sum_{v \in V(T)} \delta(v) = 2|A(T)| = 2(|V(T)| - 1) = 2|L| + 2|I| - 2.$$

Por otro lado, separando la suma según $V(T) = L \sqcup I$ y usando que las hojas tienen grado 1,

$$\sum_{v \in V(T)} \delta(v) = |L| + \sum_{v \in I} \delta(v).$$

Igualando, $|L| + \sum_{v \in I} \delta(v) = 2|L| + 2|I| - 2$, es decir,

$$|L| = 2 + \sum_{v \in I} \delta(v) - 2|I| = 2 + \sum_{v \in I} (\delta(v) - 2),$$

que es (1). Se comprueba en los árboles del ejercicio anterior: el (1) tiene dos vértices de grado 3, y la fórmula da $2 + 1 + 1 = 4$ hojas; el (2) tiene tres, y da $2 + 1 + 1 + 1 = 5$. Un camino no tiene vértices de grado mayor que 2, y la fórmula da sus dos hojas.

Sea ahora T una k -araña con exactamente k hojas y sea $m = |I|$ el número de vértices que no son hojas. Cada uno tiene grado k , luego (1) da $k = 2 + m(k - 2)$, esto es, $m(k - 2) = k - 2$. Como $k > 2$, se puede dividir: $m = 1$. ■

Encapsulado. La suma de los grados se escribe dos veces: como $2(|L| + |I| - 1)$, por el apretón de manos y la cuenta de aristas del árbol, y como $|L| + \sum_I \delta(v)$, separando las hojas del resto. Igualando y despejando $|L|$ sale (1). Para las arañas basta sustituir $\delta(v) = k$: la igualdad $k = 2 + m(k - 2)$ obliga a $m = 1$.

Dónde se falla. En olvidar la hipótesis de al menos dos vértices: K_1 no cumple (1). Y en las arañas, en dividir por $k - 2$ sin mirar la hipótesis $k > 2$. Con $k = 2$ la «araña» es un camino, tiene dos hojas con cualquier número de vértices interiores, y la ecuación se queda en $0 = 0$, que no dice nada.

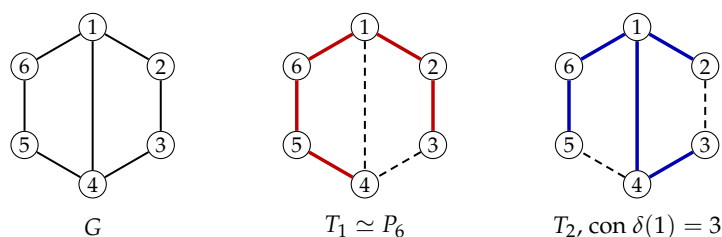
Ejercicio 2.25. Dos árboles spanning no isomorfos y el centro CONTROL 1.4

Encontrar un grafo G conexo con 6 vértices que contenga dos árboles spanning no isomorfos, argumentar por qué no lo son, y determinar el centro de ese grafo.

Resolución. La idea. Para que haya dos árboles spanning distintos hace falta un grafo con ciclos, y para distinguirlos basta un invariante barato: el grado máximo. Un hexágono con una cuerda deja elegir qué dos aristas quitar, y quitando las adecuadas sale o un camino, con grado máximo 2, o un árbol con un vértice de grado 3.

Sea G el ciclo 1 2 3 4 5 6 1 con la cuerda 14. Quitando las aristas 14 y 34 queda el camino 4 5 6 1 2 3, un árbol spanning $T_1 \simeq P_6$ con todos los grados ≤ 2 . Quitando 23 y 45 queda el

árbol spanning T_2 con aristas 12, 61, 14, 34, 56, en el que 1 tiene grado 3. Ambos son árboles (conexos con 5 aristas y 6 vértices) y no son isomorfos porque el grado máximo es un invariante: 2 en T_1 y 3 en T_2 .



Centro de G. Excentricidades: $\varepsilon(1) = 2$ (está a distancia 1 de 2, 4, 6 y a distancia 2 de 3, 5), $\varepsilon(4) = 2$ por simetría, y $\varepsilon(2) = 3$ (de 2 a 5: 2145 o 2345, y no hay nada más corto porque 2 y 5 no son adyacentes ni tienen un vecino común: sus conjuntos de vecinos son $\{1, 3\}$ y $\{4, 6\}$, disjuntos). Por simetría $\varepsilon(3) = \varepsilon(5) = \varepsilon(6) = 3$. Luego $r(G) = 2$, $\text{diam}(G) = 3$ y $Z(G) = \{1, 4\}$. ■

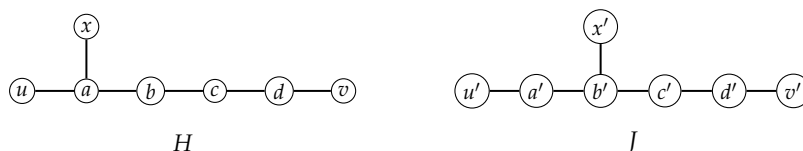
Dónde se falla. En quitar dos aristas cualesquiera. La cuerda parte el hexágono en dos cuadrados, 1234 y 1456, y un árbol spanning tiene que romper los dos: o se quita la cuerda y otra arista, o una arista de cada cuadrado. Quitar 12 y 34, las dos del mismo cuadrado, deja intacto el otro y separa 23 del resto: ni es conexo ni es acíclico. Las siete aristas menos las cinco de un árbol de seis vértices dan dos de más, como dice la cuenta de aristas de la sección.

Ejercicio 2.26. Invariantes que no distinguen EXAMEN DE NOVIEMBRE 2012

Construir dos grafos no isomorfos con $p \geq 6$ vértices para los cuales tomen el mismo valor: número de vértices, número de aristas, secuencia de grados, número de componentes conexas, diámetro, número de puntos de corte, número de puentes y número de ciclos de longitud 4.

Resolución. La idea. Los invariantes de la lista son baratos y globales: cuentan cosas o miden el grafo entero. Para engañarlos a todos a la vez conviene tomar árboles, en los que el orden ya fija las aristas, las componentes, los puentes y los cuadrados, y los puntos de corte son los vértices de grado al menos 2. Después se mueve una sola hoja de sitio sin cambiar ni la secuencia de grados ni el camino más largo. Lo que cambia es algo local: qué hay pegado al vértice de grado 3.

Se toma el camino $u a b c d v$ y se le cuelga una hoja x : en H de a , en J de b .



Ambos son árboles con 7 vértices y 6 aristas, conexos, con secuencia de grados $(3, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$; todas las aristas son puentes (6 en cada uno); los puntos de corte son los cuatro vértices de grado ≥ 2 (en un árbol, un vértice de grado k deja k componentes al quitarlo, y las hojas ninguna de más); el diámetro es $5 = d(u, v) = d(u', v')$, y no hay ciclos, en particular ninguno de longitud 4. No son isomorfos: en H el único vértice de grado 3 es adyacente a dos hojas (u

y x), y en J a una sola (x'). Un isomorfismo llevaría el vértice de grado 3 en el de grado 3 y conservaría el número de hojas adyacentes a él. ■

Qué hemos aprendido. Coincidir en una lista de invariantes, por larga que sea, no prueba el isomorfismo; para descartarlo basta *uno* que difiera, y los más finos son los locales, como los grados de los vecinos de cada vértice. **Dónde se falla.** En colgar la hoja de c : el resultado es J visto en un espejo, e isomorfo a él. Y en colgarla de un extremo, que convierte el árbol en el camino de siete vértices y cambia la secuencia de grados y el diámetro.

Ejercicio 2.27. Una arista de más EXAMEN DE NOVIEMBRE 2013

Decidir si son verdaderas o falsas: (a) si G es conexo y $|A(G)| = |V(G)|$, entonces G contiene exactamente un ciclo; (b) si G es conexo y $|A(G)| = |V(G)| + 1$, entonces G contiene exactamente dos ciclos.

Resolución. La idea. Es la cuenta de aristas, arista a arista, del ejemplo de esta sección: al construir un grafo conexo añadiendo aristas, exactamente $|A(G)| - |V(G)| + 1$ de ellas cierran un ciclo. Con $|A(G)| = |V(G)|$ hay una sola, y la pregunta es si una sola arista de más puede dejar más de un ciclo. En (b) hay dos, y la pregunta es si dos cierres dan siempre dos ciclos.

(a) **Verdadero.** Por el teorema de caracterización, G no es un árbol (tiene una arista de más), luego contiene un ciclo C . Si contuviera otro ciclo $C' \neq C$, habría una arista a en C que no está en C' . Como a está en un ciclo no es puente, y $G - a$ es conexo con $|A(G - a)| = |V(G - a)| - 1$: un árbol. Pero C' es un ciclo de $G - a$, porque $a \notin C'$. Contradicción. (b) **Falso.** K_4 menos una arista tiene 4 vértices, 5 aristas y tres ciclos: dos triángulos y el cuadrilátero que los rodea. ■

Qué hemos aprendido. Con una arista de más hay exactamente un ciclo; con dos de más no hay un número fijo. Si los dos ciclos que se cierran no comparten ninguna arista, como en la pajarita, con cinco vértices y seis aristas, hay exactamente dos. Si comparten un tramo, como en K_4 menos una arista, aparece un tercero que da la vuelta por fuera. Por eso (b) es falso: dice «exactamente dos» para todos los grafos, y basta uno con tres.

Dónde se falla. En dar (b) por verdadero tras comprobarlo en la pajarita: un ejemplo que cumple no prueba un enunciado universal, y uno que no cumple lo tumba. Y en (a), en contar ciclos a ojo, sin argumento: la prueba necesita la cuenta de los árboles, que es la que impide que quede un segundo ciclo al quitar una arista del primero.

2.9 Grafos bipartitos

LA PREGUNTA

Un grupo de personas con algunas enemistades entre ellas quiere dividirse en dos bandos de manera que todas las enemistades queden entre bandos distintos y ninguna dentro de un bando. A veces se puede y a veces no: si A es enemigo de B , B de C y C de A , no hay manera. La pregunta que surge es si ese triángulo es el único obstáculo, o si hay configuraciones más complicadas que también lo impiden. La misma pregunta se hace un químico con los cristales iónicos (¿se pueden colocar los iones positivos

y negativos de modo que ningún enlace una dos del mismo signo?) y quien reparte turnos entre dos equipos. ¿Cuándo se puede partir un grafo en dos lados de modo que todas las aristas crucen?

Definición (grafo bipartito). Un grafo G es **bipartito** si existe una partición $V(G) = V_1 \sqcup V_2$ tal que toda arista de G une un vértice de V_1 con uno de V_2 .

Definición (completo bipartito). El grafo **completo bipartito** $K_{m,n}$ tiene $V(K_{m,n}) = V_1 \sqcup V_2$ con $|V_1| = m$, $|V_2| = n$, y $A(K_{m,n}) = \{uv : u \in V_1, v \in V_2\}$.

Observación. $|A(K_{m,n})| = mn$: cada uno de los m vértices de un lado es adyacente a los n del otro. Los grados son n en V_1 y m en V_2 . Si $m, n \geq 1$, $K_{m,n}$ es regular si y solo si $m = n$; si uno de los dos vale 0, el grafo no tiene aristas y es 0-regular. En la notación de la suma, $K_{m,n} = \overline{K_m} + \overline{K_n}$.

No se exige que V_1 y V_2 sean no vacíos ni que la partición sea única: un grafo sin aristas es bipartito de muchas maneras, y K_1 es bipartito con $V_2 = \emptyset$. Lo que sí se exige es que *ninguna* arista tenga los dos extremos del mismo lado.

Teorema (caracterización por ciclos impares). Un grafo G es bipartito si y solo si G no contiene ciclos de longitud impar.

LA IDEA: EL INTERRUPTOR QUE CAMBIA DE LADO EN CADA PASO

La intuición falsa, primero. La obstrucción que todo el mundo tiene en la cabeza es el triángulo: «si no hay triángulos, se podrá pintar de dos colores». Es falso, y el contraejemplo es pequeño: el pentágono C_5 no tiene ningún triángulo y no es bipartito, porque al recorrerlo pintando alterno se vuelve al primer vértice habiéndolo pintado ya del otro color. El enunciado correcto no habla de triángulos sino de *todos* los ciclos impares, y esa diferencia no es un tecnicismo: es la diferencia entre una condición local y una condición global.

La imagen. Ser bipartito es tener un interruptor de dos posiciones, blanco y negro, que se acciona cada vez que se recorre una arista. Recorrer un camino es accionar el interruptor una vez por paso; volver al punto de partida exige haberlo accionado un número *par* de veces, porque si no, el vértice de salida estaría a la vez en las dos posiciones. De ahí sale la mitad fácil.

La mitad difícil es la recíproca, y la imagen también la predice: si no hay ciclos impares, el interruptor se puede instalar. ¿Cuál es su posición en cada vértice? La paridad del número de pasos que hay desde un vértice base u , es decir, la paridad de $d(u, v)$. Con eso la demostración ya está esbozada: se define el color por esa paridad y se comprueba que ninguna arista une dos vértices del mismo color.

El corazón en una frase: sin ciclos impares, *cada arista cambia la paridad de la distancia al vértice base*. La distancia siempre tiene una paridad bien definida; lo que hay que probar es que da colores distintos a los extremos de cada arista. Si no los diera, la desigualdad triangular y dos caminos mínimos permitirían fabricar un ciclo impar.

Paso 1 ($\Rightarrow$): recorrer una arista cambia de lado, luego cerrar un ciclo cuesta un número par de pasos. Sea $V(G) = V_1 \sqcup V_2$ una bipartición. En cualquier recorrido los vértices alternan entre V_1 y V_2 , porque cada arista cambia de lado. En un ciclo $(v_0, \dots, v_\ell)$ con $v_\ell = v_0$ se vuelve al lado de partida tras ℓ pasos, luego ℓ es par.

Paso 2 ($\Leftarrow$): reducción al caso conexo. Sea G sin ciclos de longitud impar. Basta probarlo para G conexo: si no lo es, cada componente es bipartita por el caso conexo, y uniendo los lados « V_1 » de todas las componentes y los lados « V_2 » de todas se obtiene una bipartición de G , porque no hay aristas entre componentes. Sin esta reducción el vértice base del paso siguiente no alcanzaría a todo el grafo.

Paso 3: se propone la bipartición por paridad de la distancia. Sea G conexo y fíjese un vértice u . Se definen

$$V_P = \{v \in V(G) : d(u, v) \text{ es par}\}, \quad V_I = \{v \in V(G) : d(u, v) \text{ es impar}\},$$

con $u \in V_P$ por tener distancia 0. Es una partición de $V(G)$.

Paso 4: si una arista uniera dos vértices del mismo lado, se fabrica con ella un ciclo impar (el núcleo de la prueba). Aquí está todo el peso del teorema: hay que convertir un fallo local de la paridad en un objeto global prohibido. Hay que ver que ninguna arista tiene los dos extremos en V_P ni los dos en V_I . Sea vw una arista con v, w del mismo lado, es decir, con $d(u, v)$ y $d(u, w)$ de la misma paridad. Por la desigualdad triangular $|d(u, v) - d(u, w)| \leq d(v, w) = 1$, y dos enteros de la misma paridad que difieren en a lo sumo 1 son iguales: $d(u, v) = d(u, w) =: d$. Sean P_1 y P_2 geodésicas de u a v y de u a w . Sea x el último vértice común a P_1 y P_2 contando desde u : un vértice y que esté en las dos geodésicas ocupa en ambas la posición $d(u, y)$. Así, x es el último común en ambas y no comparten ningún vértice después; antes de x pueden haberse separado y reunido varias veces. Los tramos de P_1 y P_2 desde x tienen la misma longitud $d - d(u, x) \geq 1$ (es ≥ 1 porque $x \neq v$: si $x = v$, entonces v estaría en P_2 en la posición d , y sería w). Esos dos tramos y la arista vw forman un ciclo de longitud $2(d - d(u, x)) + 1$, impar. Contradicción.

Otra manera de cerrar esta segunda parte es descomponer P_1 y P_2 en todos sus vértices comunes $v_1, \dots, v_t$ y examinar los ciclos pares formados por los tramos donde se separan; los tramos coincidentes no forman un ciclo. Tomar solo el último vértice común ahorra ese recuento. ■

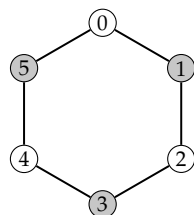
Observación (qué hace cada hipótesis, y qué se lleva uno de aquí). La demostración no solo dice *que* el grafo es bipartito: dice *cómo* partirlo, y el método cabe en media línea —a distancia par de u , blanco; a distancia impar, negro—. Además de demostrar la existencia, la prueba construye una bipartición.

Si se quita la conexión, el Paso 3 no llega a los vértices de las otras componentes y la partición queda incompleta; por eso hizo falta el Paso 2, que la restituye componente a componente. Y si se debilita «sin ciclos impares» a «sin triángulos», lo que se cae es el Paso 4: seguiría fabricando un ciclo impar, solo que de longitud mayor que 3, y ya no habría contradicción con la hipótesis. El pentágono es justo ese caso.

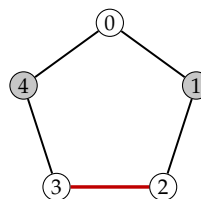
En el capítulo 6 lo que aquí se ha probado se escribirá « $\chi(G) \leq 2$ ». Para dos colores, la prueba proporciona un procedimiento de decisión y un obstáculo concreto cuando falla: un ciclo impar. Este argumento de paridad no se extiende directamente al problema de colorear

con tres colores.

La prueba, a mano. Con las capas de distancia de la sección de invariantes métricos, la demostración se hace sobre el papel. En el hexágono C_6 , con vértices $0, \dots, 5$, las capas desde 0 son $\{0\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 4\}$ y $\{3\}$. Pintando de blanco las capas pares y de gris las impares, cada arista une una capa con la siguiente y cambia de color, y sale la bipartición $\{0, 2, 4\} \sqcup \{1, 3, 5\}$. En el pentágono C_5 las capas desde 0 son $\{0\}$, $\{1, 4\}$ y $\{2, 3\}$, y la arista 23, en rojo, une dos vértices de la misma capa: es el fallo que busca el paso 4. Las geodésicas 012 y 043 solo comparten el 0, y con la arista 23 cierran el ciclo 012340 , de longitud $2 \cdot 2 + 1 = 5$. Es el ciclo impar que la prueba prometía, y el certificado de que el pentágono no es bipartito.



C_6 : capas 0, 1, 2, 3 desde 0



C_5 : 2 y 3, en la misma capa

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: INTENTAR PINTAR Y VER SI FALLA

La alternativa. Definir bipartito por el procedimiento: se empieza en un vértice, se pinta a sus vecinos del otro color, y así sucesivamente; si una arista obliga a asignar a un vértice un color distinto del que ya tiene, el grafo no es bipartito.

Su ventaja. Es un algoritmo, y es exactamente lo que se hace en un dibujo.

Qué le falta. Que sin el teorema no se sabe si el fallo depende de por dónde se empiece. El teorema garantiza que no: si el procedimiento falla desde un vértice, es porque hay un ciclo impar, y entonces falla desde cualquier vértice de esa componente. Si el grafo es desconexo, hay que repetir el procedimiento en las componentes aún no visitadas. La caracterización convierte una comprobación que podría depender de elecciones en una propiedad del grafo, y da además el certificado de que no es bipartito: el ciclo impar.

Corolario. Ningún grafo completo K_n con $n \geq 3$ es bipartito.

Tres vértices cualesquiera de K_n forman un triángulo, un ciclo de longitud 3. ■

Observación. Ser bipartito es invariante por isomorfismo, dado que un isomorfismo lleva ciclos en ciclos de la misma longitud. Otros ejemplos: C_n es bipartito si y solo si n es par; los caminos y los árboles siempre lo son; W_n nunca, porque tiene triángulos.

Ejercicios: grafos bipartitos

Ejercicio 2.28. Árboles bipartitos R2.15

Probar que cada árbol es un grafo bipartito. ¿Qué árboles son grafos bipartitos completos?

Resolución. Un árbol no contiene ciclos de ninguna longitud, en particular impares, luego es bipartito por el teorema. Para la segunda parte: $K_1 = K_{1,0}$ y $K_2 = K_{1,1}$ son árboles bipartitos completos. Sea $T = K_{m,n}$ un árbol con $m, n \geq 1$. Si fuera $m \geq 2$ y $n \geq 2$, tomando $u, u' \in V_1$ y

$w, w' \in V_2$ se tendría el ciclo $u w u' w' u$ de longitud 4, imposible en un árbol. Luego $m = 1$ o $n = 1$: T es una estrella $K_{1,n}$. Y toda estrella es un árbol. Los árboles bipartitos completos son exactamente las estrellas (incluidas K_1 y K_2). ■

Ejercicio 2.29. El cubo Q_n EXAMEN DE JUNIO 2011

Dado $n \geq 1$, se define Q_n como el grafo cuyos vértices son las n -uplas $(a_1, \dots, a_n)$ de ceros y unos, y dos vértices son adyacentes si las n -uplas difieren en exactamente una coordenada. (a) Calcular el número de vértices y de aristas de Q_n . (b) ¿Es Q_n regular? ¿Contiene triángulos? (c) Probar que Q_n es bipartito y conexo.

Resolución. La idea. Todo se cuenta y se prueba con las coordenadas. Cambiar una coordenada es moverse por una arista, así que el grado es el número de coordenadas; cada paso cambia la paridad del número de unos, y eso da la bipartición; y se llega de una n -upla a cualquier otra corrigiendo una coordenada cada vez, y eso da la conexión.

(a) Hay $VR_{2,n} = 2^n$ vértices (capítulo 1). Cada vértice tiene exactamente n vecinos, uno por cada coordenada que se puede cambiar, luego por el apretón de manos $|A(Q_n)| = \frac{1}{2} \cdot n \cdot 2^n = n 2^{n-1}$.

(b) Es regular de grado n . No contiene triángulos: si a y b difieren solo en la coordenada i , y b y c solo en la j , entonces a y c difieren en las coordenadas i y j si $i \neq j$ (dos coordenadas: no adyacentes) o en ninguna si $i = j$ (entonces $a = c$). Luego no hay a, b, c distintos y mutuamente adyacentes.

(c) Sea V_P el conjunto de n -uplas con un número par de unos y V_I el de las que tienen un número impar. Cambiar una coordenada cambia el número de unos en ± 1 , así que toda arista une V_P con V_I : Q_n es bipartito. Es conexo porque de cualquier n -upla se llega a cualquier otra cambiando una a una las coordenadas en las que difieren; de paso, $d(a, b)$ es el número de coordenadas distintas y $\text{diam}(Q_n) = n$. ■

Dónde se falla. En contar las aristas como $n 2^n$: cada arista se ve desde sus dos extremos, y el apretón de manos obliga a dividir por dos. En Q_3 son 12, las del cubo, y no 24.

QUÉ DEJA. Para probar que un grafo es bipartito se da la partición; para probar que no lo es, se señala un ciclo impar. Las dos direcciones del teorema son las dos mitades de todo ejercicio de bipartitos.

REPASO INTERCALADO: CAPÍTULO 2

Lo que hay que llevarse de este capítulo, en el orden en que se usa:

1. Un grafo simple es un conjunto de vértices y un conjunto de pares; todo lo demás (dibujo, matrices) es representación. Dos grafos son «el mismo» si son isomorfos, y para probar que no lo son se busca un invariante que difiera: grados, contorno, diámetro, puntos de corte.
2. Apretón de manos: $\sum \delta(v) = 2|A(G)|$; el número de vértices de grado impar es par.
3. Un recorrido con repeticiones contiene un camino simple; la conexión es una relación de equivalencia y sus clases son las componentes.
4. Distancia, excentricidad, radio, diámetro, centro, contorno y circunferencia; $r \leq \text{diam} \leq 2r$ para grafos conexos; además, $g \leq 2 \text{diam} + 1$ si contienen algún ciclo.
5. Punto de corte: quitarlo aumenta las componentes; puente: arista que no está en ningún ciclo. Un puente con un extremo de grado ≥ 2 da un punto de corte. Los extremos de un arco maximal no son puntos de corte.
6. Bloques: piezas no separables maximales; cada arista está en uno solo, dos bloques compar-

ten a lo sumo un vértice y ese vértice es de corte. Un bloque con ≥ 3 vértices: todo par de vértices en un ciclo común.

7. Árbol: conexo y acíclico $\Leftrightarrow$ camino único $\Leftrightarrow$ conexo y toda arista puente $\Leftrightarrow$ conexo con $n - 1$ aristas. Si $n \geq 2$, hay al menos dos hojas y $|L| = 2 + \sum_{\delta(v) \geq 2} (\delta(v) - 2)$. Quitar un vértice de grado k deja k componentes, cada una un árbol; el centro es un vértice o dos adyacentes.
8. Todo grafo conexo tiene un árbol spanning; menos de $n - 1$ aristas implica desconexo.
9. Bipartito $\Leftrightarrow$ sin ciclos impares; la partición se construye por paridad de la distancia a un vértice base en cada componente.

El arco de longitud máxima aparece en cuatro ejercicios de este capítulo. Si un enunciado dice «probar que existe un vértice tal que...», es el primer intento.

Grafos Eulerianos y Hamiltonianos

ANTES DE LEER

Tres preguntas antes de empezar.

1. Un cartero tiene que pasar por todas las calles de un barrio y volver al punto de partida sin repetir ninguna. ¿De qué depende que pueda hacerlo, y cómo lo sabría sin probar todas las rutas?
2. Un viajante tiene que visitar todas las ciudades de una lista y volver a casa sin repetir ninguna. ¿Es la misma pregunta que la anterior con «ciudades» en vez de «calles»?
3. ¿Por qué la primera pregunta se decide contando grados y para la segunda no se conoce un algoritmo que sea rápido en todos los casos?

Las respuestas están en las secciones 3.1 y 3.2. Este capítulo usa del anterior: recorridos, ciclos y conexión (2.4), puentes (2.6), bloques (2.7), la suma $G + H$ y los bipartitos (2.9). Y el lema del apretón de manos, todo el tiempo.

3.1 Grafos eulerianos

LA PREGUNTA

En Königsberg, hoy Kaliningrado, el río Pregel forma dos islas unidas entre sí y con las dos orillas por siete puentes. Los vecinos se preguntaban si se podía dar un paseo cruzando cada puente exactamente una vez. Euler lo resolvió en un trabajo publicado en 1741, en el volumen correspondiente a 1736. Lo situó en una «geometría de la posición»: para decidirlo no hacen falta las longitudes de los puentes ni los ángulos del mapa, sino saber qué regiones unen. La pregunta es doble: ¿cuándo se puede recorrer una red pasando una sola vez por cada enlace?, y ¿qué clase de matemática decide

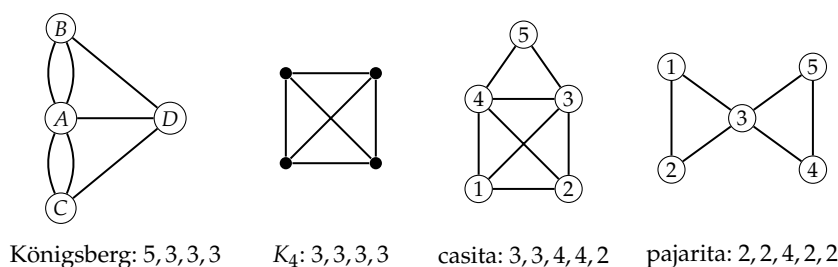
una pregunta así?

Definición (recorrido y grafo euleriano). Dado un grafo G , un recorrido se dice **euleriano** si pasa por todas y cada una de las aristas del grafo una única vez. Un grafo *conexo* se dice **euleriano** si admite un recorrido euleriano cerrado (un **circuito euleriano**), es decir, que empiece y termine en el mismo vértice.

Un recorrido puede repetir vértices; lo que no repite un recorrido euleriano son aristas. Y las pasa todas. Un recorrido euleriano abierto (que empieza y termina en vértices distintos) no hace euleriano al grafo: ese caso es el primero de los ejercicios de esta sección.

Observación. Se ha exigido explícitamente la conexión: recorrer todas las aristas solo conecta los vértices que tocan alguna de ellas. Añadir un vértice aislado no impide recorrerlas, pero el grafo resultante ya no es conexo. Esta convención evita arrastrar esa excepción; K_1 sí es euleriano, mediante el recorrido de longitud cero.

Ejemplo (cuatro casos a mano, antes de ningún teorema). Antes de enunciar nada conviene probar la pregunta con las manos en cuatro grafos pequeños, porque el enunciado del teorema sale de mirarlos.



Königsberg. Cada región de tierra es un vértice y cada puente, una arista. La isla central A tiene dos puentes hacia cada orilla, B y C , y uno hacia la otra isla, D ; y D tiene uno hacia cada orilla. Es un multigrafo, con dos aristas entre A y B y dos entre A y C , y sus grados son 5, 3, 3, 3. Un paseo que entra en una región y vuelve a salir gasta dos de sus puentes. Si una región tiene un número impar de puentes, le sobra uno, y ese solo puede usarse para empezar allí o para terminar allí. Con cuatro regiones impares habría que empezar o terminar en cuatro sitios distintos, y un paseo tiene un solo principio y un solo final: el paseo es imposible. Esa es toda la respuesta de Euler.

El completo K_4 . Sus cuatro grados valen 3. Por la misma cuenta, no admite ni un recorrido euleriano cerrado ni uno abierto.

La casita, un cuadrado 1 2 3 4 con sus dos diagonales y un tejado 3 5 4. Los grados son 3, 3, 4, 4, 2, y solo 1 y 2 son impares. No hay circuito: un circuito empieza y termina en el mismo vértice, y en él no sobra ninguna arista. Pero sí hay un recorrido que empieza en 1 y termina en 2,

1 2 3 4 1 3 5 4 2,

que es el pasatiempo de dibujar la casa sin levantar el lápiz. Empezando en 3, en 4 o en 5 no sale, porque el principio y el final tienen que ser los dos vértices impares.

La pajarita, dos triángulos 1 2 3 y 3 4 5 con el vértice 3 común. Los grados son 2, 2, 4, 2, 2, todos pares, y 1 2 3 4 5 3 1 es un circuito euleriano que pasa dos veces por 3, una por cada pareja de sus aristas.

Los cuatro casos cuentan lo mismo. En un vértice por el que el paseo solo pasa, las aristas se gastan de dos en dos, una para llegar y otra para irse; los únicos vértices donde puede sobrar una son el primero y el último. De ahí salen, sin haber demostrado todavía nada, dos conjeturas: hay circuito euleriano cuando todos los grados son pares, y hay recorrido euleriano abierto cuando exactamente dos son impares, que serán su principio y su final. La primera es el teorema que sigue; la segunda, el primer ejercicio de la sección. Lo que la cuenta no dice es la otra mitad: que con todos los grados pares el circuito exista de verdad. Eso es lo que cuesta, y de eso se ocupan el lema y el teorema.

Lema. Sea G un grafo conexo no trivial en el que todos los vértices tienen grado par. Entonces G contiene un ciclo.

LA IDEA: NO HAY CALLEJONES SIN SALIDA

Si en cada vértice hay al menos dos aristas, uno puede entrar por una y salir por otra, siempre. Un paseo que nunca se ve obligado a retroceder en un grafo finito acaba mordiéndose la cola. Esa es toda la idea: grado par significa «por cada entrada hay una salida», y eso es lo que un circuito necesita en cada vértice.

El corazón en una frase: un paseo que nunca retrocede y no puede parar tiene que repetir un vértice, y la primera repetición es un ciclo. Obsérvese qué poco se usa de la hipótesis: no hace falta que los grados sean pares, solo que sean ≥ 2 ; la paridad entra por la puerta de atrás, porque un grado par y no nulo ya es al menos 2. Y la finitud del grafo es lo que impide que el paseo siga indefinidamente sin repetirse.

Paso 1: todos los grados son al menos 2. Como G es conexo y tiene al menos dos vértices, ningún vértice tiene grado 0; y como los grados son pares, todos son al menos 2.

Paso 2: se camina sin retroceder, y eso siempre se puede (el núcleo de la prueba). Se construye un recorrido sin volver sobre los pasos: se toma un vértice v_0 y un vecino suyo v_1 ; como $\delta(v_1) \geq 2$, hay un vecino $v_2 \neq v_0$ de v_1 ; en general, elegido v_i , como $\delta(v_i) \geq 2$ hay un vecino $v_{i+1} \neq v_{i-1}$. Aquí está el peso del lema: la condición sobre los grados garantiza que el paseo *nunca* se queda sin salida, y por eso puede prolongarse cuanto haga falta.

Paso 3: la finitud fuerza la repetición, y la primera repetición es un ciclo. Como hay un número finito de vértices, en algún momento se repite uno: sea v_s el primero que coincide con un v_r anterior, $r < s$. Entonces $s - r \geq 3$ (no es 1 porque $v_s \neq v_{s-1}$, no es 2 porque $v_s \neq v_{s-2}$ por construcción), y $(v_r, v_{r+1}, \dots, v_s = v_r)$ es un ciclo. La cuenta $s - r \geq 3$ no es un detalle: es lo que hace que el objeto obtenido sea un ciclo en el sentido de este libro, que exige longitud al menos 3. ■

Teorema (caracterización de los grafos eulerianos). Sea G un grafo conexo. Son equivalentes:

- (a) G es euleriano.
- (b) Todo vértice de G tiene grado par.
- (c) El conjunto de aristas de G admite una partición en ciclos.

LA IDEA: POR CADA ENTRADA, UNA SALIDA

La intuición falsa, primero. Lo que uno espera de un problema de recorridos es que la respuesta dependa de *cómo* se recorra: que haya que ser listo eligiendo por dónde empezar y qué arista tomar en cada bifurcación, y que un grafo pueda tener circuito euleriano solo si se acierta con el camino. Lo asombroso del teorema es que eso es falso. La existencia del circuito no depende de ninguna elección: está decidida de antemano por una lista de números, los grados. No hay que buscar el camino para saber si existe.

La imagen. Piense en un cartero que tiene que pasar por cada calle exactamente una vez y volver a casa. En cada plaza, cada vez que entra por una calle tiene que salir por otra distinta, y ninguna calle se repite. Luego las calles de cada plaza se van emparejando de dos en dos: entrada con salida, entrada con salida. Al terminar, no puede quedar ninguna suelta. **Eso es exactamente «grado par»**, y la imagen ya predice el enunciado: la condición tiene que ser local —una condición en cada vértice— y tiene que ser la paridad.

La dirección difícil es la contraria, y su imagen es distinta: si todas las plazas tienen grado par, el grafo se puede *descoser* en circuitos cerrados sueltos, como quien deshace una madeja en anillos; y después esos anillos se vuelven a coser en uno solo, insertándolos unos dentro de otros por los puntos donde se tocan. La conexión es lo que garantiza que siempre se tocan.

El corazón en una frase: *la paridad se conserva sola*. Al quitar un ciclo de un grafo, cada vértice pierde exactamente dos aristas o ninguna, de modo que «todos los grados pares» sobrevive intacto a cada corte, y por eso el descosido se puede repetir hasta el final sin quedarse a medias.

Paso 1, (a) $\Rightarrow$ (b): el circuito empareja las aristas de cada vértice. Sea W un circuito euleriano y v un vértice. Cada vez que W pasa por v entra por una arista y sale por otra, y como W usa cada arista incidente con v exactamente una vez, las aristas de v quedan emparejadas (entrada, salida). Si v es el vértice inicial, la primera arista (salida) se empareja con la última (entrada). Luego $\delta(v)$ es par.

Paso 2, (b) $\Rightarrow$ (c): se descose el grafo en ciclos, y la paridad sobrevive a cada corte (el núcleo de la prueba). Aquí está el peso del teorema. Lo que hace que el proceso no se atasque es que quitar un ciclo resta 2 al grado de los vértices que toca y 0 a los demás: la hipótesis «todos los grados pares» se regenera sola después de cada corte, y el lema vuelve a ser aplicable. Sea G conexo con todos los grados pares. Si no tiene aristas, la partición es vacía. Si tiene, por el lema contiene un ciclo C_1 . Sea G_1 el grafo que se obtiene quitando a G las aristas de C_1 y los vértices que queden aislados. En G_1 todos los grados siguen siendo pares, porque cada vértice de C_1 pierde exactamente dos aristas y los demás ninguna. Cada componente conexa no trivial de G_1 es un grafo conexo no trivial con grados pares, luego contiene un ciclo por el lema. Se quitan esos ciclos y los vértices que queden aislados, y se repite. Como en cada paso se quitan al menos tres aristas y hay un número finito, el proceso termina, y termina cuando no quedan aristas. Los ciclos $C_1, \dots, C_k$ que se han ido quitando tienen conjuntos de aristas disjuntos dos a dos y su unión es $A(G)$:

$$A(G) = A(C_1) \sqcup A(C_2) \sqcup \dots \sqcup A(C_k).$$

Paso 3, (c) $\Rightarrow$ (a): se vuelven a coser los ciclos insertándolos por sus puntos de contacto.

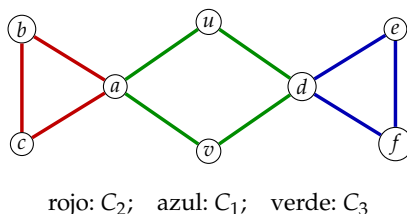
Sea $A(G) = A(C_1) \sqcup \dots \sqcup A(C_k)$ una partición en ciclos. Se prueba por inducción sobre k que G es euleriano. Si $k = 0$, $G = K_1$ y basta el recorrido de longitud cero. Si $k = 1$, G es un ciclo (no puede haber vértices aislados, por ser conexo), y un ciclo es su propio circuito euleriano. Sea $k \geq 2$ y supóngase el resultado cierto para particiones con menos de k ciclos. Sea G' el subgrafo formado por $C_1, \dots, C_{k-1}$: es la unión de los ciclos, que puede tener varias componentes; cada componente $G'_1, \dots, G'_m$ de G' es conexa y sus aristas están partidas en menos de k ciclos, luego por hipótesis de inducción cada una tiene un circuito euleriano $W_1, \dots, W_m$. El ciclo C_k tiene algún vértice en común con cada componente G'_j : si no tocara a G'_j , esa componente no tendría ninguna arista hacia el resto de G (las únicas aristas de G fuera de G' son las de C_k), y G no sería conexo. Sea entonces x_j un vértice común a C_k y G'_j para cada j . Se recorre C_k empezando en x_1 y, cada vez que se llega a un x_j por primera vez, se inserta el circuito W_j entero (que empieza y termina en x_j) antes de continuar por C_k . El resultado es un recorrido cerrado que usa cada arista de C_k una vez y cada arista de cada G'_j una vez: un circuito euleriano de G .

Conviene no dar por supuesto que el subgrafo generado por $C_1, \dots, C_{k-1}$ sea conexo: no tiene por qué serlo (dos triángulos disjuntos unidos por un ciclo largo), y por eso aquí se insertan los circuitos de *todas* sus componentes. ■

Encapsulado. Tres frases bastan para reconstruir la prueba. Un circuito entra y sale de cada vértice por aristas distintas, así que empareja sus aristas: grado par. Si todos los grados son pares hay un ciclo (el lema), y quitarlo deja los grados pares, así que se pueden seguir quitando ciclos hasta agotar las aristas. Y unos ciclos que parten las aristas de un grafo conexo se cosen en un circuito, insertando cada circuito parcial en otro ciclo por un vértice común.

Qué hace la conexión. Solo interviene en el Paso 3, y ahí es imprescindible. Dos triángulos disjuntos tienen todos los grados pares y sus aristas se parten en dos ciclos, pero ningún recorrido pasa por las seis aristas: (b) y (c) se cumplen y (a) no. Lo que se pierde es que los ciclos se toquen, y sin puntos de contacto no hay por dónde coserlos.

Ejemplo (descoser y coser, a mano). Sea G el grafo de ocho vértices formado por dos triángulos, abc y def , y un cuadrado $audv$ que los une. Los grados valen 4 en a y en d y 2 en los otros seis vértices, y G es conexo: es euleriano. Se sigue la demostración paso a paso.



Descoser. El lema da un ciclo caminando sin retroceder. Desde b , por ejemplo, $b a u d e f$, y desde f la única arista nueva lleva a d , que ya estaba en el paseo; la primera repetición cierra el ciclo $C_1 = d e f d$. Se quitan sus aristas y los vértices e y f , que se quedan aislados. Queda el triángulo abc unido al cuadrado, con a de grado 4 y los demás de grado 2: pares, como anuncia el Paso 2. Un segundo paseo, $b a c b$, da el triángulo $C_2 = a b c a$, y lo que sobra es el propio cuadrado, $C_3 = a u d v a$. Partición en tres ciclos: $3 + 3 + 4 = 10$ aristas, todas las de G .

Si en a el segundo paseo hubiera tomado u en vez de c , habría salido antes el cuadrado; el orden en que salen los ciclos no importa.

Coser. El Paso 3 toma el último ciclo, C_3 , y el subgrafo G' formado por los anteriores, C_1 y C_2 . Aquí se ve por qué la demostración no supone que G' sea conexo: son dos triángulos sin ningún vértice común, dos componentes. Cada una tiene su circuito, $W_1 = a b c a$ y $W_2 = d e f d$, y C_3 toca a las dos, en a y en d . Se recorre C_3 desde a y se inserta cada circuito al llegar a su punto de contacto:

$$\underbrace{a b c a}_{W_1} u \underbrace{d e f d}_{W_2} v a.$$

Son 10 pasos, uno por arista: un circuito euleriano de G .

El caso enseña que ninguna de las dos mitades exige ingenio. El descosido no necesita elegir bien, porque cualquier paseo que no retroceda acaba dando un ciclo; y el cosido tampoco, porque basta un vértice común por el que empalmar. El trabajo lo hacen la paridad, que garantiza que el descosido no se atasca, y la conexión, que garantiza que hay por dónde coser. Este modo de fabricar el circuito es el algoritmo de Hierholzer, y a mano suele ser más cómodo que el de Fleury, que viene a continuación, porque no obliga a buscar puentes en cada paso.

CONEXIÓN: EL APRETÓN DE MANOS HACE EL TRABAJO

Con el teorema, decidir si un grafo dibujado es euleriano es contar grados: conexo y todos pares. Y la partición en ciclos de (c) se construye a mano, quitando ciclos del grafo hasta que no quede ninguna arista.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: LA DEMOSTRACIÓN DE EULER, SIN GRAFOS

La alternativa. Euler no dibujó ningún grafo. Representó cada región por una letra y un paseo por una palabra: cruzar un puente es escribir la letra de la región a la que se llega. Con siete puentes, la palabra tiene ocho letras; una región con k puentes debe aparecer $(k+1)/2$ veces si k es impar, y $k/2$ o $k/2 + 1$ veces si es par. Sumando lo que exige cada región se obtiene más de ocho letras: imposible.

Su ventaja. Es un cálculo directo que descarta el paseo de Königsberg sin probar rutas una por una.

Qué le falta. Que solo prueba la necesidad (grados pares). Euler afirmó la suficiencia sin demostrarla; la primera demostración completa es de Hierholzer, en 1873, y es esencialmente la partición en ciclos de arriba. El punto de vista de los grafos, que tardó un siglo en llegar, es lo que convierte el truco de contar letras en un teorema con dos direcciones.

3.1.1 Algoritmo de Fleury

Dado un grafo, el teorema decide si es o no euleriano. El problema siguiente es cómo obtener un circuito euleriano cuando lo es, que no es trivial cuando el grafo es grande. Para eso está el algoritmo de Fleury (1883).

Definición (algoritmo de Fleury). Sea G un grafo euleriano.

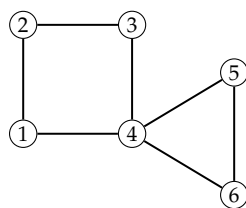
- *Inicio.* Se elige un vértice v_0 y se toma $W_0 = v_0$.
- *Iteración.* Si se tiene el recorrido $W_i = v_0 v_1 \cdots v_i$, con aristas $e_1 = v_0 v_1, \dots, e_i = v_{i-1} v_i$ distintas, se elige una arista e_{i+1} distinta de las anteriores tal que: e_{i+1} es incidente con v_i ; y,

salvo que no haya alternativa, e_{i+1} no es un puente del subgrafo $G - \{e_1, \dots, e_i\}$. Se denota v_{i+1} el otro extremo de e_{i+1} .

- **Final.** Se detiene cuando W_i contiene todas las aristas de G .

La regla es «no cruces un puente si puedes evitarlo»: un puente de lo que queda por recorrer lleva a una orilla desde la que ya no se podrá volver a la otra.

Ejemplo. Sea G el cuadrado 1 2 3 4 1 con el triángulo 4 5 6 4 pegado por el vértice 4. Es euleriano: conexo, grados 2, 2, 2, 4, 2, 2. Fleury desde $v_0 = 1$: se toma 12, 23, 34. En 4 quedan las aristas 41, 45, 46 del grafo $G - \{12, 23, 34\}$, en el que 41 es un puente (el vértice 1 solo tiene esa arista). Se elige 45 (o 46), luego 56, luego 64, y por último 41, que ahora es la única opción. Circuito: 1 2 3 4 5 6 4 1. Si en 4 se hubiera cruzado el puente 41, el recorrido 1 2 3 4 1 se habría quedado atascado en 1 con el triángulo sin recorrer.



en 4, tras 1 2 3 4: 41 es puente de lo que queda

Dónde se falla. En buscar los puentes en G en vez de en lo que queda por recorrer. Un grafo euleriano no tiene ningún puente: cada arista está en un ciclo de la partición, y una arista que está en un ciclo no es puente. En G , por tanto, la regla no prohibiría nunca nada. La arista 41 del ejemplo no es puente de G ; lo es de $G - \{12, 23, 34\}$, porque las aristas ya gastadas se han llevado el otro camino de 1 a 4. La regla se aplica al grafo que va quedando, y hay que volver a mirarla en cada paso.

3.1.2 Por qué funciona el algoritmo de Fleury

Dar el algoritmo sin demostrarlo deja abierta la única pregunta que importa: si puede atascarse a medias. El argumento que sigue es corto y usa exactamente las dos ideas del capítulo anterior, paridad de grados y puentes.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: LA PARIDAD SE CUIDA SOLA

El algoritmo de Fleury tiene una sola regla, «no cruces un puente mientras te quede otra salida», y la pregunta es por qué con esa única precaución no puede atascarse a medias. La respuesta no está en la regla: está en la paridad, que se cuida sola.

Imagínese que las calles se borran según se pisan. Cada vez que se *atraviesa* una plaza se gastan dos de sus calles, la de entrada y la de salida: su número de calles libres baja de dos en dos y por tanto **no cambia de paridad**. Como se salió de una ciudad euleriana, donde todas las plazas eran pares, todas siguen siendo pares durante el paseo entero, con dos únicas excepciones: la plaza de salida, que gastó una calle de más al arrancar, y aquella en la que uno está parado, que gastó una de más al llegar.

De ahí salen las dos mitades del teorema casi sin esfuerzo. Primera: cuando el paseo se atasca, la plaza donde uno está tiene cero calles libres, y cero es par; si no fuera la plaza de salida tendría que ser impar. Luego el paseo se atasca necesariamente en el punto de partida, es decir, es cerrado. Segunda: si al terminar quedara alguna calle

sin pisar, habría un trozo de ciudad todavía vivo y otro ya agotado, y como la ciudad era conexas alguna calle ya pisada los une; se mira la *última* vez que el paseo salió de la parte viva, y esa calle era un puente cruzado teniendo otra salida disponible, que es justo lo que la regla prohibía. En resumen: la paridad demuestra que el paseo es cerrado, y la única regla del algoritmo demuestra que es completo.

Proposición. Si G es euleriano, el algoritmo de Fleury termina con un circuito euleriano, sea cual sea el vértice inicial y sean cuales sean las elecciones permitidas.

Paso 1: la contabilidad de paridades de lo que queda por recorrer. Sea $W = v_0v_1 \cdots v_n$ el recorrido en el momento en que el algoritmo se detiene por no haber en v_n ninguna arista sin usar, y sea $H_i = G - \{e_1, \dots, e_i\}$ el grafo de las aristas no usadas tras i pasos. Dos observaciones sobre paridad. En H_i , todo vértice distinto de v_0 y de v_i tiene grado par: en G lo tenía, y cada paso del recorrido por él quita dos aristas. Y v_0 y v_i tienen grado impar en H_i si $v_i \neq v_0$ (a v_0 se le ha quitado una arista de más, la de salida, y a v_i una de más, la de llegada), y par si $v_i = v_0$.

Paso 2: el recorrido no puede quedarse tirado en otro sitio, porque la paridad lo delata. Al detenerse, $\delta_{H_n}(v_n) = 0$, que es par; si fuera $v_n \neq v_0$, ese grado sería impar. Luego $v_n = v_0$ y W es cerrado.

Paso 3: si sobrarian aristas, el algoritmo habría cruzado un puente teniendo alternativa, y su única regla lo prohíbe (el núcleo de la prueba). Aquí es donde entra —por primera y única vez— la regla de Fleury. El Paso 2 no la ha usado: la paridad sola garantiza que el paseo se cierra, pero no que lo haya recorrido todo. Lo que puede fallar es abandonar una zona demasiado pronto, y eso es exactamente cruzar un puente pudiendo no hacerlo. Supóngase que H_n tiene alguna arista y sea S el conjunto de vértices con grado positivo en H_n . Toda arista de H_n tiene sus dos extremos en S . Y $v_0 = v_n \notin S$, porque $\delta_{H_n}(v_n) = 0$. Como G es conexo y $S \neq \emptyset$, $S \neq V(G)$, alguna arista de G une S con su complementario, y no está en H_n , luego es una arista del recorrido. Sea m el mayor índice con $v_m \in S$; entonces $m < n$, $e_{m+1} = v_mv_{m+1}$ con $v_{m+1} \notin S$, y las aristas $e_{m+2}, \dots, e_n$ tienen todos sus extremos fuera de S . Se afirma que e_{m+1} era un puente de H_m . Las aristas de H_m son las de H_n (dentro de S) más $e_{m+1}, \dots, e_n$ (fuera de S , salvo e_{m+1}); así que en $H_m - e_{m+1}$ no hay ninguna arista entre S y su complementario, y $v_m \in S$, $v_{m+1} \notin S$ quedan en componentes distintas. Luego e_{m+1} es puente de H_m . Pero el algoritmo solo cruza un puente cuando no hay alternativa, y en v_m la había: $v_m \in S$ tiene grado positivo en H_n , y las aristas de H_n en v_m son aristas de H_m distintas de e_{m+1} . Contradicción. Por tanto H_n no tiene aristas y W es un circuito euleriano. ■

Encapsulado. Mientras se camina, todos los vértices conservan grado par en lo que queda, salvo el de salida y aquel en el que uno está; por eso el paseo solo puede atascarse en el punto de partida. Y si al atascarse quedaran aristas, la última salida desde la zona sin recorrer habría sido un puente cruzado teniendo otra opción, que es lo que la regla prohíbe. La paridad cierra el paseo; la regla impide que se deje nada.

DE DÓNDE VIENE: DEL PASEO AL CARTERO

El problema de Königsberg tiene una versión práctica que se sigue resolviendo cada día: el del cartero chino (Mei-Ko Kwan, 1960; traducción inglesa de 1962), que pide recorrer todas las calles y regresar al inicio con la menor distancia total. En una red no dirigida y conexa, se duplican tramos con el menor coste total posible hasta que todos los grados sean pares, y después se aplica Fleury o Hierholzer. Minimizar el número de repeticiones equivale a minimizar la distancia solo si todas las calles miden lo mismo. Este modelo se aplica a rutas de reparto, recogida de basura o quitanieves.

Ejercicios: grafos eulerianos

Ejercicio 3.1. *Recorridos eulerianos abiertos* R3.1

Probar que un grafo conexo admite un recorrido euleriano abierto si y solo si tiene exactamente dos vértices de grado impar.

Resolución. La idea. Un recorrido euleriano abierto es un circuito al que le falta un tramo para volver al principio. Si ese tramo se añade desde fuera, con un vértice nuevo x unido a los dos extremos, el recorrido se cierra y el problema pasa a ser el del teorema. Los dos sentidos de la equivalencia son esa misma maniobra, leída hacia delante y hacia atrás: se cierra con x , se aplica el teorema y se quita x .

($\Leftarrow$) Sea G conexo con exactamente dos vértices u, v de grado impar. Sea G' el grafo con $V(G') = V(G) \cup \{x\}$, x nuevo, y $A(G') = A(G) \cup \{xu, xv\}$. En G' todos los grados son pares: $\delta_{G'}(x) = 2$; $\delta_{G'}(u) = \delta_G(u) + 1$ y $\delta_{G'}(v) = \delta_G(v) + 1$, pares; los demás no cambian. Y G' es conexo. Por el teorema, G' tiene un circuito euleriano γ' . Como x tiene grado 2, γ' pasa por x exactamente una vez, entrando por una de las aristas xu, xv y saliendo por la otra; leyendo γ' a partir de ese paso, tiene la forma $xu \cdots vx$ (o al revés). Quitando x y sus dos aristas queda un recorrido de u a v que usa cada arista de G exactamente una vez: un recorrido euleriano abierto de G .

($\Rightarrow$) Sea γ un recorrido euleriano abierto de G , de u a v con $u \neq v$. Con el mismo G' , el recorrido $x\gamma x$ (la arista xu , luego γ , luego vx) es un circuito euleriano de G' , luego todos los grados de G' son pares. Como $\delta_G(u) = \delta_{G'}(u) - 1$ y $\delta_G(v) = \delta_{G'}(v) - 1$, u y v tienen grado impar en G , y los demás vértices, cuyo grado no cambia, lo tienen par. Exactamente dos impares. ■

Dónde se falla. En cerrar con la arista uv en vez de con un vértice nuevo. Si u y v ya son adyacentes, uv quedaría repetida y el grafo dejaría de ser simple, con lo que el teorema, tal como está enunciado, no se aplicaría; en la casita del ejemplo de los cuatro casos, los dos vértices impares, 1 y 2, son vecinos. El vértice nuevo evita esa discusión, porque sus dos aristas son siempre nuevas. Y en el ($\Leftarrow$), en olvidar que x tiene grado 2: eso es lo que garantiza que el circuito pasa por x una sola vez y que, al quitarlo, queda un único recorrido y no varios trozos.

Ejercicio 3.2. *Partición en recorridos abiertos* R3.2; CONTROL 2.3

Sea G un grafo conexo con exactamente $2n$ vértices de grado impar, $n \geq 1$. Demostrar que el conjunto de aristas de G puede partitionarse en n recorridos abiertos sin aristas comunes dos a dos. (La relación lo pide con cuatro vértices impares y dos recorridos.) • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

Resolución. La idea. Es el ejercicio anterior repetido n veces. Allí, un vértice nuevo unido a los dos impares cerraba el recorrido abierto en un circuito. Aquí hay $2n$ impares: se emparejan, y cada pareja recibe su propio vértice nuevo, que la cierra. El grafo ampliado es euleriano, y su circuito pasa una sola vez por cada vértice nuevo. Al borrarlos, el circuito se rompe como un collar al que se le quitan n cuentas: en n hilos, cada uno de los cuales empieza y termina en vértices impares.

Paso 1: se cierran los impares por parejas con vértices nuevos. Sean $u_1, v_1, \dots, u_n, v_n$ los $2n$ vértices de grado impar, emparejados de cualquier manera. Sea G' el grafo que se obtiene añadiendo n vértices nuevos $x_1, \dots, x_n$ y las $2n$ aristas $x_i u_i, x_i v_i$. En G' todos los grados son pares (cada x_i tiene grado 2; cada u_i, v_i gana una arista; los demás no cambian) y G' es conexo, luego tiene un circuito euleriano γ' .

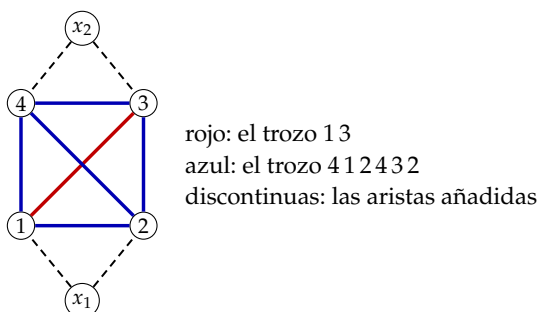
Paso 2: el circuito pasa una sola vez por cada vértice nuevo. Cada x_i tiene grado 2, así que γ' pasa por cada x_i exactamente una vez.

Paso 3: al quitar los vértices nuevos, el circuito se corta en n recorridos abiertos (el núcleo de la prueba). Al quitar de γ' los n vértices x_i con sus aristas, el circuito se corta en n trozos, y cada trozo es un recorrido de G que empieza en un u_i o v_i y termina en otro u_j o v_j (los extremos de las aristas quitadas). Cada trozo va desde el extremo en G de una arista quitada hasta el extremo en G de la siguiente arista quitada. No es vacío: los dos extremos en G son distintos, porque cada vértice impar toca exactamente una arista añadida; entre ellos hay al menos una arista de G . Sus dos extremos son vértices de grado impar, y son distintos porque cada uno de los $2n$ vértices impares es extremo de exactamente una arista quitada; luego los trozos son recorridos abiertos. Los n trozos usan entre todos cada arista de G exactamente una vez. ■

Un caso a mano. En K_4 los cuatro vértices tienen grado 3, así que $n = 2$. Se emparejan 1 con 2 y 3 con 4, y se añaden x_1 , unido a 1 y a 2, y x_2 , unido a 3 y a 4. En el grafo ampliado los vértices de K_4 tienen grado 4 y los nuevos, 2. Un circuito euleriano es

$$x_1 1 3 x_2 4 1 2 4 3 2 x_1.$$

Al borrar x_1 y x_2 quedan dos trozos, 1 3 y 4 1 2 4 3 2, que se reparten las seis aristas de K_4 : una el primero y cinco el segundo.



Los extremos de los trozos son 1, 3 y 4, 2, no las parejas 1, 2 y 3, 4 que se eligieron. El emparejamiento decide dónde se corta el circuito, pero no quién queda unido con quién.

Encapsulado. Se emparejan los $2n$ impares y se une cada pareja a un vértice nuevo; el grafo resultante es conexo y con grados pares, luego euleriano. Su circuito pasa una sola vez por cada vértice nuevo, porque tienen grado 2. Borrados los nuevos, el circuito queda cortado en n tramos no vacíos cuyos extremos son impares distintos: n recorridos abiertos que se reparten las aristas.

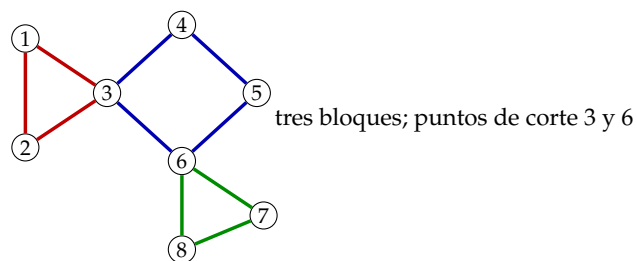
Dónde se falla. En tres sitios. Primero, en afirmar que el recorrido i va de u_i a v_i : el caso de K_4 lo desmiente. Segundo, en no comprobar que ningún trozo es vacío ni cerrado; lo garantiza que cada impar toque exactamente una arista añadida, y hay que decirlo. Tercero, en no justificar que G' es conexo: lo es porque G lo es y cada vértice nuevo está unido a vértices de G .

Otra vía (cuántos impares hay siempre). El número de vértices de grado impar es par por el apretón de manos, así que la hipótesis «exactamente $2n$ » no restringe nada: todo grafo conexo con aristas es euleriano ($n = 0$) o se parte en n recorridos abiertos con n el número de impares partido por dos. Y no se puede con menos de n : cada recorrido abierto tiene solo dos extremos, y un vértice de grado impar tiene que ser extremo de algún recorrido (si solo fuera interior, cada paso usaría dos de sus aristas).

Ejercicio 3.3. Bloques eulerianos R3.3; CONTROL 2.4

Probar que un grafo conexo es euleriano si y solo si todos sus bloques son eulerianos. • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

Resolución. La idea. Un grafo conexo está hecho de bloques pegados por sus puntos de corte, y los ciclos no saltan de un bloque a otro: todo ciclo vive dentro de un solo bloque. Por eso la condición (c) del teorema, que las aristas se partan en ciclos, se puede comprobar bloque a bloque: una partición en ciclos de G es lo mismo que unas particiones en ciclos de cada bloque, puestas juntas. En la figura, los bloques son un triángulo, un cuadrado y otro triángulo, pegados por los puntos de corte 3 y 6; cada bloque es un ciclo y G es euleriano. En 3 se ve la cuenta de grados: $\delta_G(3) = 4 = 2 + 2$, dos aristas de cada bloque.



Paso 1: los dos hechos sobre bloques que se usan. Se usan dos hechos de la sección 2.7: cada arista de G está en exactamente un bloque, y todo ciclo de G está contenido en un único bloque. Cada bloque es conexo por definición.

Paso 2, ($\Rightarrow$): cada ciclo de la partición cae entero dentro de un bloque (el núcleo de la prueba). ($\Rightarrow$) Si G es euleriano, $A(G)$ se parte en ciclos $C_1, \dots, C_k$. Sea B un bloque. Cada C_j está contenido en un solo bloque; los que están contenidos en B tienen sus aristas en $A(B)$, y toda arista de B está en algún C_j , que por contener una arista de B está en B . Luego $A(B)$

es la unión disjunta de las aristas de los ciclos C_j contenidos en B : una partición de $A(B)$ en ciclos, y B es euleriano por (c).

Paso 3, ($\Leftarrow$): se juntan las particiones de los bloques. ($\Leftarrow$) Si cada bloque $B_1, \dots, B_r$ es euleriano, cada $A(B_i)$ se parte en ciclos, y como los $A(B_i)$ parten $A(G)$, la unión de todas esas particiones es una partición de $A(G)$ en ciclos. Como G es conexo, es euleriano por (c). ■

Encapsulado. Todo ciclo está en un solo bloque, y toda arista también. Luego una partición de $A(G)$ en ciclos se reparte entre los bloques y, al revés, particiones en ciclos de los bloques se juntan en una de G . Con la caracterización (c) a los dos lados, eso es la equivalencia.

Dónde se falla. En los bloques que son una sola arista. Un puente forma él solo un bloque K_2 , y K_2 no es euleriano, porque sus dos vértices tienen grado 1. Así que el ejercicio contiene la afirmación de que un grafo euleriano no tiene puentes: si en la figura se añadiera una arista colgante 89, su bloque K_2 no sería euleriano, y tampoco lo sería G , en el que 8 y 9 pasarían a tener grado impar. El otro error es intentar la ida por grados, que se atasca en los puntos de corte: que la suma de los grados de v en sus bloques sea par no dice que cada sumando lo sea, como explica la otra vía que sigue.

Otra vía (por grados). También sale con (b). En un punto de corte v que está en los bloques $B_1, \dots, B_s$, las aristas de v se reparten entre los B_i sin solaparse, luego $\delta_G(v) = \sum_i \delta_{B_i}(v)$; y un vértice que no es punto de corte está en un solo bloque, donde tiene el mismo grado que en G . Si todos los $\delta_{B_i}(v)$ son pares, $\delta_G(v)$ lo es. El recíproco por grados no es inmediato (una suma par no obliga a que los sumandos sean pares), y por eso la vía de los ciclos es la buena.

Ejercicio 3.4. Sumas y grafos cúbicos R3.4; EXAMEN DE JUNIO 2024

Sea G un grafo cúbico, esto es, regular de grado 3.

- (a) Probar que el grafo $G + K_3$ es euleriano.
- (b) ¿Es euleriano el grafo $G + G$?
- (c) (Junio 2024.) Sea G conexo, no trivial y regular. Probar que $G + G$ es euleriano si y solo si G es euleriano de orden par.

Resolución. La idea. En una suma todo se decide con una cuenta: un vértice de G conserva sus aristas y gana una hacia cada vértice del otro sumando, así que $\delta_{G+H}(z) = \delta_G(z) + |V(H)|$. Como la suma es siempre conexa (cada vértice de un sumando está unido a todos los del otro), ser euleriana es solo cuestión de paridades. Y de un grafo cúbico hay que recordar una sola cosa: tiene un número par de vértices.

Como todo vértice de G tiene grado impar, el número de vértices de grado impar es par (apretón de manos), luego $p = |V(G)|$ es par. En $G + G$ se entiende la suma de G con una copia disjunta G' .

(a) En $G + K_3$, un vértice z de G tiene grado $3 + 3 = 6$, y un vértice x_i de K_3 tiene grado $2 + p$, par. Además $G + K_3$ es conexo (x_1 es adyacente a todos). Luego es euleriano.

(b) En $G + G'$, cada vértice de G tiene grado $3 + p$, impar; lo mismo en G' . No es euleriano.

(c) Sea G conexo, no trivial, regular de grado r y orden p . $G + G'$ es conexo, y cada vértice tiene grado $r + p$. Luego $G + G'$ es euleriano si y solo si $r + p$ es par, es decir, r y p de la misma paridad. Si r y p son ambos impares, G tendría p vértices de grado impar con p impar, imposible. Así que $r + p$ par equivale a r y p ambos pares, es decir, G euleriano (conexo con grados pares) y de orden par. ■

Qué hemos aprendido, con números. Con $G = K_4$, que es cúbico de orden 4, la suma $K_4 + K_3$ es K_7 , con todos los grados iguales a 6: euleriano, como dice (a). Y $K_4 + K_4$ es K_8 , con grados 7: no lo es, como dice (b). Para (c), $C_4 + C_4$ tiene todos los grados iguales a $2 + 4 = 6$ y es euleriano, mientras que $C_3 + C_3 = K_6$ tiene grados 5: C_3 es euleriano, pero de orden impar.

Dónde se falla. En (c), en olvidar la vuelta: de « $r + p$ par» hay que llegar a « r y p pares», y eso exige descartar que sean los dos impares, que es lo que hace el apretón de manos. Y en los tres apartados, en no decir que la suma es conexa, que es la mitad de la definición de euleriano.

Ejercicio 3.5. *Eulerianos y suma: un verdadero o falso* EXAMEN DE 2024–25

¿Es cierto que G y H son eulerianos si y solo si $G + H$ es euleriano? • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

Resolución. La idea. Un verdadero o falso de este tipo se decide antes de buscar contraejemplos, con la cuenta de grados de la suma: cada vértice de G gana $|V(H)|$ aristas, y cada uno de H gana $|V(G)|$. Si $|V(H)|$ es impar, sumar H cambia la paridad de todos los grados de G , y eso rompe la ida: dos grafos eulerianos de orden impar dan una suma con todos los grados impares. Y la suma es conexa aunque G y H no lo sean, lo que rompe la vuelta: dos grafos no conexos pueden sumar un grafo euleriano. Los contraejemplos más pequeños salen solos.

Falso en las dos direcciones.

Paso 1: la ida falla, con dos eulerianos de orden impar. Si $G = H = K_3$, ambos son eulerianos y $G + H = K_6$ tiene todos los grados 5: no es euleriano.

Paso 2: la vuelta falla, con dos grafos no conexos (el núcleo: la suma conecta lo que estaba separado). Si $G = H = \overline{K_2}$ (dos vértices sin arista), ninguno es euleriano (no son conexos) y $G + H = K_{2,2} = C_4$ sí lo es. Lo único cierto en general es la cuenta: $\delta_{G+H}(z) = \delta_G(z) + |V(H)|$ para $z \in V(G)$. ■

Encapsulado: lo que sí es cierto. Como $G + H$ es siempre conexo, la cuenta de grados da la respuesta exacta: $G + H$ es euleriano si y solo si todos los grados de G tienen la paridad de $|V(H)|$ y todos los de H , la de $|V(G)|$. La afirmación del enunciado mezcla dos cosas distintas. Que G y H sean eulerianos habla de sus grados y de su conexión; que $G + H$ lo sea habla de sus grados y de los órdenes. Por ejemplo, $K_2 + K_1 = K_3$ es euleriano aunque K_2 no lo sea: los grados de K_2 valen 1, que tiene la paridad de $|V(K_1)| = 1$.

Dónde se falla. En dar por euleriano $\overline{K_2}$ porque sus grados, 0 y 0, son pares. No lo es, porque no es conexo y la definición exige la conexión; justo por eso sirve de contraejemplo. Y en contestar «falso» sin decir qué dirección falla. Para refutar un «si y solo si» basta un contraejemplo, pero decir que fallan las dos, con uno para cada una, es lo que muestra que se ha entendido el porqué.

Ejercicio 3.6. *Camino más ciclo* EXAMEN DE DICIEMBRE 2015

Sea P_k el camino con $k \geq 1$ vértices y C_h el ciclo con $h \geq 3$ vértices. (a) ¿Bajo qué condiciones es $P_k + C_h$ un grafo euleriano? (b) ¿Bajo qué condiciones admite un recorrido euleriano abierto?

Resolución. La idea. Es una tabla de grados. En $P_k + C_h$ hay tres clases de vértices, los

extremos del camino, sus vértices interiores y los del ciclo, y dentro de cada clase todos tienen el mismo grado. La suma es conexa, así que (a) pide que las tres clases tengan grado par, y (b) que haya exactamente dos vértices impares en total. Todo se reduce a discutir la paridad de k y de h .

clase	cuántos	grado en $P_k + C_h$
extremos del camino	2 (1 si $k = 1$)	$1 + h$ (h si $k = 1$)
interiores del camino	$k - 2$ (ninguno si $k \leq 2$)	$2 + h$
vértices del ciclo	h	$2 + k$

$P_k + C_h$ es conexo. Sus grados: los dos extremos del camino (uno solo si $k = 1$) tienen grado $1 + h$ (o h si $k = 1$); los $k - 2$ vértices interiores del camino, $2 + h$; los h vértices del ciclo, $2 + k$.

(a) Euleriano si y solo si todos son pares. Si $k = 1$, los vértices del ciclo tienen grado 3: nunca. Si $k = 2$: extremos $1 + h$, ciclo 4; euleriano si y solo si h es impar. Si $k \geq 3$: los extremos piden h impar y los interiores piden h par; nunca. **Respuesta:** $k = 2$ y h impar.

(b) Recorrido euleriano abierto si y solo si hay exactamente dos vértices de grado impar. Si k es impar, los $h \geq 3$ vértices del ciclo tienen grado impar: nunca. Sea k par; los vértices del ciclo son pares. Si $k = 2$: los dos extremos tienen grado $1 + h$, impar si y solo si h es par; con h par hay exactamente dos impares. Si $k \geq 4$ par: con h par, los dos extremos son impares y los interiores pares, exactamente dos; con h impar, los extremos son pares y los $k - 2$ interiores impares, exactamente dos si y solo si $k = 4$. **Respuesta:** k par y h par, o bien $k = 4$ y h impar. (Si P_k denota el camino con k aristas en vez de con k vértices, se sustituye k por $k + 1$.) ■

Dónde se falla. En los casos pequeños, $k = 1$ y $k = 2$, que no tienen vértices interiores y se escapan de la discusión general: la respuesta de (a) vive justamente en $k = 2$. Y en la convención sobre P_k , que cambia la respuesta y conviene fijar por escrito antes de empezar.

Ejercicio 3.7. Tres afirmaciones R3.14; EXÁMENES DE SEPTIEMBRE 2012 Y 2011–12

¿Son ciertas? (a) Todo grafo bipartito euleriano tiene un número par de aristas. (b) Todo grafo euleriano con un número par de vértices tiene un número par de aristas. (c) En un grafo euleriano no existen aristas puente.

Resolución. La idea. Las tres preguntan por un grafo euleriano, y la herramienta es la partición de las aristas en ciclos, que convierte una pregunta sobre todo el grafo en preguntas sobre ciclos sueltos. (a) y (c) caen así en una línea. (b) se parece a (a), pero la paridad del número de vértices no dice nada de las longitudes de los ciclos, y un triángulo basta para romperla.

(a) **Cierta.** Un grafo euleriano admite una partición de sus aristas en ciclos, y en un grafo bipartito todo ciclo tiene longitud par. El número de aristas es la suma de las longitudes de los ciclos de la partición: una suma de pares.

(b) **Falsa.** Un triángulo y un cuadrado pegados por un vértice: 6 vértices, grados 2, 2, 4, 2, 2, 2, euleriano, y 7 aristas.

(c) **Cierta.** Toda arista de un grafo euleriano está en un ciclo de la partición, y una arista en un ciclo no es puente. (Es la afirmación «todo grafo con un puente es no euleriano» de la prueba de 2011–12, contrarrecíproco.) ■

Dónde se falla. En (b), en buscar el contraejemplo entre los grafos bipartitos, donde (a) dice que no existe: hace falta un ciclo impar. Y hace falta ir a seis vértices, porque con cuatro

el único grafo euleriano es C_4 (todos los grados tendrían que valer 2), que tiene cuatro aristas; con seis vértices, un grafo euleriano con un número impar de aristas tiene al menos siete, y el triángulo pegado al cuadrado las tiene.

Ejercicio 3.8. *El grafo de las ternas* R3.15, APARTADOS (A) Y (B)

Dado $n \geq 2$, sea G_n el grafo cuyos vértices son las n -uplas $(a_1, \dots, a_n)$ con $a_i \in \{-1, 0, 1\}$, y en el que dos vértices son adyacentes si las n -uplas coinciden en alguna coordenada. (a) Calcular el orden y el tamaño de G_n . ¿Es regular? (b) ¿Para qué n es G_n euleriano?

Resolución. La idea. Contar a los que *no* son vecinos es más fácil que contar a los vecinos: no ser vecino de v es diferir de v en todas las coordenadas, y eso deja dos opciones en cada una. El grado sale por complementario, y su paridad, de que 3^n es impar y 2^n es par.

(a) El orden es $VR_{3,n} = 3^n$. Fijado $v = (a_1, \dots, a_n)$, los vértices *no* adyacentes a v son las n -uplas que difieren de v en todas las coordenadas: 2 opciones por coordenada, $VR_{2,n} = 2^n$ en total. El propio v coincide consigo mismo en todas las coordenadas, así que no está entre esas 2^n , y hay que descontarlo aparte porque un grafo simple no tiene lazos. Así $\delta(v) = 3^n - 2^n - 1$ para todo v : G_n es regular. Por el apretón de manos, $|A(G_n)| = \frac{1}{2} 3^n (3^n - 2^n - 1)$.

(b) G_n es conexo: si v y u coinciden en alguna coordenada son adyacentes; si no, w obtenida de v cambiando solo la primera coordenada por la de u es adyacente a ambas ($n \geq 2$), y vwu es un camino. Los grados: 3^n es impar, 2^n es par, luego $3^n - 2^n - 1$ es par. Conexo con todos los grados pares: G_n es euleriano para todo $n \geq 2$. ■

Dónde se falla. En el -1 . Quien cuenta los que no son vecinos y olvida que v tampoco es vecino de sí mismo escribe $\delta(v) = 3^n - 2^n$, que es siempre impar (impar menos par), y concluye que G_n *nunca* es euleriano: descontar un solo vértice cambia la respuesta entera. El otro sitio es la conexión, que es donde trabaja la hipótesis $n \geq 2$. Con $n = 1$ los vértices son $-1, 0$ y 1 , dos distintos no coinciden en su única coordenada y el grafo no tiene aristas: los tres grados son 0 , pares, y aun así no es euleriano. El camino vwu de (b) necesita una segunda coordenada en la que w siga coincidiendo con v .

Ejercicio 3.9. *El cubo y el grafo de noviembre de 2011*

(a) ¿Para qué n es euleriano el cubo Q_n de la sección 2.9? (Junio 2011.) (b) Para el grafo G de 12 vértices y 20 aristas de la sección 2.7, decidir si es euleriano, dar un circuito euleriano y una partición de sus aristas en ciclos. (Noviembre 2011, apartado (d).)

Resolución. La idea. Las dos preguntas son el teorema de caracterización aplicado tal cual: conexión y paridad de los grados. En Q_n todos los vértices tienen el mismo grado, n (se puede cambiar cualquiera de sus n cifras), así que la paridad de un solo número lo decide todo. En el grafo de doce vértices los grados se leen en la lista de aristas, y el circuito no se adivina: se parte primero el grafo en ciclos y después se cosen.

(a) Q_n es conexo y regular de grado n , luego es euleriano si y solo si n es par.

(b) Los grados son $2, 4, 4, 2, 4, 4, 4, 4, 2, 6, 2, 2$, todos pares, y G es conexo: es euleriano. Un circuito euleriano, el que da la solución oficial:

$$v_1 v_2 v_7 v_6 v_2 v_3 v_4 v_5 v_{12} v_{11} v_{10} v_5 v_3 v_6 v_{10} v_9 v_8 v_{10} v_7 v_8 v_1,$$

que tiene 20 pasos, uno por arista. Una partición en seis ciclos:

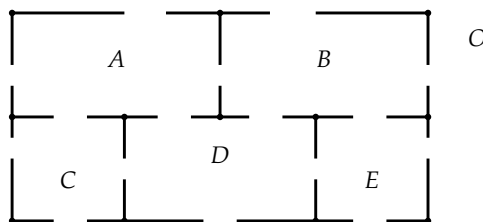
$$v_1v_2v_7v_8v_1, \quad v_2v_3v_6v_2, \quad v_3v_4v_5v_3, \quad v_5v_{10}v_{11}v_{12}v_5, \quad v_6v_7v_{10}v_6, \quad v_8v_9v_{10}v_8,$$

con $4 + 3 + 3 + 4 + 3 + 3 = 20$ aristas, todas distintas: cada arista de la lista de la sección 2.7 aparece en exactamente uno de los ciclos. ■

Qué hemos aprendido. El circuito no hay que adivinarlo: se fabrica con la partición, recorriendo uno de los ciclos e insertando los demás por sus vértices comunes, como en el ejemplo de descoser y coser. Y el orden recomendable es ese, primero los ciclos y después el circuito, porque una partición en ciclos se comprueba de un vistazo y un circuito de veinte pasos no.

Ejercicio 3.10. *La galería de arte* R3.12(A)

La figura representa el plano de una galería de arte: las líneas son paredes y los huecos, puertas. ¿Es posible hacer un recorrido por toda la galería atravesando todas las puertas, una sola vez cada una?



Resolución. La idea. Es el problema de Königsberg con otro disfraz, y todo el trabajo está en la traducción: cada sala es un vértice, el exterior también (se puede salir y volver a entrar), y cada puerta es una arista entre las dos zonas que comunica. Dos puertas entre las mismas zonas son dos aristas, como los puentes dobles de Königsberg. Hecha la traducción, se cuentan grados y el teorema contesta.

Hay cinco salas, A y B arriba, C, D y E abajo, y el exterior O. Se cuentan las puertas de cada una recorriendo sus paredes en la figura:

O: 2 con A, 2 con B, 2 con C, 1 con D, 2 con E	total 9	impar
A: 2 con O, 1 con B, 1 con C, 1 con D	total 5	impar
B: 2 con O, 1 con A, 1 con D, 1 con E	total 5	impar
C: 2 con O, 1 con A, 1 con D	total 4	par
D: 1 con O, 1 con A, 1 con B, 1 con C, 1 con E	total 5	impar
E: 2 con O, 1 con B, 1 con D	total 4	par

La suma es 32, luego hay 16 puertas (cada una cuenta en dos salas), y el grafo de las salas tiene **cuatro vértices de grado impar**: O, A, B y D. Un recorrido que atravesase cada puerta exactamente una vez sería un recorrido euleriano de ese grafo (que es un multigrafo, con varias puertas entre la misma pareja de salas, pero el teorema y el ejercicio 3.1 valen igual: la demostración solo cuenta entradas y salidas). Un circuito exige todos los grados pares, y un recorrido abierto exige exactamente dos impares. Con cuatro impares, **no es posible**, empiece donde empiece y salga o no al exterior. Por el ejercicio de la partición en recorridos, lo mejor que se puede hacer es cubrir todas las puertas con dos paseos. ■

QUÉ DEJA. En cualquier plano, mapa o puzzle «pasar una vez por cada puerta/puente/línea» se cuentan grados y nada más; y el exterior es un vértice como los demás.

Dónde se falla. En olvidar el exterior. Sin O quedan las siete puertas interiores, con grados 3 en A , 3 en B , 2 en C , 4 en D y 2 en E : solo dos impares, y se concluiría que el recorrido existe, cuando ese recorrido no cruza ninguna de las nueve puertas que dan a la calle. Y en contar vecinos en vez de puertas: con una sola arista por pareja de zonas los impares serían O , C , D y E . Salen otra vez cuatro, pero por casualidad, y es otro grafo.

3.2 Grafos hamiltonianos

LA PREGUNTA

En 1857 William Rowan Hamilton presentó un juego de mesa, el *icosian*, en el que había que recorrer los veinte vértices de un dodecaedro pasando una sola vez por cada uno y volviendo al principio. El juego fue un fracaso comercial, pero la pregunta se quedó: dado un mapa, ¿se puede visitar cada ciudad exactamente una vez y regresar? Parece la pregunta de Euler con «ciudad» en vez de «puente», y no lo es: para la de Euler hay un criterio que se comprueba contando, y para la de Hamilton no se conoce un algoritmo de tiempo polinómico que funcione para todos los grafos. Tampoco se ha demostrado que sea imposible: es parte del problema P frente a NP. ¿Por qué dos preguntas casi gemelas tienen dificultades tan distintas, y qué se puede decir de la segunda?

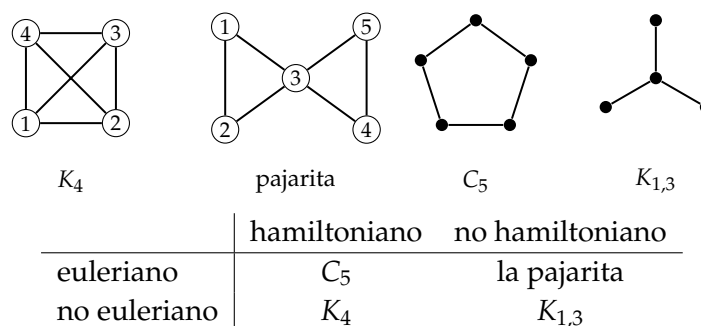
Definición (ciclo y grafo hamiltoniano). Dado un grafo G , un ciclo de G se dice **hamiltoniano** si pasa por todos los vértices del grafo. Un grafo es **hamiltoniano** si admite un ciclo hamiltoniano. Un **camino hamiltoniano** es un camino simple que pasa por todos los vértices de G .

Un ciclo hamiltoniano pasa por cada vértice exactamente una vez, y por tanto usa exactamente dos aristas de cada vértice y $|V(G)|$ aristas en total; las demás aristas del grafo sobran. Un grafo con camino hamiltoniano pero sin ciclo hamiltoniano (un camino P_n , sin ir más lejos) no es hamiltoniano.

Observación. Si un grafo es hamiltoniano, entonces es conexo, ya que el ciclo hamiltoniano es un recorrido que pasa por todos los vértices. Además tiene al menos 3 vértices, porque un ciclo los tiene.

Ejemplo. K_n con $n \geq 3$ es hamiltoniano ($v_1 v_2 \cdots v_n v_1$). C_n es hamiltoniano. W_n es hamiltoniano (el ciclo exterior con un desvío por el centro: $c v_1 v_2 \cdots v_{n-1} c$). $K_{n,n}$ es hamiltoniano para $n \geq 2$: $u_1 w_1 u_2 w_2 \cdots u_n w_n u_1$. El grafo de 12 vértices de noviembre de 2011 lo es, con el ciclo que se dio en la sección 2.7. Un árbol nunca lo es.

Ejemplo (euleriano y hamiltoniano son cosas independientes). Las dos preguntas parecen gemelas, y lo primero que conviene ver con las manos es que la respuesta a una no determina la otra: hay grafos de las cuatro clases.



K_4 tiene el ciclo hamiltoniano 1 2 3 4 1, pero sus cuatro grados son impares. La pajarita tiene todos los grados pares, pero su vértice central es punto de corte: un ciclo que pasara por los cinco vértices tendría que atravesarlo dos veces, una para ir al otro triángulo y otra para

volver. C_5 es las dos cosas a la vez, y la estrella $K_{1,3}$, ninguna. La lección es de método: cada pregunta se decide con sus propias herramientas. Para la de Euler basta contar grados. Para la de Hamilton hay dos listas, y son las dos subsecciones que siguen: condiciones necesarias, que sirven para decir que no, y condiciones suficientes, que sirven para decir que sí.

Condiciones necesarias

Proposición. Sea G un grafo hamiltoniano. Entonces (1) G no tiene puntos de corte; (2) todos los vértices tienen grado al menos 2.

La idea, en una frase: un ciclo hamiltoniano es una ronda que pasa por todo el grafo, y al quitarle un vértice se rompe en un solo trozo, no en dos, porque un ciclo abierto sigue siendo un camino. Ese trozo único es el que impide que haya puntos de corte, y de paso obliga a que cada vértice tenga al menos dos aristas: la de entrada y la de salida de la ronda.

Sea C un ciclo hamiltoniano. (1) Si u fuera punto de corte, $G - u$ sería desconexo. Pero para $v, w \in V(G - u)$, el ciclo $C - u$ es un camino que contiene a todos los vértices salvo u , y su tramo entre v y w es un camino en $G - u$. Contradicción. (2) Un vértice de grado 0 hace al grafo desconexo; un vértice de grado 1 no está en ningún ciclo, luego no está en C . ■

Lema. Sea $S \subsetneq V(C_n)$ un subconjunto propio y no vacío de vértices del ciclo. Entonces $|\pi_0(C_n - S)| \leq |S|$.

La idea, en una frase: un ciclo es un collar, y quitarle k cuentas lo corta en como mucho k hilos —nunca en más, porque cada corte solo puede abrir una separación nueva—. **El corazón es que un vértice tiene grado 2 en el ciclo**, de modo que borrarlo parte a lo sumo un trozo en dos.

Paso 1: el caso de una sola cuenta. Por inducción sobre $|S|$. Si $S = \{v\}$, $C_n - v$ es un camino, conexo: una componente. **Paso 2: se quita una cuenta más y se mira su grado en lo que queda (el núcleo de la prueba).** Todo depende de que en lo ya cortado el vértice v tenga grado 0, 1 o 2 —no puede tener más, porque en el ciclo tenía dos vecinos—, y solo el caso de grado 2 añade una componente. Sea $|S| = k \geq 2$ y supóngase el resultado para conjuntos de $k - 1$ vértices. Tómese $v \in S$ y $S' = S \setminus \{v\}$; por hipótesis $G' = C_n - S'$ tiene a lo sumo $k - 1$ componentes. Al quitar v de G' pueden pasar tres cosas, según el grado de v en G' : si $\delta_{G'}(v) = 0$, v era una componente por sí solo y $C_n - S$ tiene una componente menos, a lo sumo $k - 2$; si $\delta_{G'}(v) = 1$, v era el extremo de un camino y quitarlo deja el mismo número de componentes, a lo sumo $k - 1$; si $\delta_{G'}(v) = 2$, v era interior a uno de los caminos que forman G' (como $S' \neq \emptyset$, G' es una unión de caminos) y quitarlo lo parte en dos, a lo sumo k componentes. En todos los casos $|\pi_0(C_n - S)| \leq k$. ■

Otra vía (contar los arcos). Quitar k vértices a un ciclo lo corta en a lo sumo k arcos: cada componente de $C_n - S$ es el tramo que va entre dos vértices consecutivos de S a lo largo del ciclo, y hay exactamente k de esos tramos, algunos quizá vacíos. Es la misma cuenta sin inducción.

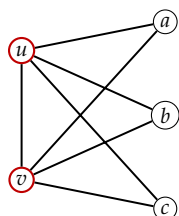
Teorema (condición necesaria). Sea G un grafo hamiltoniano. Entonces para todo $S \subseteq V(G)$ no vacío y propio se tiene $|\pi_0(G - S)| \leq |S|$.

Sea C un ciclo hamiltoniano de G . Entonces $V(G - S) = V(C - S)$ y $A(C - S) \subseteq A(G - S)$: $C - S$ es un subgrafo spanning de $G - S$. Añadir aristas no aumenta el número de componentes, luego $|\pi_0(G - S)| \leq |\pi_0(C - S)| \leq |S|$ por el lema. ■

LA IDEA: EL TEST DE LAS COMPONENTES

Es la herramienta que de verdad se usa para probar que un grafo dibujado *no* es hamiltoniano: se buscan k vértices cuya eliminación deje más de k trozos. Con $k = 1$ es la condición del punto de corte. Suele escribirse $\omega(G - S) \leq |S|$, con ω por el número de componentes. El recíproco es falso: el grafo de Petersen cumple la condición para todo S y no es hamiltoniano, pero eso no entra en el curso.

Ejemplo (el test de las componentes, a mano). Sea $G = K_2 + \overline{K_3}$: dos vértices u y v unidos entre sí y con otros tres, a , b y c , que no son adyacentes entre sí.



$S = \{u, v\}$: al quitarlos, a, b y c quedan sueltos

Las pruebas baratas no deciden. G es conexo, sus grados son 4, 4, 2, 2, 2, todos al menos 2, y no tiene puntos de corte: al quitar u queda la estrella de centro v , y al quitar uno de los de grado 2 quedan u y v unidos a los otros dos. Tampoco es bipartito, por el triángulo $u v a$, así que el corolario que sigue no se aplica.

Con $S = \{u, v\}$ el test decide: $G - S$ son los tres vértices a, b y c sueltos, tres componentes para $|S| = 2$. Como $3 > 2$, G no es hamiltoniano. La imagen del collar dice por qué. Un ciclo hamiltoniano recorrería a, b y c en algún orden, y como no son vecinos entre sí, entre cada dos consecutivos del ciclo tendría que haber algún vértice de S . Son tres huecos alrededor del ciclo y solo hay dos vértices en S para llenarlos.

Cómo se elige S . Se buscan vértices de grado alto que rodeen a muchos de grado bajo: si al quitarlos quedan más trozos que vértices se han quitado, el test ha decidido. La señal más clara son varios vértices de grado 2 con los mismos dos vecinos, como aquí. Un S de un solo vértice es la prueba del punto de corte, y en este grafo no basta: hace falta $|S| = 2$.

Corolario. Si G es bipartito con $V(G) = V_1 \sqcup V_2$ y $|V_1| \neq |V_2|$, entonces G no es hamiltoniano.

Sea $|V_1| < |V_2|$, sin pérdida de generalidad, y $S = V_1$. En $G - V_1$ quedan los vértices de V_2 y ninguna arista, porque todas las aristas de G tocan a V_1 : $G - V_1$ tiene exactamente $|V_2|$ componentes. Si G fuera hamiltoniano, $|V_2| = |\pi_0(G - S)| \leq |S| = |V_1|$, contradicción. (Si $V_1 = \emptyset$, G no tiene aristas y tampoco es hamiltoniano.) ■

Observación. En particular, un grafo bipartito con un número impar de vértices no es hamiltoniano (los dos lados no pueden tener el mismo tamaño), que es el verdadero o falso

de noviembre de 2013; también se ve directamente: un ciclo hamiltoniano sería un ciclo de longitud impar en un bipartito. Y $K_{m,n}$ con $m \neq n$ no es hamiltoniano, mientras que $K_{n,n}$ sí para $n \geq 2$.

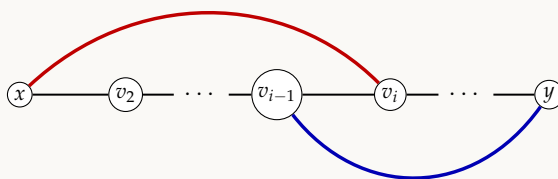
Qué se ha ganado. Hay ya cuatro maneras de probar que un grafo no es hamiltoniano, de la más barata a la más fina: un vértice de grado 0 o 1; un punto de corte; un conjunto S con más de $|S|$ componentes en $G - S$, del que el bipartito desequilibrado es un caso particular; y, cuando nada de eso funciona, el razonamiento con aristas obligadas del último ejercicio de la sección. Lo que ninguna de ellas hace es probar que un grafo sí lo es. Para eso están las condiciones suficientes.

Condiciones suficientes

Teorema (Ore, 1960 R3.5). Sea G un grafo de orden $n \geq 3$. Si para todo par de vértices no adyacentes u, v se tiene $\delta(u) + \delta(v) \geq n$, entonces G es hamiltoniano.

LA IDEA: EL CRUCE DE CAMINOS

La intuición falsa, primero. La tentación es leer Ore como «si hay muchas aristas, hay ciclo hamiltoniano», y de ahí saltar a que basta con que los grados sean altos *en media*. No basta. Un grafo puede tener muchísimas aristas y no ser hamiltoniano: tómese K_{n-1} y cúelguese de él un vértice de grado 1; hay casi todas las aristas posibles y el grafo no tiene ciclo hamiltoniano, porque ese vértice colgado no puede estar en ningún ciclo. Lo que Ore pide no es cantidad, es **que no haya parejas pobres**: la condición se comprueba pareja a pareja, y una sola pareja no adyacente con grados bajos la rompe. **La imagen, y es la única que hay que recordar.** Imagine un camino que pasa por todos los vértices, de x a y . Para cerrarlo en ciclo hace falta un atajo, y el atajo tiene esta forma: si x salta hacia delante a v_i e y salta hacia atrás a v_{i-1} , los dos saltos se *cruzan* sobre la misma arista del camino, y ese cruce permite recorrer el camino en dos tramos y volver al principio.



Y la imagen predice el enunciado, incluido el número n : si no hubiera tal cruce, cada vecino de x *prohibiría* un vecino a y —el de la posición anterior—, así que los vecinos de los dos se reparten posiciones distintas de un camino que solo tiene $n - 1$ aristas. Si la suma de grados llega a n , el reparto es imposible y el cruce existe.

El corazón en una frase: $\delta(x) + \delta(y) \geq n$ es *demasiada gente para $n - 1$ sitios*, y el palomar entrega el cruce que cierra el ciclo.

El cruce, a mano. Sea el camino $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6$, con $x = v_1$ e $y = v_6$, y supóngase que además hay dos saltos: x es vecino de v_4 , e y lo es de v_3 . Los saltos se cruzan sobre la arista $v_3 v_4$ del camino, y el ciclo sale solo: se va de v_1 a v_3 por el camino, se salta a v_6 , se vuelve por

el camino hasta v_4 y se salta a v_1 ,

$$v_1 v_2 v_3 v_6 v_5 v_4 v_1.$$

En el lenguaje de la demostración que sigue, las posiciones de los vecinos de x forman $S = \{2, 4\}$; las de los vecinos de y , desplazadas un lugar, forman $T = \{4, 6\}$; y el índice común, 4, es el cruce. Aquí el cruce existe aunque los grados de x y de y sumen solo 4. Lo que el teorema asegura es que, si suman $n = 6$ o más, no puede faltar, porque S y T no caben sin tocarse en las cinco posiciones $\{2, \dots, 6\}$.

Paso 1: se pasa a un contraejemplo maximal, donde añadir cualquier arista ya cierra un ciclo. Por reducción al absurdo: supóngase que G cumple la hipótesis y no es hamiltoniano. Se añaden aristas a G , una a una, mientras el grafo siga sin ser hamiltoniano; como K_n es hamiltoniano, el proceso se detiene en un grafo G' con los mismos vértices que no es hamiltoniano y tal que $G' + xy$ es hamiltoniano para cualquier par no adyacente x, y . El grafo G' sigue cumpliendo la hipótesis: si x, y no son adyacentes en G' , tampoco lo eran en G , y los grados en G' son mayores o iguales que en G , luego $\delta_{G'}(x) + \delta_{G'}(y) \geq n$.

Paso 2: en el maximal, una arista que falta produce un camino hamiltoniano. Como G' no es completo (K_n es hamiltoniano), hay x, y no adyacentes en G' . El grafo $G' + xy$ es hamiltoniano y G' no, luego todo ciclo hamiltoniano de $G' + xy$ usa la arista xy ; quitando esa arista queda un camino hamiltoniano de G' ,

$$P = (x = v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n = y).$$

Paso 3: se traducen los vecinos a posiciones, con el desplazamiento de uno que crea el cruce. Sean $S = \{i \in \{2, \dots, n\} : xv_i \in A(G')\}$ y $T = \{i \in \{2, \dots, n\} : yv_{i-1} \in A(G')\}$. Como P contiene todos los vértices, $|S| = \delta_{G'}(x)$ y $|T| = \delta_{G'}(y)$. Además $n \notin S$ porque $xv_n = xy \notin A(G')$.

Paso 4: los dos conjuntos de posiciones son disjuntos, porque un índice común sería el cruce (el núcleo de la prueba). $S \cap T = \emptyset$: si $i \in S \cap T$, entonces

$$(x = v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, y = v_n, v_{n-1}, \dots, v_i, v_1 = x)$$

sería un ciclo hamiltoniano de G' (se usa $v_{i-1}y$ para saltar al final del camino, se recorre al revés hasta v_i , y se vuelve a x por v_ix), contra la elección de G' .

Paso 5: la cuenta del palomar cierra el absurdo. Por tanto S y T son disjuntos dentro de $\{2, \dots, n\}$, que tiene $n - 1$ elementos, y

$$\delta_{G'}(x) + \delta_{G'}(y) = |S| + |T| = |S \cup T| \leq n - 1,$$

contradicción con la hipótesis. ■

Encapsulado. Si hubiera un contraejemplo, habría uno maximal, al que añadir cualquier arista que falte lo haría hamiltoniano; en él, una arista que falta, xy , deja un camino hamiltoniano de x a y . Cada vecino de x en la posición i prohíbe a y ser vecino de la posición $i - 1$, porque eso cerraría el ciclo. Así, los vecinos de x y los de y ocupan posiciones distintas entre $n - 1$, y sus grados suman como mucho $n - 1$: contra la hipótesis.

Observación (qué papel juega cada hipótesis). El paso al contraejemplo maximal G' (Paso 1) no es un adorno técnico: sin él no habría camino hamiltoniano con el que trabajar, porque de un grafo cualquiera no hamiltoniano no se sigue que exista camino hamiltoniano. Lo que G' garantiza es que estamos justo en el filo: una arista más y ya habría ciclo.

La hipótesis $n \geq 3$ excluye los grafos de uno o dos vértices, que no contienen ciclos. Y la cota n es óptima: con $\delta(x) + \delta(y) \geq n - 1$ el teorema es falso, y el contraejemplo más barato es dos triángulos pegados por un vértice —la pajarita—, donde todas las parejas no adyacentes suman $4 = n - 1$ con $n = 5$ y el grafo no es hamiltoniano porque tiene un punto de corte.

Teorema (Dirac, 1952 R3.7(A)). Sea G un grafo de orden $n \geq 3$. Si $\delta(u) \geq n/2$ para todo vértice u , entonces G es hamiltoniano.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: LA MITAD ES EL UMBRAL

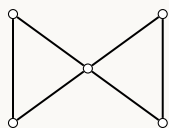
Qué dice. En una fiesta de n personas en la que cada una conoce al menos a la mitad de las demás, se puede sentar a todas alrededor de una mesa de modo que cada una conozca a sus dos vecinos. Es Ore en su forma más cómoda: una sola cota, la misma para todos los vértices, que se comprueba mirando el grado mínimo.

Por qué la mitad basta. Con esa cota, dos personas que no se conocen tienen al menos dos conocidos comunes: entre las dos suman n conocidos o más, repartidos entre las otras $n - 2$ personas, así que al menos dos se cuentan dos veces,

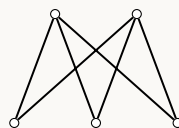
$$|N(u) \cap N(v)| \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} - (n - 2) = 2,$$

donde $N(u)$ es el conjunto de vecinos de u . Y nadie es imprescindible: al quitar a una persona, cada una de las restantes conserva al menos $n/2 - 1$ conocidos, así que cualquier grupo separado del resto tendría al menos $n/2$ personas, y dos grupos así no caben entre las $n - 1$ que quedan. No hay puntos de corte. El grafo no tiene ninguno de los defectos que impiden un ciclo hamiltoniano, y la demostración de Ore convierte esa abundancia de vecinos en el cruce que cierra el ciclo.

Por qué no menos. Los dos grafos de la figura tienen $n = 5$ y todos los grados al menos $2 = (n - 1)/2$, medio punto por debajo de la cota, y ninguno es hamiltoniano.



la pajarita: se parte



$K_{2,3}$: se desequilibra

La pajarita falla porque su vértice central es imprescindible: es punto de corte. $K_{2,3}$ falla por desequilibrio: tres vértices que solo pueden alternarse con dos. Son las dos maneras de fallar, partirse y desequilibrarse, y con grado mínimo $n/2$ ninguna es posible. No hay puntos de corte, como se acaba de ver; y en un bipartito con lados desiguales, los vértices del lado grande tienen grado como mucho el tamaño del lado pequeño, que es menor que $n/2$.

El corazón en una frase: con grado al menos $n/2$, dos vértices que no se tocan comparten vecinos, y Ore hace el resto.

Si G es completo, es hamiltoniano. Si no, para todo par de vértices no adyacentes u, v se tiene $\delta(u) + \delta(v) \geq n/2 + n/2 = n$, y se aplica el teorema de Ore. ■

Observación. Las dos cotas son óptimas. $K_{k,k+1}$ tiene $n = 2k + 1$ vértices, grado mínimo $k = (n - 1)/2$, justo por debajo de $n/2$, y no es hamiltoniano (bipartito desequilibrado). Y para Ore, el mismo grafo tiene pares no adyacentes con suma de grados $2k = n - 1$.

Definición (no hamiltoniano maximal). Un grafo G se dice **no hamiltoniano maximal** si G no es hamiltoniano y para cualquier par u, v de vértices no adyacentes el grafo $G + uv$ es hamiltoniano.

Es el G' de la demostración de Ore. El mismo argumento, leído con cuidado, da algo más fino.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: ARISTAS QUE SE PUEDEN REGALAR

Este teorema permite *simplificar* el problema de decidir si un grafo es hamiltoniano; en algunos casos lo resuelve por completo. Lo que dice es que hay aristas que se pueden añadir gratis, sin cambiar la respuesta.

Si u y v no son adyacentes pero sus grados suman al menos n (contando dos veces los vecinos comunes), la arista uv es redundante: si el grafo ampliado tiene ciclo hamiltoniano, el original también. La razón es la misma que en el teorema de Ore, y conviene tenerla vista. Si el ciclo del grafo ampliado usa la arista nueva, al quitarla queda un camino hamiltoniano de u a v ; recorriendo ese camino, se buscan dos posiciones consecutivas v_i, v_{i+1} tales que u sea vecino de v_{i+1} y v lo sea de v_i . Si existen, se da la vuelta al trozo central del camino y se cierra el ciclo sin usar uv . Y existen por el principio del palomar: los vecinos de u y los de v suman n o más posiciones dentro de un camino que solo tiene $n - 1$ huecos, luego dos coinciden.

De ahí sale la herramienta práctica, la **clausura**: se van añadiendo, una tras otra, todas las aristas entre parejas no adyacentes cuya suma de grados llegue a n , hasta que no quede ninguna. Como la respuesta no cambia en ningún paso, el grafo original es hamiltoniano si y solo si lo es su clausura. Y muchas veces la clausura acaba siendo el grafo completo, que es hamiltoniano sin más que recorrer sus n vértices en cualquier orden y volver al primero: como todas las parejas son adyacentes, cada salto de la lista es una arista. Ahí el teorema ha decidido el problema sin que se haya llegado a dibujar un solo ciclo.

Teorema (Bondy–Chvátal, 1976). Sea G un grafo de orden $n \geq 3$ y sean u, v dos vértices no adyacentes con $\delta(u) + \delta(v) \geq n$. Entonces G es hamiltoniano si y solo si $G + uv$ es hamiltoniano.

El corazón en una frase: no caben tantos vecinos en tan pocos huecos. Los vecinos de u y los de v suman n posiciones que hay que colocar dentro de un camino con solo $n - 1$ intersticios, y el palomar obliga a que dos coincidan; esa coincidencia es el giro que cierra el ciclo sin la arista nueva. Toda la demostración consiste en definir bien los dos conjuntos de posiciones para que esa cuenta se pueda hacer.

Paso 1: la dirección fácil, por contenido. Si G es hamiltoniano, su ciclo hamiltoniano está en $G + uv$.

Paso 2: en la dirección difícil, la arista nueva se convierte en un camino hamiltoniano. Recíprocamente, supóngase que $G + uv$ es hamiltoniano y G no. Todo ciclo hamiltoniano de $G + uv$ usa la arista uv —si alguno no la usara, ya sería un ciclo hamiltoniano de G —, y quitarla deja un camino hamiltoniano $P = (u = v_1, \dots, v_n = v)$ de G . El problema queda así reducido a algo muy concreto: cerrar ese camino en ciclo usando solo aristas viejas.

Paso 3: se traducen los vecinos de u y de v a posiciones del camino. Se definen

$$V_1 = \{j : uv_{j+1} \in A(G)\}, \quad V_2 = \{j : vv_j \in A(G)\},$$

con j recorriendo $\{1, \dots, n-1\}$ en V_1 (los vecinos de u son v_{j+1} con $j+1 \in \{2, \dots, n\}$) y $\{1, \dots, n-1\}$ en V_2 (v no es vecino de sí mismo). Así $|V_1| = \delta_G(u)$ y $|V_2| = \delta_G(v)$. Obsérvese el desplazamiento de un lugar entre las dos definiciones: es deliberado, y es lo que hace que un índice común signifique « u enchufa por delante y v por detrás de la misma arista del camino».

Paso 4: un índice común daría el ciclo, luego no puede haberlo (el núcleo de la prueba). $V_1 \cap V_2 = \emptyset$: si $j_0 \in V_1 \cap V_2$, entonces u es adyacente a v_{j_0+1} y v a v_{j_0} , y

$$v_1 v_{j_0+1} v_{j_0+2} \cdots v_n v_{j_0} v_{j_0-1} \cdots v_1$$

sería un ciclo hamiltoniano de G —se entra por el salto $v_1 v_{j_0+1}$, se recorre la cola hasta v_n , se salta a v_{j_0} y se vuelve al principio recorriendo el tramo central del revés—, contra lo supuesto.

Paso 5: la cuenta del palomar. Al ser disjuntos, $\delta_G(u) + \delta_G(v) = |V_1 \cup V_2| \leq n-1$, contra la hipótesis $\delta(u) + \delta(v) \geq n$. ■

Observación (qué papel juega la hipótesis de grados). La hipótesis $\delta(u) + \delta(v) \geq n$ no interviene en ningún paso salvo el último, y ahí lo hace de golpe: es la que hace imposible que V_1 y V_2 quepan disjuntos en $\{1, \dots, n-1\}$. Si se rebaja a $\delta(u) + \delta(v) \geq n-1$, la cuenta deja de dar contradicción y el teorema se cae; el camino hamiltoniano puede existir sin que se pueda cerrar. Es exactamente la misma frontera que en el teorema de Ore, y por la misma razón: un camino de n vértices tiene $n-1$ aristas, ni una más.

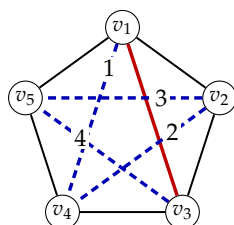
Definición (clausura). Sea G un grafo con n vértices. La **clausura** de G , denotada $cl(G)$, es el grafo que se obtiene a partir de G añadiendo reiteradamente aristas uv entre vértices no adyacentes con $\delta(u) + \delta(v) \geq n$ (recalculando los grados tras cada adición) hasta que no quede ningún par así.

Corolario. Un grafo es hamiltoniano si y solo si su clausura es hamiltoniana.

Cada arista que se añade al construir la clausura cumple la hipótesis de Bondy–Chvátal en el grafo del momento, luego no cambia si el grafo es o no hamiltoniano. Se aplica el teorema tantas veces como aristas se añadan. ■

Ejemplo. Si G cumple la condición de Ore, su clausura es K_n (todos los pares no adyacentes se pueden añadir, y añadir aristas solo sube los grados), y K_n es hamiltoniano: Ore es el caso

particular de la clausura completa. Pero la clausura puede ser K_n sin que se cumpla Ore desde el principio: en C_5 más una cuerda v_1v_3 , con $n = 5$, el par v_1, v_4 tiene grados $3 + 2 = 5 \geq 5$ y se añade. A continuación pueden añadirse v_2v_4 , v_2v_5 y v_3v_5 , en ese orden, y se llega a K_5 . Hay que recalcular: justo después de añadir v_1v_4 , el par v_2, v_5 aún suma 4. En grafos de grados bajos puede ocurrir que la clausura no añada ninguna arista.



negro: C_5 ; rojo: la cuerda v_1v_3 ;
azul discontinuo: lo que añade la
clausura, en el orden numerado

Dónde se falla. En dos sitios. Uno, en sumar los grados del grafo original en vez de los del momento: la clausura se construye paso a paso, y un par que al principio no llega puede llegar después, como v_2, v_5 en el ejemplo. Dos, en leer una clausura que no es completa como un «no». Si la clausura no es K_n ni otro grafo que se sepa decidir, el corolario no dice nada. C_6 es hamiltoniano y su clausura es él mismo, porque ningún par no adyacente suma 6; la pajarita no lo es, y su clausura también es ella misma. En ese caso hay que volver a las condiciones necesarias o buscar el ciclo a mano.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: BUSCAR UN CRITERIO COMO EL DE EULER

La alternativa. Buscar una condición necesaria y suficiente, comprobable vértice a vértice, para que un grafo sea hamiltoniano, como «grados pares» lo es para euleriano.

Su atractivo. Las dos preguntas parecen gemelas, y los ejemplos pequeños parecen sugerir una regla.

La dificultad. Decidir si un grafo es hamiltoniano es un problema NP-completo (Karp, 1972). Un algoritmo de tiempo polinómico para este problema daría algoritmos de ese tipo para todos los problemas de NP. No se sabe si existe: eso equivale a resolver $P = NP$. Por eso conviene distinguir «no se conoce un algoritmo general rápido» de «no se puede decidir»: siempre se pueden probar todos los posibles ciclos, aunque el trabajo crezca enormemente.

En el curso, las condiciones *necesarias* permiten descartar grafos y las *suficientes* permiten confirmar otros. Si ninguna decide, se puede buscar un ciclo o una obstrucción específica, por ejemplo propagando las aristas obligadas por los vértices de grado 2, como en el ejercicio 3.19. Son herramientas útiles, aunque no resuelvan todos los casos.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: DEFINIR HAMILTONIANO POR CAMINOS

La alternativa. Llamar hamiltoniano a un grafo que tiene un camino hamiltoniano, sin exigir que se cierre.

Su ventaja. Es una condición más débil y más fácil de conseguir; los árboles con dos hojas (caminos) la cumplen.

Por qué se elige el ciclo. Porque el ciclo es simétrico (no hay principio ni fin), da la condición necesaria $|\pi_0(G - S)| \leq |S|$ tal cual, y es lo que piden los problemas de origen (volver a casa). Y porque una versión se reduce a la otra: si G tiene al menos dos vértices, G tiene camino hamiltoniano si y solo si $G + K_1$ tiene ciclo hamiltoniano, que es el truco del ejercicio 3.13.

DE DÓNDE VIENE: EL VIAJANTE

La versión con distancias del problema de Hamilton es el problema del viajante: dadas las distancias simétricas entre cada par de n ciudades, encontrar el ciclo hamiltoniano más corto. Con $n = 10$ hay $9!/2 = 181\,440$ ciclos, que un ordenador enumera en un instante; con $n = 30$ hay del orden de 10^{31} y no hay ordenador que los enumere. Aun así, en 2006 se resolvió exactamente un caso con 85 900 ciudades, con métodos que descartan grandes grupos de rutas sin examinarlas una a una. Que no se conozca un algoritmo general rápido no impide resolver instancias grandes: de ello se ocupa la optimización combinatoria, que en Programación matemática se empieza a ver.

Ejercicios: grafos hamiltonianos

Ejercicio 3.11. *Puntos de corte y hamiltonianos* R3.6; EXÁMENES DE 2011–12 Y 2024–25

- (a) Probar que en todo grafo hamiltoniano G el subgrafo $G - v$ es conexo para todo v . (b) Probar que todo grafo con algún punto de corte no es hamiltoniano. ¿Es cierto el recíproco? (c) ¿Es $K_{m,n}$ hamiltoniano? • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

Resolución. La idea. Un ciclo hamiltoniano es una ronda que pasa por todos, y una ronda a la que se le quita una persona sigue siendo una fila que une a todas las demás. Esa fila está dentro de $G - v$, así que $G - v$ es conexo: ningún vértice puede ser punto de corte. El recíproco pide lo contrario, un grafo sin puntos de corte que no sea hamiltoniano, y el candidato natural es un bipartito desequilibrado, que no es hamiltoniano por paridad y puede no tener puntos de corte.

Paso 1, (a): la ronda menos un vértice es una fila que lo recorre todo (el núcleo de la prueba). (a) Sea C un ciclo hamiltoniano, de orden $n = |V(G)|$. Para cualquier v , $C - v$ es un camino con los otros $n - 1$ vértices, conexo, y es subgrafo de $G - v$. Luego $G - v$ es conexo.

Paso 2, (b): el contrarrecíproco, y un contraejemplo para la vuelta. (b) Es el contrarrecíproco de (a): un punto de corte v tiene $G - v$ desconexo. **El recíproco es falso:** $K_{2,3}$ no tiene puntos de corte (quitar cualquier vértice deja $K_{1,3}$ o $K_{2,2}$, conexos) y no es hamiltoniano, porque un ciclo hamiltoniano sería un ciclo de longitud 5 en un grafo bipartito. Esto responde también la prueba de 2011–12: «todo grafo con un punto de corte es no hamiltoniano» (cierto) y «todo grafo no hamiltoniano tiene un punto de corte» (falso). En el lenguaje del capítulo 4, (a) dice que todo grafo hamiltoniano es 2-conexo.

Paso 3, (c): el equilibrio decide. (c) Si $m \neq n$, no, por el corolario de los bipartitos desequilibrados. Si $m = n \geq 2$, sí: $u_1 w_1 u_2 w_2 \cdots u_n w_n u_1$ es un ciclo con los $2n$ vértices, y todas sus aristas existen porque unen un u con un w . ($K_{1,1} = K_2$ no, por tener dos vértices.) ■

Encapsulado. Si C es un ciclo hamiltoniano, $C - v$ es un camino que pasa por todos los vértices de $G - v$ y usa aristas de $G - v$; luego $G - v$ es conexo y v no es punto de corte. La vuelta es falsa, y $K_{2,3}$ lo muestra: no tiene puntos de corte y es bipartito con lados de tamaños distintos. Es el mismo grafo que marca el límite de la cota de Dirac.

Dónde se falla. En (a), en decir que $G - v$ «es» un camino: lo que es un camino es $C - v$, que es un subgrafo de $G - v$ con todos sus vértices, y eso basta para la conexión. En (b), en dar como contraejemplo un grafo con un punto de corte, que prueba la dirección que ya se sabía; o en afirmar que $K_{2,3}$ no es hamiltoniano sin decir por qué, cuando la razón es de una

línea: un ciclo hamiltoniano tendría longitud 5, impar, dentro de un bipartito. Y lo de que no tiene puntos de corte hay que comprobarlo, quitando un vértice de cada lado.

Ejercicio 3.12. *Ocho invitados* R3.7(B)

En una cena con 8 invitados, cada uno conoce al menos a otros cuatro. Probar que se pueden sentar alrededor de una mesa redonda de modo que cada uno conozca a los dos entre los que está sentado.

Resolución. La idea. Sentarse a una mesa redonda con conocidos a los dos lados es recorrer un ciclo hamiltoniano del grafo de conocidos, y «cada uno conoce al menos a cuatro de los otros siete» es la cota de Dirac con la igualdad justa.

Sea G el grafo con un vértice por invitado y una arista por cada par que se conoce. Tiene $n = 8$ vértices y $\delta(u) \geq 4 = n/2$ para todo u . Por el teorema de Dirac, G es hamiltoniano; un ciclo hamiltoniano es una disposición alrededor de la mesa en la que cada uno tiene a dos conocidos al lado. ■

Dónde se falla. En creer que con un conocido menos también saldría. Si cada uno conociera solo a tres, los ocho podrían ser dos grupos de cuatro que se conocen entre sí y no conocen a nadie del otro grupo, dos K_4 disjuntos: ninguna mesa redonda sirve, porque en algún sitio se sentarían juntos dos desconocidos. Y en dar la disposición por construida: el teorema de Dirac asegura que existe, pero no dice cuál es.

Ejercicio 3.13. *Camino hamiltoniano por grados* R3.8

Sea G un grafo conexo de orden $p \geq 2$. Demostrar que si $\delta(v) \geq (p-1)/2$ para todo v , entonces G contiene un camino hamiltoniano.

Resolución. La idea. Un camino hamiltoniano es un ciclo hamiltoniano al que le falta cerrarse. Si se añade un vértice x unido a todos, cualquier camino hamiltoniano se cierra pasando por x y, al revés, un ciclo hamiltoniano del grafo ampliado, sin x , es un camino hamiltoniano de G . El vértice nuevo sube además en 1 todos los grados, justo lo que hace falta para pasar de $(p-1)/2$ a la cota de Dirac del grafo ampliado, que tiene $p+1$ vértices: $(p+1)/2$.

Sea $G' = G + K_1$, con vértice nuevo x adyacente a todos los de G . Tiene orden $p+1 \geq 3$. Para $v \in V(G)$, $\delta_{G'}(v) = \delta_G(v) + 1 \geq (p-1)/2 + 1 = (p+1)/2$; y $\delta_{G'}(x) = p \geq (p+1)/2$ porque $p \geq 1$. Por Dirac, G' tiene un ciclo hamiltoniano C . Quitando x de C queda un camino que pasa por los p vértices de G usando solo aristas de G : un camino hamiltoniano de G . (La hipótesis de conexión no se ha usado: se deduce.) ■

Dónde se falla. En olvidar el grado de x , que también tiene que cumplir la cota: $\delta_{G'}(x) = p \geq (p+1)/2$ porque $p \geq 1$. Y en creer que la cota se puede rebajar: $K_{2,4}$ es conexo, tiene $p = 6$ y grado mínimo $2 < 5/2$, y no tiene camino hamiltoniano, porque un camino alterna los dos lados y, con dos vértices en uno, pasa como mucho por tres del otro.

Ejercicio 3.14. *Muchas aristas* R3.9

(a) Sea G un grafo con $p \geq 3$ vértices y $q \geq (p^2 - 3p + 6)/2$ aristas. Probar que G es hamiltoniano. (b) Encontrar un grafo no hamiltoniano con exactamente $(p^2 - 3p + 6)/2 - 1$

aristas.

Resolución. La idea. Muchas aristas dejan pocas por poner, y eso impide que haya una pareja pobre. La hipótesis permite que falten como mucho $\binom{p}{2} - \frac{p^2-3p+6}{2} = p-3$ aristas. Si dos vértices no adyacentes tuvieran grados con suma menor que p , entre las parejas que los contienen faltarían al menos $p-2$, una más de las permitidas. Así que se cumple la condición de Ore.

(a) Se prueba la condición de Ore por reducción al absurdo. Supóngase que existen u, v no adyacentes con $\delta(u) + \delta(v) \leq p-1$. Se cuentan todas las parejas de vértices distintos que contienen a u o a v , incluida $\{u, v\}$: hay $(p-1) + (p-1) - 1 = 2p-3$ parejas distintas (la pareja $\{u, v\}$ aparece en las dos listas y se cuenta una vez). De ellas, a lo sumo $\delta(u) + \delta(v) \leq p-1$ son aristas de G , luego al menos $(2p-3) - (p-1) = p-2$ no lo son. Entonces

$$q \leq \binom{p}{2} - (p-2) = \frac{p(p-1) - 2p + 4}{2} = \frac{p^2 - 3p + 4}{2} < \frac{p^2 - 3p + 6}{2},$$

contra la hipótesis. Luego G cumple Ore y es hamiltoniano.

(b) K_{p-1} más un vértice x unido a un solo vértice u del completo. Tiene $\binom{p-1}{2} + 1 = \frac{(p-1)(p-2)+2}{2} = \frac{p^2-3p+4}{2} = \frac{p^2-3p+6}{2} - 1$ aristas, y no es hamiltoniano porque u es punto de corte (x tiene grado 1). Para $p=4$ es el triángulo con una arista colgando, con 4 aristas. ■

Qué hemos aprendido, con números. Con $p=5$ la cota es 8 aristas de las 10 posibles: basta con que falten como mucho dos. El grafo de (b), K_4 con una arista colgante, tiene 7 y le faltan tres, las que unirían el vértice colgado con los otros tres del completo. La cota es, pues, exacta: con una arista menos ya hay grafos que no son hamiltonianos.

Dónde se falla. En contar dos veces la pareja $\{u, v\}$: hay $2p-3$ parejas que contienen a u o a v , no $2p-2$. Con $2p-2$ saldrían $p-1$ aristas ausentes en vez de $p-2$, y de ahí se «probaría» que bastan $(p^2-3p+4)/2$ aristas; el grafo de (b), que tiene exactamente esas y no es hamiltoniano, desmiente esa conclusión.

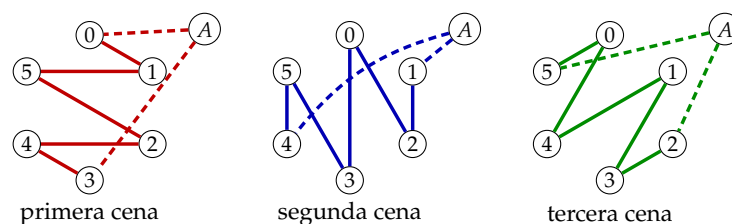
Ejercicio 3.15. *Cenas sin repetir vecinos* R3.10

Un grupo de 7 personas acuerda cenar juntas en diferentes ocasiones. En cada ocasión se sientan alrededor de una mesa redonda de modo que cada persona tiene a sus dos lados comensales distintos en cenas diferentes. (a) Si todos quieren sentarse junto a todos los demás, ¿cuántos días deberán citarse? (b) Si se añaden dos personas más, ¿cuál será la solución?

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. Cada cena es un ciclo hamiltoniano de K_7 , con 7 aristas; K_7 tiene 21.
2. Hace falta ver que K_7 se puede partir en tres ciclos hamiltonianos: constrúyelos con una persona fija y las otras seis en círculo, girando.

Resolución. La idea. Dos cuentas que se encuentran. Por abajo, cada cena gasta siete de las veintiuna parejas, así que hacen falta al menos tres cenas. Por arriba, hay que construir tres cenas que no repitan pareja, y la simetría lo hace: una persona se queda fija y las otras seis se colocan en círculo; una cena es un zigzag que cruza el círculo, y las otras dos son el mismo zigzag girado un puesto y dos puestos.



(a) Cada cena determina un ciclo hamiltoniano de K_7 (los vecinos de mesa), con 7 aristas. Que cada persona tenga vecinos distintos en cenas diferentes significa que los ciclos de dos cenas no comparten aristas; y que todos se sienten junto a todos significa que la unión de los ciclos es K_7 . Como K_7 tiene $\binom{7}{2} = 21$ aristas, hacen falta al menos $21/7 = 3$ cenas. Y tres bastan si $A(K_7)$ se puede partir en tres ciclos hamiltonianos. Se construyen: se llama A a una persona y $0, 1, 2, 3, 4, 5$ a las otras seis, con las cuentas módulo 6. Primera cena:

$$A \ 0 \ 1 \ 5 \ 2 \ 4 \ 3 \ A.$$

La segunda y la tercera se obtienen sumando 1 y 2 a todos los números:

$$A \ 1 \ 2 \ 0 \ 3 \ 5 \ 4 \ A, \quad A \ 2 \ 3 \ 1 \ 4 \ 0 \ 5 \ A.$$

Comprobación de que no repiten aristas: las aristas con A son $A0, A3; A1, A4; A2, A5$, las seis distintas. Las demás se clasifican por la diferencia módulo 6 de sus extremos: la primera cena usa $01, 43$ (diferencia 1), $15, 24$ (diferencia 2) y 52 (diferencia 3); al sumar 1 y 2 las de diferencia 1 dan $12, 54$ y $23, 05$, las de diferencia 2 dan $20, 35$ y $31, 40$, y la de diferencia 3 da 03 y 14 . En total salen las seis aristas con A , las seis de diferencia 1, las seis de diferencia 2 y las tres de diferencia 3, sin repetir: $6 + 6 + 6 + 3 = 21$. **Tres días.**

(b) Con 9 personas, K_9 tiene 36 aristas y cada cena usa 9: al menos 4 días, y 4 bastan con la misma construcción, A fija y $0, \dots, 7$ módulo 8: primera cena $A \ 0 \ 1 \ 7 \ 2 \ 6 \ 3 \ 5 \ 4 \ A$ y las otras tres sumando 1, 2 y 3. Con n personas, n impar, la respuesta es $(n-1)/2$ días (Walecki, hacia 1890). ■

Dónde se falla. En quedarse en la cota de abajo: la cuenta $21/7 = 3$ solo dice que hacen falta al menos tres cenas, y que tres basten exige construirlas. Y en comprobar la construcción a ojo. La clasificación de las parejas por su diferencia módulo 6 es lo que asegura que ninguna se repite: el zigzag usa dos parejas de cada diferencia 1 y 2 y una de diferencia 3, y los giros las desplazan sin solaparlas. En la figura se ve que cada giro mueve el zigzag un puesto.

Ejercicio 3.16. El grafo de línea R3.11

Dado un grafo G , su **grafo de línea** $L(G)$ tiene por vértices las aristas de G , y dos de ellas son adyacentes en $L(G)$ si y solo si son incidentes en G (comparten un extremo). Si G es euleriano, ¿qué se puede decir de $L(G)$? ¿Y si G es hamiltoniano?

Resolución. La idea. En $L(G)$ los papeles se invierten: las aristas de G pasan a ser vértices. Un recorrido de G que pasa por todas las aristas, leído en $L(G)$, pasa por todos los vértices, así que lo euleriano de G se vuelve hamiltoniano en $L(G)$. Y los grados de $L(G)$ se calculan desde los de G : una arista uv toca a las demás aristas de u y a las demás de v .

Se supone G conexo sin vértices aislados y con al menos tres aristas.

Si G es euleriano, $L(G)$ es euleriano y hamiltoniano. El grado en $L(G)$ de una arista uv es $\delta(u) + \delta(v) - 2$ (las otras aristas de u más las otras de v ; no hay repetidas porque G es simple).

Con todos los grados de G pares, todos los de $L(G)$ son pares; y $L(G)$ es conexo (un recorrido en G entre dos aristas da un recorrido en $L(G)$). Luego $L(G)$ es euleriano. Además, un circuito euleriano de G recorre cada arista una vez, y dos aristas consecutivas en él comparten un vértice: leído en $L(G)$ es un ciclo que pasa por todos los vértices de $L(G)$ exactamente una vez, es decir, hamiltoniano.

Si G es hamiltoniano, $L(G)$ es hamiltoniano. Sea $C = v_1v_2 \cdots v_nv_1$ un ciclo hamiltoniano de G . Cada arista de G que no está en C se asigna a uno de sus dos extremos (al de menor índice, por ejemplo). Se recorre: en v_1 , todas las aristas asignadas a v_1 , en cualquier orden, y después la arista v_1v_2 ; en v_2 , las asignadas a v_2 y luego v_2v_3 ; y así hasta v_nv_1 . Dos aristas consecutivas de esa lista comparten un vértice (las asignadas a v_i son todas incidentes con v_i , y $v_{i-1}v_i$ y v_iv_{i+1} también), la lista contiene cada arista de G exactamente una vez, y la última, v_nv_1 , comparte v_1 con la primera. Es un ciclo hamiltoniano de $L(G)$. (Que $L(G)$ sea euleriano no está garantizado: $L(K_4)$ tiene grados 4, sí, pero $L(C_5 + \text{cuerda})$ no.) ■

Dónde se falla. En dar la vuelta al diccionario: euleriano en G da hamiltoniano en $L(G)$, pero hamiltoniano en G no da euleriano en $L(G)$. En C_5 con una cuerda, la cuerda une dos vértices de grado 3 y su vértice en $L(G)$ tiene grado $3 + 3 - 2 = 4$; pero una arista del ciclo que une un vértice de grado 3 con uno de grado 2 da grado $3 + 2 - 2 = 3$, impar.

Ejercicio 3.17. Cuántos ciclos hamiltonianos tiene K_n R3.13

(a) ¿Cuántos ciclos hamiltonianos diferentes contiene K_n ? (b) Si se pudieran examinar 10 000 ciclos hamiltonianos por segundo, ¿cuánto tiempo haría falta para recorrer todos los de K_{10} ?

Resolución. La idea. En K_n todas las aristas existen, así que un ciclo hamiltoniano es lo mismo que una manera de sentar a los n vértices en una mesa redonda. Se cuentan las listas de los n vértices y se divide por las veces que cada ciclo aparece entre ellas: se fija el primer vértice para no contar n veces el mismo giro, y se divide por 2 por los dos sentidos de recorrido.

(a) Un ciclo hamiltoniano de K_n ($n \geq 3$) queda determinado por el orden en que visita los vértices a partir de v_1 : una permutación de los otros $n - 1$, de las que hay $(n - 1)!$. Cada ciclo se obtiene de dos permutaciones, una por cada sentido de recorrido. Luego hay $(n - 1)!/2$ ciclos hamiltonianos: 1 en K_3 , 3 en K_4 , 12 en K_5 .

Otra vía, por recurrencia. Sea α_n el número buscado. Todo ciclo hamiltoniano C de K_n produce n ciclos hamiltonianos de $K_{n+1} = K_n + v_{n+1}$: se elige una arista $a = v_iv_j$ de C y se sustituye por $v_iv_{n+1}v_j$. Son distintos para aristas distintas, y todo ciclo hamiltoniano C' de K_{n+1} se obtiene así exactamente una vez (de $C = C' - v_{n+1} + v_iv_j$ con v_i, v_j los vecinos de v_{n+1} en C'). Luego $\alpha_{n+1} = n\alpha_n$, y con $\alpha_3 = 1$, $\alpha_n = (n - 1)!/2$.

(b) $9!/2 = 181\,440$ ciclos; a 10 000 por segundo, 18,144 segundos. (Para K_{20} serían $19!/2 \approx 6 \cdot 10^{16}$ ciclos, unos doscientos mil años.) ■

Qué hemos aprendido, a mano. En K_4 , con vértices 1, 2, 3, 4, los tres ciclos son 1 2 3 4 1, 1 2 4 3 1 y 1 3 2 4 1. Fijado el 1, un ciclo de K_4 queda determinado por el vértice que le queda enfrente, el tercero de la lista, que puede ser 3, 4 o 2: tres opciones, como dice $(4 - 1)!/2 = 3$.

Dónde se falla. En olvidar una de las dos divisiones: la del vértice de partida, que convierte $n!$ en $(n - 1)!$, o la del sentido, que da el 2.

Ejercicio 3.18. Ternas y cubos hamiltonianos R3.15(C); EXÁMENES DE JUNIO 2011 Y JUNIO 2024

(a) ¿Es hamiltoniano el grafo de las ternas G_2 del ejercicio anterior? ¿Y G_3 ? (b) ¿Es Q_3 hamiltoniano? (c) Sea G un grafo no trivial. Probar que $G + G$ es hamiltoniano, mostrando un ciclo.

Resolución. La idea. Hay tres maneras de probar que un grafo sí es hamiltoniano, y el ejercicio usa las tres: exhibir el ciclo (en G_2 y en $G + G$), aplicar Dirac cuando los grados son altos (en G_3) y construirlo por inducción (en Q_n). Antes de buscar un ciclo conviene mirar si Dirac decide, porque es gratis.

(a) G_2 tiene 9 vértices, los pares con coordenadas en $\{-1, 0, 1\}$, adyacentes cuando comparten una coordenada. El ciclo

$$(0, 0) (0, 1) (0, -1) (1, -1) (1, 1) (-1, 1) (-1, -1) (-1, 0) (1, 0) (0, 0)$$

pasa por los nueve, y cada par consecutivo comparte una coordenada: G_2 es hamiltoniano. (Dirac no sirve: $\delta = 3^2 - 2^2 - 1 = 4 < 9/2$.) G_3 tiene 27 vértices y es regular de grado $3^3 - 2^3 - 1 = 18 \geq 27/2$: hamiltoniano por Dirac.

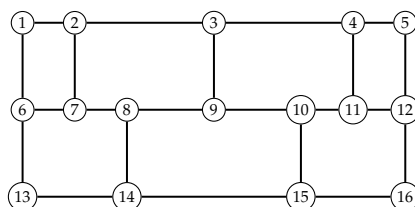
(b) Q_3 es hamiltoniano: 000 001 011 010 110 111 101 100 000, en el que cada dos consecutivos difieren en un bit (es un código de Gray). En general Q_n es hamiltoniano para $n \geq 2$, por inducción desde $Q_2 = C_4$. Para pasar de $n - 1$ a n , se quita la misma arista de un ciclo hamiltoniano en cada una de las dos copias de Q_{n-1} . Quedan dos caminos; se recorre uno con último bit 0, se cambia ese bit en el extremo y se vuelve por el otro al revés, con último bit 1. Cambiando de nuevo el último bit se cierra el ciclo.

(c) Sean $u_1, \dots, u_p$ los vértices de G y $u'_1, \dots, u'_p$ los de la copia G' , con $p \geq 2$. El ciclo $u_1 u'_1 u_2 u'_2 \cdots u_p u'_p u_1$ tiene $2p \geq 4$ vértices, todos los de $G + G'$, y todas sus aristas son cruzadas (una u con una u'), luego existen en la suma. No hace falta siquiera que G sea conexo. ■

Dónde se falla. En (a), en concluir que G_2 no es hamiltoniano porque no cumple la cota de Dirac: el grado 4 es menor que $9/2$, pero Dirac es una condición suficiente, y que no se cumpla no dice nada. En (c), en olvidar que G ha de tener al menos dos vértices: $K_1 + K_1 = K_2$ no es hamiltoniano.

Ejercicio 3.19. Un grafo que no es hamiltoniano R3.12(B)

¿Es hamiltoniano el grafo G_2 de la figura?



PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. En un ciclo hamiltoniano cada vértice usa exactamente dos de sus aristas. Los vértices de grado 2 las usan todas.
2. Un vértice de grado 3 con dos aristas ya obligadas tiene la tercera prohibida.

Resolución. La idea. Ninguna herramienta de la teoría decide: con grados 2 y 3 las sumas de Ore llegan a lo sumo a 6, y harían falta 16; las condiciones necesarias tampoco dan nada (se ve al final). Queda leer el grafo como un rompecabezas: se supone el ciclo, se anotan las aristas que no tiene más remedio que usar, las de las pistas, y se siguen anotando consecuencias, sin elegir nunca nada, hasta que algún vértice se quede con menos de dos aristas posibles.

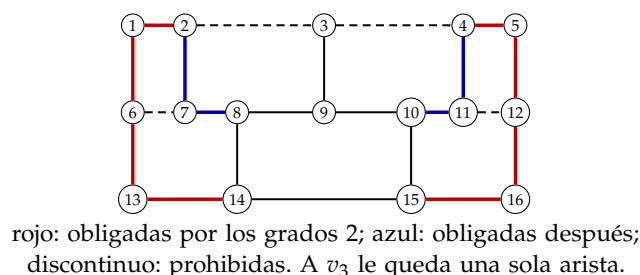
G_2 tiene 16 vértices y 22 aristas; v_1, v_5, v_{13}, v_{16} tienen grado 2 y los demás, grado 3. Supóngase un ciclo hamiltoniano C . Cada vértice tiene exactamente dos aristas en C .

Obligadas. Las dos aristas de cada vértice de grado 2 están en C : $v_1v_2, v_1v_6, v_4v_5, v_5v_{12}, v_6v_{13}, v_{13}v_{14}, v_{15}v_{16}, v_{12}v_{16}$.

Prohibidas. v_6 ya tiene dos aristas en C (v_1v_6 y v_6v_{13}), luego $v_6v_7 \notin C$. Igual, v_{12} tiene v_5v_{12} y $v_{12}v_{16}$, luego $v_{11}v_{12} \notin C$.

Segunda ronda de obligadas. v_7 tiene grado 3 y ha perdido v_6v_7 : sus otras dos aristas, v_2v_7 y v_7v_8 , están en C . Lo mismo v_{11} : v_4v_{11} y $v_{10}v_{11}$ están en C .

La contradicción. Ahora v_2 tiene en C las aristas v_1v_2 y v_2v_7 , luego $v_2v_3 \notin C$; y v_4 tiene v_4v_5 y v_4v_{11} , luego $v_3v_4 \notin C$. Al vértice v_3 solo le queda v_3v_9 : una sola arista en C , imposible. Luego G_2 **no es hamiltoniano**.



QUÉ DEJA. El «método de las aristas obligadas»: grado 2 obliga sus dos aristas; dos obligadas en un vértice prohíben las demás; una prohibición en un vértice de grado 3 obliga las otras dos. Se propaga hasta que algún vértice se queda con una sola.

Dónde se falla. En tomar una decisión que no esté forzada. Cada paso del argumento es obligado (un grado 2, dos aristas ya elegidas en un vértice, o una sola opción que queda), y por eso la contradicción final prueba que no hay ciclo. Si en algún momento la propagación se detiene sin contradicción, no vale elegir una arista y seguir: hay que abrir casos, uno por cada elección posible, y llegar a contradicción en todos. Y antes de empezar conviene probar las pruebas baratas, porque aquí no bastan pero en otros grafos sí: G_2 no tiene puntos de corte, y su test de las componentes no da nada con ningún conjunto S : hasta ocho vértices se comprueba uno a uno, y quitando nueve o más quedan siete vértices o menos, que no pueden formar más trozos que los vértices quitados.

REPASO INTERCALADO: CAPÍTULO 3

1. Euleriano: conexo y todos los grados pares; equivale a partir las aristas en ciclos. Recorrido euleriano abierto: exactamente dos vértices impares; $2n$ impares: n recorridos. Se demuestra añadiendo vértices que cierran.
2. Fleury: no cruzar un puente de lo que queda si hay alternativa. Funciona por paridad y puentes.
3. Bloques eulerianos $\Leftrightarrow$ grafo euleriano (vía partición en ciclos). En $G + H$, cada

vértice de G gana $|V(H)|$ de grado.

4. Hamiltoniano: ciclo por todos los vértices. Necesario: sin puntos de corte, grados ≥ 2 , $|\pi_0(G - S)| \leq |S|$, bipartito equilibrado. Suficiente: Ore ($\delta(u) + \delta(v) \geq n$ en no adyacentes), Dirac ($\delta \geq n/2$), clausura completa (Bondy–Chvátal).
5. Si $|V(G)| \geq 2$: camino hamiltoniano en $G \Leftrightarrow$ ciclo hamiltoniano en $G + K_1$. Para $n \geq 3$, K_n tiene $(n - 1)!/2$ ciclos hamiltonianos. $K_{n,n}$ es hamiltoniano si $n \geq 2$; $K_{m,n}$ con $m \neq n$ no.

Conectividad

ANTES DE LEER

Tres preguntas antes de empezar.

1. Una red de comunicaciones sigue funcionando aunque falle cualquier nodo. ¿Aguanta también que fallen dos a la vez? ¿Cómo se mide «cuántos fallos aguanta»?
2. ¿Es más fácil dejar incomunicada una red destruyendo nodos o destruyendo enlaces?
3. Entre dos ciudades hay tres carreteras que no comparten ningún cruce. ¿Cuántos cruces hay que cortar para incomunicarlas? ¿Y al revés: si hacen falta tres cortes, hay tres carreteras independientes?

Las respuestas están en las secciones 4.1, 4.2 y 4.6. Este capítulo generaliza los puntos de corte y los puentes de la sección 2.6 y usa los bloques (2.7), la suma $G + H$ y el lema del apretón de manos.

Para calcular las conectividades conviene combinar cotas: un corte explícito o Whitney dan cotas superiores; demostrar que ningún corte menor sirve, o aplicar Chartrand o Menger, da cotas inferiores. Cuando coinciden, el valor queda determinado.

4.1 Conectividad y conectividad lineal

LA PREGUNTA

Una compañía telefónica sabe que su red sobrevive a la avería de cualquier central: ya comprobó que no tiene puntos de corte. Lo que quiere saber ahora es cuántas centrales tendrían que caer a la vez para que alguien se quedara sin línea, y si la respuesta es la misma cuando lo que se rompe son cables en vez de centrales. La pregunta de este capítulo es cómo poner un número a la solidez de una red, y si ese número es uno o son dos.

Definición (conectividad puntual y lineal). Sea G un grafo simple.

- (a) La **conectividad** (o **conectividad puntual**) de G , denotada $\kappa(G)$, es el menor número de vértices que hay que eliminar de G para obtener un grafo disconexo o trivial.
- (b) La **conectividad lineal** de G , denotada $\lambda(G)$, es el menor número de aristas que hay que eliminar de G para obtener un grafo disconexo o trivial.

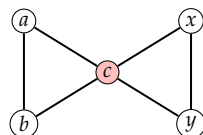
El «o trivial» está para los completos: a K_n no se le puede desconectar quitando vértices, porque lo que queda es siempre completo, pero quitando $n - 1$ se llega al grafo trivial. Si G es el grafo trivial o es disconexo, $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$; en lo que sigue G es conexo y no trivial.

Observación. Salvo en el caso $G = K_2$, tener puntos de corte equivale a $\kappa(G) = 1$; y tener puentes equivale siempre a $\lambda(G) = 1$. Para K_2 , $\kappa = \lambda = 1$ sin haber punto de corte, porque quitar un vértice deja el grafo trivial.

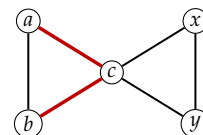
Ejemplo. Dos triángulos que comparten un vértice (la pajarita): $\kappa = 1$, porque el vértice compartido es punto de corte, y $\lambda = 2$, porque no hay puentes (luego $\lambda \geq 2$) y quitar las dos aristas que unen el centro con uno de los triángulos deja la arista opuesta de ese triángulo aislada. Es el ejemplo más pequeño posible de que las dos conectividades pueden ser distintas: para que $\kappa < \lambda$ con $\kappa = 1$ hace falta un punto de corte y ningún puente, y eso obliga a dos bloques con al menos tres vértices cada uno.

Con la definición, a mano. Conviene hacer una vez la cuenta sin ningún teorema, probando cortes de menor a mayor tamaño. Se llama c al centro y cab , cxy a los dos triángulos.

- *Un vértice.* Quitar a deja el triángulo cxy con b colgando de c : conexo. Lo mismo pasa con b , x o y . Quitar c deja las aristas ab y xy sueltas: disconexo. Luego $\kappa = 1$, y el único corte de un vértice es $\{c\}$.
- *Una arista.* Cada arista está en un triángulo, y al quitarla quedan los otros dos lados como rodeo; ninguna sola desconecta. *Dos aristas.* $\{ca, cb\}$ separa la arista ab del resto. Luego $\lambda = 2$.
- *Grado mínimo.* Las cuatro puntas tienen grado 2 y el centro 4: $\delta = 2$.



quitar c : $\kappa = 1$



quitar ca y cb : $\lambda = 2$

Las tres cifras quedan $\kappa = 1 < \lambda = 2 = \delta$. La pregunta de la sección ya tiene respuesta: la solidez de una red son dos números, y aquí se ve por qué. El centro es un solo nodo cuya caída lo rompe todo, pero ningún cable es imprescindible.

LA IDEA: DOS MANERAS DE ROMPER

κ mide la robustez frente a la caída de nodos; λ , frente a la caída de enlaces. Romper un nodo rompe todos sus enlaces a la vez, así que los nodos son «más potentes» y hacen falta menos: esa es la desigualdad $\kappa \leq \lambda$ del teorema de Whitney. Y romper todos los enlaces de un nodo siempre lo aísla, luego $\lambda \leq \delta$, el grado mínimo. La sorpresa es que las dos desigualdades pueden ser estrictas a la vez, y que hay grafos con cualquier terna de valores.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: MEDIR CON EL NÚMERO DE TROZOS

La alternativa. Medir la solidez por cuántos trozos quedan al quitar un vértice, o por el tamaño del trozo mayor que sobrevive.

Su ventaja. Dice más sobre lo que pasa después de una avería, que es lo que interesa a quien gestiona la red.

Qué la hunde como definición. Que no es un umbral: la pregunta «¿cuántos fallos aguanta?» pide el mínimo número de fallos que rompen algo, y ese mínimo es lo que κ y λ miden. Con ese umbral se obtiene una jerarquía limpia (1-conexo, 2-conexo, ...) y un teorema, el de Menger, que lo traduce en rutas alternativas. Las medidas «de daño» responden a otra pregunta: cuánto se pierde una vez producido el fallo.

4.2 El teorema de Whitney

LA PREGUNTA

El teorema de Whitney compara los dos tipos de corte: hacen falta a lo sumo tantos vértices como aristas. Junto con la observación de que aislar el nodo de menor grado siempre funciona, eso encierra las dos conectividades entre 0 y el grado mínimo. ¿Por qué quitar nodos es al menos tan eficaz como quitar enlaces, y se alcanzan las tres cotas a la vez?

Se recuerda que $\delta(G) = \min\{\delta(v) : v \in V(G)\}$ es la valencia mínima de G . En este capítulo se escribe $\delta(G)$ para ella y $\delta(v)$ para el grado de un vértice.

Teorema (Whitney, 1932). Para cualquier grafo G se verifica $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.

LA IDEA: AISLAR ES SIEMPRE UNA DE LAS MANERAS DE ROMPER

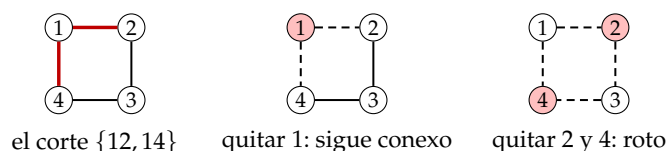
La idea que hay que precisar. Quitar un vértice elimina todas sus aristas, pero eso no basta como demostración: si se sustituyen los extremos de un corte sin cuidado, podría desaparecer entero uno de los dos lados. Hay que elegir los vértices de modo que queden dos partes separadas, o un solo vértice. La prueba consigue hacerlo con *a lo sumo un extremo por arista del corte*.

La imagen. Piense en una red de carreteras. Para incomunicar una ciudad hay tres sabotajes posibles, cada uno más tosco que el anterior: volar plazas (κ), volar carreteras (λ) o volar todas las carreteras que salen de un mismo pueblo (δ). El tercero es un caso particular del segundo —es un sabotaje de carreteras, solo que elegidas de la manera más ingenua posible—, y de ahí $\lambda \leq \delta$ sin esfuerzo. Y el segundo se convierte en el

primero cambiando cada carretera cortada por uno de sus dos extremos.

El corazón en una frase: *un extremo por arista*. Esa sustitución es toda la desigualdad $\kappa \leq \lambda$; la demostración explica cómo elegir esos extremos sin borrar la separación que se quería conservar, y trata aparte $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$.

Ejemplo (un extremo por arista, a mano: el peligro y el arreglo). En el ciclo C_4 con vértices 1 2 3 4, las dos aristas 12 y 14 forman un corte mínimo: aíslan el vértice 1, y $\lambda = 2$. Para convertirlo en un corte de vértices hay que cambiar cada arista por uno de sus extremos, y la elección importa.



La elección ingenua. Las dos aristas comparten el extremo 1. Si se elige 1 para las dos, se quita un solo vértice, pero con él desaparece entero el lado $\{1\}$ del corte, y lo que queda, el camino 2 3 4, es conexo. El corte se ha perdido.

La elección de la prueba. Se guarda una arista del corte, por ejemplo 14, y para la otra, 12, se elige el extremo que no toca a la guardada: el 2. Al quitar 2 queda el camino 1 4 3, todavía conexo, pero en él la arista guardada 14 es un puente. Un puente trae consigo un punto de corte: se quita su extremo de grado 2, que es 4, y quedan 1 y 3 aislados. Se han quitado dos vértices, 2 y 4, tantos como aristas tenía el corte.

La regla «un extremo que no toque a la arista guardada» es la que impide que desaparezca un lado entero. La arista guardada conserva sus dos extremos, uno a cada lado del corte, hasta el último paso.

Paso 1, $\lambda(G) \leq \delta(G)$: aislar un vértice de grado mínimo ya es un corte por aristas. Sea v un vértice de grado $\delta(G)$ y $A(v)$ el conjunto de sus aristas incidentes. En $G - A(v)$ el vértice v queda aislado, luego $G - A(v)$ es desconexo (o trivial si $G = K_1$). Por tanto $\lambda(G) \leq |A(v)| = \delta(G)$.

Paso 2, $\kappa(G) \leq \lambda(G)$: los casos degenerados. Si $\lambda(G) = 0$, G es el grafo trivial o es desconexo ya sin quitar nada; y entonces tampoco hay que quitar ningún vértice para que lo sea, luego $\kappa(G) = 0$. Se distinguen dos casos más.

Paso 3, caso $\lambda(G) = 1$: un puente trae consigo un punto de corte. Hay un puente uv . Si alguno de sus extremos, digamos u , tiene grado ≥ 2 , entonces u es punto de corte (sección 2.6) y $G - u$ es desconexo. Si los dos tienen grado 1, ninguno de ellos tiene más vecino que el otro, y como G es conexo no puede haber más vértices que esos dos: $G = K_2$ y $G - u$ es el grafo trivial. En ambos casos $\kappa(G) \leq 1 = \lambda(G)$.

Paso 4, caso $\lambda \geq 2$: se cambia cada arista del corte por uno de sus extremos (el núcleo de la prueba). La maniobra consiste en quitar todas las aristas del corte menos una, lo que deja un grafo conexo en el que esa última es puente, y sustituir cada arista quitada por un extremo suyo que no sea ninguno de los dos del puente. Sea $\{a_1, \dots, a_\lambda\}$ un conjunto de λ aristas tal que $G - \{a_1, \dots, a_\lambda\}$ es desconexo o trivial, y sea $G' = G - \{a_1, \dots, a_{\lambda-1}\}$. Como λ es el mínimo, G' es conexo, y a_λ es un puente de G' . Sean u, v los extremos de a_λ . Para cada $i < \lambda$ se elige un extremo v_i de a_i distinto

de u y de v , que existe porque $a_i \neq uv$ y el grafo es simple (los v_i pueden repetirse). Sea $G'' = G - \{v_1, \dots, v_{\lambda-1}\}$; al quitar cada v_i se quita en particular a_i , luego G'' es un subgrafo de G' que contiene a uv . Si G'' es desconexo o trivial, $\kappa(G) \leq \lambda - 1 < \lambda$. Si G'' es conexo, la arista uv sigue siendo puente de G'' (no está en ningún ciclo de G' , luego tampoco en ninguno de $G'' \subseteq G'$), y por el caso anterior aplicado a G'' quitar uno de sus extremos deja G'' desconexo o trivial. En total se han quitado a lo sumo λ vértices: $\kappa(G) \leq \lambda(G)$. ■

Encapsulado. Para $\lambda \leq \delta$, aislar un vértice de grado mínimo ya es un corte de aristas. Para $\kappa \leq \lambda$, se parte de un corte mínimo de aristas y se guarda una de ellas, que queda como puente. Cada una de las demás se cambia por un extremo que no toque a la guardada. Si con eso el grafo no se ha roto ya, se termina quitando un extremo del puente. Cada arista del corte se paga con un vértice como mucho.

CONEXIÓN: CÓMO SE ACOTAN κ Y λ EN LA PRÁCTICA

En un grafo dibujado, Whitney da la cota superior gratis: $\kappa \leq \lambda \leq \delta$, y δ se lee del dibujo. Para la cota inferior de κ se puede estudiar qué sucede al quitar vértices, o usar Menger (sección 4.6) o Tutte (4.5); si sale $\kappa = \delta$, las tres coinciden y se acabó.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: LAS TRES COTAS NO ESCONDEN NINGUNA SORPRESA

El teorema anterior deja una pregunta abierta que es la que hay que hacerse siempre después de una cadena de desigualdades: *¿las cotas son lo único que ata a estos tres números, o hay alguna relación escondida?* Podría ocurrir, por ejemplo, que un grafo con $\lambda = 3$ no pudiera tener $\kappa = 1$, que hubiera alguna prohibición adicional que nadie ha visto.

Chartrand y Harary contestan que no: cualquier terna de enteros *positivos* que respete $\kappa \leq \lambda \leq \delta$ se realiza en algún grafo. Es decir, **sin fijar el orden ni imponer otra condición al grafo**, no hay más restricciones para esas ternas positivas. (La única ligadura que hay además de la cadena es la degenerada: si $\kappa = 0$ el grafo tiene un solo vértice o es desconexo, y entonces $\lambda = 0$ también; se comenta debajo del enunciado.) Y lo bonito es que la prueba es una construcción que se dibuja en una servilleta, no un argumento abstracto de existencia. Se toman dos copias de un grafo completo lo bastante grande para que cada vértice tenga por sí solo grado c , y se unen las dos copias por b aristas que salgan de solo a vértices de *una* de ellas. Entonces el grado mínimo sigue siendo c porque dentro de cada copia ya sobraba; el corte de aristas más barato es cortar el puente, que son b aristas; y el corte de vértices más barato es quitar los a vértices por donde el puente sale. Cada número se coloca a mano en su sitio.

Teorema (Chartrand–Harary, 1968). Sean $1 \leq a \leq b \leq c$ enteros. Entonces existe un grafo G con $\kappa(G) = a$, $\lambda(G) = b$ y $\delta(G) = c$.

La construcción se ve mejor primero en un caso, $(a, b, c) = (2, 3, 4)$: dos copias de K_{c+1} unidas por b aristas que salen de a vértices de una de las dos copias. La construcción general se explica en la resolución del ejercicio «Una terna a medida», al final de esta sección.

Observación (por qué hace falta $a \geq 1$). La hipótesis $a \geq 1$ no es un adorno: con $a = 0$ el

enunciado es **falso** en cuanto $b \geq 1$. En efecto, $\kappa(G) = 0$ significa que G es el grafo trivial o es desconexo, y en los dos casos hace falta quitar *cero* aristas para que deje de ser conexo y no trivial, es decir, $\lambda(G) = 0$. Así que $\kappa(G) = 0$ obliga a $\lambda(G) = 0$, y ninguna terna $(0, b, c)$ con $b \geq 1$ se realiza. Lo que sí se realiza es $(0, 0, c)$ para todo $c \geq 0$: dos copias disjuntas de K_{c+1} tienen $\kappa = \lambda = 0$ y $\delta = c$. Y la construcción de arriba tampoco funciona con $a = 0$, porque pide b aristas que salgan de a vértices elegidos, y sin ningún vértice elegido no hay ninguna que trazar.

Merece la pena tenerlo presente porque el material del que salen estos apuntes enuncia el teorema de las dos maneras: en el tema, con «enteros no negativos», y en el resumen del mismo tema, con «enteros positivos». La versión correcta, y la del artículo original de Chartrand y Harary, es la segunda.

4.3 Ejemplos básicos

LA PREGUNTA

Con n nodos, ¿cuál es la red más robusta que se puede construir, y cuántos enlaces cuesta? El completo aguanta todo lo que puede aguantar, pero cuesta $\binom{n}{2}$ enlaces; un anillo cuesta n y aguanta un fallo. Entre los dos está el problema de diseño real, y para plantearlo hace falta saber exactamente qué conectividad tiene cada familia clásica.

Ejemplo (ciclos). Para $n \geq 3$, $\kappa(C_n) = \lambda(C_n) = \delta(C_n) = 2$. En efecto, quitar un vértice deja un camino P_{n-1} , conexo, luego $\kappa \geq 2$; y $\delta = 2$ da $2 \leq \kappa \leq \lambda \leq 2$ por Whitney.

Ejemplo (completos). Para $n \geq 1$, $\kappa(K_n) = \lambda(K_n) = \delta(K_n) = n - 1$. Por Whitney basta $\kappa(K_n) \geq n - 1$: quitar k vértices de K_n deja K_{n-k} , que es conexo si $n - k \geq 2$ y trivial solo si $k = n - 1$. Luego hacen falta exactamente $n - 1$ vértices. (También puede hacerse por inducción sobre n ; lo anterior es lo mismo sin inducción.) Para $n \geq 2$, aislar un vértice quitando sus $n - 1$ aristas alcanza esa misma cota para λ ; Whitney garantiza que no basta con menos.

Ejemplo (bipartitos completos). Para $m, n \geq 1$, $\kappa(K_{m,n}) = \lambda(K_{m,n}) = \delta(K_{m,n}) = \min\{m, n\}$. Sea $n \leq m$ y $V(K_{m,n}) = V_1 \sqcup V_2$ con $|V_1| = n$, $|V_2| = m$. Por Whitney, $\kappa \leq \lambda \leq \delta = n$. Falta $\kappa \geq n$: si se quitan $k < n$ vértices, k_1 de V_1 y k_2 de V_2 , queda $K_{n-k_1, m-k_2}$ con $n - k_1 \geq 1$ y $m - k_2 \geq 1$, que es conexo (toda pareja está unida por una arista o por un camino de longitud 2), y no es el grafo trivial porque le quedan $n + m - k \geq 2n - k > n \geq 1$ vértices, es decir, al menos dos. Luego no se desconecta ni se vuelve trivial con menos de n ; al quitar los n de V_1 quedan los de V_2 aislados, un grafo desconexo o trivial.

Ejemplo (ruedas y árboles). $\kappa(W_n) = \lambda(W_n) = 3$ para $n \geq 4$: $\delta = 3$, y quitar dos vértices deja conexo (si uno es el centro, queda un camino; si no, queda el centro unido a todo lo que sobrevive). Un árbol con al menos tres vértices tiene $\kappa = \lambda = 1$: toda arista es puente y hay un vértice de grado ≥ 2 .

4.4 Otros resultados sobre conectividad lineal

LA PREGUNTA

Un diseñador de redes se pregunta si basta con exigir que cada nodo tenga muchos enlaces para que la red sea robusta. La respuesta corta es que no: dos completos pegados por un nodo tienen grados altos y un punto de corte. Pero para los enlaces la respuesta es que sí, con un umbral concreto, la mitad del número de nodos. ¿Por qué la mitad, y por qué funciona para enlaces y no para nodos?

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: SI TODOS TIENEN MUCHOS VECINOS, EL CUELLO NO PUEDE SER ESTRECHO

Este teorema da una condición que se comprueba de un vistazo, mirando solo los grados, y que garantiza que la desigualdad $\lambda \leq \delta$ es en realidad una igualdad. Es decir: la forma más barata de desconectar el grafo es aislar un vértice, y no hay ningún cuello de botella escondido más estrecho.

La idea de por qué es cierto es de contabilidad, y vale la pena tenerla: supóngase que hubiera un corte de aristas más barato, con $\lambda < \delta$ aristas, que parte los vértices en dos bandos V_1 y V_2 . Como todo el mundo tiene al menos $\delta \geq \lfloor p/2 \rfloor$ vecinos, ningún bando puede ser pequeño: un vértice de V_1 ya necesita δ vecinos, y si V_1 tuviera menos de $\delta + 1$ elementos, muchos de esos vecinos estarían al otro lado y cruzarían el corte, que era barato. Empujando esa cuenta con cuidado, los dos bandos resultan tener al menos $\delta + 1$ vértices cada uno, y entonces harían falta al menos $2\delta + 2$ vértices, más de los p disponibles.

El detalle a retener es el redondeo: $\delta \geq \lfloor p/2 \rfloor$. Se parece a la condición $\delta \geq p/2$ de Dirac, pero es más débil si p es impar: con $p = 7$, aquí basta grado mínimo 3, mientras que Dirac exige 4. Por eso este resultado no permite concluir que el grafo sea hamiltoniano.

Teorema (Chartrand, 1966). Sea G un grafo conexo con $p \geq 3$ vértices. Si $\delta(G) \geq \lfloor p/2 \rfloor$, entonces $\lambda(G) = \delta(G)$.

El corazón en una frase: si cada vértice conoce a media clase, los dos bandos de un supuesto corte con menos de δ aristas son grandes, y dos bandos grandes no caben en un grafo pequeño. Toda la prueba es empujar esa idea con una parábola.

Paso 1: se supone un corte barato y se nombra la partición que produce. Por Whitney basta probar $\lambda(G) \geq \delta(G)$. Se razona por reducción al absurdo: sea $\lambda = \lambda(G)$, $\delta = \delta(G)$, y supóngase $\lambda < \delta$. Sea $A = \{a_1, \dots, a_\lambda\}$ un conjunto de λ aristas con $G - A$ desconexo, y sea V_1 el conjunto de vértices de una componente de $G - A$ y $V_2 = V(G) \setminus V_1$, ambos no vacíos. Toda arista de G entre V_1 y V_2 está en A .

Paso 2: cada bando tiene al menos $\delta + 1$ vértices (el núcleo de la prueba). Es el paso que hay que entender, y su mecanismo es un compromiso: si un bando es pequeño, sus vértices no tienen bastantes vecinos dentro y se ven obligados a mandar aristas fuera; y esas aristas están todas en el corte, que era barato. La parábola $t(\delta + 1 - t)$ dice que el compromiso es imposible sea cual sea el tamaño del bando. Si fuera $|V_1| \leq \delta$, cada

$x \in V_1$ tendría a lo sumo $|V_1| - 1 \leq \delta - 1$ vecinos dentro de V_1 y por tanto al menos $\delta - |V_1| + 1 \geq 1$ aristas hacia V_2 , todas en A . Sumando sobre V_1 ,

$$\lambda = |A| \geq |V_1|(\delta - |V_1| + 1) \geq \delta,$$

porque $t(\delta + 1 - t) \geq \delta$ para todo entero $1 \leq t \leq \delta$ (es una parábola con valor δ en $t = 1$ y en $t = \delta$, y mayor entre medias). Contradicción con $\lambda < \delta$. Lo mismo para V_2 .

Paso 3: dos bandos grandes no caben, y ahí se usa la hipótesis. Entonces $p = |V_1| + |V_2| \geq 2\delta + 2$, es decir, $\delta \leq p/2 - 1 < \lfloor p/2 \rfloor \leq \delta$, contradicción. Luego $\lambda(G) = \delta(G)$.

Otra forma de escribirlo es contar, en cada componente, un vértice w con todos sus vecinos dentro; la cuenta de arriba hace lo mismo sin tener que encontrar ese w . ■

La parábola, con números. Con $\delta = 4$, un bando de t vértices manda fuera al menos $t(5 - t)$ aristas, y para $t = 1, 2, 3, 4$ eso vale 4, 6, 6, 4. El bando de un solo vértice es el más barato, y aun así cuesta δ aristas; los intermedios cuestan más, porque tienen más vértices que sacan aristas fuera, aunque cada uno saque menos. Por eso ningún bando de a lo sumo δ vértices se separa con menos de δ aristas.

El umbral es justo. Si δ se queda un escalón por debajo de $\lfloor p/2 \rfloor$, el teorema ya puede fallar. Dos copias de K_4 unidas por una sola arista tienen $p = 8$ y $\delta = 3$, mientras que $\lfloor 8/2 \rfloor = 4$. La arista de unión es un puente, así que $\lambda = 1 < 3 = \delta$. Aquí los dos bandos tienen exactamente $\delta + 1 = 4$ vértices, y caben porque $p = 2\delta + 2$: es el caso que el Paso 3 prohíbe.

Encapsulado. Un corte con menos de δ aristas obligaría a cada bando a tener al menos $\delta + 1$ vértices, porque un bando menor manda fuera al menos $t(\delta + 1 - t) \geq \delta$ aristas. Dos bandos así suman $p \geq 2\delta + 2$ vértices, y eso es incompatible con $\delta \geq \lfloor p/2 \rfloor$.

Observación. El teorema no da $\kappa(G) = \delta(G)$: dos copias de K_4 pegadas por un vértice tienen $p = 7$, $\delta = 3 \geq \lfloor 7/2 \rfloor$, luego $\lambda = 3$; pero el vértice común es punto de corte y $\kappa = 1$. Es el ejercicio 4.4.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: CUÁNTO AGUANTA UN GRAFO CON LAS ARISTAS QUE TIENE

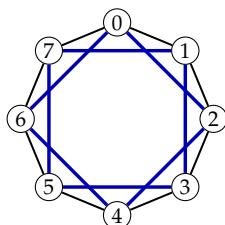
La pregunta que contesta este teorema es la del ingeniero: *con q cables y p nodos, ¿cuánto puede llegar a aguantar la red si se colocan lo mejor posible?*

La cota superior sale del apretón de manos, encadenando tres desigualdades. La conectividad no supera al grado mínimo, y el grado mínimo no supera al grado medio, que es $2q/p$: si todos los vértices tuvieran grado mayor que esa media, la suma de grados se pasaría de $2q$. Como la conectividad es un entero, se puede bajar al suelo. Lo que hace grande al teorema es la otra mitad: que esa cota **se alcanza**, y no por casualidad, sino con una familia concreta de grafos, los grafos de Harary, que se construyen colocando los p vértices en circunferencia y uniendo cada uno con sus vecinos más próximos por los dos lados. Esa distribución uniforme permite alcanzar la cota; no significa que todo grafo que la alcance deba ser regular. La construcción debe asegurar además que no haya cortes pequeños: igualar los grados, por sí solo, no lo garantiza.

Teorema (Harary, 1962). Sean $p \geq 1$ y $0 \leq q \leq \binom{p}{2}$ enteros. La conectividad máxima de un grafo con p vértices y q aristas es 0 si $q < p - 1$, y $\lfloor 2q/p \rfloor$ si $q \geq p - 1$.

Si $q < p - 1$ el grafo es desconexo (sección 2.8) y $\kappa = 0$. En general, por el apretón de manos $2q = \sum \delta(v) \geq p \delta(G)$, luego $\delta(G) \leq \lfloor 2q/p \rfloor$, y por Whitney $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G) \leq \lfloor 2q/p \rfloor$. Que la cota se alcanza para todo par p, q con $p - 1 \leq q \leq \binom{p}{2}$ lo demuestra Harary construyendo grafos concretos, los grafos de Harary; esa construcción no se detalla aquí, y el ejercicio «Grafos de Harary» trabaja con los casos pequeños. ■

Ejemplo (la cota de Harary, con números). Con $p = 8$ vértices y $q = 16$ aristas, la cota es $\lfloor 32/8 \rfloor = 4$. La alcanza el grafo de la figura: los ocho vértices en círculo, cada uno unido a los dos siguientes y a los dos anteriores. Es el ciclo C_8 más las cuerdas de salto dos, y tiene $8 \cdot 4/2 = 16$ aristas.



Que no se desconecta quitando a lo sumo tres vértices se ve recorriendo el círculo. Tras quitarlos quedan al menos cinco, y se leen en su orden circular. Dos supervivientes seguidos en ese orden son vecinos salvo que entre ellos se hayan quitado al menos dos vértices, porque la arista más larga salta uno. Como se han quitado tres como mucho, eso pasa a lo sumo en un hueco, y el círculo de supervivientes se rompe como mucho una vez. Un círculo roto una vez es todavía un camino, luego conexo. Así que $\kappa \geq 4 = \delta$, y por Whitney $\kappa = \lambda = 4$.

La cota es muy sensible. Con una arista menos, $q = 15$, baja a $\lfloor 30/8 \rfloor = 3$. Con 15 aristas sobre 8 vértices la suma de grados es $30 < 32$, y algún vértice tiene que quedarse con grado 3 como mucho. Una sola arista menos cuesta un nivel entero de conectividad.

DE DÓNDE VIENE: LOS GRAFOS DE HARARY

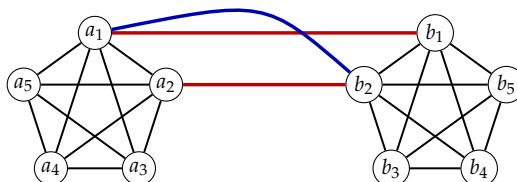
Harary construyó en 1962, para cada $2 \leq k < n$, un grafo k -conexo con n vértices y exactamente $\lceil kn/2 \rceil$ aristas, el mínimo posible por la cuenta de arriba. Para $k = 1$, en cambio, el mínimo es $n - 1$ y lo alcanza cualquier árbol. Para k par la construcción es transparente: se ponen los n vértices en círculo y se une cada uno con los $k/2$ siguientes y los $k/2$ anteriores. Para $k = 2$ sale el ciclo; para $k = 4$, el ciclo con las «cuerdas de salto dos». La pregunta de la sección anterior (la red más robusta con un presupuesto de enlaces) tiene ahí su respuesta exacta, y es una de las razones por las que las redes en anillo con cuerdas son tan comunes.

Ejercicios: conectividades, Whitney y Chartrand

Ejercicio 4.1. Una terna a medida R4.1

Construir un grafo G con $\kappa(G) = 2$, $\lambda(G) = 3$ y $\delta(G) = 4$.

Resolución. Se toman dos copias disjuntas de K_5 , con vértices $a_1, \dots, a_5$ y $b_1, \dots, b_5$, de modo que $\delta = 4$ dentro de cada copia. Se añaden las aristas a_1b_1 , a_2b_2 y a_1b_2 .



$\delta = 4$: los vértices $a_3, a_4, a_5, b_3, b_4, b_5$ conservan grado 4 y los demás suben. $\kappa = 2$: quitar a_1 y a_2 separa las dos copias (las tres aristas de enlace salen de ellos), luego $\kappa \leq 2$; y no hay puntos de corte: quitar un a_i o un b_i deja K_4 en su copia, conexa, y al menos una arista de enlace intacta hacia la otra copia. $\lambda = 3$: quitar las tres aristas de enlace desconecta, luego $\lambda \leq 3$; y no bastan dos: cualquier par de aristas quitadas deja al menos una de las tres de enlace, y dentro de cada K_5 quitar dos aristas no desconecta ($\lambda(K_5) = 4$), así que las dos copias siguen conexas y unidas.

La construcción general para $1 \leq a \leq b \leq c$. Dos copias de K_{c+1} , con vértices $x_0, \dots, x_c$ e $y_0, \dots, y_c$. Se eligen a vértices **de una sola copia**, digamos $x_0, \dots, x_{a-1}$, y se añaden b aristas que salgan de ellos y lleguen a la otra copia, repartidas así: primero las a aristas x_iy_i con $i < a$, que dan a cada elegido su enlace y sus extremos derechos son distintos; después las $b - a$ restantes, también desde los x_i con $i < a$, hacia vértices y_j con $j \geq a$. Caben todas porque $b \leq c$, así que $b - a \leq c - a$ y quedan $c + 1 - a$ vértices y_j libres.

Por qué sale cada número. $\delta = c$: en la copia de las x queda algún vértice sin tocar (son $c + 1$ y solo $a \leq c$ están elegidos) y en la de las y también (las aristas nuevas tocan a lo sumo $b \leq c$ de ellos), y ese vértice conserva grado c ; nadie baja de c porque dentro de su copia ya lo tenía. $\kappa = a$: quitar $x_0, \dots, x_{a-1}$ separa las dos copias, luego $\kappa \leq a$; y con menos de a vértices no se separa, porque las a aristas x_iy_i no comparten ningún extremo y por tanto alguna sobrevive entera, y cada copia menos $\leq a - 1 < c$ vértices sigue siendo un completo conexo. $\lambda = b$: quitar las b aristas de enlace separa, y con menos no, porque dentro de cada copia $\lambda(K_{c+1}) = c \geq b$.

Observación (por qué los a elegidos van en una sola copia). Es tentador enunciar la construcción de forma simétrica —« a vértices elegidos *en cada* copia y las b aristas entre los dos grupos elegidos»— y así aparece en algunos textos. Pero entonces la construcción **no cubre todas las ternas**: entre dos grupos de a vértices caben a lo sumo a^2 aristas, luego haría falta $b \leq a^2$. La terna $(a, b, c) = (1, 2, 2)$ ya se escapa: con un solo vértice elegido a cada lado hay una única arista posible, y esa arista es un puente, con lo que sale $\lambda = 1$ y no $\lambda = 2$. Y sin embargo $(1, 2, 2)$ **sí** se realiza: es la pajarita, dos triángulos pegados por un vértice, con $\kappa = 1$, $\lambda = 2$ y $\delta = 2$. Lo mismo pasa con $(1, 3, 3)$, que son dos K_4 pegados por un vértice, y en general con toda terna en que $b > a^2$.

Eligiendo los a vértices en una sola copia el problema desaparece, porque el otro extremo de cada arista puede ser cualquiera de los $c + 1$ vértices de la otra copia y hay sitio de sobra.

Lo que sigue haciendo falta es que las a aristas del emparejamiento tengan extremos derechos distintos: si las b aristas fueran todas a parar al mismo y , ese único vértice sería un corte y saldría $\kappa = 1$. ■

Ejercicio 4.2. *Tres afirmaciones* R4.2; EXAMEN DE 2011–12

Sea G un grafo conexo. ¿Verdadero o falso? (a) G puede tener conectividad 3 y algún vértice de grado 2. (b) G puede tener conectividad lineal 2 y algún vértice de grado 3. (c) G puede tener conectividad 2 y una arista puente.

Resolución. La idea. Las tres se deciden con la cadena de Whitney, $\kappa \leq \lambda \leq \delta$. Una afirmación que la contradice es falsa sin buscar nada más. Una que la respeta suele ser verdadera, pero hay que realizarla con un ejemplo concreto.

(a) **Falso.** Por Whitney, $\kappa(G) \leq \delta(G) \leq 2$. (b) **Verdadero.** El ciclo C_6 con una cuerda: los dos extremos de la cuerda tienen grado 3, $\delta = 2$, y $\lambda = 2$ porque no hay puentes (todo está en un ciclo) y quitar las dos aristas de un vértice de grado 2 lo aísla. (c) **Falso.** Un puente da $\lambda(G) = 1$, y entonces $\kappa(G) \leq \lambda(G) = 1 < 2$. ■

Dónde se falla. En (a) y (b), en leer la cadena con el grado de un vértice cualquiera en lugar del grado *mínimo*. En (b) hay vértices de grado 3, pero λ lo limitan los de grado 2, y la afirmación es cierta. En (a) basta un vértice de grado 2 para que el mínimo sea como mucho 2, y la afirmación es falsa. En (c), en creer que un puente solo afecta a λ : por el Paso 3 de Whitney, un puente trae consigo un punto de corte o es K_2 .

Ejercicio 4.3. *Cuántas aristas necesita un grafo n -conexo* R4.4

Probar que todo grafo n -conexo (es decir, con $\kappa(G) \geq n$) con p vértices tiene al menos $pn/2$ aristas. ¿Existen grafos 3-conexos con 7 aristas? ¿Y 4-conexos con 11 aristas?

Resolución. La idea. Una cota inferior del número de aristas sale del apretón de manos en cuanto se acotan los grados por abajo, y lo que acota los grados por abajo es Whitney: $\kappa \leq \delta$. La segunda parte usa la misma cuenta al revés: con q fijo, despeja cuántos vértices caben, y el resultado choca con el máximo de aristas ($\binom{p}{2}$).

Por Whitney, $n \leq \kappa(G) \leq \delta(G)$, luego todo vértice tiene grado $\geq n$ y, por el apretón de manos, $2q = \sum \delta(v) \geq pn$: $q \geq pn/2$.

3-conexos con 7 aristas: sería $14 = 2q \geq 3p$, luego $p \leq 4$; pero con 4 vértices hay a lo sumo $\binom{4}{2} = 6$ aristas. No existen. 4-conexos con 11 aristas: $22 \geq 4p$ da $p \leq 5$, y con 5 vértices hay a lo sumo 10 aristas. Tampoco. (Con $p \leq n$ la cosa es imposible de entrada, porque $\kappa(G) \leq p - 1$.) ■

Qué hemos aprendido. El número de vértices no viene dado, y hay que encerrarlo por los dos lados. Por arriba lo acota la cuenta de grados, $p \leq 2q/n$. Por abajo, $p \geq n + 1$, porque $\kappa \leq p - 1$. Con $n = 3$ y $q = 7$ las dos cotas dejan solo $p = 4$, y K_4 tiene 6 aristas, no 7. La cota $q \geq pn/2$ es la mejor posible para $2 \leq n < p$: con techo, $\lceil pn/2 \rceil$, la alcanzan los grafos de Harary.

Ejercicio 4.4. *Chartrand y su límite* R4.5

Sea G conexo con $p \geq 3$ vértices y $\delta(G) \geq \lfloor p/2 \rfloor$. Probar que $\lambda(G) = \delta(G)$. ¿Es cierto $\kappa(G) = \delta(G)$? Dar un ejemplo.

Resolución. La primera parte es el teorema de Chartrand, demostrado arriba. La segunda es falsa: dos K_4 pegados por un vértice tienen $p = 7, \delta = 3 \geq 3 = \lfloor 7/2 \rfloor, \lambda = 3$ y $\kappa = 1$. ■

Ejercicio 4.5. *Hamiltonianos y eulerianos* R4.6

Si G es hamiltoniano, ¿qué se puede decir de $\kappa(G)$? ¿Y de $\lambda(G)$? ¿Y si G es euleriano?

Resolución. La idea. Cada recorrido protege frente a un tipo de avería. Un ciclo hamiltoniano pasa por todos los *vértices*: si cae uno, el resto del ciclo sigue siendo un camino que los une a todos. Un circuito euleriano pasa por todas las *aristas*: si cae una, el resto del circuito sigue uniéndolo lo que había. Cada uno garantiza un 2 en la conectividad de lo que recorre.

Un grafo hamiltoniano no tiene puntos de corte y tiene al menos 3 vértices (sección 3.2), luego $\kappa(G) \geq 2$ y, por Whitney, $\lambda(G) \geq 2$: es 2-conexo y 2-conexo lineal. Un grafo euleriano no trivial cumple $\lambda(G) \geq 2$ (para $K_1, \lambda = 0$): quitar una arista a un circuito euleriano deja un recorrido euleriano abierto, que sigue pasando por todos los vértices con aristas, luego $G - a$ es conexo para toda arista a (no hay puentes). Pero puede tener $\kappa(G) = 1$: la pajarita es euleriana y su centro es punto de corte. ■

Dónde se falla. En cruzar las dos protecciones. Euleriano no da $\kappa \geq 2$ (la pajarita), porque un circuito puede pasar varias veces por el mismo vértice, y nada impide que ese vértice sea el único paso entre dos trozos del grafo, como el centro de la pajarita. Y ninguno de los dos da más de 2: el ciclo C_n es hamiltoniano y euleriano, y tiene $\kappa = \lambda = 2$.

Ejercicio 4.6. *Grafos cúbicos* R4.7

Probar que si G es regular de grado 3, entonces $\kappa(G) = \lambda(G)$.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. $\kappa \leq \lambda \leq 3$. Hay que ver que $\lambda = 1 \Rightarrow \kappa = 1$, $\lambda = 2 \Rightarrow \kappa = 2$ y $\lambda = 3 \Rightarrow \kappa = 3$; las dos últimas se hacen por contrarrecíproco.
2. Si $\kappa = 1$, un punto de corte reparte sus tres aristas entre al menos dos componentes, y alguna recibe una sola: un puente.

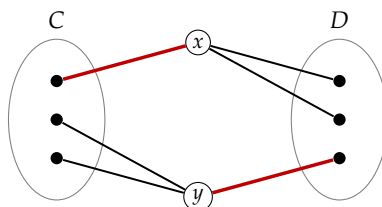
Resolución. La idea. Whitney da $\kappa \leq \lambda$ cambiando cada arista de un corte por un vértice. Aquí hay que ir al revés: cambiar cada vértice de un corte por una arista. Con grado 3 se puede, porque un vértice del corte solo tiene tres aristas que repartir entre los dos lados. Si manda una sola hacia un lado, se corta esa arista en su lugar. Si no manda ninguna hacia un lado, el vértice no hacía falta en el corte, y eso contradice que el corte sea mínimo. Solo hay que llevar las cuentas en los dos casos posibles, $\kappa = 1$ y $\kappa = 2$.

Se supone G conexo con al menos 4 vértices (si es desconexo, $\kappa = \lambda = 0$; y K_4 es el cúbico más pequeño, con $\kappa = \lambda = 3$). Por Whitney, $\kappa \leq \lambda \leq 3$.

Paso 1: un punto de corte trae un puente ($\kappa = 1 \Rightarrow \lambda = 1$). Sea v un punto de corte. Sus

tres aristas van a vértices de $G - v$, que tiene al menos dos componentes, y cada componente recibe al menos una arista de v (si no, sería componente de G). Tres aristas repartidas entre al menos dos componentes: alguna componente C recibe exactamente una, vx con $x \in C$. Esa arista es puente: es la única que une C con el resto. Luego $\lambda = 1$.

Paso 2: un corte de dos vértices trae un corte de dos aristas ($\kappa = 2 \Rightarrow \lambda \leq 2$; el núcleo de la prueba). Sea $\{x, y\}$ un conjunto de dos vértices con $G - \{x, y\}$ desconexo (no puede ser trivial, porque $p \geq 4$), y sea C una de sus componentes y D la unión de las otras. Sean m_C y m_D los números de aristas entre $\{x, y\}$ y C , y entre $\{x, y\}$ y D ; y $t \in \{0, 1\}$ según xy sea o no arista. Como $\delta(x) = \delta(y) = 3$, $m_C + m_D + 2t = 6$. Quitar las m_C aristas separa C , luego $\lambda \leq m_C$; igual $\lambda \leq m_D$. Si $t = 1$, $m_C + m_D = 4$ y $\min\{m_C, m_D\} \leq 2$: $\lambda \leq 2$. Si $t = 0$, $m_C + m_D = 6$; si alguno es ≤ 2 , $\lambda \leq 2$; queda el caso $m_C = m_D = 3$. Sea a el número de aristas de x hacia C y b el de y hacia C , con $a + b = 3$. Si $a = 0$, entonces y solo separa a C del resto y sería punto de corte, contra $\kappa = 2$; igual si $b = 0$. Luego $\{a, b\} = \{1, 2\}$; sea $a = 1$, $b = 2$. Entonces x tiene 2 aristas hacia D e y tiene 1. Se quitan dos aristas: la de x hacia C y la de y hacia D . Lo que queda tiene los trozos $C \cup \{y\}$ y $D \cup \{x\}$ sin ninguna arista entre ellos (las de x a C y de y a D se han quitado, xy no existe, y entre C y D no hay aristas). Luego $\lambda \leq 2$.

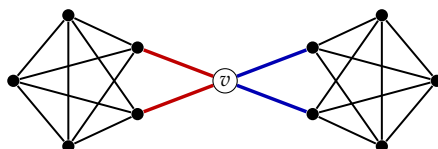


se cortan las dos rojas: quedan $C \cup \{y\}$ y $D \cup \{x\}$

Paso 3: se juntan las dos implicaciones. Si $\lambda = 1$, $\kappa = 1$ (Whitney, $\kappa \geq 1$ por ser conexo). Si $\lambda = 2$, $\kappa \leq 2$ y $\kappa \neq 1$ (porque $\kappa = 1$ daría $\lambda = 1$), luego $\kappa = 2$. Si $\lambda = 3$, $\kappa \neq 1$ y $\kappa \neq 2$ (porque $\kappa = 2$ daría $\lambda \leq 2$), luego $\kappa = 3$. En todos los casos $\kappa = \lambda$. ■

Encapsulado. Por Whitney, $\kappa \leq \lambda \leq 3$, y basta ver que un corte de κ vértices da uno de κ aristas cuando κ vale 1 o 2. Un punto de corte reparte sus tres aristas entre al menos dos componentes, y alguna recibe una sola, que es un puente. En un corte $\{x, y\}$, si hacia un lado salen como mucho dos aristas, se cortan esas. Si salen tres y tres, x e y mandan cada uno una sola arista hacia lados distintos, y se cortan esas dos.

Dónde se falla. Con grado 4 el resultado es falso, y el Paso 1 es el que se rompe. Se toman dos copias de K_5 menos una arista y un vértice v unido a los cuatro extremos de las aristas quitadas, dos de cada copia. Todos los vértices tienen grado 4, y v es punto de corte: $\kappa = 1$. Pero v reparte sus cuatro aristas dos y dos, ninguna componente recibe una sola, y no hay puentes. Tampoco podría haberlos: un grafo conexo con todos los grados pares es euleriano (capítulo 3), y un grafo euleriano no tiene puentes. Así que $\lambda = 2$, que se alcanza cortando las dos aristas de v hacia una copia, y $\kappa = 1 < \lambda = 2$.



Es el ejercicio siguiente en acción: un regular de grado r con punto de corte tiene $\lambda \leq \lfloor r/2 \rfloor$, y con $r = 3$ eso obliga a $\lambda = 1$, mientras que con $r = 4$ deja sitio a $\lambda = 2$.

Ejercicio 4.7. Regulares con punto de corte R4.8

Probar que si G es regular de grado $r > 2$ y $\kappa(G) = 1$, entonces $\lambda(G) \leq \lfloor r/2 \rfloor$.

Resolución. La idea. Un punto de corte v es el único paso entre sus componentes, y reparte sus r aristas entre ellas. La componente peor servida recibe como mucho la mitad, y esas pocas aristas son todo lo que la une al resto: forman un corte.

Sea v un punto de corte y sean C, C' dos componentes de $G - v$. Las r aristas de v se reparten entre las componentes de $G - v$, y cada una recibe al menos una. Si C y C' recibieran más de $\lfloor r/2 \rfloor$ cada una, tendríamos $r \geq 2(\lfloor r/2 \rfloor + 1) \geq r + 1$, imposible. Sea C la que recibe $n \leq \lfloor r/2 \rfloor$ aristas, $vu_1, \dots, vu_n$ con $u_i \in C$. Quitando esas n aristas, C queda sin ninguna conexión con el resto (sus únicas aristas hacia fuera iban a v), y el resto contiene a C' , no vacío: el grafo se desconecta con n aristas, luego $\lambda(G) \leq n \leq \lfloor r/2 \rfloor$. ■

Qué hemos aprendido. Con $r = 3$ la cota da $\lambda \leq 1$: es el Paso 1 del ejercicio de los cúbicos. Con $r = 4$ da $\lambda \leq 2$, y el ejemplo de dos K_5 menos una arista unidos por un vértice la alcanza. **Dónde se falla:** la hipótesis $r > 2$ está para excluir K_2 , que es regular de grado 1 con $\kappa = 1$ y sin embargo $\lambda = 1 > \lfloor 1/2 \rfloor = 0$. (Con $r = 2$ no hay nada que probar: un regular conexo de grado 2 es un ciclo, y $\kappa = 2$.)

Ejercicio 4.8. La conectividad de una suma R4.12 Y EJERCICIO PROPUESTO

Sean G y H grafos. (a) ¿Es cierto que $\kappa(G + H) = \kappa(G) + \kappa(H)$? (b) Probar que

$$\kappa(G + H) = \min\{|V(G)| + \kappa(H), |V(H)| + \kappa(G)\},$$

y deducir que si G es n -conexo y H es m -conexo, entonces $G + H$ es $(n + m + 1)$ -conexo.

Resolución. La idea. En $G + H$ cada vértice de G es vecino de cada vértice de H . Mientras sobreviva alguien de cada lado, esa pareja une a todos los demás en dos pasos. La única manera de romper $G + H$ es, por tanto, borrar entero uno de los dos lados y después romper lo que queda del otro. Las conectividades no se suman: se paga un lado entero más la conectividad del otro.

(a) **No.** $G = H = K_1$: $\kappa(G) = \kappa(H) = 0$ y $G + H = K_2$ tiene $\kappa = 1$. Con grafos no triviales, $K_2 + K_2 = K_4$ tiene $\kappa = 3 \neq 1 + 1$.

(b) Sea S un conjunto de vértices de $G + H$ tal que $(G + H) - S$ es desconexo o trivial. Si S no contiene a todo $V(G)$ ni a todo $V(H)$, en $(G + H) - S$ sobrevive un vértice g de G y uno h de H , adyacentes, y todo vértice superviviente es adyacente a g o a h : el grafo es conexo y no trivial. Luego $S \supseteq V(G)$ o $S \supseteq V(H)$. Si $S \supseteq V(G)$, entonces $(G + H) - S = H - (S \cap V(H))$, que es desconexo o trivial, luego $|S \cap V(H)| \geq \kappa(H)$ y $|S| \geq |V(G)| + \kappa(H)$. Igual en el otro caso. Y las dos cotas se alcanzan: quitar todo $V(G)$ y un conjunto mínimo de H desconecta o trivializa. Eso da la fórmula.

Para la consecuencia: todo grafo cumple $|V(G)| \geq \delta(G) + 1 \geq \kappa(G) + 1$ (un vértice y sus vecinos, y Whitney). Luego $\kappa(G + H) \geq \min\{\kappa(G) + 1 + \kappa(H), \kappa(H) + 1 + \kappa(G)\} \geq n + m + 1$. ■

Con números. La rueda es una suma: $W_5 = K_1 + C_4$. La fórmula da $\min\{1 + \kappa(C_4), 4 + \kappa(K_1)\} = \min\{1 + 2, 4 + 0\} = 3$, que es la conectividad de las ruedas calculada en la sección

4.3. El mínimo lo da el primer término: se quita el centro, que es todo el lado K_1 , y después dos vértices del ciclo. En $K_2 + K_2 = K_4$ los dos términos valen $2 + 1 = 3$, y la suma de conectividades daría $1 + 1 = 2$.

QUÉ DEJA. La suma es mucho más conexa que sus sumandos: $G + H$ solo se rompe borrando entero uno de los dos. Es la razón de que $G + K_1$ suba la conectividad exactamente en uno (ejercicio 4.16).

Ejercicio 4.9. *Añadir un vértice a un regular* R4.13(B)

Sea G regular de grado k y sea $G' = G + v$ con v un vértice nuevo adyacente a todos. Probar que $\lambda(G') = \delta(G') = k + 1$.

Resolución. La idea. El grado mínimo sube en uno, y hay que ver que λ sube con él. Un corte de aristas de G' deja un trozo D sin v , y cada vértice de D paga dos veces: su arista hacia v , y las que salen hacia el resto de G . Es la cuenta de la parábola del teorema de Chartrand, con un término más.

Sea $p = |V(G)| \geq k + 1$. En G' los vértices de G tienen grado $k + 1$ y v tiene grado $p \geq k + 1$, luego $\delta(G') = k + 1$ y $\lambda(G') \leq k + 1$ por Whitney. Falta $\lambda(G') \geq k + 1$. Sea A un conjunto de aristas con $G' - A$ desconexo y sea D el conjunto de vértices de una componente de $G' - A$ que no contiene a v ; $D \subseteq V(G)$ y $D \neq \emptyset$. Todas las aristas de G' que salen de D están en A : las $|D|$ aristas hacia v , y las aristas de G entre D y $V(G) \setminus D$. Cada $x \in D$ tiene k vecinos en G , de los que a lo sumo $|D| - 1$ están en D , luego al menos $k - |D| + 1$ fuera. Así

$$|A| \geq |D| + |D|(k - |D| + 1) = |D|(k + 2 - |D|).$$

Si $|D| \leq k + 1$, el producto $t(k + 2 - t)$ con $1 \leq t \leq k + 1$ vale al menos $k + 1$ (parábola con ese valor en los extremos). Si $|D| \geq k + 2$, ya $|A| \geq |D| \geq k + 2$. En todo caso $|A| \geq k + 1$, luego $\lambda(G') \geq k + 1$.

Otra vía (con arcos que no comparten aristas). El teorema de Menger para aristas (sección 4.6) permite otra prueba. Entre $x, y \in V(G)$, se toman xvy , la arista xy si existe, y xzy para cada vecino común z de x e y . Quedan por usar los vecinos de x que no son ni y ni vecinos de y , y los de y que no son ni x ni vecinos de x . Como ambos grados son k , esos dos conjuntos tienen el mismo tamaño; se emparejan como u_i, w_i y se añaden los arcos xu_ivw_iy . En total son $k + 1$ arcos sin aristas comunes. Para la pareja x, v , sirven xv y los k arcos xuv con u vecino de x . Así todas las parejas tienen $k + 1$ arcos linealmente independientes y $\lambda(G') \geq k + 1$. La cuenta anterior evita usar Menger. ■

Qué hemos aprendido. La cuenta $t(\delta + 1 - t)$ sirve cada vez que se quiere probar $\lambda = \delta$: se toma el bando pequeño de un supuesto corte y se cuentan las aristas que salen de él. Aquí la regularidad solo se usa en la forma «todo vértice de G tiene grado al menos k ». Por eso basta con $\delta(G) = k$, sin pedir que G sea regular, para concluir igual $\lambda(G') = \delta(G') = k + 1$.

Ejercicio 4.10. *El complementario* R4.16

Demostrar que si G es n -conexo de orden p , su complementario $\overline{G}$ es a lo más $(p - n - 1)$ -conexo.

Resolución. La idea. Un vértice y su complementario se reparten los $p - 1$ vecinos posibles. Si en G todos los grados son altos, en $\overline{G}$ son todos bajos, y Whitney convierte un grado bajo en una conectividad baja.

Para todo vértice v , $\delta_G(v) + \delta_{\overline{G}}(v) = p - 1$, porque $A(G) \sqcup A(\overline{G}) = A(K_p)$ sobre el mismo conjunto de vértices. Como G es n -conexo, $\delta_G(v) \geq \delta(G) \geq \kappa(G) \geq n$ por Whitney. Luego $\delta_{\overline{G}}(v) \leq p - 1 - n$ para todo v , y $\kappa(\overline{G}) \leq \delta(\overline{G}) \leq p - n - 1$. ■

Dónde se falla. En leer la cota como una igualdad. A veces se alcanza: C_5 es 2-conexo, su complementario es otra vez un C_5 y tiene $\kappa = 2 = 5 - 2 - 1$. Otras veces se queda muy lejos: $K_{3,3}$ es 3-conexo, la cota da $6 - 3 - 1 = 2$, y su complementario son dos triángulos disjuntos, con $\kappa = 0$.

4.5 Grafos n -conexos

LA PREGUNTA

Además de comprobar si una red aguanta dos fallos simultáneos, podemos preguntarnos si hay una manera de construir todas las redes con esa propiedad. Para un fallo la respuesta es «sin puntos de corte»; para dos, Tutte encontró en 1961 que todas nacen de las ruedas por dos operaciones elementales. Steinitz había probado en 1922 que los esqueletos de los poliedros convexos son exactamente los grafos planos que aguantan dos fallos. ¿Qué tienen de especial las redes que aguantan n fallos, y cómo se reconocen?

Definición (n -conexo). Sea G un grafo y $n \geq 0$. Se dice que G es **n -conexo** si $\kappa(G) \geq n$, y que es **n -conexo lineal** (o **n -conexo por aristas**) si $\lambda(G) \geq n$.

Por Whitney, n -conexo implica n -conexo lineal. Todo grafo es 0-conexo. Y n -conexo es una cota inferior: un grafo 3-conexo es también 2-conexo y 1-conexo.

Lema. G es 1-conexo si y solo si G es conexo y no trivial.

$\kappa(G) \geq 1$ equivale a $\kappa(G) \neq 0$, y $\kappa(G) = 0$ equivale a que G sea desconexo o trivial. ■

Proposición. G es 2-conexo si y solo si G es un bloque con más de una arista.

La idea, en una frase: «2-conexo» y «bloque» son la misma condición contada de dos maneras —hacen falta al menos dos vértices para desconectar, es decir, ninguno solo basta—, y toda la demostración consiste en vigilar los dos casos pequeños que la definición de κ trata aparte: el grafo trivial y K_2 . Por eso el enunciado dice «con más de una arista» y no simplemente «bloque»: esa coletilla es exactamente el precio de esos dos casos.

Paso 1: 2-conexo $\Rightarrow$ bloque con más de una arista. Sea G 2-conexo. Es conexo, y no tiene puntos de corte: un punto de corte v daría $G - v$ desconexo y $\kappa(G) = 1$. Luego es un bloque. No es el grafo trivial ni K_2 , porque en esos casos $\kappa \leq 1$; un bloque con al menos 3 vértices tiene al menos dos aristas, porque es conexo y un grafo conexo de orden p tiene como mínimo $p - 1$ aristas.

Paso 2: recíproco, descartando los dos casos pequeños (el núcleo de la prueba). Sea G un bloque con más de una arista: conexo, sin puntos de corte, con al menos 3 vértices. Entonces $\kappa(G) \geq 1$, y si fuera $\kappa(G) = 1$ habría un vértice v con $G - v$ desconexo o trivial; trivial no, porque G tiene al menos 3 vértices, y desconexo haría de v un punto de corte. Luego $\kappa(G) \geq 2$. El paso delicado es el «trivial no»: sin la hipótesis de los tres vértices, K_2 sería un bloque con $\kappa = 1$ y el enunciado sería falso. ■

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: 2-CONEXO SIGNIFICA QUE SIEMPRE HAY IDA Y VUELTA DISTINTAS

Este es el teorema que traduce una condición de robustez en una condición de circulación, y merece la pena ver que las dos caras dicen lo mismo con palabras distintas.

Una cara es defensiva: 2-conexo quiere decir que cerrar una plaza cualquiera no incomunica a nadie. La otra es constructiva: dos plazas cualesquiera están en un circuito común, es decir, se puede ir de una a otra y volver *sin repetir plaza*. Que la segunda implique la primera es fácil: si hay circuito, al cerrar una plaza queda el otro medio circuito. Lo interesante es lo otro, y ahí está la idea: no basta con que exista un camino alternativo cada vez que se cierra una plaza; hay que fabricar *a la vez* dos caminos que no compartan ninguna, y eso se hace por inducción, como en la sección 2.7.1.

Esa doble lectura, «no hay puntos críticos» frente a «hay dos rutas independientes», es exactamente lo que generalizará el teorema de Menger al final del capítulo, con n rutas en lugar de dos. Whitney es el caso $n = 2$, y Dirac, que viene ahora, es la generalización en la otra dirección: no dos vértices en un ciclo común, sino n .

Teorema (Whitney, 1932). Un grafo G con al menos 3 vértices es 2-conexo si y solo si cualquier par de vértices de G están en un ciclo común.

Es la equivalencia (a) $\Leftrightarrow$ (b) del teorema de caracterización de los bloques (sección 2.7), junto con la proposición anterior. ■

Corolario. Todo grafo hamiltoniano es 2-conexo.

El ciclo hamiltoniano es un ciclo común a cualquier par de vértices. ■

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: LA CONEXIÓN SE PAGA EN VÉRTICES Y SE COBRA EN CICLOS

Dirac es Whitney subido de nivel, y la forma de leerlo es esa: la n -conexión se *paga* en resistencia (hacen falta al menos n vértices para romper el grafo) y se *cobra* en circulación (n vértices cualesquiera caben en un mismo ciclo). Whitney es el caso $n = 2$; el enunciado general dice que el cambio es lineal y no se degrada por el camino.

Conviene apreciar lo fuerte que es. No dice que haya un ciclo largo, ni que pase por muchos vértices: dice que se puede *elegir* qué n vértices tiene que visitar, los que uno quiera, por dispersos que estén, y que el ciclo existe. La hipótesis de n -conexión es global: una vez demostrada, sirve para cualquier elección de esos n vértices.

Que sea cierto no es evidente en absoluto. La demostración está más abajo y necesita el teorema de Menger, que aún no se ha visto: la idea es meter los vértices en el ciclo de uno en uno, tendiendo un abanico de n arcos desde el que falta hasta el ciclo ya construido. Quien quiera ver el mecanismo, allí está; quien solo necesite usarlo, con la lectura de arriba basta.

Teorema (Dirac, 1960). Si G es n -conexo, con $n \geq 2$, entonces cualquier conjunto de n vértices de G está contenido en un ciclo común.

Se demuestra en la sección 4.6, porque necesita el teorema de Menger.

Observación. El teorema de Dirac generaliza el de Whitney pero no es una caracterización de los grafos n -conexos: en el ciclo C_p cualquier conjunto de n vértices, con $2 \leq n \leq p$, está en un ciclo común (el propio C_p), y sin embargo $\kappa(C_p) = 2 < n$ para $n \geq 3$. Es la pregunta final del ejercicio 4.11.

4.5.1 Grafos 3-conexos y el teorema de Tutte

Para $n \geq 3$ no hay una caracterización tan limpia como la de Whitney. Para $n = 3$ hay una descripción constructiva, debida a Tutte, que aquí se enuncia sin demostrar.

- Definición** (rueda, añadir arista, explosión). 1. El **grafo rueda** de $n \geq 4$ vértices es $W_n = K_1 + C_{n-1}$: un ciclo de $n - 1$ vértices más un centro adyacente a todos.
2. Si u, v no son adyacentes en G , **añadir la arista** uv da el grafo $G + uv$.
3. Sea v un vértice de grado ≥ 4 . La **explosión** de v consiste en sustituir v por dos vértices nuevos adyacentes v' y v'' , y repartir las aristas que inciden en v entre v' y v'' de modo que cada uno de los dos quede con grado al menos 3 (contando la arista $v'v''$).

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: TODAS LAS RUEDAS Y LO QUE SALE DE ELLAS

Los teoremas anteriores dicen qué *implica* ser 3-conexo. Este dice quiénes son, uno por uno, y por eso es de otra naturaleza: es un teorema de estructura, del mismo tipo que la clasificación de superficies o el teorema fundamental de la aritmética. Se da una pieza básica y dos maneras de fabricar piezas nuevas, y se afirma que no hay nada más.

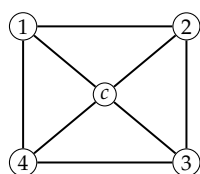
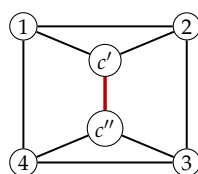
La pieza básica es la rueda: un ciclo con un centro unido a todos. Es la imagen misma de la 3-conexión: si se quitan a lo sumo dos vértices, o sobrevive el centro unido a todos los demás, o queda un camino del ciclo exterior. En ambos casos sigue conexas y no trivial. Las dos operaciones son igual de visuales. **Añadir una arista** solo puede hacer el grafo más duro, así que no estropea nada. Y **explotar un vértice** consiste en partir en dos un vértice de grado ≥ 4 , repartir sus vecinos entre las dos mitades dejando al menos dos a cada una, y unir las dos mitades con una arista, que eleva ambos grados a por lo menos 3: es lo contrario de contraer. Por eso se puede decir que Tutte describe los grafos 3-conexos «hacia arriba», mientras que la demostración de

Kuratowski del capítulo siguiente los recorre «hacia abajo», contrayendo hasta llegar a K_4 , que es la rueda más pequeña.

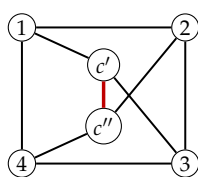
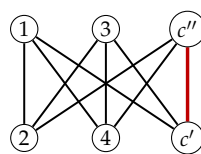
Una aplicación inmediata del teorema es esta: si un grafo dibujado se reconoce como una rueda con aristas añadidas, ya se sabe que $\kappa \geq 3$ sin buscar ningún corte, y eso ahorra la mitad del trabajo.

Teorema (Tutte, 1961). Un grafo G es 3-conexo si y solo si es una rueda o se obtiene de una rueda por una sucesión finita de operaciones de los dos tipos: añadir aristas y explotar vértices.

Ejemplo. $K_4 = W_4$ es 3-conexo. K_5 se obtiene de W_5 añadiendo las dos cuerdas del ciclo exterior: 3-conexo (de hecho 4-conexo). El prisma triangular (dos triángulos $a_1a_2a_3$ y $b_1b_2b_3$ con las aristas a_ib_i) se obtiene de W_5 explotando el centro: el centro c , de grado 4 y adyacente al ciclo 1234, se parte en $c' \sim 1,2$ y $c'' \sim 3,4$, con $c'c''$ arista; quedan los triángulos $c'12$ y $c''34$ unidos por $c'c''$, 23 y 41. Luego el prisma es 3-conexo.

 W_5 explosión de c : el prisma

Ejemplo (el mismo W_5 , otra explosión: $K_{3,3}$). En la explosión del prisma, a c' le tocaron dos vecinos consecutivos del ciclo, 1 y 2. Si se reparten alternos, $c' \sim 1,3$ y $c'' \sim 2,4$, sale otro grafo. Tiene seis vértices y nueve aristas: las cuatro del ciclo 1234, las cuatro que van de c' y c'' al ciclo, y $c'c''$. Cada una une un vértice de $\{1,3,c''\}$ con uno de $\{2,4,c'\}$. Las del ciclo alternan entre los dos grupos, c' va a 1 y a 3, c'' va a 2 y a 4, y $c'c''$ cruza de un grupo al otro. Nueve aristas entre dos grupos de tres son todas las posibles: el grafo es $K_{3,3}$, y por Tutte es 3-conexo.

explosión alterna de c el mismo grafo: $K_{3,3}$

El ejemplo enseña dos cosas. La primera es que la rueda de partida no hay que buscarla dentro del dibujo. $K_{3,3}$ es bipartito y no tiene triángulos, mientras que toda rueda los tiene, así que ninguna rueda es subgrafo de $K_{3,3}$. Lo que se reconstruye es una historia de explosiones y aristas añadidas.

La segunda es por qué la definición de explosión exige al menos dos vecinos antiguos a cada mitad. Si se repartiera $c' \sim 1$ y $c'' \sim 2,3,4$, el vértice c' quedaría con grado 2 (la arista hacia 1 y la arista $c'c''$), y quitando 1 y c'' quedaría aislado: $\kappa \leq 2$. Una explosión ilegal fabrica un vértice de grado 2, y con él un corte de dos vértices.

CONEXIÓN: CÓMO SE USA TUTTE SOBRE UN GRAFO DIBUJADO

Para probar con Tutte que un grafo dibujado es 3-conexo se parte de una rueda y se describe, paso a paso, qué aristas se añaden y qué vértices se explotan hasta llegar a G . La rueda inicial no tiene por qué aparecer como subgrafo del dibujo final, como muestra el prisma. Con eso $\kappa \geq 3$; Whitney da $\kappa \leq \delta$, y si $\delta = 3$ se acabó.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: CARACTERIZAR LOS n -CONEXOS POR CICLOS

La alternativa. Generalizar Whitney tal cual: « n -conexo si y solo si cualesquiera n vértices están en un ciclo común».

Su atractivo. Para $n = 2$ es exactamente el teorema de Whitney, y la implicación directa es cierta para todo $n \geq 2$ (Dirac).

Qué la hunde. El ciclo C_p : sus p vértices están en un ciclo común y su conectividad es 2. Por tanto, para $3 \leq n \leq p$, tener cualesquiera n vértices en un ciclo común no implica ser n -conexo. La caracterización correcta no habla de ciclos sino de arcos independientes entre cada par de vértices, y es el teorema de Menger.

Ejercicios: grafos n -conexos

Ejercicio 4.11. Ciclos comunes R4.3

Probar que un grafo es 2-conexo si y solo si todo par de vértices está en un ciclo común. En general, si un grafo es n -conexo, cualesquiera n vértices están en un ciclo común. ¿Es cierto el recíproco?

Resolución. La primera parte es el teorema de Whitney de esta sección (para grafos con al menos 3 vértices; K_2 es un bloque no 2-conexo y sus dos vértices no están en ningún ciclo, así que la equivalencia también vale ahí leída con cuidado). La segunda requiere $n \geq 2$: es el teorema de Dirac, demostrado en la sección siguiente. Para $n = 1$ falla, por ejemplo, en un árbol. El recíproco es falso: en C_p con $p \geq 4$, cualesquiera 3 vértices están en un ciclo común y $\kappa(C_p) = 2$. ■

Ejercicio 4.12. Quitar una arista R4.14

Sea G n -conexo y $a \in A(G)$. Demostrar que $G - a$ es $(n - 1)$ -conexo. ¿Es n -conexo?

Resolución. La idea. Una arista vale, como mucho, un vértice. Si quitar la arista a y un conjunto S de vértices rompe el grafo, cambiar a por uno de sus extremos también lo rompe: es el Paso 3 de Whitney, un puente trae consigo un punto de corte. Así, un corte de $G - a$ con s vértices da un corte de G con $s + 1$, y la conectividad baja como mucho en uno.

Si $n \leq 1$ no hay nada que probar. Sea $n \geq 2$, $a = uv$, y supóngase que $G - a$ no es $(n - 1)$ -conexo: existe $S \subseteq V(G)$ con $|S| \leq n - 2$ tal que $(G - a) - S$ es desconexo o trivial. Trivial no puede ser: G tiene $p \geq n + 1$ vértices (porque $\kappa(G) \leq p - 1$), luego quedan $p - |S| \geq 3$. Si $u \in S$ o $v \in S$, entonces $(G - a) - S = G - S$, que es conexo porque $|S| < n \leq \kappa(G)$: contradicción. Si $u, v \notin S$: $G - S$ es conexo, con al menos 3 vértices, y $(G - S) - a$ es desconexo, luego a es un puente de $G - S$ y alguno de sus extremos tiene grado ≥ 2 en $G - S$ (si los

dos tuvieran grado 1, $G - S$ sería K_2), así que es un punto de corte de $G - S$; llamémoslo u , intercambiando los nombres si hace falta. Quitando ese extremo, $G - (S \cup \{u\})$ es desconexo con $|S| + 1 \leq n - 1 < \kappa(G)$ vértices quitados: contradicción. Luego $\kappa(G - a) \geq n - 1$.

No tiene por qué ser n -conexo: K_4 es 3-conexo y $K_4 - a$ tiene dos vértices de grado 2, luego $\kappa(K_4 - a) \leq 2$. ■

Qué hemos aprendido. $\kappa(G - a) \geq \kappa(G) - 1$, y K_4 muestra que la caída de uno puede ocurrir. Para aristas es aún más fácil, $\lambda(G - a) \geq \lambda(G) - 1$: un corte de aristas de $G - a$, junto con a , es un corte de G . **Dónde se falla:** en el extremo que se quita. Tiene que tener grado al menos 2 en $G - S$: un extremo de grado 1 es una hoja, y quitarlo deja el resto conexo. Si los dos extremos fueran hojas, $G - S$ sería K_2 , y la prueba descarta ese caso antes, contando que a $G - S$ le quedan al menos tres vértices.

Ejercicio 4.13. Grafos de Harary R4.15; CONTROL 2.2

Un grafo de Harary $H(k, n)$ es un grafo k -conexo de orden n con el mínimo número posible de aristas. (a) Dar un $H(2, 4)$. (b) Dar dos grafos no isomorfos $H(3, 8)$. (c) Si $H(k, 7)$ tiene 12 aristas, ¿puede ser $k = 4$?

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. Cota inferior (ejercicio 4.3): $q \geq kn/2$. Basta un grafo k -conexo con exactamente $\lceil kn/2 \rceil$ aristas.
2. Para (b), dos grafos 3-regulares 3-conexos con 8 vértices: el cubo Q_3 y el ciclo C_8 con las cuatro diagonales largas. Uno es bipartito y el otro no.

Resolución. La idea. Un grafo de Harary es un problema de mínimo con dos mitades. Por abajo está la cuenta del ejercicio 4.3: $q \geq kn/2$, y como q es entero, $q \geq \lceil kn/2 \rceil$. Por arriba hay que exhibir un grafo k -conexo con exactamente esas aristas. Fabricar un grafo con los grados justos es fácil. Lo que cuesta es probar que es k -conexo, y ahí Menger, reducido por las simetrías del grafo, deja pocas parejas que mirar.

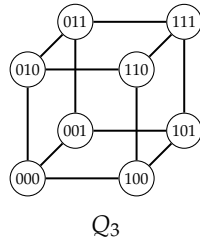
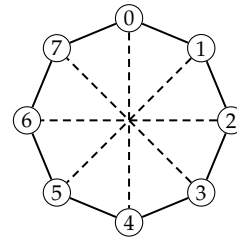
(a) Un $H(2, 4)$ tiene al menos $2 \cdot 4/2 = 4$ aristas. El ciclo C_4 tiene 4 aristas y $\kappa = 2$: es un $H(2, 4)$.

(b) Un $H(3, 8)$ tiene al menos 12 aristas, y con 12 aristas y 8 vértices de grado ≥ 3 es 3-regular. Se dan dos grafos 3-regulares 3-conexos de orden 8:

El cubo Q_3 . Sus 8 vértices son las ternas de bits, adyacentes cuando difieren en un bit; 3-regular con 12 aristas. Se prueba $\kappa(Q_3) \geq 3$ con el corolario de Menger (sección 4.6): para cada par no adyacente hacen falta 3 arcos independientes. Por la simetría del cubo (cualquier vértice se lleva a 000 intercambiando ceros y unos coordenada a coordenada) basta mirar los pares no adyacentes que contienen a 000: los que difieren en dos bits, como 011 (permutar las coordenadas también preserva las aristas), y el opuesto 111. Para 000, 011: 000 001 011; 000 010 011; 000 100 101 111 011. Para 000, 111: 000 001 011 111; 000 010 110 111; 000 100 101 111. En ambos casos los tres arcos solo comparten los extremos. Con Whitney, $\kappa = \lambda = \delta = 3$.

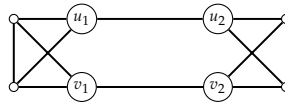
La escalera de Möbius M_8 . El ciclo $012 \cdots 70$ con las cuatro diagonales $i(i+4)$; 3-regular con 12 aristas. Es simétrico por rotación, así que basta mirar los pares no adyacentes con 0: salvo simetría, (0, 2) y (0, 3). Para 0, 2: 012; 0432; 0762 (la diagonal 62). Para 0, 3: 0123; 043; 073 (la diagonal 73). Tres arcos independientes en cada caso: $\kappa(M_8) = 3$.

No son isomorfos: Q_3 es bipartito (por la paridad del número de unos) y M_8 contiene el ciclo impar 012340 (la diagonal 40 lo cierra).

 Q_3  M_8

(c) Con 12 aristas y 7 vértices, $\kappa \leq \delta \leq \lfloor 2 \cdot 12/7 \rfloor = 3$ (Harary). Luego $k \leq 3$ y no puede ser $k = 4$ (un grafo 4-conexo de orden 7 necesitaría $\lceil 28/2 \rceil = 14$ aristas). ■

Dónde se falla. En creer que basta con igualar la cuenta. Dos copias de K_4 menos una arista, unidas por dos aristas entre los extremos de las aristas quitadas, forman un grafo con 8 vértices, 3-regular y con 12 aristas. Pero quitando los dos extremos de una de las copias el grafo se parte: $\kappa = 2$, y no es un $H(3, 8)$.

3-regular, 12 aristas, $\kappa = 2$

Los grados justos son necesarios, pero la k -conexión hay que demostrarla aparte. En (c) el error es el contrario: ponerse a buscar un grafo concreto cuando la cota ya decide que no existe.

Ejercicio 4.14. Sumar un completo R4.17

Sea G n -conexo. Demostrar que $G + K_p$ es $(n + p)$ -conexo.

Resolución. Por la fórmula del ejercicio 4.8, $\kappa(G + K_p) = \min\{|V(G)| + \kappa(K_p), p + \kappa(G)\} = \min\{|V(G)| + p - 1, p + \kappa(G)\}$. Como $|V(G)| \geq \kappa(G) + 1$, los dos términos son $\geq \kappa(G) + p \geq n + p$. (También sale añadiendo los p vértices de uno en uno con el ejercicio 4.16: cada uno sube la conectividad en una unidad.) ■

4.6 Conectividad local y el teorema de Menger

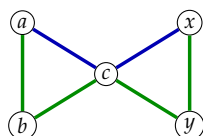
LA PREGUNTA

En 1955 Harris y Ross estudiaron para la fuerza aérea estadounidense la capacidad de una red ferroviaria soviética y de Europa del Este. Encontraron un flujo de 163 000 toneladas y un corte con esa misma capacidad total. Aquí se suman capacidades de enlaces, no simplemente se cuentan vías. El informe se desclasificó en 1999; el teorema de flujo máximo y corte mínimo de Ford y Fulkerson se publicó en 1956. Menger había probado en 1927 una igualdad entre separadores de vértices y rutas independientes. ¿Por qué el mínimo número de cortes coincide exactamente con el máximo número de rutas que no se estorban?

Definición (arcos independientes). Sea G un grafo y sean $u, v \in V(G)$ distintos.

- (a) Dos arcos de u a v son **independientes** (o disjuntos) si los únicos vértices que tienen en común son u y v .
- (b) Dos arcos de u a v son **linealmente independientes** (o disjuntos por aristas) si no tienen aristas en común.

Arcos independientes son automáticamente linealmente independientes, pero no al revés: dos arcos pueden cruzarse en un vértice sin compartir aristas. En la pajarita de la sección 4.1, con centro c y triángulos cab y cxy , los arcos acx y $abcyx$ no comparten ninguna arista, pero los dos pasan por c . Son linealmente independientes y no son independientes. Y no hay dos arcos independientes de a a x , porque todos atraviesan c . Es la versión local de $\kappa = 1 < \lambda = 2$.



dos arcos de a a x sin aristas comunes, los dos por c

Definición (separar; conectividad local). Sean $u, v \in V(G)$ distintos. Un conjunto S de vértices, o de aristas, de G **separa** a u y v si $G - S$ no es conexo y u, v están en componentes distintas de $G - S$ (para vértices, $u, v \notin S$). Si G es conexo y u, v no son adyacentes, la **conectividad local** $\kappa(u, v)$ es el menor cardinal de un conjunto de vértices que separa a u y v . Para u, v cualesquiera, la **conectividad lineal local** $\lambda(u, v)$ es el menor cardinal de un conjunto de aristas que separa a u y v .

Si u y v son adyacentes, ningún conjunto de vértices los separa: la arista uv sobrevive a cualquier eliminación que no los toque. Por eso $\kappa(u, v)$ se define solo para pares no adyacentes.

Ejemplo. En la pajarita con centro c y triángulos cab y cxy : $\kappa(a, x) = 1$, porque $\{c\}$ separa. En C_5 dos vértices no adyacentes tienen $\kappa(u, v) = 2$: hay que quitar un vértice de cada uno de los dos arcos que los unen. En $K_{3,3}$ dos vértices del mismo lado tienen $\kappa(u, v) = 3$: hay que quitar los tres del otro lado.

Lema. Si G es conexo y no completo, $\kappa(G) = \min\{\kappa(u, v) : u, v \in V(G), uv \notin A(G)\}$.

La idea, en una frase: la conectividad global no es una cantidad distinta de las locales, es la peor de ellas. Desconectar el grafo entero es desconectar *algún* par de vértices, así que el separador global más barato tiene que ser el separador local más barato de algún par, y al revés. **Lo único que hay que cuidar es que ese par sea no adyacente**, porque a dos vértices unidos por una arista no los separa ningún conjunto de vértices, y ahí es donde entra la hipótesis de que G no sea completo.

Paso 1: lo global es a lo sumo lo local. Si S separa a u y v , en particular $G - S$ es desconexo, luego $\kappa(G) \leq |S|$; tomando S mínimo, $\kappa(G) \leq \kappa(u, v)$ para todo par no adyacente.

Paso 2: lo local es a lo sumo lo global, y aquí hace falta que G no sea completo (el núcleo de la prueba). Sea S un conjunto de $\kappa(G)$ vértices con $G - S$ desconexo o trivial. Como G no es completo, $\kappa(G) \leq p - 2$ y $G - S$ tiene al menos dos vértices, luego

es desconexo; tomando u, v en componentes distintas, S separa a u y v , que no son adyacentes, y $\kappa(u, v) \leq |S| = \kappa(G)$. Si G fuera completo el paso se caería: no habría ningún par no adyacente, el mínimo de la derecha se tomaría sobre el conjunto vacío, y el enunciado no tendría sentido. Es exactamente por eso por lo que a K_n hay que llegar por otro camino, el del «o trivial» de la definición de κ , que es el que le asigna $\kappa(K_n) = n - 1$. ■

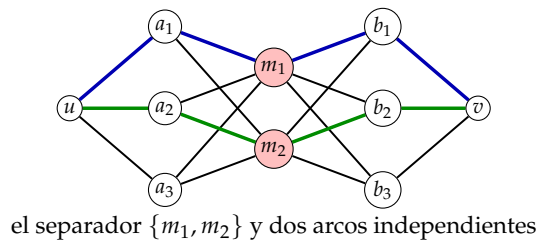
Teorema (Menger, 1927). Sea G un grafo conexo y u, v dos vértices no adyacentes. La conectividad local $\kappa(u, v)$ coincide con el máximo número de arcos independientes de u a v .

Una dirección es un recuento: si hay k arcos independientes de u a v , para separar a u y v hay que quitar al menos un vértice interior de cada arco, y esos vértices son distintos; luego $\kappa(u, v) \geq k$. La otra dirección, que hay tantos arcos como pide el corte, es la profunda, y se demuestra más abajo.

Ejemplo (Menger a mano: el cuello de botella). En el grafo de la figura, u tiene tres salidas, a_1, a_2, a_3 , y v tiene tres entradas, b_1, b_2, b_3 . A primera vista caben tres rutas. Pero todo lo que sale de los a_i va a parar a m_1 o a m_2 , y todo lo que llega a los b_i viene de ahí: el conjunto $\{m_1, m_2\}$ separa a u y v . Dos arcos independientes no pueden pasar por el mismo vértice del cuello, así que caben como mucho dos. Y dos caben:

$$u a_1 m_1 b_1 v, \quad u a_2 m_2 b_2 v.$$

Un tercer arco que salga por a_3 se encuentra en a_3 con que sus únicos vecinos nuevos son m_1 y m_2 , ya usados.



Así que $\kappa(u, v) = 2$, aunque u y v tengan grado 3. El separador y los arcos tienen el mismo tamaño, y cada uno certifica al otro. Los dos arcos prueban que ningún vértice solo separa, y el separador prueba que no hay un tercer arco. El teorema dice que esa coincidencia no es una casualidad de este grafo: el separador mínimo y la familia máxima de arcos tienen siempre el mismo tamaño.

Corolario. Un grafo conexo y no completo G es n -conexo si y solo si para cada par de vértices no adyacentes u, v hay al menos n arcos independientes de u a v .

Por el lema, $\kappa(G) \geq n$ equivale a $\kappa(u, v) \geq n$ para todo par no adyacente, y por Menger eso equivale a que haya al menos n arcos independientes entre cada uno de esos pares. (Para K_p el enunciado es vacío y $\kappa = p - 1$.) ■

LA IDEA: EL CORTE Y EL FLUJO

Menger dice que la única manera de que no haya n rutas independientes es que exista un cuello de botella de menos de n vértices. Es una igualdad entre un máximo (rutas) y un mínimo (cortes), y todo teorema de ese tipo tiene una mitad fácil (cada corte acota las rutas) y una mitad difícil (el mejor corte se alcanza). En la práctica se usa la mitad fácil al revés: exhibiendo n arcos independientes se prueba $\kappa(u, v) \geq n$, sin hablar de cortes.

Definición (versión por aristas). Para G conexo con al menos dos vértices, $\lambda(G) = \min\{\lambda(u, v) : u, v \in V(G), u \neq v\}$, y se tiene el teorema análogo: G es n -conexo lineal si y solo si para cada par de vértices u, v hay al menos n arcos linealmente independientes de u a v . Se obtiene del teorema de Menger para vértices aplicado a un grafo auxiliar, y aquí no se demuestra.

4.6.1 La demostración del teorema de Menger

Se sigue la demostración de Diestel, una inducción sobre el número de aristas que contrae una de ellas en cada paso. Conviene probar una versión más general, entre dos conjuntos de vértices, de la que la versión habitual, entre dos vértices, es un caso particular: la generalización no cuesta nada y es la que hace que la inducción se cierre.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: EL PEAJE MÁS BARATO Y LAS RUTAS QUE NO SE PISAN

Menger es un teorema de los de «lo que estorba y lo que pasa valen lo mismo». De un lado, un *separador* es un peaje: un conjunto de plazas por las que pasa obligatoriamente todo el que viaje de A a B . Del otro, una familia de caminos disjuntos son rutas que no se pisan.

Una de las dos desigualdades es contabilidad y se ve en un segundo: si el peaje más barato tiene k plazas, no puede haber $k + 1$ rutas que no se pisen, porque cada ruta paga en alguna plaza del peaje y dos rutas distintas no pueden pagar en la misma. Lo difícil, y lo que hace grande al teorema, es lo otro: que si hace falta cerrar k plazas para cortar el paso, entonces *de verdad* hay k rutas independientes. A priori podría haber cuellos de botella repartidos de manera que ninguna familia de rutas los aprovechara todos a la vez; el teorema dice que eso nunca ocurre.

La demostración encoge el grafo: toma una calle y funde sus dos extremos en una sola plaza. El grafo resultante tiene menos aristas, así que la hipótesis de inducción se le aplica, y solo hay dos posibilidades. O bien el grafo fundido sigue necesitando un peaje de k plazas, y entonces ya tiene k rutas independientes que, al deshacer la fusión, siguen siéndolo salvo un retoque local en la plaza fundida. O bien la fusión ha abaratado el peaje, y eso es información valiosísima: dice que el cuello de botella pasa justo por ahí, y permite partir el problema en dos mitades, cada una con menos aristas, que la inducción resuelve por separado y que luego se pegan por el cuello.

En una frase: las rutas no se construyen de una vez, se construyen deshaciendo fusiones. Es el mismo esquema de excedente en la red que hay detrás del teorema del flujo máximo y el corte mínimo, del que Menger es la versión por vértices.

Sean $A, B \subseteq V(G)$. Un **camino** A – B es un camino simple cuyo primer vértice está en A ,

cuyo último está en B y que no tiene ningún otro vértice en $A \cup B$. Un conjunto $X \subseteq V(G)$ **separa** A de B si todo camino A – B tiene algún vértice en X (se permite $X \cap A \neq \emptyset$ o $X \cap B \neq \emptyset$; si $a \in A \cap B$, el camino trivial (a) obliga a $a \in X$).

Teorema (Menger, versión de conjuntos). El menor número de vértices que separan A de B es igual al máximo número de caminos A – B disjuntos dos a dos (sin ningún vértice en común).

El corazón en una frase: la desigualdad fácil es contabilidad —cada peaje toca cada ruta—, y la difícil se prueba **deshaciendo fusiones de aristas**: se contrae una arista, la inducción resuelve el grafo más pequeño, y al descontraer o bien las rutas sobreviven con un retoque local o bien la fusión ha localizado el cuello de botella y el problema se parte en dos mitades que se pegan por él.

Paso 1: la desigualdad fácil, que es puro recuento. Sea k el mínimo cardinal de un conjunto que separa A de B . Como cada separador debe contener un vértice de cada camino de una familia disjunta, ninguna familia tiene más de k caminos. Hay que probar que existen k caminos A – B disjuntos. Inducción sobre el número de aristas de G .

Paso 2: la base de la inducción, sin aristas. Si G no tiene aristas, los únicos caminos A – B son los triviales (a) con $a \in A \cap B$, el separador mínimo es $A \cap B$, $k = |A \cap B|$, y esos k caminos triviales son disjuntos.

Paso 3: se contrae una arista y la inducción entrega un separador barato, que al descontraer da un separador de tamaño exactamente k (el núcleo de la prueba). Este es el paso que hace el teorema, y su mecanismo es que *fundir dos vértices no puede encarecer el peaje*: si tras fundir hace falta menos de k , el vértice fundido tiene que estar en el separador barato, y al deshacer la fusión se recupera un separador de k vértices, ni uno más. Sea $e = xy$ una arista. Supóngase que G no tiene k caminos A – B disjuntos. Sea G/e el grafo que resulta de identificar x e y en un solo vértice v_e (se identifican también las aristas que queden repetidas: caminos y separadores solo dependen de la adyacencia), y se considera v_e como elemento de A si x o y estaban en A , y de B si x o y estaban en B . Cada familia de caminos A – B disjuntos en G/e da una familia igual de grande en G (un camino que pase por v_e se expande usando e si hace falta), luego G/e tampoco tiene k caminos disjuntos. Como G/e tiene menos aristas, por hipótesis de inducción G/e tiene un separador Y con menos de k vértices. Y $v_e \in Y$: si no, $Y \subseteq V(G)$ separaría A de B en G con menos de k vértices. Sea

$$X = (Y \setminus \{v_e\}) \cup \{x, y\},$$

que separa A de B en G y tiene exactamente k vértices (a lo sumo k por construcción, y al menos k por ser separador).

Paso 4: el separador X parte el problema en dos mitades, cada una con menos aristas. Ahora se mira $G - e$, que tiene menos aristas. *Todo conjunto T que separa A de X en $G - e$ separa A de B en G* : sea R un camino A – B en G ; R tiene algún vértice en X ; sea z el primero. El tramo de R hasta z es un camino A – X ; está en $G - e$, porque si R usara e pasaría por x e y , ambos en X , y el primero de ellos ya sería z o vendría después de z , de modo que e no aparece antes de z . Luego ese tramo corta a T , y R también. Por

tanto los separadores de A y X en $G - e$ tienen al menos k vértices, y por inducción hay k caminos $A-X$ disjuntos en $G - e$. Como $|X| = k$, terminan exactamente uno en cada vértice de X . Del mismo modo hay k caminos $X-B$ disjuntos en $G - e$, uno desde cada vértice de X .

Paso 5: las dos mitades se pegan por X sin colisionar. Las dos familias solo se tocan en X : si un camino $A-X$ P y un camino $X-B$ Q compartieran un vértice $z \notin X$, el tramo de P desde A hasta z seguido del tramo de Q desde z hasta B contendría un camino $A-B$ en G sin vértices en X (los interiores de P y Q evitan X por definición), contra que X separa. Pegando en cada vértice de X el camino $A-X$ que llega con el camino $X-B$ que sale se obtienen k caminos $A-B$ disjuntos en G . Contradicción con la suposición inicial. ■

Encapsulado. La desigualdad fácil: cada separador corta cada camino de una familia disjunta, y en vértices distintos. La difícil, por inducción en el número de aristas y por reducción al absurdo, en tres movimientos.

- Se contrae una arista $e = xy$. Si G/e tuviera k caminos disjuntos, G también; como no los tiene, la inducción da en G/e un separador de menos de k vértices, y ese separador contiene al vértice fundido.
- Al deshacer la fusión sale un separador X de G con exactamente k vértices, entre ellos x e y .
- En $G - e$, que tiene una arista menos, X separa por los dos lados, y la inducción da k caminos de A a X y k de X a B . No chocan fuera de X , porque un choque daría un camino de A a B que esquiva X ; se pegan en X .

La idea, en una frase: el caso de dos vértices no es un teorema nuevo, es la versión de conjuntos aplicada a $A = \text{vecinos de } u$ y $B = \text{vecinos de } v$; lo único que hay que comprobar es que separar u de v y separar A de B son la misma cosa.

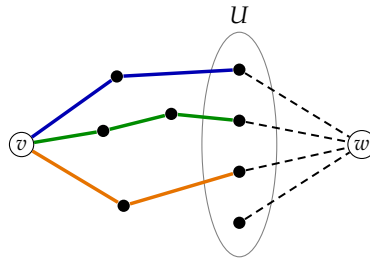
Demostración del teorema de Menger para dos vértices.

Sean u, v no adyacentes, $G_0 = G - \{u, v\}$, A el conjunto de vecinos de u y B el de vecinos de v . Un conjunto $S \subseteq V(G) \setminus \{u, v\}$ separa a u y v en G si y solo si separa A de B en G_0 : todo camino de u a v contiene un camino $A-B$ de G_0 (el tramo entre su último vértice en A hasta el primero en B , ambos incluidos; puede ser un camino trivial si ese vértice pertenece a $A \cap B$) y todo camino $A-B$ de G_0 se prolonga con u y v a un camino de u a v . Y k caminos $A-B$ disjuntos en G_0 , prolongados con u y v , son k arcos independientes de u a v . Luego $\kappa(u, v)$, el mínimo separador, es el máximo número de arcos independientes. ■

Lema (del abanico). Sea G n -conexo, $v \in V(G)$ y $U \subseteq V(G) \setminus \{v\}$ con $|U| \geq n$. Entonces existen n arcos desde v hasta U que solo tienen en común el vértice v y que tocan a U únicamente en su último vértice.

La idea. Menger habla de dos vértices, y aquí lo que hay a un lado no es un vértice sino un conjunto U . El truco es fabricar ese segundo vértice: se añade al grafo un nodo postizo w cableado a todo U , con lo que «ir de v a U » se convierte literalmente en «ir de v a w » y Menger vuelve a ser aplicable. Al final se retira el postizo y se recorta cada arco justo cuando toca U por primera vez. La imagen es la de un abanico: n varillas que salen del mismo eje v y

solo se tocan ahí.



el postizo w , a trazos, y $n = 3$ varillas de v a U

Paso 1: se añade un vértice postizo para poder usar Menger. Sea G' el grafo que se obtiene añadiendo a G un vértice nuevo w adyacente a todos los de U ; v y w no son adyacentes.

Paso 2: separar v de w cuesta al menos n (el núcleo de la prueba). Se afirma que $\kappa_{G'}(v, w) \geq n$: si S con $|S| < n$ separara a v y w en G' , entonces $G - S$ sería conexo (por ser G n -conexo) y contendría algún vértice de U (porque $|U| \geq n > |S|$), luego v llegaría a U y de ahí a w en $G' - S$. Las dos hipótesis trabajan aquí y solo aquí: la n -conexión garantiza que $G - S$ siga siendo conexo, y $|U| \geq n$ garantiza que a U le sobreviva algún vértice.

Paso 3: se retira el postizo. Por Menger hay n arcos independientes de v a w en G' . Quitando w y recortando cada arco en su primer vértice de U quedan n arcos de v a U que solo comparten v y solo tocan U al final. ■

Encapsulado. Un vértice postizo w unido a todo U convierte «de v a U » en «de v a w ». Separar v de w cuesta al menos n , porque con menos G sigue conexo y a U le sobrevive alguien. Menger da n arcos de v a w ; se quita w y se recorta cada arco en su primer vértice de U .

4.6.2 La demostración del teorema de Dirac

La demostración es corta una vez se tiene el abanico, y enseña cómo se usa Menger para construir ciclos.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: COLAR UN VÉRTICE MÁS, POR EL PALOMAR

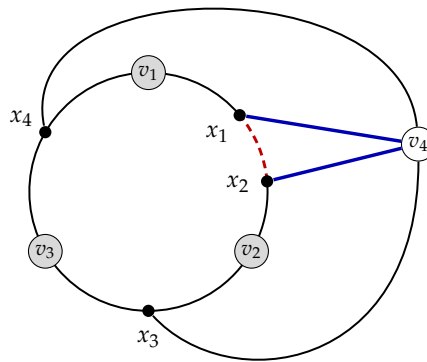
Dirac dice que en un grafo n -conexo hay un ciclo que pasa por n vértices cualesquiera. La demostración no fabrica ese ciclo de golpe: lo *amplia de uno en uno*. Ya se tiene un ciclo C que pasa por $n - 1$ de los vértices marcados, y hay que colar el que falta, v_n . Aquí entra el abanico. Como el grafo es n -conexo, desde v_n salen n arcos hasta C que solo se tocan en v_n y que aterrizan en n puntos distintos del ciclo. Y ahora viene el paso bonito, que es puro principio del palomar: los $n - 1$ vértices marcados que ya están en C lo parten en $n - 1$ tramos, y hay n aterrizajes; dos de ellos caen forzosamente en el mismo tramo.

Eso es justo lo que hacía falta, porque el trozo de ciclo comprendido entre esos dos aterrizajes no lleva ningún vértice marcado por dentro: es un trozo prescindible. Se corta, y en su lugar se mete el desvío que baja por un arco hasta v_n y sube por el otro.

Queda un ciclo que conserva los $n - 1$ de antes y ha ganado v_n .

Una vez obtenido el ciclo por inducción, la n -conexión da el abanico de n varillas; el resto de la ampliación consiste en contar tramos. Cuando el ciclo es tan corto que no llega a n vértices ni siquiera hace falta el palomar: hay un arco a cada vértice del ciclo y basta sustituir una arista cualquiera por el desvío.

La figura lo muestra con $n = 4$. Los marcados v_1, v_2, v_3 parten el ciclo en tres tramos, y el abanico desde v_4 aterriza en cuatro puntos, $x_1, \dots, x_4$. Dos de ellos, x_1 y x_2 , caen en el tramo que va de v_1 a v_2 . El trozo de ciclo entre x_1 y x_2 (a trazos) no lleva ningún marcado y se sustituye por el desvío $x_1 v_4 x_2$ (en azul).



cuatro aterrizajes, tres tramos: x_1 y x_2 comparten tramo

El corazón en una frase: **n aterrizajes en $n - 1$ tramos**, y el palomar entrega el trozo de ciclo prescindible por donde se cuelga el vértice que falta.

Demostración del teorema de Dirac.

Paso 1: inducción sobre n , con Whitney como base. Sea G n -conexo, $n \geq 2$, y $S = \{v_1, \dots, v_n\}$. Inducción sobre n . Para $n = 2$ es Whitney. Sea $n \geq 3$; como G es también $(n - 1)$ -conexo, por inducción hay un ciclo C que contiene a $v_1, \dots, v_{n-1}$. Si $v_n \in C$, hecho. Si no, se distinguen dos casos.

Paso 2, caso principal ($|V(C)| \geq n$): se cuelga el vértice que falta usando el abanico (el núcleo de la prueba). Además de permitir la inducción, la n -conexión garantiza aquí que el abanico tiene n varillas. El paso restante consiste en contar tramos. Por el abanico hay n arcos desde v_n hasta $V(C)$ que solo comparten v_n y tocan a C solo en sus extremos $x_1, \dots, x_n$, distintos. Los $n - 1$ vértices $v_1, \dots, v_{n-1}$ dividen a C en $n - 1$ tramos (cada tramo va de un v_i al siguiente a lo largo de C , incluyendo el primero y excluyendo el segundo). Como hay n extremos x_j y $n - 1$ tramos, dos de ellos, x_a y x_b , caen en el mismo tramo, y el trozo de C entre x_a y x_b dentro de ese tramo no contiene a ningún v_i en su interior. Sustituyendo ese trozo por los dos arcos $x_a \cdots v_n \cdots x_b$ se obtiene un ciclo que contiene a $v_1, \dots, v_{n-1}$ y a v_n .

Paso 3, caso degenerado ($|V(C)| = n - 1$): el ciclo es tan corto que no hace falta el palomar. Entonces C contiene exactamente a $v_1, \dots, v_{n-1}$, con $n - 1 \geq 3$, y por el abanico con $n - 1$ arcos (G es $(n - 1)$ -conexo y $|V(C)| = n - 1$) hay arcos desde v_n hasta cada uno de los $n - 1$ vértices de C que solo comparten v_n . Tomando dos vértices

consecutivos x, y de C y sustituyendo la arista xy por los dos arcos $x \cdots v_n \cdots y$ se obtiene un ciclo que contiene a todos. ■

Encapsulado. Inducción en n , con Whitney como base. Se tiene un ciclo C que pasa por $v_1, \dots, v_{n-1}$ y falta v_n . El abanico da n arcos de v_n a C que solo comparten v_n . Los $n - 1$ marcados parten C en $n - 1$ tramos, y por el palomar dos aterrizajes caen en el mismo tramo. El trozo de C entre ellos no lleva marcados, y se cambia por el desvío que pasa por v_n . Si C tiene solo $n - 1$ vértices, cualquier arista de C sirve de trozo.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: PROBAR n -CONEXIDAD QUITANDO VÉRTICES

La alternativa. Calcular κ por la definición: comprobar que ningún conjunto de $n - 1$ vértices desconecta.

Su ventaja. No necesita ningún teorema.

Qué la hunde. Que hay $\binom{p}{n-1}$ conjuntos que mirar, y en un grafo de 12 vértices con $n = 3$ son 66. Menger cambia «ningún conjunto pequeño desconecta» por «entre cada dos vértices hay n rutas». En grafos con suficientes simetrías puede bastar comprobar unas pocas parejas; las simetrías también pueden simplificar el estudio directo de los cortes. Es un ejemplo de que un teorema de dualidad no solo es bonito: cambia lo que hay que buscar, y lo que hay que buscar después es un certificado positivo (las rutas) en vez de una ausencia.

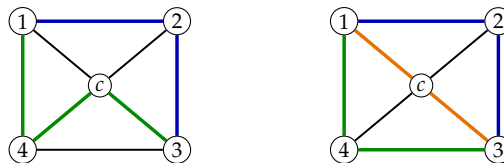
Ejercicios: Menger y grafos dibujados

Ejercicio 4.15. Arcos mal elegidos R4.11

Sea G 3-conexo y sean P_1, P_2 dos arcos independientes de u a v . ¿Es siempre posible encontrar un tercer arco de u a v independiente de los anteriores?

Resolución. La idea. Un arco largo gasta vértices que otro arco podría necesitar. Para ver que la respuesta es no basta un grafo pequeño en el que un segundo arco, mal elegido, se coma el último vecino libre de u .

No. Menger garantiza que *existen* tres arcos independientes, no que dos cualesquiera se puedan completar. En la rueda W_5 con centro c y ciclo 1 2 3 4, que es 3-conexa por Tutte, tómense $u = 1, v = 3, P_1 = 1 2 3$ y $P_2 = 1 4 c 3$. Un tercer arco de 1 a 3 no puede usar 2, 4 ni c , y son los únicos vecinos de 1: imposible.



$P_2 = 1 4 c 3$: no cabe un tercero $P_2 = 1 4 3$: el tercero es $1 c 3$

Con $P_2 = 1 4 3$ sí hay tercero, $1 c 3$. Conviene, por tanto, elegir los arcos «cortos» y dejar libres los vértices de paso. ■

Ejercicio 4.16. Añadir un vértice adyacente a todos R4.13(A)

Sea G conexo y $G' = G + v$ con v nuevo adyacente a todos. Si G es n -conexo, ¿puede ser $\kappa(G') = n$?

Resolución. La idea. El vértice nuevo es un comodín pegado a todos. A cada pareja le regala un arco más, de longitud dos, que no toca a los arcos que ya tenía. Y a cualquier corte le obliga a llevárselo, porque mientras sobreviva, une a todos los demás.

No: $\kappa(G') = \kappa(G) + 1 \geq n + 1$. *Con Menger:* los pares no adyacentes de G' son los de G (porque v es adyacente a todos); para uno de ellos, x, y , hay n arcos independientes en G y el arco xvy , que no comparte con ellos más que los extremos: $n + 1$ arcos, y G' es $(n + 1)$ -conexo si G no es completo. Si $G = K_p$, se tiene $G' = K_{p+1}$, y entonces $\kappa(G') = p = (p - 1) + 1 = \kappa(G) + 1$, que es lo que se quería. *Sin Menger:* sea S un conjunto que desconecte o trivialice G' . Si $v \notin S$, debe quedar solo v , pues este une a todos los supervivientes; entonces $|S| = |V(G)| \geq \kappa(G) + 1$. Si $v \in S$, el conjunto $S \setminus \{v\}$ desconecta o trivializa G , y de nuevo $|S| \geq \kappa(G) + 1$. Quitar v más un conjunto mínimo de G alcanza esa cota. ■

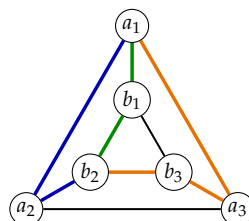
Ejercicio 4.17. Conectividad puntual y lineal de tres grafos dibujados

Estudiar la conectividad puntual y lineal de: (a) $K_{3,3}$; (b) el prisma triangular; (c) el grafo de 12 vértices de noviembre de 2011 (sección 2.7).

Resolución. La idea. Los tres se atacan igual, con Whitney por arriba y una herramienta por abajo, y lo que cambia es la herramienta: Menger en (a); Tutte, Menger o Chartrand en (b); un ciclo hamiltoniano en (c). Ver el mismo método con tres herramientas distintas es lo que permite elegir la más barata en cada grafo.

(a) $K_{3,3}$: $\delta = 3$, luego $\kappa \leq \lambda \leq 3$. Por simetría (los dos lados son intercambiables y dentro de un lado todos los vértices son equivalentes) basta un par no adyacente: u_1, u_2 del mismo lado, con vecinos comunes w_1, w_2, w_3 . Los arcos $u_1w_1u_2$, $u_1w_2u_2$, $u_1w_3u_2$ son independientes: $\kappa \geq 3$. Luego $\kappa = \lambda = 3$. (Es también el ejemplo básico de la sección 4.3.)

(b) El prisma: vértices $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, triángulos $a_1a_2a_3$ y $b_1b_2b_3$, aristas $a_i b_i$. $\delta = 3$. Es 3-conexo por Tutte (explosión del centro de W_5 , ejemplo de la sección anterior), o por Menger: los pares no adyacentes son, salvo simetría, a_1, b_2 ; arcos $a_1 a_2 b_2$, $a_1 b_1 b_2$, $a_1 a_3 b_3 b_2$, independientes. Luego $\kappa = \lambda = 3$. También por Chartrand: $p = 6$, $\delta = 3 \geq \lfloor 6/2 \rfloor$, luego $\lambda = 3$ directamente.



tres arcos independientes de a_1 a b_2

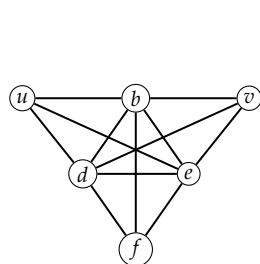
(c) El grafo de noviembre de 2011: tiene vértices de grado 2 ($v_1, v_4, v_9, v_{11}, v_{12}$), luego $\kappa \leq \lambda \leq \delta = 2$. Y es hamiltoniano (sección 2.7), luego 2-conexo: $\kappa \geq 2$. Así $\kappa = \lambda = 2$. Sin el

ciclo hamiltoniano: no tiene puntos de corte, probado en la sección 2.7, y es conexo, luego $\kappa \geq 2$. ■

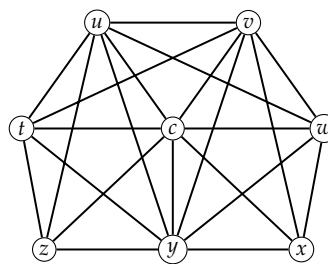
QUÉ DEJA. Whitney por arriba, Menger (o Tutte, o un ciclo hamiltoniano, o Chartrand para λ) por abajo. Si las cotas se juntan, se acabó; si no, hay que buscar el corte a mano, buscando qué grupo de vértices concentra los enlaces entre dos partes del grafo, como en el ejemplo que cierra la sección.

Ejercicio 4.18. Los dos grafos dibujados de la relación R4.9 y 4.10

Calcular la conectividad puntual y lineal de los grafos de la figura.



4.9



4.10

Resolución. La idea. Los dos siguen el método de los grafos dibujados. En 4.9 las herramientas encajan a la primera. En 4.10 hay que combinarlas: Tutte solo da $\kappa \geq 3$, y para llegar a 4 hace falta Menger. Las parejas que Menger obliga a mirar se reducen con la simetría del dibujo.

4.9. Seis vértices y 12 aristas. Grados: u, v, f tienen 3 y b, d, e tienen 5; $\delta = 3$, luego $\kappa \leq \lambda \leq 3$. Es $K_{3,3}$ (lados $\{u, v, f\}$ y $\{b, d, e\}$, con las nueve aristas cruzadas) más el triángulo bde . Chartrand: $p = 6$ y $\delta = 3 \geq \lfloor 6/2 \rfloor$, luego $\lambda = 3$. Para $\kappa \geq 3$, Menger: los pares no adyacentes son u, v ; u, f ; v, f , y los tres son equivalentes por la simetría que permuta u, v, f . Para u, v : los arcos ubv, udv, uev son independientes. Luego $\kappa = \lambda = \delta = 3$.

4.10. Ocho vértices: el ciclo $uvwxyz$, el centro c adyacente a los siete, y las cuerdas $uw, uy, uz, vx, vy, vt, wy, yt$: $7 + 7 + 8 = 22$ aristas. Grados: x y z tienen 4; w y t , 5; u y v , 6; y y c , 7. Whitney: $\kappa \leq \lambda \leq \delta = 4$. Chartrand: $p = 8$ y $\delta = 4 \geq \lfloor 8/2 \rfloor$, luego $\lambda = 4$. Tutte: es la rueda $W_8 = c + C_7$ con aristas añadidas, luego $\kappa \geq 3$. Para decidir entre 3 y 4, Menger: los pares no adyacentes son $(u, x), (v, z), (w, t), (w, z), (x, z)$ y (x, t) ; la simetría del dibujo (el eje vertical, que intercambia $u \leftrightarrow v, t \leftrightarrow w, z \leftrightarrow x$ y fija c, y) identifica (u, x) con (v, z) y (w, z) con (x, t) , así que quedan cuatro parejas:

$$\begin{array}{ll} u, x: & uvx; \quad ucx; \quad uwz; \quad uzyx \\ w, t: & wvt; \quad wct; \quad wuzt; \quad wxyt \\ w, z: & wuz; \quad wcx; \quad wvtz; \quad wxyz \\ x, z: & xyz; \quad xcz; \quad xwuz; \quad xvtz \end{array}$$

En cada fila los cuatro arcos solo comparten los extremos (se comprueba que ningún vértice interior se repite). Luego $\kappa \geq 4$ y $\kappa = \lambda = \delta = 4$. Las cuatro filas cubren, salvo simetría, todas las parejas no adyacentes, y esa es la comprobación completa. ■

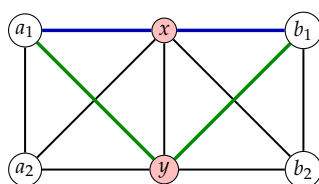
Dónde se falla. En tres sitios, y los tres cuestan el apartado entero.

- *Parejas olvidadas.* Menger pide arcos para *todas* las parejas no adyacentes, que en 4.10 son seis. Probar una sola pareja no prueba nada, salvo que la simetría la lleve a las demás.

- *Simetrías que no lo son.* Una simetría del dibujo solo vale si lleva aristas en aristas. La de 4.10 lo hace. En el ciclo cambia vw por tu , wx por zt y xy por yz , y deja uv en su sitio. En las cuerdas cambia uw por vt , uz por vx , uy por vy y wy por ty . Y las siete aristas del centro van a aristas del centro, porque c queda fijo. Hay que comprobarlo antes de usarla.
- *Arcos que se tocan.* Cuatro arcos que comparten un vértice interior no son independientes. En la fila de u, x , cambiar $u z y x$ por $u c y x$ haría pasar dos arcos por c .

Y una de lectura: Tutte da $\kappa \geq 3$ y nada más. Un grafo que es una rueda con aristas añadidas puede tener $\kappa = 3$ o más, y solo Menger, o un corte, lo decide.

Ejemplo (cuando las cotas no se juntan: buscar el corte). Dos copias de K_4 que comparten una arista xy , con vértices a_1, a_2 en una copia y b_1, b_2 en la otra. Los grados son 3 en los a_i y los b_i , y 5 en x e y , así que $\delta = 3$ y Whitney da $\kappa \leq \lambda \leq 3$. Chartrand se aplica, porque $p = 6$ y $\delta = 3 \geq \lfloor 6/2 \rfloor$, y da $\lambda = 3$.



Para κ se intenta Menger entre a_1 y b_1 , que no son vecinos. Dos arcos salen enseguida, $a_1 x b_1$ y $a_1 y b_1$. El tercero tendría que salir por a_2 , el último vecino libre de a_1 , pero los vecinos de a_2 son a_1, x e y , y x e y ya están usados. El intento se atasca, y *el atasco es el corte*: todo lo que sale de $\{a_1, a_2\}$ pasa por x o por y , y quitando esos dos vértices el grafo se parte. Así que $\kappa \leq 2$. Y $\kappa \geq 2$, porque el grafo es hamiltoniano, con el ciclo $a_1 a_2 x b_1 b_2 y a_1$. Resultado: $\kappa = 2 < \lambda = \delta = 3$.

La técnica que queda es esta. Cuando Menger no encuentra δ arcos, se mira dónde se atascan los intentos. Suele haber un grupito de vértices, aquí $\{a_1, a_2\}$, cuyos vecinos de fuera son menos que δ , y esos vecinos de fuera son el corte. Un solo vértice nunca da un corte así, porque tiene al menos δ vecinos. Dos vértices adyacentes con muchos vecinos comunes sí pueden darlo: a_1 y a_2 tienen tres vecinos cada uno, pero entre los dos solo dos de fuera.

REPASO INTERCALADO: CAPÍTULO 4

1. κ : mínimo de vértices que desconectan o trivializan; λ : mínimo de aristas. $\kappa = 1$ es punto de corte (salvo K_2), $\lambda = 1$ es puente.
2. Whitney: $\kappa \leq \lambda \leq \delta$. Chartrand–Harary: cualquier terna $1 \leq a \leq b \leq c$ se realiza (dos completos unidos por b aristas que salen de a vértices de una de las copias).
3. C_n : 2, 2, 2. K_n : $n - 1$. $K_{m,n}$: $\min\{m, n\}$. W_n : 3. Árboles no triviales: 1.
4. Chartrand: $\delta \geq \lfloor p/2 \rfloor \Rightarrow \lambda = \delta$ (no κ). Harary: $\kappa \leq \lfloor 2q/p \rfloor$. n -conexo $\Rightarrow q \geq pn/2$.
5. 2-conexo = bloque con ≥ 3 vértices = todo par en un ciclo común. Hamiltoniano $\Rightarrow$ 2-conexo. Dirac ($n \geq 2$): n -conexo $\Rightarrow$ cualesquiera n vértices en un ciclo (no recíproco: C_p). Tutte: 3-conexo = rueda más aristas y explosiones.
6. Menger, para $u \neq v$ no adyacentes: $\kappa(u, v)$ = máximo de arcos independientes. En un grafo conexo no completo: n -conexo $\Leftrightarrow$ al menos n arcos independientes entre cada par no adyacente. Versión por aristas con λ .
7. $\kappa(G + H) = \min\{|V(G)| + \kappa(H), |V(H)| + \kappa(G)\}$; $\kappa(G + v) = \kappa(G) + 1$; si G es n -conexo ($n \geq 1$), $G - a$ es $(n - 1)$ -conexo; cúbicos: $\kappa = \lambda$.

Planaridad

ANTES DE LEER

Tres preguntas antes de empezar.

1. Tres casas y tres pozos; hay que unir cada casa con cada pozo por un camino, y los caminos no pueden cruzarse. ¿Se puede? Inténtalo en un papel antes de leer nada.
2. Un cubo tiene 8 vértices, 12 aristas y 6 caras; un tetraedro, 4, 6 y 4. Calcula vértices menos aristas más caras en los dos. ¿Casualidad?
3. Si un grafo se puede dibujar sin cruces, ¿cuántas aristas puede tener como máximo con n vértices? ¿Y si además no tiene triángulos?

Las respuestas están en las secciones 5.1, 5.2 y 5.3. Este capítulo usa del anterior la conectividad (2-conexo, κ) y de los anteriores los árboles, los bipartitos y el apretón de manos.

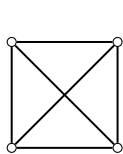
5.1 Grafos planares y planos

LA PREGUNTA

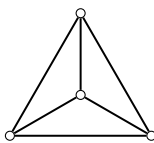
Henry Dudeney incluyó en *Amusements in Mathematics* (1917) el problema de las tres casas y los tres servicios: agua, gas y electricidad tienen que llegar a cada casa por conducciones que no se crucen ni atraviesen otra casa. Lo presentaba como un acertijo antiguo, y bajo esas condiciones *no tiene solución*. Un siglo después la misma pregunta la hace un ingeniero que diseña una placa de circuito impreso de una sola capa: las pistas no pueden cruzarse. ¿Qué grafos se pueden dibujar en un plano sin que dos aristas se corten, y cómo se demuestra que uno no se puede?

Definición (inmersión; grafo planar; grafo plano). Un grafo G admite una **inmersión** en una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ si se puede representar en S con vértices distintos en puntos distintos y aristas que sean arcos cuyos interiores no contengan vértices ni se toquen entre sí: solo coinciden en los extremos que comparten. Si S es el plano, se dice que G es **planar**, y a cada representación concreta sin cruces se la llama un **grafo plano** asociado a G .

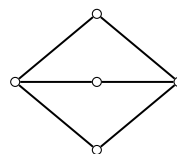
La distinción entre *planar* y *plano* importa, y mucho. Planar es una propiedad del grafo: existe algún dibujo sin cruces. Plano es un dibujo concreto. Un grafo planar tiene infinitos grafos planos asociados, y un dibujo con cruces de un grafo planar no lo hace menos planar: K_4 dibujado como un cuadrado con sus dos diagonales tiene un cruce, y K_4 es planar, porque se puede dibujar con un vértice dentro del triángulo de los otros tres.



K_4 con un cruce



K_4 plano



$K_{2,3}$ plano

5.1.1 Primeros ejemplos

Ejemplo (arcos y ciclos). El camino P_n es planar: se marcan n puntos sobre un segmento. El ciclo C_n es planar: se marcan n puntos sobre una circunferencia y se recorre en un sentido.

Proposición. Todo árbol es planar.

La idea, en una frase: un árbol se construye añadiendo hojas: cada hoja nueva solo necesita unirse a un vértice ya dibujado, de modo que se puede colocar muy cerca de él sin cruzar las aristas anteriores. Se dan dos vías porque las dos reaparecen después: la inducción quitando hojas y el dibujo por niveles.

Primera vía, por inducción, como en el Tema 5: se cuelga una hoja en el hueco que siempre hay (el núcleo de la prueba). Lo que hace funcionar el argumento es que a un dibujo plano hecho con segmentos se le puede añadir un segmento corto junto a cualquier vértice: basta elegir una dirección que no coincida con las aristas incidentes y una longitud que no alcance el resto del dibujo. Probamos por inducción esta versión

con segmentos. Sea n el número de vértices. Si $n = 1$, el grafo trivial es planar. Sea T un árbol con $n + 1$ vértices y supóngase el resultado para árboles con $\leq n$. Sea u una hoja de T (existe, sección 2.8) y uv su arista. $T' = T - u$ es un árbol con n vértices, y por hipótesis tiene un dibujo plano con segmentos. En ese dibujo se añade, junto a v , un segmento corto que no toque nada más y se pone u en su extremo: es un dibujo plano de T .

Segunda vía, por niveles, como en el resumen: la unicidad del camino a la raíz impide los cruces. Se enraíza T en un vértice v y se dibujan tantas rectas horizontales como niveles: v en la de arriba, sus vecinos en la siguiente, los vecinos de estos en la tercera, y así, colocando los hijos de cada vértice agrupados debajo de él. Como en un árbol cada vértice tiene un único camino hasta la raíz, cada vértice de nivel k tiene exactamente un vecino en el nivel $k - 1$, y las aristas entre dos niveles consecutivos no se cruzan si se respeta el orden. ■

Proposición. Todo grafo admite una inmersión en $\mathbb{R}^3$.

La idea, en una frase: en el espacio sobra sitio. Se abre un libro con tantas páginas como aristas, se ponen todos los vértices sobre el lomo y se dibuja cada arista en su propia página: dos aristas nunca coinciden salvo en el lomo, y el lomo son los vértices. La consecuencia que importa es negativa: **la planaridad es un fenómeno exclusivamente bidimensional**, y por eso el resto del capítulo tiene contenido.

Se toma un haz de planos que pasan por una misma recta r , tantos como aristas tiene el grafo. Se representan todos los vértices como puntos distintos de r y cada arista como un arco dentro de un plano distinto del haz, uniendo sus dos extremos y sin tocar r en ningún otro punto (por ejemplo, una semicircunferencia cuyo diámetro está en r). Dos aristas están en planos distintos que solo comparten la recta r , luego solo pueden tocarse en puntos de r , es decir, en vértices. ■

Proposición. Un grafo es planar si y solo si admite una inmersión en la esfera S^2 .

La idea, en una frase: la esfera menos un punto es el plano, y la traducción entre los dos es la proyección estereográfica, que respeta los cruces porque es biyectiva y continua en los dos sentidos. **Lo único delicado es el punto que se quita:** hay que asegurarse de que el dibujo no pase por él, y eso se consigue girando la esfera. Este resultado no es un tecnicismo: es lo que permite, más adelante, elegir qué cara del dibujo plano hace de cara exterior, porque en la esfera ninguna cara es la de fuera.

La proyección estereográfica desde el polo norte N es la biyección continua, con inversa continua, $\pi : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que lleva cada punto P de la esfera al punto en que la recta NP corta al plano del ecuador (o al plano tangente en el polo sur; da igual). Un dibujo sin cruces en el plano se lleva por π^{-1} a un dibujo sin cruces en la esfera que evita N . Recíprocamente, un dibujo sin cruces en la esfera se puede mover un poco (girando la esfera) para que no pase por N , y entonces π lo lleva a un dibujo sin cruces del plano. ■

Corolario. El grafo de vértices y aristas de un poliedro convexo es planar.

Se proyecta el poliedro desde un punto interior sobre una esfera que lo contenga: los vértices van a puntos y las aristas a arcos que no se cruzan. Por la proposición, el grafo es planar. (De aquí que los poliedros regulares aparezcan en todos los ejercicios de este capítulo: son grafos planos con todas las caras iguales.) ■

LA IDEA: POR QUÉ LA ESFERA Y EL PLANO SON LO MISMO AQUÍ

La esfera es el plano más un punto en el infinito. Un dibujo sin cruces no se entera de dónde está ese punto, así que elegir qué cara es «la exterior» es solo elegir por dónde se pincha la esfera para aplanarla. Eso explica un fenómeno que se verá en seguida: en un grafo plano cualquier cara puede hacerse exterior redibujando. La distinción entre acotada y no acotada depende de esa elección, no del grafo abstracto.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: EXIGIR ARISTAS RECTAS

La alternativa. Definir «planar» pidiendo un dibujo sin cruces con todas las aristas *segmentos rectos*, en vez de arcos cualesquiera.

Su ventaja. Un dibujo con segmentos se describe con las coordenadas de los vértices y nada más; es lo que hacen los programas de dibujo de grafos.

Por qué no cambia nada, y por qué no se adopta. Un teorema de Fáry (1948) asegura que todo grafo planar simple admite un dibujo sin cruces con aristas rectas, así que las dos definiciones dan la misma clase de grafos. Pero demostrarlo cuesta, y con arcos cualesquiera es mucho más fácil deformar dibujos, añadir una arista «pegada» a otras dos (como en el ejercicio 5.2) o mover un vértice al infinito. La definición con arcos es la flexible; la de segmentos es un teorema que se cobra después.

Ejemplo (las tres casas, a mano: un hexágono y tres diagonales). **El problema.** Se quiere ver que $K_{3,3}$ no tiene ningún dibujo plano. Probar dibujos no sirve: que diez intentos fallen no dice nada del undécimo. Hace falta un argumento que valga para *todos* los dibujos a la vez, y el más directo cabe en un papel.

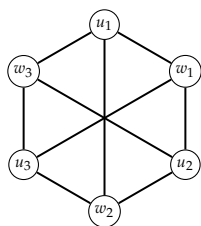
Paso 1: un ciclo que pasa por los seis vértices. Sean u_1, u_2, u_3 las casas y w_1, w_2, w_3 los pozos. Las seis aristas $u_1w_1, w_1u_2, u_2w_2, w_2u_3, u_3w_3, w_3u_1$ forman un ciclo Z de longitud 6 que alterna casa y pozo. Quedan tres aristas, u_1w_2, u_2w_3 y u_3w_1 , y cada una une dos vértices *opuestos* del hexágono: $K_{3,3}$ es un hexágono con sus tres diagonales largas (dibujo de la izquierda).

Paso 2: cada diagonal va entera por dentro o entera por fuera. En un dibujo plano de $K_{3,3}$, el ciclo Z es una curva cerrada sin cruces y parte el plano en dos regiones, un dentro y un fuera. Es el hecho (ii) de la sección siguiente, una versión del teorema de la curva de Jordan, que aquí se admite. Una diagonal une dos puntos de Z y no puede cortar Z por el camino, así que no cambia de región.

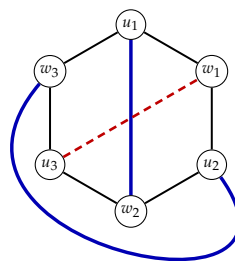
Paso 3: dos diagonales no caben del mismo lado (el núcleo). Recorriendo el hexágono, los extremos de u_1w_2 y de u_2w_3 aparecen alternados: u_1, u_2, w_2, w_3 . Se dice que las dos cuerdas están **entrelazadas**. Si u_1w_2 va por dentro, parte el interior de Z en dos trozos; u_2 está en el borde de uno y w_3 en el borde del otro, y otra cuerda interior de u_2 a w_3 tendría que cortar a u_1w_2 para pasar. Por fuera ocurre lo mismo. Y las tres parejas de diagonales están entrelazadas: cada diagonal larga deja dos vértices del hexágono a cada lado, y cualquier otra

diagonal tiene un extremo a cada lado.

Paso 4: el palomar cierra. Hay tres diagonales y solo dos lados. Por el principio del palomar (sección 1.2), dos van del mismo lado, y se cortan. Ningún dibujo de $K_{3,3}$ carece de cruces.



$K_{3,3}$: hexágono y tres diagonales



u_1w_2 dentro, u_2w_3 fuera: u_3w_1 corta a una de las dos vaya por donde vaya

Con K_5 , lo mismo. El pentágono 1 2 3 4 5 es un ciclo por los cinco vértices, y las otras cinco aristas son sus diagonales: 13, 14, 24, 25 y 35. Dos diagonales sin extremo común están entrelazadas, y así cada una tiene que ir del lado contrario de otras dos. Esas incompatibilidades forman el ciclo 13–24–35–14–25–13, de longitud cinco. Repartir un ciclo impar en dos lados, alternando, es tan imposible como colorear un pentágono con dos colores: tampoco K_5 es planar.

Qué se ha ganado. Un certificado de imposibilidad que vale para todos los dibujos a la vez: un ciclo, unas cuerdas entrelazadas y el palomar. Tiene dos precios: se apoya en el teorema de la curva de Jordan, y hay que dar con el ciclo adecuado. La sección 5.3 da otra prueba que solo cuenta aristas y vértices. La idea de las cuerdas entrelazadas vuelve en la sección 5.4, donde sirve para encontrar $K_{3,3}$ dentro de un grafo.

5.2 Caras de un grafo planar y fórmula de Euler

LA PREGUNTA

En 1750 Euler escribió a Goldbach sobre una relación entre los elementos de un poliedro: vértices menos aristas más caras vale dos para el cubo, el icosaedro y, en general, los poliedros convexos. Es un número que no depende de las longitudes, ni de los ángulos, ni de cómo se deforme el sólido: solo de cómo están pegadas las piezas. ¿Por qué sale siempre dos, y qué es lo que ese número está midiendo?

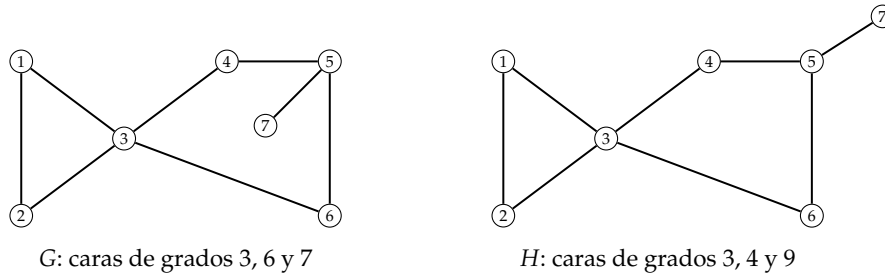
Definición (regiones). Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto acotado. Dos puntos $P, Q \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ están en la misma **región** de $\mathbb{R}^2 \setminus A$ si se pueden unir por una poligonal contenida en $\mathbb{R}^2 \setminus A$. Es una relación de equivalencia, y sus clases son las regiones de $\mathbb{R}^2 \setminus A$.

Los hechos siguientes sobre el plano se admiten sin demostración; son versiones del teorema de la curva de Jordan, que en Geometría y topología de superficies se trata con más cuidado.

- (i) Si H es el dibujo plano de un arco, $\mathbb{R}^2 \setminus H$ tiene una sola región; lo mismo si H es el dibujo plano de un árbol.
- (ii) Si H es el dibujo plano de un ciclo, $\mathbb{R}^2 \setminus H$ tiene exactamente dos regiones, una acotada y otra no; en general, el dibujo plano de un grafo con ciclos parte el plano en más de una región, y exactamente una de ellas es no acotada.

Definición (caras). Sea G un grafo plano. Las **caras** de G son las regiones de $\mathbb{R}^2 \setminus G$. La única cara no acotada es la **cara exterior**. El **borde** de una cara R , ∂R , es el subgrafo de G formado por los vértices y aristas que tienen puntos de R tan cerca como se quiera. El **grado** de R cuenta los lados de aristas que la bordean: una arista aporta 1 si solo uno de sus lados da a R , y 2 si los dos dan a R . Si G es conexo, equivale a la menor longitud de un recorrido cerrado en ∂R que pase por todas sus aristas (algunas pueden recorrerse dos veces). Si G es desconexo, se suman los recorridos de los distintos bordes de R ; un vértice aislado aporta 0.

Ejemplo. Sea G el grafo con un triángulo 1 2 3, un cuadrado 3 4 5 6 pegado por el vértice 3, y una arista 5 7 colgando de 5: 7 vértices y 8 aristas. Se dibuja de dos maneras: con la arista 57 dentro del cuadrado y con la arista fuera.



En G la cara del triángulo tiene grado 3; la del cuadrado tiene borde el cuadrado más la arista colgante, y el recorrido cerrado más corto que pasa por todas sus aristas recorre la colgante dos veces (ida y vuelta): grado $4 + 2 = 6$; la exterior tiene por borde los siete lados exteriores, grado 7. En H los grados son 3, 4 y $4 + 3 + 2 = 9$. Los bordes y los grados cambian de un dibujo a otro; el número de caras, 3, no. Y en los dos casos la suma de los grados es $16 = 2 \cdot 8$.

Observación. Los dos lados de una arista a pueden pertenecer a caras distintas o a la misma cara (como la colgante del ejemplo). Si $m_a \in \{1, 2\}$ es el número de caras que tienen a a en su borde, entonces $\text{grado}(R) = \sum_{a \subseteq \partial R} (3 - m_a)$: cada arista cuenta 1 si separa a R de otra cara y 2 si tiene a R a los dos lados.

Lema (apretón de manos para caras). Si G es un grafo plano con q aristas, entonces $2q = \sum_{R \text{ cara}} \text{grado}(R)$.

Cada arista tiene dos lados. Si sus dos lados dan a caras distintas, aporta 1 al grado de cada una; si dan a la misma cara, aporta 2 al grado de esa. En ambos casos aporta 2 a la suma. ■

Proposición (sin demostración). Si G es planar y 2-conexo, toda cara de cualquier grafo plano asociado a G tiene por borde un ciclo.

Es la versión planar de «2-conexo equivale a que todo par de vértices esté en un ciclo» (sección 4.5). En el ejemplo anterior falla, porque 3 es punto de corte: hay caras cuyo borde no es un ciclo. Este es el resultado al que el descriptor oficial llama «planaridad y conectividad».

Teorema (fórmula de Euler). Sea G un grafo plano y conexo con V vértices, A aristas y C caras. Entonces $V - A + C = 2$.

LA IDEA: CADA ARISTA NUEVA O CONECTA O ENCIERRA

La idea. La fórmula se puede demostrar siguiendo cómo cambian los tres recuentos al simplificar el dibujo. Si quitamos una hoja, bajan V y A ; si quitamos una arista de un ciclo, bajan A y C . En ambos casos $V - A + C$ se conserva. La imagen siguiente recorre el proceso al revés y permite ver también qué ocurre con las componentes.

La imagen. Constrúyase el grafo al revés, añadiendo aristas de una en una sobre sus V vértices sueltos. Cada arista nueva hace exactamente una de dos cosas, nunca las dos y nunca ninguna:

- une dos trozos que estaban separados —entonces A sube uno y no aparece ninguna cara nueva, pero había una componente de más que ahora no está—;
- o une dos vértices ya conectados —entonces cierra un ciclo, y un ciclo cerrado en el plano *encierra* una región: A sube uno y C sube uno—.

En el primer caso $V - A + C$ *baja uno*, igual que el número de componentes; en el segundo no cambia. Se empieza con V vértices aislados, 0 aristas y 1 cara, de modo que el valor inicial es $V + 1$. Para acabar con una componente hacen falta exactamente $V - 1$ pasos del primer tipo: el valor final es $(V + 1) - (V - 1) = 2$.

El corazón en una frase: *una arista o conecta o encierra*, y la disyuntiva es exclusiva porque estamos en el plano —es aquí, y solo aquí, donde se usa que el dibujo es plano: un ciclo dibujado en el plano separa el dentro del fuera—. La demostración formal recorre el mismo camino de vuelta: quita una hoja (caso «conecta») o quita una arista de un ciclo (caso «encierra»).

La imagen, con números: K_4 *arista a arista*. Se parte de los cuatro vértices del dibujo plano de K_4 de la sección 5.1: el triángulo 1 2 3 con el vértice 4 dentro. Se añaden primero las tres aristas que salen de 4 y después los tres lados del triángulo:

arista añadida	qué hace	A	C	componentes	$V - A + C$
ninguna	—	0	1	4	$4 - 0 + 1 = 5$
41	conecta	1	1	3	4
42	conecta	2	1	2	3
43	conecta	3	1	1	2
12	encierra el triángulo 1 4 2	4	2	1	2
23	encierra el triángulo 2 4 3	5	3	1	2
31	parte en dos la cara exterior	6	4	1	2

$V = 4$ en todas las filas. Mientras las aristas conectan, $V - A + C$ baja de uno en uno, al mismo paso que el número de componentes. Cuando empiezan a encerrar, no se mueve. La última columna vale siempre *componentes más uno*, que es justo la versión con varias componentes que aparece tras la demostración, y al final queda $4 - 6 + 4 = 2$. La última arista parece no encerrar nada nuevo, pero parte la cara exterior en dos: el triángulo 3 4 1 y la nueva cara exterior. Eso es lo que significa «encerrar» en general: la arista nueva une dos vértices del borde de una misma cara y la divide en dos.

Paso 1: inducción sobre el número de aristas, con el grafo trivial como base. Por inducción sobre $A \geq 0$. Si $A = 0$, G es el grafo trivial: $V = 1$, $C = 1$, y $1 - 0 + 1 = 2$. Sea $A = n + 1$ y supóngase la fórmula para grafos planos conexos con $\leq n$ aristas.

Paso 2, caso «conecta»: si G es un árbol, se quita una hoja y bajan V y A a la vez. Entonces $C = 1$ por el hecho (i). Se toma una hoja v (existe) y $G' = G - v$, que es un árbol plano con $V' = V - 1$, $A' = A - 1 = n$ y $C' = 1 = C$. Por hipótesis de inducción $2 = V' - A' + C' = (V - 1) - (A - 1) + C = V - A + C$.

Paso 3, caso «encierra»: si hay un ciclo, se quita una de sus aristas y bajan A y C a la vez (el núcleo de la prueba). Es el único paso que usa que el dibujo es plano, y lo usa a través del teorema de la curva de Jordan: los dos lados de una arista de un ciclo pertenecen a caras distintas porque el ciclo separa el plano. Sin eso, quitar la arista podría no fundir nada. En una descomposición del toro en caras que sean discos se obtiene $V - A + C = 0$; exigir caras disco importa, pues un dibujo cualquiera en el toro no tiene por qué dar una descomposición de ese tipo. Sea Z un ciclo de G , a una arista de Z y $G' = G - a$, conexo porque a no es puente, con $V' = V$ y $A' = A - 1 = n$. Como el ciclo Z parte el plano en dos regiones (hecho (ii)), los dos lados de a pertenecen a caras distintas R y S de G : una dentro de Z y otra fuera. Al quitar a , R y S se funden en una sola cara de G' , y las demás caras no cambian: $C' = C - 1$. Por hipótesis de inducción $2 = V' - A' + C' = V - (A - 1) + (C - 1) = V - A + C$. ■

Lo que hay que llevarse. La inducción se hace sobre las aristas. Si el grafo es un árbol, se quita una hoja y bajan V y A a la vez; si tiene un ciclo, se quita una arista del ciclo y bajan A y C a la vez. El plano interviene una sola vez: un ciclo separa un dentro de un fuera, así que los dos lados de una arista de un ciclo son caras distintas y al quitarla se funden.

Observación (la versión con varias componentes). El mismo recuento de la caja anterior, llevado hasta el final sin exigir conexión, da $V - A + C = k + 1$ con k componentes: se empieza con valor $V + 1$, y exactamente $V - k$ aristas unen componentes distintas y lo reducen en uno. Las demás aristas no lo cambian. Queda $(V + 1) - (V - k) = k + 1$. Esa cuenta es también la demostración del corolario siguiente.

Corolario. Si G es un grafo plano con V vértices, A aristas, C caras y k componentes conexas, entonces $V - A + C = k + 1$.

Si $k = 0$, el grafo es vacío y $V = A = 0$, $C = 1$. Para $k \geq 1$, se añaden $k - 1$ aristas que unan las componentes sin cruces. En cada paso se unen dos componentes que bordean una misma cara, dibujando el arco por ella; mientras haya varias componentes existe una cara así. No tiene que ser la exterior: una componente puede estar encerrada dentro de otra. El grafo resultante es plano y conexo, con $A + k - 1$ aristas y las mismas C caras (cada arista añadida une dos trozos ya separados y no cierra ningún ciclo nuevo). Por Euler, $V - (A + k - 1) + C = 2$. ■

Corolario. Dos grafos planos asociados al mismo grafo planar tienen el mismo número de caras.

Tienen los mismos V y A (son isomorfos al mismo grafo), luego el mismo $C = 2 - V + A$ por la fórmula de Euler aplicada a cada uno (o $k + 1 - V + A$ si hay k componentes). ■

DE DÓNDE VIENE: DE LOS POLIEDROS A CAUCHY, Y DE AHÍ A LA TOPOLOGÍA

Euler publicó la fórmula en 1758 y propuso una demostración con lagunas. Cauchy publicó otra demostración en 1813, con una idea afín: se proyecta el poliedro sobre el plano quitando una cara, y se van eliminando aristas. Durante el siglo XIX salieron a la luz «poliedros» que no cumplen la fórmula (con agujeros, o con caras que se atraviesan), y el esfuerzo por decidir qué es un poliedro de verdad dio lugar a la característica de Euler–Poincaré, que es el número $V - A + C$ de cualquier superficie triangulada. En Geometría y topología de superficies ese número junto con la orientabilidad clasifica las superficies compactas, conexas y sin borde; si hay borde, hace falta también su número de componentes. Aparece además en Gauss–Bonnet. El «2» de la esfera es el primer caso.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: DEMOSTRAR EULER QUITANDO VÉRTICES

La alternativa. Hacer la inducción sobre los vértices: quitar un vértice con todas sus aristas y ver cómo cambian A y C .

Su atractivo. Parece más natural, porque los poliedros «se construyen» añadiendo vértices.

Qué la hunde. Que quitar un vértice de grado d quita d aristas y funde un número de caras que depende de la forma del dibujo, y contarlas obliga a distinguir casos que se acumulan. Quitar una arista cambia exactamente una cosa en cada caso (o una hoja, o una cara), y por eso la inducción sobre aristas es la que se escribe en tres líneas. Elegir bien sobre qué se hace la inducción es la mitad de una demostración.

5.3 Consecuencias de la fórmula de Euler

LA PREGUNTA

El diseñador de la placa de circuito quiere saber, antes de intentar nada, cuántas pistas caben en una placa de una capa con n componentes: si le piden más conexiones de las que caben, no hay dibujo que valga y hay que añadir una capa. La fórmula de Euler da ese límite con una cuenta de una línea, y de paso decide el acertijo de las tres casas: no se puede, y no porque nadie haya dado con el dibujo, sino porque hay una arista de más. ¿Cuál es el límite y por qué basta contar para saber que un dibujo es imposible?

Definición (planar maximal). Un grafo simple y planar G es **maximal** si no se le puede añadir ninguna arista (entre vértices no adyacentes) sin que deje de ser planar.

Corolario (de la fórmula de Euler). Sea G un grafo simple, conexo y planar, con V vértices y A aristas.

- (a) Si G es planar maximal y $V \geq 3$, entonces $A = 3V - 6$.
- (b) Si $V \geq 3$, entonces $A \leq 3V - 6$.
- (c) Si $V \geq 3$ y G no tiene triángulos, entonces $A \leq 2V - 4$.

LA IDEA: LAS CARAS TAMBIÉN SE PUEDEN CONTAR, Y SON TRIANGULITOS

La idea, en una línea: cada cara necesita al menos tres aristas y cada arista sirve a lo sumo a dos caras; esa doble contabilidad, metida en la fórmula de Euler, expulsa la variable C y deja una desigualdad entre A y V sola.

La imagen. Un dibujo plano es un embaldosado. Cada baldosa (cara) tiene un borde

de al menos tres lados, porque con dos aristas no se cierra una región en un grafo simple. Y cada arista es medianera: sirve de lado a dos baldosas como mucho. Si se cuentan «lados de baldosa» por los dos métodos, sale $2A \geq 3C$. Ahí está el techo: no se pueden meter demasiadas aristas sin quedarse sin sitio donde poner las caras que obligan a existir.

Y la imagen predice cada apartado. Si las baldosas son todas triángulos —el embaldosado más apretado posible— la desigualdad es igualdad y sale (a). Si no se exige nada, sale (b). Y si se prohíben los triángulos, cada baldosa necesita cuatro lados, $2A \geq 4C$, y el techo baja a $2V - 4$: eso es (c), y es lo que hunde a $K_{3,3}$.

El corazón en una frase: *el número de caras es un intermediario que se puede eliminar*, y al eliminarlo la fórmula de Euler se convierte en una cota sobre el número de aristas que se comprueba con dos multiplicaciones.

Paso 1, (a): en un planar maximal todas las caras son triángulos (el núcleo de la prueba). Lo que hay que demostrar de verdad es esto; una vez sabido, el resto es aritmética. (a) Por el ejercicio 5.2, un planar maximal con $V \geq 3$ es 2-conexo, luego en cualquier grafo plano asociado toda cara tiene por borde un ciclo. Y todos esos ciclos son triángulos: si una cara tuviera por borde un ciclo de longitud ≥ 4 , se toman cuatro vértices a, b, c, d en ese orden sobre el borde. Las dos aristas ac y bd no pueden existir ambas: tendrían que estar fuera de esa cara y, al alternarse sus extremos, se cruzarían (por Jordan, o viéndolo en la esfera). Por tanto, al menos una falta y se puede dibujar dentro de la cara sin cruces. Con la diagonal el grafo seguiría siendo plano y sería mayor, contra la maximalidad. Así todas las caras tienen grado 3, y por el apretón de manos para caras $2A = 3C$. Sustituyendo $C = 2A/3$ en $V - A + C = 2$ queda $A = 3V - 6$.

Paso 2, (b): todo grafo planar cabe dentro de uno maximal. Se añaden aristas a G hasta llegar a un planar maximal G' con los mismos vértices. Por (a), $A \leq A' = 3V - 6$.

Paso 3, (c): sin triángulos, cada baldosa necesita cuatro lados y el techo baja. Sea H un grafo plano asociado a G . Cada cara R tiene grado ≥ 4 : su borde contiene algún ciclo (si G tiene ciclos; si es un árbol con $V \geq 3$, $A = V - 1 \leq 2V - 4$ directamente), y como no hay triángulos, todo ciclo tiene longitud ≥ 4 , y el recorrido cerrado que da el grado lo recorre entero. Luego $2A = \sum \text{grado}(R) \geq 4C$, es decir, $C \leq A/2$, y de $V - A + C = 2$ sale $2 \leq V - A + A/2$, o sea $A \leq 2V - 4$. ■

Otra vía ((b) directamente por grados de caras). Sin pasar por los maximales: en un grafo plano simple y conexo con $V \geq 3$ toda cara tiene grado ≥ 3 (un grado 1 o 2 exigiría un lazo o dos aristas paralelas, o que el grafo fuera una sola arista). Luego $2A \geq 3C$ y, con Euler, $2 = V - A + C \leq V - A + 2A/3$, de donde $A \leq 3V - 6$. Es la demostración más corta de las dos, porque no depende del ejercicio de los planares maximales.

Observación. La hipótesis $V \geq 3$ hace falta: con $V = 1$ es $A = 0$ y $3V - 6 = -3$; con $V = 2$ es $A = 1$ y $3V - 6 = 0$.

Las dos cotas, leídas en palabras. Se escribe $3V - 6 = 3 + 3(V - 3)$. Un triángulo tiene tres aristas, y un vértice nuevo colocado dentro de una cara triangular y unido a sus tres esquinas añade exactamente tres aristas y deja todas las caras triangulares. Así se fabrican

planares maximales de cualquier tamaño, y el apartado (b) dice que no se puede hacer mejor: *cada vértice que se añade paga como mucho tres aristas*. Del mismo modo, $2V - 4 = 4 + 2(V - 4)$. Sin triángulos se parte de un cuadrado, y un vértice nuevo dentro de una cara cuadrada, unido a dos esquinas opuestas, la parte en dos cuadrados y añade dos aristas. Si se elige siempre la misma pareja de esquinas sale $K_{2,V-2}$, con $2(V - 2) = 2V - 4$ aristas justas.

Qué se ha ganado: los planares tienen pocas aristas. El número de aristas posibles, $\binom{V}{2}$, crece como $V^2/2$; el techo $3V - 6$ crece de forma lineal. La tabla muestra dónde se separan:

V	3	4	5	6	7	8
$\binom{V}{2}$, aristas de K_V	3	6	10	15	21	28
techo $3V - 6$	3	6	9	12	15	18

Hasta $V = 4$ el completo cabe justo, y es planar maximal; el primero que no cabe es K_5 , con una arista de más. Leído en grados, con el apretón de manos: el grado medio de un planar simple y conexo con $V \geq 3$ es $2A/V \leq (6V - 12)/V < 6$. Luego **todo grafo planar simple tiene un vértice de grado a lo sumo 5, y a lo sumo 3 si no tiene triángulos**, porque entonces $2A/V \leq (4V - 8)/V < 4$. Si el grafo no es conexo, se aplica a una de sus componentes; y una componente con menos de tres vértices tiene grados 0 o 1. Esa es la forma en que el capítulo de coloración usa la fórmula de Euler (sección 6.2).

5.3.1 La cota del contorno

Los dos apartados anteriores, $A \leq 3V - 6$ y $A \leq 2V - 4$, no son dos resultados distintos: son el mismo con dos valores de una constante. Prohibir triángulos sirvió para elevar de 3 a 4 el número mínimo de lados de una cara, y solo eso. La pregunta natural es qué pasa si el ciclo más corto es aún más largo, y la respuesta es que la cota sigue bajando, con una fórmula única que contiene a las dos como casos particulares.

Teorema (cota del contorno). • **CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN** Sea G un grafo simple, conexo y planar, con p vértices, q aristas y al menos un ciclo, y sea $g = g(G) \geq 3$ su contorno. Entonces

$$q \leq \frac{g}{g-2} (p-2).$$

LA IDEA: CUANTO MÁS LARGO ES EL CICLO MÁS CORTO, MÁS CARAS SE PAGAN POR ARISTA

La idea, en una línea: *cada cara necesita al menos g aristas y cada arista sirve a lo sumo a dos caras*, así que el número de caras está acotado por $2q/g$; metiendo esa cota en la fórmula de Euler desaparece el número de caras y queda una desigualdad entre q y p sola. Es exactamente el argumento del embaldosado de los corolarios anteriores, con g en lugar de 3 o de 4.

Por qué la cota mejora al crecer g . La función $g \mapsto \frac{g}{g-2}$ es *decreciente*: vale 3 en $g = 3$, 2 en $g = 4$, $\frac{5}{3}$ en $g = 5$, $\frac{3}{2}$ en $g = 6$, y tiende a 1. Dicho en palabras: un grafo sin ciclos cortos es un grafo con caras grandes, y las caras grandes se comen muchas aristas cada una, de modo que caben menos aristas en total. La prohibición de triángulos no era una hipótesis especial; era el primer escalón de esta escalera.

El corazón en una frase: *el número de caras es un intermediario que se elimina*, y lo único que cambia de un caso a otro es cuántas aristas cuesta como mínimo cerrar una cara.

Paso 1: toda cara tiene grado al menos g (el núcleo de la prueba). Aquí entra la longitud del ciclo más corto. Sea H un grafo plano asociado a G y sea R una cara de H . Su borde contiene algún ciclo, porque G es conexo y tiene algún ciclo; ese ciclo tiene longitud $\geq g$ por definición de contorno, y el recorrido cerrado que define el grado de R lo recorre entero. Luego $\text{grado}(R) \geq g$ para toda cara R .

Paso 2: el doble recuento de las incidencias arista-cara. Por el lema del apretón de manos para caras, $2q = \sum_R \text{grado}(R) \geq gC$, donde C es el número de caras. Luego

$$C \leq \frac{2q}{g}.$$

Paso 3: se elimina C con la fórmula de Euler. Como G es conexo y planar, $p - q + C = 2$, es decir, $C = 2 - p + q$. Sustituyendo en la desigualdad del paso 2,

$$2 - p + q \leq \frac{2q}{g} \implies q\left(1 - \frac{2}{g}\right) \leq p - 2 \implies q \frac{g-2}{g} \leq p - 2.$$

Como $g \geq 3$, el factor $\frac{g-2}{g}$ es estrictamente positivo y se puede dividir por él sin cambiar el sentido de la desigualdad, lo que da $q \leq \frac{g}{g-2}(p - 2)$. ■

Lo que hay que llevarse. Tres pasos reconstruyen la prueba. Primero, el borde de cada cara contiene un ciclo, así que cada cara tiene grado al menos g . Segundo, el apretón de manos para caras da $gC \leq 2q$. Tercero, Euler cambia C por $2 - p + q$, y se despeja q dividiendo por $\frac{g-2}{g} > 0$. Las hipótesis están para que esos tres pasos sean legítimos; la observación siguiente dice cuál sostiene cada uno.

La otra cara de la misma desigualdad. En el paso 2 se puede despejar g en lugar de q . Como $C = q - p + 2 \geq 1$,

$$g \leq \frac{2q}{q - p + 2},$$

y $2q/C$ es el grado medio de las caras: *el ciclo más corto no puede ser más largo que el grado medio de las caras*. Con números: el cubo tiene $p = 8$, $q = 12$ y $C = 6$ caras de grado medio $24/6 = 4$, y su contorno es 4; hay igualdad porque todas las caras son cuadrados. Si el grafo de Petersen, con $p = 10$, $q = 15$ y contorno 5, fuera planar, tendría $C = 7$ caras de grado medio $30/7 \approx 4,29$, menor que su contorno: imposible. Es la misma cuenta que la de la observación sobre Petersen que viene después, vista desde las caras.

Observación (qué hace cada hipótesis). La conexión se usa dos veces: para que la fórmula de Euler sea $p - q + C = 2$ y no $p - q + C = k + 1$, y para que el borde de cada cara contenga un ciclo. La existencia de algún ciclo es la que da sentido a g : en un bosque el contorno es ∞ con el convenio del capítulo 2, y entonces el enunciado no dice nada. Y conviene no pasar al límite: sustituir $g = \infty$ daría $\frac{g}{g-2} \rightarrow 1$ y la cota $q \leq p - 2$, que es **falsa** para un árbol conexo, donde $q = p - 1$. La hipótesis «al menos un ciclo» no es un tecnicismo: sin ella el resultado deja de ser cierto en el límite. Y la desigualdad es *estricta* en el factor $\frac{g-2}{g} > 0$: si se admitiera $g = 2$ —lo que exigiría aristas múltiples— el paso 3 dividiría por cero y la cota desaparecería, que es lo que debe pasar, porque con aristas múltiples se pueden meter cuantas se quieran entre dos vértices.

Corolario. Los dos apartados anteriores son los casos $g = 3$ y $g = 4$:

$$g = 3 : q \leq 3(p - 2) = 3p - 6; \quad g = 4 : q \leq 2(p - 2) = 2p - 4.$$

Observación (y ahora sí se decide el grafo de Petersen). El caso $g = 5$ da $q \leq \frac{5}{3}(p - 2)$, y esa es la primera versión de la cota que detecta al grafo de Petersen. En efecto, Petersen tiene $p = 10$, $q = 15$ y contorno 5, y

$$\frac{5}{3}(10 - 2) = \frac{40}{3} = 13.\bar{3} < 15,$$

luego **no es planar**, y se ve contando. Con las dos versiones anteriores no se veía: $15 \leq 3 \cdot 10 - 6 = 24$ y, por no tener triángulos, $15 \leq 2 \cdot 10 - 4 = 16$; las dos se cumplen. Es un buen ejemplo de que afinar la hipótesis afina la conclusión, y de que conviene mirar el contorno entero y no solo si hay triángulos o no.

Aun así la cota sigue siendo **solo necesaria**. Subdividiendo una arista de K_5 se obtiene un grafo de 6 vértices, 11 aristas y contorno 3 que cumple $11 \leq 3(6 - 2) = 12$ y no es planar, porque contiene una subdivisión de K_5 (es una, de hecho). Para decidir de verdad hace falta Kuratowski, que es la sección siguiente.

Observación (cuándo se alcanza la igualdad). La igualdad $q = \frac{g}{g-2}(p - 2)$ se da exactamente cuando *todas* las caras tienen grado g , porque el único paso con desigualdad es el 2. Se alcanza, por ejemplo, en K_4 ($g = 3$, $6 = 3 \cdot 2$), en el cubo Q_3 ($g = 4$, $12 = 2 \cdot 6$), en el dodecaedro ($g = 5$, $30 = \frac{5}{3} \cdot 18$), en el icosaedro ($g = 3$, $30 = 3 \cdot 10$), en $K_{2,3}$ ($g = 4$, $6 = 2 \cdot 3$) y en todo ciclo C_n ($g = n$, $n = \frac{n}{n-2}(n - 2)$). Si además el grafo es regular de grado $r \geq 3$, la igualdad conduce a las cinco parejas (r, g) de los sólidos platónicos, como en el ejercicio de las caras de grado fijo. Sin $r \geq 3$ aparecen también los ciclos.

Corolario. K_5 y $K_{3,3}$ no son planares.

K_5 : $V = 5$, $A = 10$, y $3V - 6 = 9 < 10$, contra (b). $K_{3,3}$: es bipartito, luego sin triángulos; $V = 6$, $A = 9$, y $2V - 4 = 8 < 9$, contra (c). ■

Eso resuelve las tres casas: el grafo de casas y servicios es $K_{3,3}$. No es que no se haya encontrado el dibujo: sobran aristas para la fórmula de Euler.

Observación. Tres hechos que se usan constantemente:

1. Un grafo que contiene un subgrafo no planar no es planar (un dibujo plano del grande contendría uno del pequeño).
2. Un grafo es planar si y solo si lo es cada componente conexa.
3. Un grafo conexo es planar si y solo si lo es cada uno de sus bloques (se dibujan los bloques por separado y se pegan por los puntos de corte, poniendo cada bloque en una cara del anterior).

Corolario. K_n es planar si y solo si $n \leq 4$; $K_{m,n}$ es planar si y solo si $\min\{m, n\} \leq 2$.

K_4 es planar (dibujo de la sección 5.1) y contiene a K_n para $n \leq 4$; para $n \geq 5$, K_n contiene a K_5 . $K_{2,n}$ es planar: los n vértices de un lado en una recta y los dos del otro a cada lado de ella. Para $m, n \geq 3$, $K_{m,n}$ contiene a $K_{3,3}$. ■

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: USAR LA COTA COMO CRITERIO

La alternativa. Decidir si un grafo es planar comprobando $A \leq 3V - 6$ (y $A \leq 2V - 4$ si no tiene triángulos).

Su ventaja. Es una cuenta, sin dibujar nada, y decide K_5 y $K_{3,3}$ en una línea.

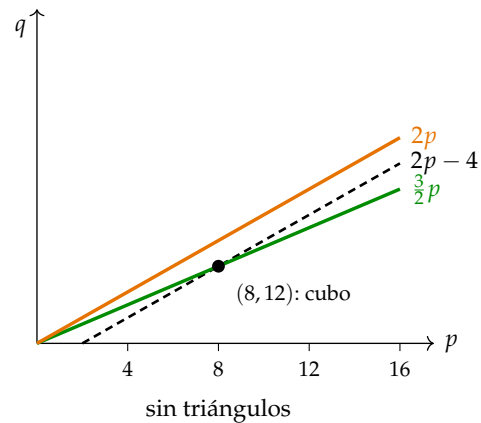
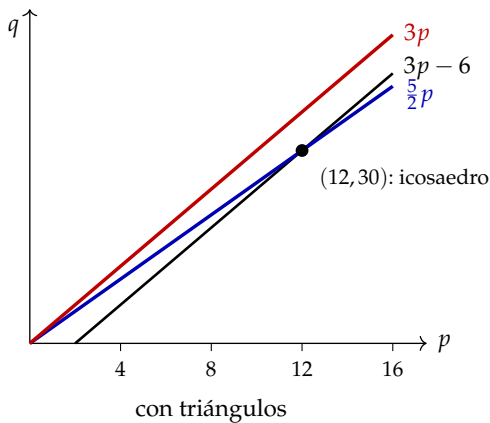
Qué la hunde. Que es solo una condición necesaria, y además en estas dos versiones se queda corta: el grafo de Petersen tiene $V = 10$, $A = 15 \leq 24$, no tiene triángulos y $15 \leq 16$, y no es planar (sección 5.4). Lo segundo se arregla con la cota del contorno de la subsección 5.3.1, que con $g = 5$ sí lo detecta; lo primero, no: subdividir una arista de K_5 da un grafo de 6 vértices y 11 aristas que cumple $11 \leq 3 \cdot 6 - 6$ y tampoco es planar. Con la cota solo se demuestra que un grafo *no* es planar, y solo cuando tiene muchas aristas. Kuratowski, en la sección siguiente, da un criterio completo. Si la cota no decide, puede buscarse un dibujo plano o una subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$ que impida su existencia.

Ejemplo (la tenaza: una cota de aristas por abajo y otra por arriba). **El problema.** Muchas preguntas sobre planares tienen la misma forma: un grafo planar no puede tener a la vez tanta conectividad, o tanto grado, y tan pocos vértices. Todas se contestan con una sola maniobra, y conviene verla una vez entera antes de los ejercicios.

La maniobra. El número de aristas q queda cogido entre dos rectas.

- *Por abajo empujan los grados.* Si todo vértice tiene grado al menos d , el apretón de manos da $2q \geq dp$, es decir, $q \geq \frac{d}{2}p$. La d suele venir de Whitney: $\kappa \leq \lambda \leq \delta$, así que $\kappa \geq n$ o $\lambda \geq n$ obligan a $\delta \geq n$.
- *Por arriba aprieta Euler.* Si el grafo es simple, conexo y planar con $p \geq 3$, entonces $q \leq 3p - 6$, y $q \leq 2p - 4$ si no tiene triángulos.

Las dos juntas piden $\frac{d}{2}p \leq 3p - 6$, y todo depende de las pendientes. Si $\frac{d}{2} < 3$, las rectas se cortan, y la desigualdad da una cota inferior para el número de vértices. Si $\frac{d}{2} \geq 3$, la recta de los grados va siempre por encima de la de Euler, y no existe ningún grafo.



A la izquierda, el techo de Euler $3p - 6$ (negro) frente a los suelos de $\delta \geq 5$ (azul) y $\delta \geq 6$ (rojo). A la derecha, sin triángulos, el techo $2p - 4$ frente a $\delta \geq 3$ (verde) y $\delta \geq 4$ (naranja). Un grafo posible tiene que quedar por encima del suelo y por debajo del techo. Con $\delta \geq 6$, o con $\delta \geq 4$ sin triángulos, el suelo es paralelo al techo y va por encima: no hay sitio. Con $\delta \geq 5$ el hueco empieza en $p = 12$, y con $\delta \geq 3$ sin triángulos, en $p = 8$.

hipótesis	suelo	techo	conclusión
$\kappa \geq 6$, o $\delta \geq 6$	$q \geq 3p$	$q \leq 3p - 6$	imposible
$\kappa = 5$	$q \geq \frac{5}{2}p$	$q \leq 3p - 6$	$p \geq 12$
regular de grado r	$q = \frac{r}{2}p$	$q \leq 3p - 6$	$r \leq 5$
sin triángulos y $\kappa \geq 4$	$q \geq 2p$	$q \leq 2p - 4$	imposible
sin triángulos y $\kappa = 3$	$q \geq \frac{3}{2}p$	$q \leq 2p - 4$	$p \geq 8$
bipartito y $\lambda \geq 4$	$q \geq 2p$	$q \leq 2p - 4$	imposible

Qué se ha ganado. Seis resultados de los ejercicios que siguen caben en una tabla. Y los ejemplos que alcanzan las cotas no hay que buscarlos: están en el cruce de las dos rectas. Allí las dos desigualdades son igualdades, es decir, todos los vértices tienen grado d y todas las caras son triángulos o cuadrados. Con $d = 5$ y caras triangulares es el icosaedro, 12 vértices y 30 aristas; con $d = 3$ y caras cuadradas, el cubo, 8 vértices y 12 aristas.

Dónde se falla. El suelo lo da el grado *mínimo*, no el de un vértice cualquiera, y Whitney se lee en su sentido: la conectividad acota por abajo al grado mínimo, no al revés. El techo necesita un grafo simple con $p \geq 3$, y el de $2p - 4$, que no haya triángulos; olvidar comprobarlo es aplicar una cota que no vale. Y un grafo en el cruce de las rectas no queda garantizado por la cuenta: el icosaedro y el cubo se exhiben, y hay que comprobar que tienen la conectividad que se les pide.

Ejercicios: fórmula de Euler y sus consecuencias

Ejercicio 5.1. Cuerdas de un árbol *spanning* R5.1

Sea G un grafo plano conexo y T un árbol *spanning* de G . Una **cuerda** de T es una arista de G que no está en T . Probar que si N es el número de cuerdas y C el de caras de G , entonces $N = C - 1$.

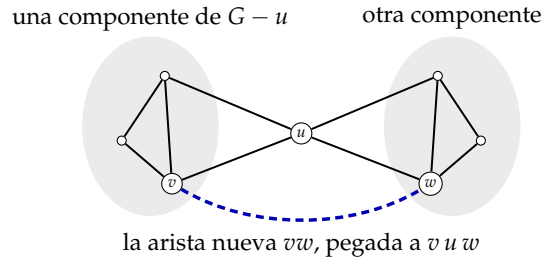
Resolución. La idea. Se cuentan las aristas de G de dos maneras: las del árbol más las cuerdas, y las que da la fórmula de Euler.

T tiene los mismos vértices que G y, por ser árbol, $|A(T)| = |V(G)| - 1$ aristas. Luego $N = |A(G)| - |A(T)| = |A(G)| - |V(G)| + 1$. Por Euler, $|V(G)| - |A(G)| + C = 2$, es decir, $|A(G)| - |V(G)| = C - 2$, y $N = C - 2 + 1 = C - 1$. En particular el número de cuerdas no depende del árbol *spanning* elegido, cosa que ya se sabía (todos tienen $V - 1$ aristas), y $C - 1$ es el número de aristas que hay que quitar para llegar a un árbol: cada una cierra un ciclo y separa una cara. ■

Ejercicio 5.2. Planar maximal implica 2-conexo R5.2

Probar que si G es planar maximal con 3 o más vértices, entonces G es 2-conexo. ¿Es cierto el recíproco?

Resolución. La idea. Un punto de corte u deja un hueco. Alrededor de u salen aristas hacia componentes distintas de $G - u$, y en algún sitio dos aristas consecutivas van a componentes distintas. Entre ellas hay una cara que toca a los dos vecinos, y por esa cara cabe una arista nueva: eso contradice la maximalidad.



Un planar maximal con $V \geq 3$ es conexo: si tuviera varias componentes, se podrían dibujar separadas y unir dos por la cara exterior sin cruces. Supóngase que tiene un punto de corte u , y sea H un grafo plano asociado. Los vecinos de u se ordenan alrededor de u en el dibujo, en sentido horario: $u_1, \dots, u_n$. Como $G - u$ es desconexo y cada componente de $G - u$ contiene algún vecino de u , hay dos vecinos consecutivos en ese orden, $v = u_i$ y $w = u_{i+1}$, en componentes distintas de $G - u$ (si todos los consecutivos estuvieran en la misma componente, todos los vecinos lo estarían). Se dibuja un arco de v a w pegado al camino $v u w$, por el lado en que no hay ninguna otra arista de u entre ellos, tan cerca de vu y uw que no toca nada más. El resultado es un dibujo plano de $G + vw$, y $vw \notin A(G)$ porque v y w están en componentes distintas de $G - u$. Contradicción con la maximalidad. Luego G no tiene puntos de corte, y con $V \geq 3$ es 2-conexo.

El recíproco es falso: C_n con $n \geq 4$ es 2-conexo y no es planar maximal (admite una cuerda). En general, 2-conexo planar da $A \leq 3V - 6$, y maximal exige la igualdad. ■

Dónde se falla. En tomar v y w en componentes distintas sin más. Si entre las aristas uv y uw hubiera otras aristas de u , el arco pegado a $v u w$ las cortaría. Hace falta que v y w sean *consecutivos* alrededor de u . Y la frase «si todos los consecutivos estuvieran en la misma componente, todos los vecinos lo estarían» es la que garantiza que existen.

Ejercicio 5.3. El sesgo R5.3

El **sesgo** de G es el mínimo número de aristas que hay que eliminar de G para obtener un grafo planar. ¿Qué se puede decir del sesgo de (i) K_p , (ii) $K_{m,n}$, (iii) C_n ?

Resolución. La idea. Quitar aristas hasta que el grafo sea planar es bajar hasta el techo de Euler: el sesgo es al menos lo que sobra por encima del techo, $q - (3p - 6)$, o $q - (2p - 4)$ si no hay triángulos. En K_p lo que queda es maximal y la cota se alcanza; en $K_{m,n}$ solo se obtiene una desigualdad.

(iii) C_n es planar: sesgo 0.

(i) Para $p \leq 4$, K_p es planar y el sesgo es 0. Sea $p \geq 5$ y s el sesgo; hay s aristas cuya eliminación deja un grafo planar G con los p vértices. Ese G es planar maximal: si se le pudiera añadir una arista de K_p sin perder la planaridad, bastarían $s - 1$ eliminaciones. Es conexo (maximal con $p \geq 3$), luego por el corolario $|A(G)| = 3p - 6$. Como $|A(G)| = \binom{p}{2} - s$,

$$s = \binom{p}{2} - (3p - 6) = \frac{p^2 - 7p + 12}{2} = \frac{(p - 3)(p - 4)}{2}.$$

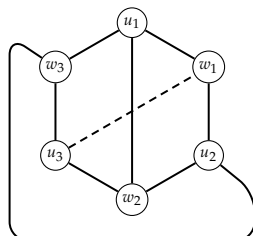
Así el sesgo de K_5 es 1 (y en efecto K_5 menos una arista es planar: es K_4 más un vértice unido a tres de sus vértices, dibujado dentro de una cara triangular), el de K_6 es 3 y el de K_7 es 6.

(ii) Si $\min\{m, n\} \leq 2$ el sesgo es 0. Sean $m, n \geq 3$ y s el sesgo, con $G = K_{m,n}$ menos s aristas planar. G es conexo: si no, alguna arista de $K_{m,n}$ uniría dos componentes, y se podría

recuperar sin perder la planaridad, contra la minimalidad de s . Aquí G no tiene por qué ser maximal, pero no tiene triángulos (es subgrafo de un bipartito), luego $|A(G)| \leq 2(m+n) - 4$, es decir, $mn - s \leq 2(m+n) - 4$ y

$$s \geq mn - 2(m+n) + 4 = (m-2)(n-2).$$

Para $K_{3,3}$ la cota da $s \geq 1$, y se alcanza: $K_{3,3}$ menos una arista es planar.



discontinua: la arista eliminada

En general la cota $(m-2)(n-2)$ se alcanza, pero eso no se pide. ■

Dónde se falla. En escribir una igualdad para $K_{m,n}$ copiando el caso de K_p . Allí lo que queda al quitar las aristas es planar maximal y tiene exactamente $3p - 6$ aristas; aquí lo que queda no tiene por qué ser maximal, y la cuenta solo da $s \geq (m-2)(n-2)$. Para $K_{3,3}$ la igualdad se demuestra con el dibujo.

Ejercicio 5.4. Planaridad y conectividad R5.8; EXAMEN DE ENERO 2013

(a) Probar que si G es planar entonces $\kappa(G) \leq 5$. (b) Probar que todo grafo 5-conexo y planar tiene al menos 12 vértices, y dar un ejemplo. ¿Existen grafos 6-conexos y planares? • CAE:

ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

Resolución. La idea. Es la tenaza del ejemplo anterior: el suelo $q \geq \frac{n}{2}p$ lo ponen Whitney y el apretón de manos, y el techo $q \leq 3p - 6$ lo pone Euler.

Sea G planar con p vértices y q aristas, y $n = \kappa(G)$. Por Whitney y el apretón de manos, $q \geq pn/2$ (ejercicio 4.3); por Euler, $q \leq 3p - 6$ (si $p \geq 3$; con $p \leq 2$, $\kappa \leq 1$).

(a) Si fuera $n \geq 6$: $3p \leq q \leq 3p - 6$, imposible. Luego $\kappa(G) \leq 5$.

(b) Con $n = 5$: $\frac{5}{2}p \leq q \leq 3p - 6$, de donde $\frac{1}{2}p \geq 6$ y $p \geq 12$. El ejemplo es el **icosaedro**: 12 vértices, 30 aristas, 20 caras triangulares, regular de grado 5, planar por ser un poliedro convexo, y 5-conexo, como comprobamos a continuación. Cumple $30 = 3 \cdot 12 - 6$: es planar maximal. No existen grafos 6-conexos planares, por (a).

Para comprobar la 5-conexión, nombrense dos vértices opuestos N, S y los dos pentágonos intermedios $a_0, \dots, a_4$ y $b_0, \dots, b_4$. N se une a todos los a_i , S a todos los b_i , y entre anillos están las aristas $a_i b_i$ y $a_{i+1} b_i$ (índices módulo 5). Por las simetrías del icosaedro, las parejas no adyacentes se reducen a N, S y N, b_0 . Para la primera, los cinco caminos $N a_i b_i S$ son independientes. Para la segunda sirven

$$Na_0 b_0, \quad Na_1 b_0, \quad Na_2 b_1 b_0, \quad Na_3 b_2 S b_0, \quad Na_4 b_4 b_0.$$

Solo comparten sus extremos. Menger da $\kappa \geq 5$ y Whitney $\kappa \leq \delta = 5$. ■

Qué hemos aprendido. El apartado (a) tiene una segunda lectura de una línea: todo planar tiene un vértice de grado a lo sumo 5, y $\kappa \leq \delta \leq 5$. En (b) el ejemplo no hay que buscarlo:

está en el cruce de las rectas de la tenaza, $p = 12$ y $q = 30$, con todos los grados iguales a 5 y todas las caras triángulos. **Dónde se falla:** la cuenta solo dice que un 5-conexo planar necesita al menos 12 vértices. Que exista uno hay que verlo, y comprobar la 5-conexión del icosaedro es la mitad del ejercicio.

Ejercicio 5.5. Regulares planares R5.11

Sea G conexo y regular de grado $r \geq 2$. Demostrar que si G es planar, entonces $r \leq 5$. ¿Y si G no contiene triángulos? • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

Resolución. La idea. La tenaza con el suelo convertido en igualdad: en un grafo regular, el apretón de manos da A exactamente.

Sea V el orden y A el tamaño. Por el apretón de manos $2A = rV$. Si G es planar con $V \geq 3$, $A \leq 3V - 6$, luego $rV = 2A \leq 6V - 12 < 6V$ y $r < 6$: $r \leq 5$. Si además no tiene triángulos, $rV = 2A \leq 4V - 8 < 4V$ y $r < 4$: $r \leq 3$. (El cubo, regular de grado 3, sin triángulos y planar, muestra que 3 se alcanza; el icosaedro muestra que 5 se alcanza.) ■

Qué hace la hipótesis $r \geq 2$. Un grafo conexo y regular de grado $r \geq 2$ tiene al menos $r + 1 \geq 3$ vértices, que es lo que exige la cota de Euler. Con $r \leq 1$ no hay nada que probar.

Ejercicio 5.6. Planar sin triángulos y conectividad EXAMEN DE 2012

Sea G planar sin triángulos. Probar que $\kappa(G) \leq 3$, y que para la igualdad hace falta $|V(G)| \geq 8$. • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

Resolución. La idea. Es el panel derecho de la tenaza: suelo $2V$ o $\frac{3}{2}V$ según la conectividad, techo $2V - 4$.

Sean V y A el orden y el tamaño. Si $\kappa(G) \geq 4$, por Whitney $\delta \geq 4$ y $2A \geq 4V$; pero sin triángulos $A \leq 2V - 4$, luego $4V \leq 2A \leq 4V - 8$: imposible. Así $\kappa \leq 3$. Si $\kappa = 3$, entonces $\delta \geq 3$ y $3V \leq 2A \leq 4V - 8$, de donde $V \geq 8$. El cubo Q_3 (8 vértices, planar, bipartito, 3-conexo) muestra que 8 se alcanza. ■

Dónde se falla. La hipótesis es «sin triángulos», no «bipartito». El dodecaedro tiene ciclos de longitud 5, ningún triángulo, 20 vértices y $\kappa = 3$, y el resultado se le aplica igual. Y el cubo está en el cruce de las rectas: 8 vértices, grado 3 y caras cuadradas.

Ejercicio 5.7. Sumar un vértice o una arista R5.12; CONTROL 3.2

Sea G simple y conexo, no trivial, de orden p y tamaño q .

- Demostrar que si $v \notin V(G)$ y $G + v$ es planar, entonces $q \leq 2p - 3$.
- Demostrar que si $G + K_2$ es planar, entonces G es un árbol. ¿Es cierto el recíproco?

• CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

Resolución. La idea. Se fabrica un grafo más grande, se cuentan sus aristas exactamente y se le aplica el techo de Euler; la cota para G sale al restar lo que se añadió.

(a) $G' = G + v$ tiene $V = p + 1$ vértices y $A = q + p$ aristas (las de G más una por cada vértice de G), y es conexo con $V \geq 3$. Si es planar, $A \leq 3V - 6$: $q + p \leq 3p - 3$, es decir, $q \leq 2p - 3$.

(b) $G' = G + K_2$, con $V(K_2) = \{u, w\}$, tiene $V = p + 2$ vértices y $A = q + 2p + 1$ aristas (las de G , las $2p$ que unen u y w con todo G , y uw). Si es planar, $q + 2p + 1 \leq 3(p + 2) - 6 = 3p$, luego $q \leq p - 1$. Pero G es conexo, así que contiene un árbol spanning con $p - 1$ aristas y $q \geq p - 1$. Por tanto $q = p - 1$ y G , conexo con $p - 1$ aristas, es un árbol.

El recíproco es falso en general. Si G es un árbol con un vértice x de grado ≥ 3 , con vecinos w_1, w_2, w_3 , entonces en $G + K_2$ los tres vértices u, w, x son adyacentes a cada uno de w_1, w_2, w_3 : es una copia de $K_{3,3}$, y $G + K_2$ no es planar. Solo queda el caso en que todos los grados son ≤ 2 , es decir, G es un camino P_p ; y $P_p + K_2$ sí es planar: se dibuja el camino en una recta, u por encima unido a todos, w por debajo unido a todos, y la arista uw por fuera rodeando un extremo del camino. Así, $G + K_2$ es planar si y solo si G es un camino. ■

Qué hemos aprendido. $G + v$ es planar exactamente cuando G se puede dibujar con todos sus vértices en el borde de la cara exterior; a esos grafos se les llama **planares exteriores**. En un sentido, se coloca v en la cara exterior y se une a todos. En el otro, se borra v de un dibujo plano de $G + v$: todos los vértices de G quedan en el borde de la cara donde estaba v , y esa cara se toma como exterior (por la esfera). Así, (a) dice que un planar exterior tiene $q \leq 2p - 3$. **Dónde se falla:** en (b), en olvidar la arista uw al contar, que deja $q \leq p$ y no basta; y en dar por bueno el recíproco, que falla en cuanto el árbol tiene un vértice de grado 3.

Ejercicio 5.8. Caras de grado fijo EXÁMENES DE FEBRERO 2013, MAYO 2024, 2024–25 Y 2025–26

En (a)–(c), decidir con la fórmula de Euler si puede existir el objeto descrito. En (d), decidir si la afirmación es cierta:

- (a) un balón de fútbol hecho solo de hexágonos, con tres hexágonos en cada vértice;
- (b) un grafo conexo, plano y regular de grado 3 con todas las caras hexagonales, o con todas octogonales;
- (c) un grafo conexo, plano y regular de grado 4 con todas las caras pentagonales;
- (d) si un grafo es conexo y planar y tiene secuencia de grados $(6, 5, 5, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1)$, entonces tiene 10 caras (enero de 2012, E.1).

• CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

Resolución. La idea. Cada hipótesis es una ecuación. Regular de grado r da $2A = rV$, por el apretón de manos para vértices; caras de grado s da $2A = sC$, por el de caras. Se despejan V y C en función de A , se llevan a Euler, y el signo del coeficiente de A decide.

En todos los apartados el grafo es plano y conexo, luego $V - A + C = 2$.

(a) y (b), caso hexagonal: regular de grado 3 da $2A = 3V$, y caras hexagonales da $2A = 6C$. Entonces $V = 2A/3$, $C = A/3$ y $V - A + C = 2A/3 - A + A/3 = 0 \neq 2$. **No existe.** Si se usan solo pentágonos y hexágonos, con tres caras por vértice, hacen falta doce pentágonos: con P pentágonos y H hexágonos, $2A = 5P + 6H$, $3V = 2A$, $C = P + H$, y Euler da $P = 12$ sea cual sea H .

(b), caso octogonal: $2A = 3V$ y $2A = 8C$ dan $V - A + C = 2A/3 - A + A/4 = -A/12 \neq 2$. **No existe.**

(c) Regular de grado 4: $2A = 4V$; caras pentagonales: $2A = 5C$. Entonces $V - A + C = A/2 - A + 2A/5 = -A/10$, que es negativo, nunca 2. **No existe** (falso tal como se enunciaba en 2024–25; verdadero en 2025–26, donde se enuncia en negativo).

(d) La suma de los grados es $6 + 5 + 5 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 44$, luego $A = 22$, con $V = 14$. Por Euler $C = 2 - V + A = 10$. **Verdadero:** cualquier dibujo plano

tiene 10 caras, y ni siquiera hace falta saber cuál es el grafo. ■

QUÉ DEJA. Regular de grado r con todas las caras de grado s : $2A = rV = sC$ y Euler dan $A(\frac{2}{r} - 1 + \frac{2}{s}) = 2$, que exige $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} > \frac{1}{2}$. Si $r, s \geq 3$, las únicas parejas enteras que lo cumplen son $(3,3)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(3,5)$ y $(5,3)$: los cinco sólidos platónicos.

Qué hemos aprendido: el signo decide la forma. Despejando, $A = 1/(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} - \frac{1}{2})$, y el signo del denominador separa tres mundos:

(r, s)	$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} - \frac{1}{2}$	qué hay
$(3,3), (3,4), (4,3)$	$\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}$	tetraedro ($A = 6$), cubo y octaedro ($A = 12$)
$(3,5), (5,3)$	$\frac{1}{30}$	dodecaedro e icosaedro ($A = 30$)
$(3,6), (4,4), (6,3)$	0	ningún grafo finito: la colmena, la cuadrícula y la red de triángulos
$(4,5), (3,8), \dots$	negativo	ningún grafo plano

Con el denominador positivo el dibujo se cierra sobre sí mismo, como una esfera, y sale uno de los cinco poliedros regulares. Con denominador cero las cuentas no admiten ninguna A finita, pero sí un dibujo infinito: el balón de hexágonos del apartado (a) es la colmena, que embalsama el plano sin cerrarse nunca. **Dónde se falla:** en escribir $A = sC$ en vez de $2A = sC$ (cada arista borda dos caras, o la misma dos veces); en aplicar $V - A + C = 2$ sin comprobar la conexión; y en creer que unas cuentas compatibles demuestran que el grafo existe: hay que exhibirlo.

Ejercicio 5.9. *Bipartito con conectividad lineal seis* EXÁMENES DE ENERO 2013 Y 2024–25

Probar que si G es bipartito y $\lambda(G) = 6$, entonces G no es planar. • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

Resolución. La idea. Es la última fila de la tabla de la tenaza, con $\lambda = 6$ en lugar de $\lambda \geq 4$: suelo $3V$ por Whitney, techo $2V - 4$ porque un bipartito no tiene triángulos.

Por Whitney, $\delta(G) \geq \lambda(G) = 6$, luego $2A = \sum \delta(v) \geq 6V$ y $A \geq 3V$. Como $\lambda(G) = 6 > 0$, G es conexo y no trivial, y como es bipartito no tiene triángulos. Si fuera planar, $A \leq 2V - 4$. Juntando, $3V \leq A \leq 2V - 4$, es decir, $V \leq -4$: imposible. Luego G no es planar. (De hecho basta $\lambda(G) \geq 4$: $2V \leq A \leq 2V - 4$ ya es contradictorio; y sin la hipótesis de bipartito basta $\lambda \geq 6$ para contradecir $A \leq 3V - 6$, que es el apartado (a) del ejercicio de conectividad.) ■

5.4 Caracterización de grafos planares

LA PREGUNTA

Para convencer a alguien de que una red *sí* se puede dibujar sin cruces basta enseñarle el dibujo. Para convencerle de que *no* se puede hace falta algo más que decir «lo he intentado mucho». En 1930 Kuratowski encontró el certificado: un dibujo es imposible exactamente cuando la red contiene, escondida y quizá estirada, una de solo dos configuraciones, las tres casas o los cinco puntos. Es un caso raro y valioso: un problema de imposibilidad con una prueba corta que cualquiera puede comprobar. ¿Por qué bastan dos obstáculos, y cómo se encuentran en un grafo concreto?

Definición (subdivisión). Una **subdivisión elemental** de una arista uv de G consiste en sustituirla por un camino uvw con un vértice nuevo w de grado 2. Un grafo H es una **subdivisión** de G si se obtiene de G por una sucesión finita de subdivisiones elementales, o si $H = G$.

Los vértices originales conservan su grado; los nuevos tienen grado 2. Una subdivisión es el mismo dibujo con puntos marcados en medio de las aristas, y eso no cambia nada de lo que importa aquí.

Observación. G es planar si y solo si cualquier subdivisión suya lo es: un dibujo plano de G da uno de la subdivisión marcando puntos en las aristas, y al revés se borran los vértices de grado 2. En consecuencia, **un grafo que contiene un subgrafo isomorfo a una subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$ no es planar**: el subgrafo no lo es, y un subgrafo de un planar es planar.

A un subgrafo isomorfo a una subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$ se le llama en lo que sigue un **subgrafo de Kuratowski**. En un subgrafo de Kuratowski de tipo $K_{3,3}$ hay seis vértices de grado 3 (los **vértices principales**, tres «casas» y tres «pozos») unidos por nueve caminos sin vértices interiores comunes; en uno de tipo K_5 , cinco vértices de grado 4 unidos por diez caminos.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: DOS CULPABLES Y NADA MÁS

Hasta aquí, para probar que un grafo *no* es planar había una cota que a veces funcionaba y a veces no, y para probar que *sí* lo es había que dibujarlo. Kuratowski cierra el asunto: hay exactamente dos culpables, K_5 y $K_{3,3}$, y todo grafo no planar esconde uno de los dos dentro.

Lo asombroso no es que K_5 y $K_{3,3}$ estorben, que ya se sabe; es que **no haya ningún otro motivo posible** para no poder dibujarse. A priori cabría esperar una lista infinita de obstrucciones, cada una peor que la anterior, y lo que hay es una lista de dos. Por eso el teorema es una caracterización y no un criterio más: convierte «ser planar», que es una propiedad sobre todos los dibujos posibles, que son infinitos, en «no contener esto ni aquello», que es una búsqueda dentro del propio grafo.

La palabra «subgrafo de Kuratowski» hace el trabajo fino: no se pide que aparezcan K_5 o $K_{3,3}$ tal cual, sino subdivididos, con vértices de paso por el medio. Y tiene que ser así, porque poner un punto en mitad de una arista no cambia que un dibujo tenga cruces o no.

De las dos implicaciones, una es la observación anterior y se hace en dos líneas. La otra es honda; está más abajo, en la versión de Thomassen.

Teorema (Kuratowski, 1930). Un grafo es planar si y solo si no contiene ningún subgrafo de Kuratowski.

La implicación «planar $\Rightarrow$ sin subgrafo de Kuratowski» es la observación anterior. La otra es la profunda; se demuestra más abajo, y también puede verse en los libros de Clark–Holton y de Chartrand–Lesniak–Zhang.

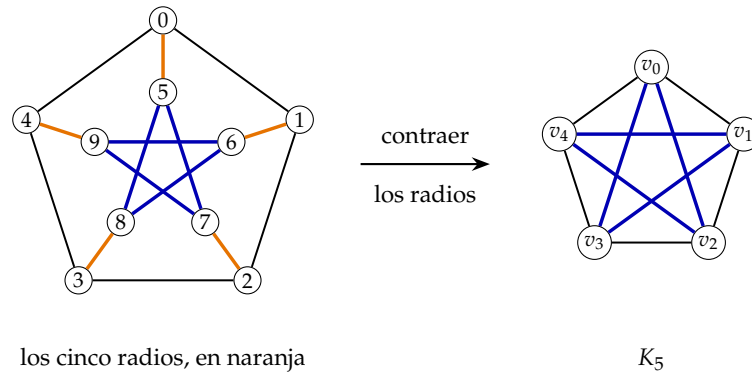
Definición (contracción). La **contracción** de una arista $e = uv$ de G consiste en eliminar e e identificar u con v en un solo vértice v_e , adyacente a todo lo que era adyacente a u o a v (las aristas repetidas se funden en una). G es **contractible** a H si H se obtiene de G por contracciones sucesivas, o si $H = G$.

Teorema (Wagner, 1937; sin demostración). Un grafo es planar si y solo si no contiene ningún subgrafo contractible a K_5 o a $K_{3,3}$.

Observación. Subdividir y contraer son operaciones inversas en un sentido: contraer una arista de un vértice de grado 2 deshace una subdivisión elemental. Por eso todo subgrafo de Kuratowski es contractible a K_5 o $K_{3,3}$, de modo que un obstáculo de Kuratowski también lo es de Wagner. El recíproco necesita un argumento: al deshacer las contracciones, un subgrafo de Kuratowski puede cambiar de tipo, pero sigue existiendo. Lo prueba el segundo lema de la demostración siguiente. En la práctica se usa Kuratowski, y Wagner sirve cuando hay una contracción a mano: en Petersen basta contraer los cinco radios, y lo que queda es K_5 , como se ve en el ejemplo siguiente.

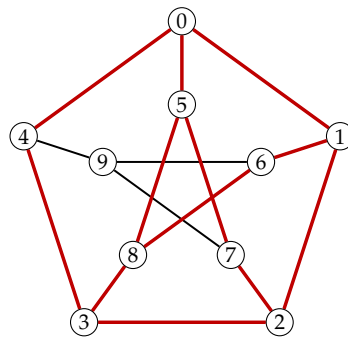
Ejemplo (el grafo de Petersen no es planar). El grafo de Petersen tiene 10 vértices $0, \dots, 9$: un pentágono exterior $0\ 1\ 2\ 3\ 4$, una estrella interior $5\ 7\ 9\ 6\ 8$ (aristas $57, 79, 96, 68, 85$) y los cinco radios $i\ (i + 5)$. Es 3-regular con 15 aristas y contorno 5.

Por Wagner. Contrayendo los cinco radios, cada vértice exterior i se funde con el interior $i + 5$; los cinco vértices resultantes son adyacentes dos a dos (el pentágono da $i \sim i \pm 1$ y la estrella da $i \sim i \pm 2$): K_5 . Luego no es planar.



Cada v_i reúne los extremos del radio naranja $i\ (i + 5)$. Las aristas negras forman el pentágono y las azules sus diagonales: aparecen las diez aristas de K_5 .

Por Kuratowski. Contiene una subdivisión de $K_{3,3}$ con casas $0, 2, 8$ y pozos $1, 3, 5$: seis de los nueve caminos son aristas $(01, 05, 21, 23, 83, 85)$ y los otros tres tienen un vértice de paso: $8\ 6\ 1, 2\ 7\ 5$ y $0\ 4\ 3$. Los tres vértices de paso son distintos y no son principales, luego los nueve caminos no comparten vértices interiores. Sobra la arista 49 , y $79, 96$.



en rojo, la subdivisión de $K_{3,3}$: principales $0, 2, 8$ y $1, 3, 5$; de paso $4, 6, 7$

Las dos cotas iniciales de Euler no lo detectan: $15 \leq 3 \cdot 10 - 6$ y, sin triángulos, $15 \leq 2 \cdot 10 - 4$. La cota del contorno sí lo detecta, como vimos en la subsección 5.3.1.

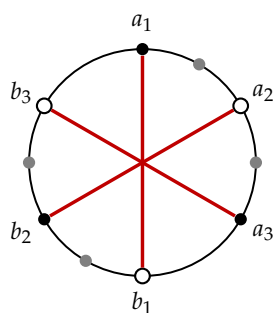
Observación (sin demostración). Si G es 3-conexo, no planar y tiene al menos 6 vértices, entonces contiene una subdivisión de $K_{3,3}$ (no hace falta buscar K_5). Es la última muestra de la relación entre conectividad y planaridad: K_5 es el único obstáculo que necesita solo cinco vértices.

CONEXIÓN: CÓMO SE DECIDE SI UN GRAFO DIBUJADO ES PLANAR

Sobre un grafo dibujado: (1) si el dibujo no tiene cruces, o se puede redibujar sin ellos moviendo un par de aristas, es planar y basta enseñar el dibujo; (2) si no, se cuenta: $A > 3V - 6$, o $A > 2V - 4$ sin triángulos, decide que no; (3) si la cuenta no decide, se buscan seis vértices de grado ≥ 3 repartidos en dos tríos y nueve caminos entre tríos sin vértices interiores comunes, y se marcan con colores (o cinco de grado ≥ 4 y diez caminos). Lo que se acaba exhibiendo es una subdivisión de $K_{3,3}$ o de K_5 , y casi siempre es $K_{3,3}$.

Ejemplo (casas y pozos a mano: un ciclo largo y tres cuerdas entrelazadas). **El problema.** Cuando la cuenta de Euler no decide, hay que exhibir seis vértices principales y nueve caminos, y buscarlos a ciegas entre todos los tríos posibles no lleva a ninguna parte. El hexágono de las tres casas, al final de la sección 5.1, dice por dónde empezar.

El patrón. Sea Z un ciclo de G . Una **cuerda** de Z es una arista de G que no está en Z y tiene los dos extremos en Z . Si hay tres cuerdas dos a dos entrelazadas, sus seis extremos aparecen alrededor de Z , nombrándolos bien, en el orden $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, con cuerdas a_1b_1 , a_2b_2 y a_3b_3 . Entonces G contiene una subdivisión de $K_{3,3}$ con vértices principales $\{a_1, a_3, b_2\}$ y $\{a_2, b_1, b_3\}$, que son los que ocupan los lugares impares y los pares de la lista. Los nueve caminos son los seis tramos de Z entre extremos consecutivos, que unen siempre un lugar impar con uno par, y las tres cuerdas, que unen cada extremo con el opuesto. Es el hexágono con sus tres diagonales, estirado: los demás vértices de Z hacen de vértices de paso, y las demás cuerdas no se usan.



tres cuerdas dos a dos entrelazadas:
en negro, $\{a_1, a_3, b_2\}$; en blanco, $\{a_2, b_1, b_3\}$;
en gris, vértices de paso sobre Z

A mano, con los grafos del ejercicio 5.14. En el grafo A , ocho vértices en circunferencia unidos a sus vecinos y a los que están a distancia 3, se toma $Z = 01 \dots 7$. Las cuerdas 03, 14 y 25 están dos a dos entrelazadas, y dan los principales $\{0, 2, 4\}$ y $\{1, 3, 5\}$. En la escalera de Möbius M_8 del ejercicio 5.15, las cuatro diagonales 04, 15, 26, 37 se entrelazan dos a dos, y tres cualesquiera bastan: 04, 15 y 26 dan $\{0, 2, 5\}$ y $\{1, 4, 6\}$.

Dónde se falla: el ciclo también se elige. En el grafo D , siete vértices en circunferencia unidos a los que están a distancia 1 y 2, el ciclo exterior $01 \dots 6$ tiene por cuerdas 02, 13, 24, 35, 46, 50, 61. Solo se entrelazan las consecutivas, y no hay tres dos a dos entrelazadas. La conclusión no es que D sea planar, sino que ese ciclo no sirve. Con el ciclo 0246135,

que avanza de dos en dos, las aristas 01, 23 y 45 son cuerdas dos a dos entrelazadas. Sus extremos aparecen en el orden 0, 2, 4, 1, 3, 5 alrededor del ciclo, y dan los principales $\{0, 3, 4\}$ y $\{1, 2, 5\}$, con el 6 como vértice de paso. La otra salida, cuando no se encuentra un buen ciclo, es la paridad: si las incompatibilidades entre cuerdas de un ciclo hamiltoniano forman un ciclo impar, como con K_5 en la sección 5.1, no hay dibujo plano.

Qué se ha ganado. Un orden de búsqueda: primero un ciclo que pase por muchos vértices, después sus cuerdas, después tres que se crucen dos a dos. Es el mismo razonamiento que probó que $K_{3,3}$ no es planar, leído al revés: allí se veía que tres cuerdas entrelazadas no caben; aquí se usan para señalar el $K_{3,3}$ escondido.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: CARACTERIZAR CON UN ALGORITMO EN VEZ DE CON OBSTÁCULOS

La alternativa. En lugar de un teorema de obstáculos prohibidos, dar un procedimiento que construya el dibujo plano o falle: es lo que hacen los algoritmos de planaridad (Hopcroft y Tarjan, 1974, en tiempo lineal).

Su ventaja. Decide en un instante grafos con miles de vértices, que es lo que necesita el diseñador de circuitos.

Qué le falta. Que un algoritmo que dice «no» no explica por qué, y el certificado de Kuratowski sí: seis vértices y nueve caminos que cualquiera comprueba a mano. Los dos enfoques se complementan, y de hecho los algoritmos modernos devuelven, cuando fallan, el subgrafo de Kuratowski como prueba. La idea de que una propiedad se caracterice por una lista finita de obstáculos es una de las más fértiles de la teoría de grafos: Robertson y Seymour probaron (1983–2004) que vale para cualquier propiedad cerrada por contracciones y subgrafos, aunque la lista casi nunca se conoce.

5.4.1 La demostración del teorema de Kuratowski

Se sigue la demostración de Thomassen (1981), que es breve y usa herramientas ya introducidas en este libro: conectividad, contracciones y la fórmula de Euler. Se usan dos hechos sobre grafos planos ya admitidos: que en un grafo plano 2-conexo toda cara tiene por borde un ciclo, y que un dibujo plano se puede redibujar con cualquier cara como cara exterior (por la esfera). Hay que probar: *si G no contiene ningún subgrafo de Kuratowski, entonces G es planar*. Se hace en tres pasos: se reduce al caso 3-conexo, se ve que las contracciones respetan la hipótesis, y se hace inducción contrayendo una arista.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: ENCOGER HASTA K_4 Y VOLVER A INFLAR

Lo que hay que probar es la mitad difícil: que *no tener* dentro ni K_5 ni $K_{3,3}$ basta para poder dibujar el grafo sin cruces. Es incómodo porque la hipótesis es negativa, «no aparece esto», y la conclusión pide construir un dibujo.

La salida de Thomassen es encoger el grafo hasta que dibujarlo sea trivial, y luego volver atrás. Encoger es contraer una arista, fundiendo sus dos extremos en un vértice. Para que la maniobra funcione hacen falta dos garantías, que son los dos lemas: que en un grafo 3-conexo con al menos cinco vértices *siempre existe* una arista contraíble sin perder la 3-conexión, y que contraer no crea un subgrafo de Kuratowski donde no lo había (dicho al revés: si el encogido tiene uno, el original también). Con las dos, se encoge y se encoge hasta llegar a un grafo 3-conexo de cuatro vértices, que solo puede ser K_4 , y K_4 se dibuja en una servilleta.

El viaje de vuelta es donde está el trabajo fino, y la imagen es esta: se tiene el dibujo plano del grafo encogido, con el vértice fundido en algún sitio, y hay que separarlo otra vez en sus dos mitades repartiendo los vecinos sin que nada se cruce. Los vecinos están todos alrededor, sobre el ciclo que bordea la cara donde vive, y la pregunta es si los que irán a un lado y los que irán al otro se pueden separar en dos arcos consecutivos de ese ciclo. Si se entrelazaran, el propio entrelazamiento dibujaría un $K_{3,3}$ o un K_5 , que la hipótesis prohíbe. Luego no se entrelazan, y el dibujo se completa. El primer paso, el que reduce todo al caso 3-conexo, es de la misma familia: si hay un separador de uno o dos vértices se corta por ahí, se dibujan los trozos por inducción y se pegan por el corte.

Lema (Thomassen). Todo grafo 3-conexo G con al menos 5 vértices tiene una arista e tal que G/e es 3-conexo.

El corazón en una frase: si ninguna arista se pudiera contraer, cada contracción daría un separador de tres vértices en el grafo original, y eligiendo el que deja **la componente más pequeña posible** se puede fabricar otra aún más pequeña. Es un descenso infinito, y por eso la hipótesis es absurda.

A mano: la rueda W_4 . Sea W_4 la rueda con centro h y aro 1 2 3 4: cinco vértices, 3-conexa. Si se contrae un radio, por ejemplo $h1$, el vértice nuevo es adyacente a 2, 3 y 4, pero 2 y 4 no son adyacentes entre sí. Quedan con grado 2, y el grafo no es 3-conexo. Si se contrae una arista del aro, por ejemplo 12, el vértice nuevo es adyacente a h , 3 y 4, que también lo son entre sí: sale K_4 , que es 3-conexo. El lema no dice que toda arista sirva, porque los radios no sirven; dice que alguna sirve, y por eso se prueba por reducción al absurdo. Y con cuatro vértices no hay nada que hacer: contraer una arista de K_4 deja K_3 , por eso el lema pide al menos cinco.

Paso 1: no poder contraer significa que toda arista viene con un tercer vértice que separa. Por reducción al absurdo: supóngase que para toda arista xy el grafo G/xy no es 3-conexo. Como G/xy tiene al menos 4 vértices, existe un conjunto S de a lo sumo 2 vértices que lo desconecta (no puede dejarlo trivial). S contiene al vértice contraído v_{xy} : si no, S desconectaría G con ≤ 2 vértices. Y S no es solo $\{v_{xy}\}$, porque entonces $\{x, y\}$ desconectaría G . Luego $S = \{v_{xy}, z\}$ y $\{x, y, z\}$ desconecta G . Así: *para toda arista xy existe z tal que $G - \{x, y, z\}$ es desconexo.*

Paso 2: se elige la componente más pequeña y se fabrica una menor (el núcleo de la prueba). Todo el lema es este descenso. La 3-conexión se usa tres veces seguidas, siempre para lo mismo: garantizar que un vértice tiene vecinos donde hace falta. Entre todas las elecciones posibles de arista xy , vértice z y componente conexa C de $G - \{x, y, z\}$, se toma una con C de **menor número de vértices**. Cada uno de x, y, z tiene algún vecino en C : si z no lo tuviera, $\{x, y\}$ separaría C del resto, contra la 3-conexión; igual para x e y . Sea u un vecino de z en C . Aplicando la propiedad a la arista zu , existe w tal que $G - \{z, u, w\}$ es desconexo. Los vértices x e y son adyacentes, luego si ninguno es w están en la misma componente de $G - \{z, u, w\}$; sea D una componente de $G - \{z, u, w\}$ que no contiene a x ni a y (existe: hay al menos dos componentes, y x, y ocupan a lo sumo una). Por 3-conexión, u tiene un vecino en D ; los vecinos de u están en $C \cup \{x, y, z\}$, y ese vecino no es x, y ni z , luego está en C : $D \cap C \neq \emptyset$. Como D

es conexo y no toca a $\{x, y, z\}$, está contenido en una sola componente de $G - \{x, y, z\}$, que tiene que ser C . Y $u \notin D$. Por tanto $D \subseteq C \setminus \{u\}$ tiene menos vértices que C , y la terna (zu, w, D) contradice la elección de C como mínima. ■

Lema. Si G/e contiene un subgrafo de Kuratowski, entonces G también.

La idea, en una frase: al descontraer, el vértice fundido v se abre en dos, x e y , y hay que repartirle sus aristas; en casi todos los repartos el subgrafo prohibido sobrevive tal cual o ganando un vértice de paso, y **el único reparto que lo destruiría —dos y dos en un vértice de K_5 — produce a cambio un $K_{3,3}$.**

Paso 1: si el vértice fundido no interviene, no hay nada que hacer. Sea $e = xy$, $v = v_e$ y K un subgrafo de Kuratowski de G/e . Si $v \notin K$, todas las aristas de K son aristas de G y $K \subseteq G$. Si $v \in K$, cada arista va de K proviene de una arista xa o ya de G (o de las dos). Se distinguen casos según cómo se reparten las aristas de K en v entre x e y .

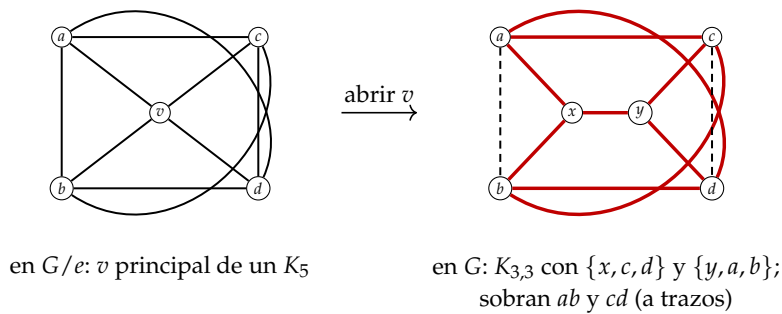
Si todas provienen de x (o todas de y), se sustituye v por x y $K \subseteq G$.

Si v es un vértice de paso de K (grado 2) con una arista de x y otra de y , se sustituye v por el camino xy : sigue siendo una subdivisión del mismo grafo, con un vértice de paso más.

Si v es un vértice principal de K y todas sus aristas menos una provienen de x , se toma x como vértice principal y se llega a la arista que provenía de y pasando por y : el camino correspondiente gana el vértice de paso y , y se tiene un subgrafo de Kuratowski del mismo tipo.

Paso 2: el único caso delicado, y el cambio de K_5 por $K_{3,3}$ (el núcleo de la prueba).

Queda el caso en que v es un vértice principal de grado 4 (tipo K_5) con dos aristas de x y dos de y . Aquí el K_5 no se puede reconstruir, y lo que salva el lema es que el tipo de subgrafo prohibido puede cambiar: se pierde el K_5 y se gana un $K_{3,3}$. Sean a, b, c, d los otros cuatro vértices principales, con x unido en G por caminos a a, b e y a c, d , además de la arista xy y de los seis caminos entre a, b, c, d . Entonces G contiene una subdivisión de $K_{3,3}$ con casas x, c, d y pozos y, a, b : los caminos xy, xa, xb, cy, dy son los de partida, y ca, cb, da, db son cuatro de los seis caminos entre a, b, c, d . Todos son internamente disjuntos porque lo eran en K . ■



Las aristas del dibujo son caminos de K o de G ; lo que cuenta es quién se une con quién. En el K_5 de la izquierda, v ve a los otros cuatro. Al abrirlo, x se queda con a, b e y con c, d , y

ninguno de los dos ve a los cuatro. Pero x ve a y, a, b ; c ve a y, a, b ; y d también: es un $K_{3,3}$, y los dos caminos ab y cd sobran.

Lema. Sea G un grafo 3-conexo sin subgrafos de Kuratowski. Entonces G es planar.

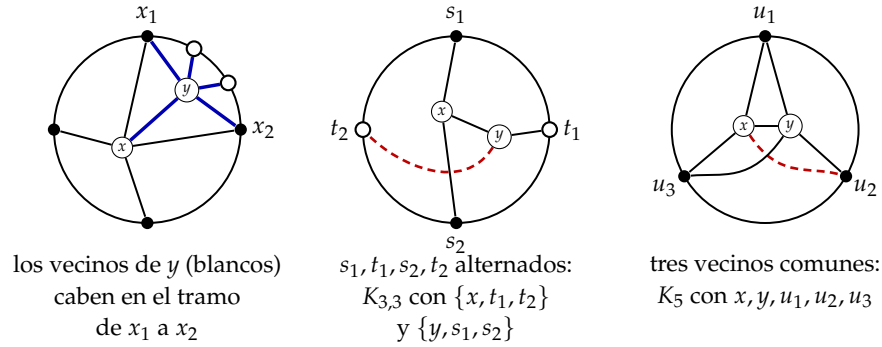
El corazón en una frase: se encoge hasta K_4 , que se dibuja en una servilleta, y al volver a inflar **los vecinos de x y los de y no pueden entrelazarse alrededor del ciclo**, porque un entrelazamiento es un $K_{3,3}$ o un K_5 dibujado.

Paso 1: se encoge y se aplica la hipótesis de inducción. Por inducción sobre el número de vértices. Con 4 vértices, $G = K_4$, planar. Sea G con $n \geq 5$ vértices. Por el lema de Thomassen hay una arista $e = xy$ con G/e 3-conexo; por el lema anterior G/e no tiene subgrafos de Kuratowski; por hipótesis de inducción G/e es planar. Tómese un dibujo plano de G/e y sea $v = v_e$. El grafo $(G/e) - v = G - \{x, y\}$ es 2-conexo (quitar un vértice a un 3-conexo), luego en su dibujo, que es el de G/e sin v , la cara en la que estaba v tiene por borde un ciclo Z . Todos los vecinos de v están en Z , y los vecinos de v en G/e son los vecinos de x y los de y en G , distintos de x, y .

Sean $x_1, \dots, x_k$ los vecinos de x en G distintos de y , en el orden cíclico en que aparecen en Z ($k \geq 2$ porque $\delta(x) \geq 3$). Dividen a Z en k **tramos** P_i , de x_i a x_{i+1} , que solo comparten extremos. Sea N_y el conjunto de vecinos de y distintos de x ; $|N_y| \geq 2$.

Paso 2: si los vecinos de y caben en un solo tramo, el dibujo se completa. Si N_y está contenido en un solo tramo P_i , se dibuja G : se coloca x dentro de la cara de Z y se une a $x_1, \dots, x_k$ por arcos que no se cruzan (posible porque los x_j están en el borde de la cara); esos arcos parten la cara en k regiones, una por tramo; se coloca y en la región del tramo P_i , cuyo borde es P_i más los arcos $x x_i$ y $x x_{i+1}$, y se une a x y a todos sus vecinos, que están en P_i , sin cruces. Es un dibujo plano de G .

Paso 3: si no caben, el entrelazamiento dibuja el subgrafo prohibido (el núcleo de la prueba). Si N_y no cabe en un solo tramo, G contiene un subgrafo de Kuratowski, contra la hipótesis. En efecto, o bien (i) hay un vecino y' de y en el interior de un tramo P_i y otro vecino y'' fuera de P_i , y entonces x_i, y', x_{i+1}, y'' aparecen alternados en Z ; o bien (ii) todos los vecinos de y son extremos de tramos, es decir, vecinos comunes de x e y : si hay al menos tres, u_1, u_2, u_3 , entonces x, y, u_1, u_2, u_3 con la arista xy , las aristas xu_j, yu_j y los tres arcos de Z entre u_j consecutivos forman una subdivisión de K_5 ; si son exactamente dos, y_1, y_2 , y no son extremos de un mismo tramo, hay vecinos x_a, x_b de x en el interior de cada uno de los dos arcos de Z entre y_1 e y_2 , y y_1, x_a, y_2, x_b aparecen alternados. En los casos alternados, con s_1, t_1, s_2, t_2 alternados en Z , s_1, s_2 vecinos de x y t_1, t_2 vecinos de y , los vértices x, t_1, t_2 y y, s_1, s_2 con la arista xy , las aristas xs_1, xs_2, yt_1, yt_2 y los cuatro arcos de Z entre vértices consecutivos de la lista forman una subdivisión de $K_{3,3}$. ■



A la izquierda, el caso bueno del paso 2: y se coloca en la región del tramo que contiene a todos sus vecinos, y nada se cruza. En el centro y a la derecha, los dos malos del paso 3. Con x, y dentro de la cara y todos los demás vértices en el borde Z , una arista, la de trazos, tiene que cortar a otra. Los arcos de Z entre los puntos marcados completan los nueve caminos de $K_{3,3}$ o los diez de K_5 .

La idea, en una frase: se toma el contraejemplo con menos aristas y se demuestra que tiene que ser 3-conexo —porque si tuviera un separador de uno o dos vértices se cortaría por ahí, cada trozo sería planar por minimalidad y los dibujos se pegarían por el corte—; y de los 3-conexos ya se ha ocupado el lema anterior.

Demostración del teorema de Kuratowski.

Paso 1: se elige un contraejemplo con el menor número de aristas. Falta ver que un grafo sin subgrafos de Kuratowski es planar sin suponer 3-conexión. Si no fuera así, tómesese un contraejemplo G con el **menor número de aristas** y, entre ellos, con el menor número de vértices: no planar, sin subgrafos de Kuratowski, y con cualquier grafo con menos aristas cumpliendo el teorema. Se prueba que G es 3-conexo, y el lema anterior da la contradicción.

G no tiene vértices aislados: suprimirlos no cambia la planaridad ni crea un subgrafo de Kuratowski y reduciría el número de vértices. Con a lo sumo 4 vértices todo grafo es planar, luego G tiene al menos 5.

Paso 2: el contraejemplo mínimo no puede tener un punto de corte. Si G fuera unión de dos subgrafos G_1, G_2 con a lo sumo un vértice en común y cada uno con alguna arista, cada G_i tendría menos aristas y ningún subgrafo de Kuratowski (son subgrafos de G), luego sería planar por minimalidad; y dos dibujos planos se pegan por un vértice (o se yuxtaponen) colocando el segundo, reducido, dentro de una cara del primero que toque al vértice común. G sería planar: contradicción.

Paso 3: tampoco un separador de dos vértices, y aquí hay que añadir la arista uv a cada mitad (el núcleo de la prueba). El truco que hace funcionar el corte es cerrar cada mitad con la arista uv : sin ella, los dibujos de los dos trozos no se podrían pegar respetando por dónde entra y sale la comunicación. Supóngase que $\{u, v\}$ desconecta G : $G = G_1 \cup G_2$ con $V(G_1) \cap V(G_2) = \{u, v\}$ y cada G_i con algún vértice fuera de $\{u, v\}$. Sea $G'_i = G_i + uv$ (si uv ya es arista, $G'_i = G_i$). Cada G'_i tiene menos aristas que G : G_{3-i} aporta al menos dos aristas que no están en G'_i (un vértice suyo fuera de $\{u, v\}$ tiene grado ≥ 2), y G'_i añade a lo sumo una. Y G'_i no tiene subgrafos de Kuratowski: si $K \subseteq G'_i$ lo fuera y usara la arista uv , se sustituye uv por un camino de u a v con

interior en G_{3-i} , que existe porque G es 2-conexo (el interior de G_{3-i} está unido a u y a v); el resultado es un subgrafo de Kuratowski de G . Por minimalidad, G'_1 y G'_2 son planares. Se dibuja cada uno con la arista uv en el borde de la cara exterior (siempre se puede, eligiendo como exterior una cara que contenga a uv), y se pegan los dos dibujos identificando la arista uv , uno a cada lado de ella. Es un dibujo plano de $G'_1 \cup G'_2 \supseteq G$: contradicción.

Luego G es 3-conexo, sin subgrafos de Kuratowski y con al menos 5 vértices, y por el lema anterior es planar. No hay contraejemplo. ■

LA IDEA: QUÉ HACE CADA PIEZA

La inducción quiere añadir un vértice a un dibujo plano, y el modo más limpio de añadir es deshacer una contracción: x e y nacen del mismo punto v y hay que separarlos dentro de la cara en que vivía v . Eso sale bien si los vecinos de y «caben» entre dos vecinos consecutivos de x , y si no caben es porque están entrelazados alrededor del ciclo, que es exactamente la forma de $K_{3,3}$ (cuatro puntos alternados en un ciclo, más dos centros) o de K_5 (tres puntos en un ciclo más dos centros unidos entre sí). El lema de Thomassen garantiza que siempre hay una contracción que no estropea la 3-conexión, y la 3-conexión es lo que hace que las caras sean ciclos y el argumento funcione.

Ejercicios: subdivisiones, cruces y grafos dibujados

Ejercicio 5.10. Subdivisiones y la diferencia $|V| - |A|$ R5.4

Probar que si G' se obtiene de G por subdivisiones, entonces $|V(G)| - |A(G)| = |V(G')| - |A(G')|$. ¿Es cierto el recíproco?

Resolución. Basta verlo para una subdivisión elemental, que añade un vértice y una arista (quita una y pone dos): la diferencia no cambia, y una subdivisión es una sucesión finita de elementales. El recíproco es falso: C_5 (5 vértices y 5 aristas) y el grafo formado por **dos triángulos disjuntos** (6 y 6) tienen ambos $|V| - |A| = 0$ y ninguno es subdivisión del otro (uno es conexo y el otro no; y C_5 es subdivisión solo de ciclos más cortos). ■

Ejercicio 5.11. Pocas aristas de más R5.5

Sea G conexo. Probar que si $|A(G)| - |V(G)| \leq 2$, entonces G es planar.

Resolución. La idea. Un subgrafo de Kuratowski tiene al menos tres aristas de más sobre sus vértices, y ese exceso no baja al completarlo hasta el grafo entero, si este es conexo.

Por Kuratowski, si G no fuera planar contendría un subgrafo de Kuratowski K . Por el ejercicio anterior, $|A(K)| - |V(K)|$ vale lo mismo que para K_5 ($10 - 5 = 5$) o para $K_{3,3}$ ($9 - 6 = 3$): al menos 3. Y al pasar de K a G la diferencia no baja: como G es conexo, cada uno de los $|V(G)| - |V(K)|$ vértices que no están en K se puede unir a K por un camino, y eligiendo para cada uno la primera arista de un camino más corto hasta K se obtienen

$|V(G)| - |V(K)|$ aristas distintas fuera de $A(K)$ (el argumento de la proposición de los árboles de la sección 2.8). Luego $|A(G)| \geq |A(K)| + |V(G)| - |V(K)|$, es decir, $|A(G)| - |V(G)| \geq |A(K)| - |V(K)| \geq 3 > 2$. Contradicción. ■

Dónde se falla. Sin la conexión el enunciado es falso: $K_{3,3}$ con un vértice aislado tiene $9 - 7 = 2$ y no es planar. La conexión es lo que da una arista nueva por cada vértice que se añade a K .

Ejercicio 5.12. *El número de cruce* R5.6 y 5.7

El **número de cruce** $\nu(G)$ es el mínimo número de cruces de aristas en un dibujo de G en el plano. (a) Probar que G es planar si y solo si $\nu(G) = 0$. (b) ¿Es cierto que un grafo no planar tiene $\nu(G) = 1$ si y solo si existe una arista a con $G - a$ planar? (c) Probar que si G' es una subdivisión de G entonces $\nu(G') = \nu(G)$. ¿Es cierto el recíproco?

Resolución. (a) Es la definición: un dibujo sin cruces es un grafo plano.

(b) Si $\nu(G) = 1$, en un dibujo con un solo cruce se quita una de las dos aristas que se cruzan, y queda un dibujo sin cruces de $G - a$: planar. **El recíproco es falso.** Sea I el grafo del icosaedro (12 vértices, 30 aristas, planar) y sean x, y dos vértices opuestos, que no son adyacentes y no tienen ningún vecino común. Sea $G = I + xy$. Entonces $G - xy = I$ es planar, y sin embargo $\nu(G) \geq 2$. En efecto, supóngase un dibujo de G con un solo cruce. Si el cruce es entre xy y una arista e de I , entonces I está dibujado sin cruces; como $30 = 3 \cdot 12 - 6$, todas sus caras son triángulos (planar maximal), y las dos caras que xy atraviesa, a uno y otro lado de $e = ab$, son triángulos xab e yab : a y b serían vecinos comunes de x e y , que no existen. Si el cruce es entre dos aristas e, f de I , entonces $(I - e) + xy$ está dibujado sin cruces, tiene 12 vértices y 30 aristas, luego es planar maximal y sus caras son triángulos; las dos caras que tienen a xy en el borde son triángulos xyz y xyd , y c, d serían vecinos comunes de x e y . Contradicción en ambos casos. Así que un grafo puede necesitar varios cruces y tener una sola arista responsable de todos.

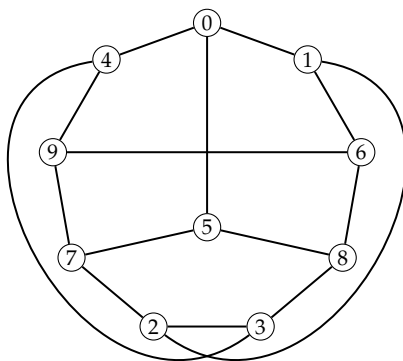
(c) Los vértices de grado 2 no influyen en los cruces: un dibujo de G con $\nu(G)$ cruces da uno de G' marcando puntos en las aristas, y al revés borrándolos. El recíproco es falso: K_5 y $K_{3,3}$ tienen ambos $\nu = 1$ y ninguno es subdivisión del otro. ■

Ejercicio 5.13. *El grafo de Petersen* R5.9

Encontrar el número de cruce del grafo de Petersen. ¿Y su género?

Resolución. $\nu \geq 2$: si hubiera un dibujo con un solo cruce, quitando una de las dos aristas que se cruzan quedaría un dibujo plano de Petersen menos una arista. Pero Petersen menos cualquier arista no es planar: la subdivisión de $K_{3,3}$ del ejemplo no usa las aristas 49, 79 ni 96, por tanto, al quitar 49 o 79 sigue habiendo un subgrafo de Kuratowski. Los giros llevan 49 a cualquier radio y 79 a cualquier arista interior. Además, el automorfismo $i \mapsto 5 + (2i \bmod 5)$, $5 + i \mapsto 2i \bmod 5$, intercambia las aristas exteriores e interiores. Esto cubre todas las aristas: Petersen menos cualquiera de ellas sigue siendo no planar.

$\nu \leq 2$: se dibuja el 9-ciclo 0168327940 como un polígono, el vértice 5 dentro unido a 0, 7 y 8, la arista 69 dentro y las aristas 12 y 34 fuera. Los únicos cruces son 12 con 34 fuera, y 69 con 50 dentro: dos. Luego $\nu = 2$.

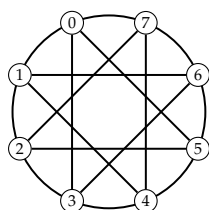


Petersen con dos cruces

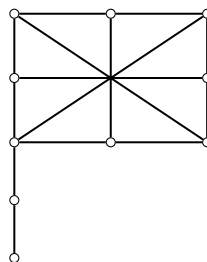
El género es 1: no es planar, y admite una inmersión en el toro; el género se define en la sección 6.1, donde se da la inmersión. ■

Ejercicio 5.14. Los cuatro grafos de la relación R5.10

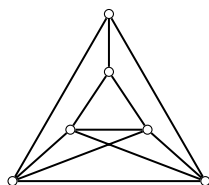
Estudiar si son o no planares los grafos A , B , C y D de la figura.



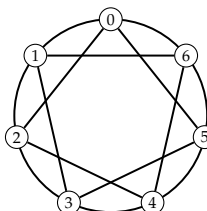
A



B



C



D

Resolución. La idea. Con cada grafo, el orden de la caja de conexión: primero la cuenta; si no decide, un ciclo largo y tres cuerdas dos a dos entrelazadas (el ejemplo de casas y pozos a mano); y los nueve caminos marcados.

A. Ocho vértices $0, \dots, 7$ en circunferencia, unidos cada uno con sus dos vecinos y con los dos que están a distancia 3: 4-regular, 16 aristas. Los vértices pares son adyacentes exactamente a los impares (las distancias 1 y 3 son impares), luego $A \simeq K_{4,4}$, y contiene $K_{3,3}$ tal cual: casas 0, 2, 4 y pozos 1, 3, 5, con las nueve aristas 01, 03, 05, 21, 23, 25, 41, 43, 45 presentes. **No planar.** (La cota también lo decide: bipartito con $16 > 2 \cdot 8 - 4$.)

B. Diez vértices y 14 aristas: el rectángulo con su punto medio en cada lado, las dos diagonales, la mediana horizontal y la vertical, y una cola de dos vértices colgando de la esquina inferior izquierda. Casas: esquina superior izquierda, esquina superior derecha y punto

medio de abajo; pozos: punto medio de arriba, esquina inferior izquierda y esquina inferior derecha. Siete de los nueve caminos son aristas (los dos lados de arriba, las dos diagonales, los dos lados de abajo y la mediana vertical) y los otros dos pasan por los puntos medios de los lados verticales (izquierda: esquina superior izquierda, medio izquierdo, esquina inferior izquierda; derecha, igual). Subdivisión de $K_{3,3}$: **no planar**. La cola no interviene.

C. Seis vértices y 11 aristas. Casas: el vértice interior alto y las dos esquinas de abajo; pozos: el vértice superior y los dos interiores bajos. Las nueve aristas cruzadas existen todas (el interior alto es adyacente al superior y a los dos interiores bajos; cada esquina es adyacente al superior y a los dos interiores bajos): $K_{3,3}$ como subgrafo, más las aristas sobrantes entre los dos interiores bajos y entre las dos esquinas. **No planar**.

D. Siete vértices $0, \dots, 6$ en circunferencia, cada uno unido a sus dos vecinos y a los dos que están a distancia 2: 4-regular, 14 aristas. La cota no decide ($14 \leq 15$). Casas $0, 3, 4$ y pozos $1, 2, 5$: ocho de los nueve caminos son aristas ($01, 02, 05, 31, 32, 35, 42, 45$; recuérdese que 5 está a distancia 2 de 0 , y 1 y 5 a distancia 2 de 3), y el que falta, de 4 a 1 , es 461 por el vértice 6 . Subdivisión de $K_{3,3}$: **no planar**.

Otra vía (el criterio del ciclo hamiltoniano). El ciclo exterior 0123456 es hamiltoniano, y las siete cuerdas son $02, 13, 24, 35, 46, 50, 61$. En un dibujo plano cada cuerda va por dentro o por fuera del ciclo, y dos cuerdas que se entrelazan (una tiene exactamente un extremo entre los extremos de la otra) no pueden ir del mismo lado. Aquí se entrelazan 02 con 13 , 13 con 24 , 24 con 35 , 35 con 46 , 46 con 50 , 50 con 61 y 61 con 02 : las prohibiciones forman un ciclo de longitud 7, impar, y no hay manera de repartir las cuerdas en dos grupos. No hay dibujo plano.

La pregunta final: ¿hace falta buscar K_5 ? Una subdivisión de K_5 necesita cinco vértices de grado ≥ 4 . En B solo hay uno (la esquina inferior izquierda) y en C hay cuatro: en esos dos se descarta K_5 de antemano y solo cabe $K_{3,3}$. En A y D todos los vértices tienen grado 4 y hay que contar de otra manera. Si cinco vértices fuesen los principales de una subdivisión de K_5 , cada pareja no adyacente entre ellos gastaría un camino con vértices interiores, y esos interiores han de ser distintos para caminos distintos. En $A \simeq K_{4,4}$, cinco vértices se reparten $4 + 1$ o $3 + 2$ entre los dos lados, luego hay al menos cuatro parejas no adyacentes, y solo sobran tres vértices. En D , dos vértices son no adyacentes justo cuando distan 3, y esas parejas forman el ciclo 0362514 ; al quitarle dos vértices a un ciclo de longitud 7 sobreviven al menos tres aristas, luego hay al menos tres parejas no adyacentes y solo sobran dos vértices. Ni A ni D contienen subdivisión de K_5 : en los cuatro grafos la culpable es $K_{3,3}$. ■

Dónde se falla. En dar un grafo por no planar porque el dibujo del enunciado tiene cruces: es uno de infinitos dibujos. En los caminos: dos caminos no pueden compartir un vértice de paso, y un vértice principal no puede ser de paso de otro camino. Y en buscar K_5 entre vértices de grado 3, cuando sus cinco principales necesitan grado al menos 4.

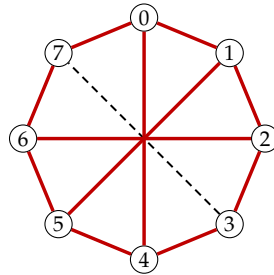
Ejercicio 5.15. Cuatro grafos más CONTROL 3.1

Decidir si son planares: (a) el cubo Q_3 ; (b) el prisma triangular; (c) la escalera de Möbius M_8 (el ciclo $01 \dots 7$ con las diagonales $i(i+4)$); (d) el grafo de 12 vértices de noviembre de 2011.

Resolución. (a) Sí: el dibujo de la sección 4.5 (un cuadrado dentro de otro) no tiene cruces. Tiene 6 caras, y $8 - 12 + 6 = 2$. (b) Sí: un triángulo dentro de otro con los tres vértices unidos;

5 caras. (d) Sí: el dibujo de la sección 2.7 no tiene cruces, y tiene $2 - 12 + 20 = 10$ caras.

(c) **No.** La cota no decide: $12 \leq 3 \cdot 8 - 6$ y, como M_8 no tiene triángulos, también $12 \leq 2 \cdot 8 - 4$, con igualdad. Se busca $K_{3,3}$ con el patrón de las tres cuerdas: las diagonales 04, 15 y 26 son cuerdas del ciclo $01 \dots 7$ dos a dos entrelazadas, y dan casas 0, 2, 5 y pozos 1, 4, 6. Siete de los nueve caminos son aristas: 01, 04, 21, 26, 54, 56 y 51 (la diagonal 15). Los dos que faltan: 234 y 076, con vértices de paso 3 y 7, distintos. Es una subdivisión de $K_{3,3}$ y M_8 no es planar. Con cualquier otro grafo de partida el método es el mismo: tres y tres, nueve caminos, colores.



M_8 : en rojo la subdivisión de $K_{3,3}$ (principales 0, 2, 5 y 1, 4, 6; de paso 3, 7)

■

Dónde se falla. En (c), en detenerse tras la cuenta: que $12 \leq 18$ no dice que M_8 sea planar, solo que la cuenta no lo impide. Y en creer que la cota $2V - 4$ no se aplica porque hay ciclos impares: lo que exige es que no haya triángulos. En (a), (b) y (d) basta enseñar el dibujo sin cruces; no hace falta ninguna cuenta.

REPASO INTERCALADO: CAPÍTULO 5

1. Planar (existe dibujo sin cruces) frente a plano (un dibujo concreto). Árboles, ciclos, poliedros convexos: planares. Planar $\Leftrightarrow$ inmersión en la esfera.
2. Caras, borde y grado de una cara; $2A = \sum \text{grado}(R)$. Euler: $V - A + C = 2$ (conexo), $k + 1$ con k componentes. El número de caras no depende del dibujo.
3. Para grafos simples planares con $V \geq 3$: $A \leq 3V - 6$; sin triángulos $A \leq 2V - 4$; maximal $\Leftrightarrow$ igualdad en la primera cota, y maximal $\Rightarrow$ 2-conexo con caras triangulares. K_5 y $K_{3,3}$ no planares; K_n planar sii $n \leq 4$; $K_{m,n}$ sii mín ≤ 2 .
4. Caras de grado fijo: $2A = rV = sC$ con Euler; si $r, s \geq 3$, solo las cinco parejas de los sólidos platónicos. Planar $\Rightarrow \kappa \leq 5$; 5-conexo planar $\Rightarrow V \geq 12$; regular planar $\Rightarrow r \leq 5$. Para G simple, conexo y no trivial: $G + v$ planar $\Rightarrow q \leq 2p - 3$; $G + K_2$ planar $\Leftrightarrow G$ es un camino.
5. Kuratowski: planar $\Leftrightarrow$ sin subdivisión de K_5 ni de $K_{3,3}$. Wagner: sin subgrafo contractible a ellos. Petersen: no planar, $\nu = 2$, género 1. Las cotas son necesarias, no suficientes.

Coloración

ANTES DE LEER

Tres preguntas antes de empezar.

1. Un mapa cualquiera se colorea de modo que dos países vecinos no lleven el mismo color. ¿Cuántos colores hacen falta como mucho? ¿Y si el mapa está dibujado sobre un flotador?
2. Seis comités con miembros en común tienen que reunirse. ¿Cuántas franjas horarias necesitan como mínimo, y qué tiene eso que ver con colorear?
3. Ocho jugadores de ajedrez juegan una partida al día. ¿Pueden jugar todos contra todos en una semana sin repetir pareja?

Las respuestas están en las secciones 6.2 y 6.3. Este capítulo usa la fórmula de Euler y sus cotas (5.3), los bipartitos (2.9) y la suma de grafos.

El capítulo tiene tres bloques, que son sus tres secciones: unas consideraciones previas sobre superficies, la coloración de vértices y la coloración de aristas.

6.1 Consideraciones previas sobre algunas superficies en $\mathbb{R}^3$

LA PREGUNTA

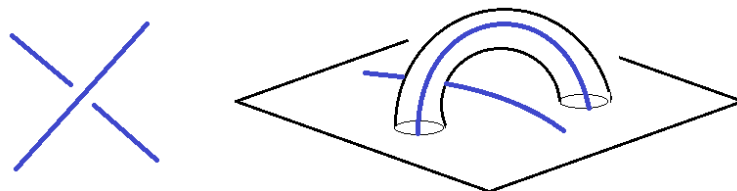
El ingeniero de la placa de circuito del capítulo anterior tiene un recurso cuando el dibujo plano es imposible: añadir un puente, un tramo de pista que salta por encima de otra. Cada puente es, en términos geométricos, un asa pegada a la placa. La pregunta natural es cuántas asas necesita una red dada, y si con asas suficientes cualquier red cabe. La respuesta es que sí, y el número mínimo de asas es una medida de lo lejos que está la red de ser plana.

Un subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una **superficie** si alrededor de cada punto, y suficientemente

cerca de él, se parece a un disco del plano, quizá curvado (como un parche pegado a un balón). Interesan aquí las superficies **compactas, conexas, sin borde y orientables**: la esfera, el toro (un flotador), el doble toro, el triple toro, y así sucesivamente. Se obtienen todas añadiendo a la esfera un número finito de **asas**: se abren dos agujeros y se pega un tubo por sus dos bocas. El **género** de la superficie es el número de asas: 0 la esfera, 1 el toro, 2 el doble toro.

Proposición. Todo grafo finito admite una inmersión en alguna de estas superficies.

Se dibuja el grafo en la esfera de cualquier manera, con los cruces que hagan falta. En cada cruce de dos aristas se abre un asa: una de las aristas se desvía por la superficie del tubo y la otra permanece en la esfera, y el cruce desaparece. Con un asa por cruce, el grafo queda dibujado sin cruces en la esfera con tantas asas como cruces. ■

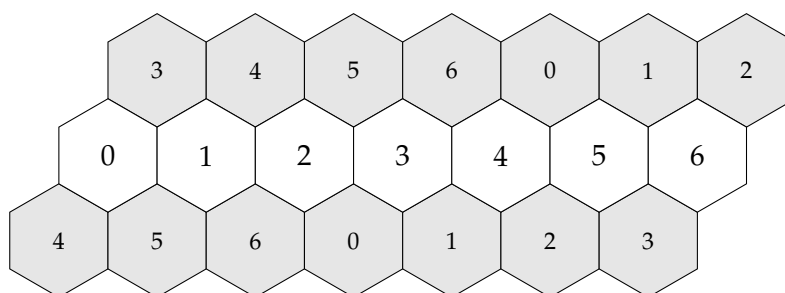


Un asa elimina un cruce: una arista pasa por el tubo y la otra sigue por la esfera.

Definición (género de un grafo). El **género** de un grafo G es el género de la primera superficie de la lista (esfera, toro, doble toro, ...) en la que admite una inmersión. Un grafo es planar si y solo si tiene género 0.

El número de cruce y el género miden cosas distintas: la construcción anterior da género $\leq \nu(G)$, pero un asa bien puesta puede resolver varios cruces a la vez. K_5 y $K_{3,3}$ tienen número de cruce 1 y género 1; el grafo de Petersen tiene número de cruce 2 y género 1.

Ejemplo (siete hexágonos en el toro: K_7 , y con él K_5 y K_6 , tienen género 1). El toro se representa como un rectángulo con los lados opuestos identificados. Se cubre con siete hexágonos en fila, numerados $0, \dots, 6$, pegando el extremo derecho con el izquierdo y el borde superior con el inferior *desplazado*: la fila de arriba es la misma fila corrida de modo que sobre la juntura de los hexágonos a y $a + 1$ cae el hexágono $a + 3$ (módulo 7), y bajo ella el $a + 5$. En la figura, los hexágonos grises son los mismos siete vistos desde el otro lado de la identificación.



la fila blanca es el mapa; las grises, sus copias por las identificaciones del toro

El hexágono a toca a $a - 1$ y $a + 1$ por los lados verticales, a $a + 3$ y $a + 2$ por arriba y a $a + 4$ y $a + 5$ por abajo: a los otros seis. Es un mapa de siete regiones en el toro en el que cada región es vecina de todas las demás, luego **necesita siete colores** (ejercicio 6.7). Y su grafo dual (un vértice por hexágono, una arista por cada pareja vecina) es K_7 dibujado sin cruces en el toro. Como $K_5 \subseteq K_6 \subseteq K_7$, los tres tienen género 1: no son planares y caben en el toro.

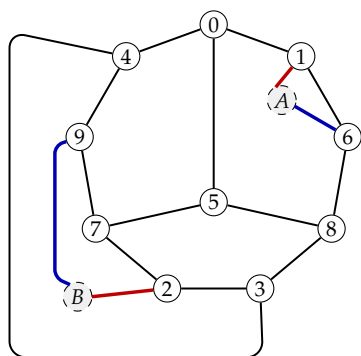
Comprobación con un hexágono concreto. El hexágono 0 tiene a sus lados el 6 y el 1; en la fila gris de arriba, sobre sus dos juntas, el 2 (juntura 6–0, pues $6 + 3 \equiv 2$) y el 3 (juntura 0–1); en la de abajo, el 4 y el 5. Son los seis restantes, y por la simetría $a \mapsto a + 1$ de la figura lo mismo vale para cualquier otro.

Qué se ha ganado. En el plano, K_7 no cabe ni de lejos: tiene 21 aristas y el techo de Euler para siete vértices es $3 \cdot 7 - 6 = 15$. Un asa bien puesta da sitio para esas seis aristas de más, y el mapa lo hace visible: los siete países se tocan dos a dos, cosa que en el plano solo pueden hacer cuatro. Por eso en el toro no bastan cuatro colores.

DE DÓNDE VIENE: HEAWOOD Y EL TORO

Heawood, el mismo que en 1890 encontró el fallo en la demostración de Kempe de los cuatro colores, calculó ese año cuántos colores hacen falta para los mapas sobre una superficie de género $n \geq 1$: $\lfloor (7 + \sqrt{48n + 1})/2 \rfloor$, que para el toro da 7. Probó que bastan, y el mapa de arriba prueba que hacen falta. Que la cota se alcanza en todas las superficies orientables tardó hasta 1968 (Ringel y Youngs). La paradoja histórica es que el problema en el toro, que parece más difícil, se resolvió ochenta y seis años antes que el del plano.

Ejemplo (Petersen en el toro: un asa basta para dos aristas). En el dibujo del ejercicio R5.9, quitemos las aristas 12 y 69. Quedan el ciclo 0168327940, las tres aristas de 5 a 0, 7, 8 por dentro, y 34 por fuera: un dibujo sin cruces. La cara de borde 016850 contiene a 1 y 6; la de borde 327943 contiene a 2 y 9.



Se abre una boca en A y otra en B , y se unen con un tubo.

Por su superficie se completan 12 (rojo) y 69 (azul), sin cruzarlas.

Las dos bocas están dentro de caras distintas y no cortan el grafo. Dentro de cada cara, los dos extremos se acercan a su boca sin cruzarse, como indica la figura; sobre el tubo se unen los extremos correspondientes por dos recorridos disjuntos. Así se restituyen 12 y 69 usando *la misma asa*. La esfera con esa asa es un toro: el género de Petersen es a lo sumo 1, y es exactamente 1 porque ya sabemos que no es planar.

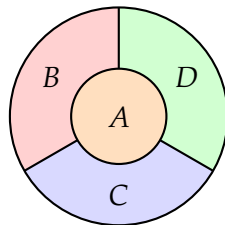
6.2 Coloración de vértices

LA PREGUNTA

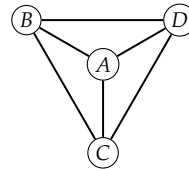
En 1852 Francis Guthrie, coloreando un mapa de los condados de Inglaterra, observó que con cuatro colores le bastaba y se preguntó si bastarían siempre. Su hermano se lo contó a De Morgan, De Morgan a Hamilton, y la pregunta pasó de los cartógrafos, a los que nunca les había importado, a los matemáticos, que tardaron ciento veinticuatro años en responderla. Por el camino la pregunta cambió de forma: dejó de ser sobre mapas y pasó a ser sobre grafos, y en esa forma sirve para repartir horarios, frecuencias de radio o registros de un procesador. ¿Cuántos colores hacen falta para colorear un grafo de modo que dos vértices adyacentes no lleven el mismo, y qué tiene el plano que hace que la respuesta sea cuatro?

Un **mapa** es aquí una división del plano en un número finito de regiones conexas, con fronteras formadas por arcos; colorearlo es dar colores distintos a regiones que comparten un tramo de frontera (no solo puntos aislados). A cada mapa se le asocia un grafo: un vértice por región y una arista entre regiones que comparten frontera. Colorear el mapa es colorear los vértices de ese grafo, que es planar (se dibuja poniendo cada vértice dentro de su región y cada arista cruzando la frontera común). Desde ahora los colores son números.

Ejemplo (un mapa que necesita cuatro colores). Una isla dividida en cuatro países: A en el centro y B, C, D formando un anillo alrededor (el mar no se colorea). Cada dos países comparten un tramo de frontera: A con los tres del anillo, y los del anillo entre sí, porque el anillo está partido en tres. El grafo del mapa es K_4 , y cuatro países vecinos dos a dos necesitan cuatro colores.



el mapa



su grafo: K_4 , dibujado sin cruces

Lo que este mapa demuestra es que la respuesta a la pregunta de Guthrie no puede ser tres: cuatro es lo mínimo que puede valer para *todos* los mapas planos. Lo difícil, lo que costó más de un siglo, es que cuatro basten siempre. Y la regla de la frontera común importa: en una tarta cortada en cuatro porciones, las opuestas solo se tocan en el centro, no son vecinas, y dos colores alternados bastan; cortada en tres, las tres porciones son vecinas dos a dos y hacen falta tres.

Definición (coloración por vértices). Sea G un grafo simple con al menos un vértice. Una **n -coloración por vértices** de G es una aplicación $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, n\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$ para toda arista uv . G es **n -coloreable** si admite una. El **número cromático** $\chi(G)$ es el menor $n \geq 1$ tal que G es n -coloreable, y una coloración con $\chi(G)$ colores se llama **óptima**.

Para el grafo sin vértices se adopta la extensión $\chi(\emptyset) = 0$: no hay nada que colorear.

Una n -coloración no tiene por qué usar los n colores; una óptima sí los usa todos (si le sobrara uno, habría una coloración con menos). Y si G es n -coloreable, es m -coloreable para

todo $m \geq n$. La **clase cromática** del color i es $c^{-1}(i)$, el conjunto de vértices de ese color; dentro de una clase no hay aristas.

Lema (permutar colores en una componente R6.1). Sea c una n -coloración de G , H el subgrafo inducido por los vértices de colores $1, \dots, k$ ($k \leq n$), H' una componente conexa de H y ξ una permutación de $\{1, \dots, k\}$. La aplicación c' que vale $\xi(c(v))$ en $V(H')$ y $c(v)$ fuera sigue siendo una n -coloración.

La idea. Repintar es peligroso porque puede crear un conflicto en la frontera de la zona repintada. Este lema dice que si la zona es una *componente conexa* del subgrafo de esos colores, no hay frontera peligrosa que valga. **El corazón en una frase: una componente conexa no tiene vecinos de sus propios colores fuera de ella**, porque si los tuviera, esos vecinos estarían dentro —para eso es una componente—. Dentro se repinta con una permutación, que no funde colores porque es inyectiva; fuera no se toca nada; y en la frontera los colores son distintos por construcción. Las tres comprobaciones que siguen son exactamente esos tres sitios: dentro, fuera y el borde.

Sea uv una arista, y sepárense los tres casos según dónde caiga.

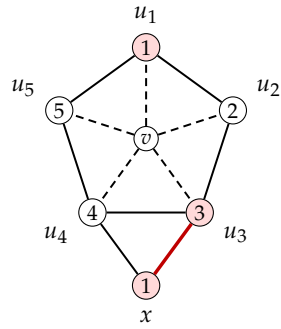
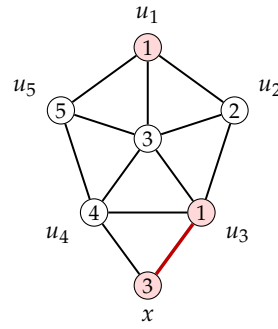
Caso 1: los dos fuera de H' . $c' = c$ en ambos y difieren.

Caso 2: los dos dentro de H' . $c'(u) = \xi(c(u)) \neq \xi(c(v)) = c'(v)$ porque ξ es inyectiva: permutar no funde dos colores en uno.

Caso 3: uno dentro y otro fuera, que es el borde y el núcleo de la prueba. Si $u \in V(H')$ y $v \notin V(H')$: o bien $c(v) > k$, y entonces $c'(v) = c(v) > k \geq c'(u)$; o bien $c(v) \leq k$, y entonces $v \in V(H)$ es adyacente a $u \in H'$, luego $v \in H'$ por ser H' una componente, contradicción. Es aquí, y solo aquí, donde se usa que H' sea una componente *entera* y no un trozo cualquiera de H : con un subconjunto arbitrario, el segundo caso no sería contradictorio y el lema sería falso. ■

El caso que se usa es $k = 2$: en una componente del subgrafo de dos colores i, j se pueden intercambiar i y j sin estropear nada. Esas componentes se llaman **cadena de Kempe**, y son la herramienta de la demostración de los cinco colores.

Ejemplo (una cadena de Kempe, a mano). Un vértice v sin colorear tiene cinco vecinos $u_1, \dots, u_5$, en ciclo alrededor de él y con los colores $1, \dots, 5$; un vértice más, x , de color 1, es vecino de u_3 y de u_4 . Con cinco colores, v no tiene sitio. Se miran solo los vértices de colores 1 y 3 (sombreados en la figura): son u_1, u_3 y x , y la única arista entre ellos es u_3x . El subgrafo de esos dos colores tiene, por tanto, dos componentes, $\{u_1\}$ y $\{u_3, x\}$. Se voltea la segunda: u_3 pasa al 1 y x al 3. Todo sigue bien: u_3 tiene fuera de la cadena vecinos de colores 2 y 4, y x tiene a u_4 , de color 4. Ahora u_1 y u_3 llevan el 1, el 3 ha quedado libre, y v lo toma.

antes: v ve los cinco coloresdespués de voltear $\{u_3, x\}$: v recibe el 3

Dónde se falla. En voltear un vértice suelto en lugar de la componente entera. Si se cambia solo u_3 al 1, choca con x , que ya tenía el 1; el lema lo impide exigiendo que se voltee una componente conexa completa. Y la maniobra funciona porque u_1 y u_3 están en componentes distintas. Si una cadena $1, 3, 1, \dots$ los uniera, voltearla arrastraría también a u_1 y el 3 seguiría ocupado. Qué pasa entonces es la pregunta que resuelve la planaridad en el teorema de los cinco colores.

- Ejemplo.** (a) $\chi(K_p) = p$: los p vértices son adyacentes dos a dos y necesitan colores distintos.
 (b) Si G es bipartito con alguna arista, $\chi(G) = 2$: color 1 a un lado, 2 al otro; y hace falta el 2 por la arista. En particular $\chi(T) = 2$ para todo árbol no trivial y $\chi(K_{m,n}) = 2$ si $m, n \geq 1$.
 (c) $\chi(C_{2k}) = 2$ y $\chi(C_{2k+1}) = 3$: alternando dos colores alrededor del ciclo se cierra bien si la longitud es par, y si es impar el último vértice choca con el primero y hace falta un tercero, que basta.
 (d) Si $H \subseteq G$, $\chi(H) \leq \chi(G)$: la restricción de una coloración de G es una coloración de H . Es la desigualdad que da cotas inferiores: un triángulo dentro fuerza $\chi \geq 3$, un K_4 fuerza $\chi \geq 4$, un ciclo impar fuerza $\chi \geq 3$.
 (e) Un grafo con alguna arista tiene $\chi \geq 2$; uno sin aristas, $\chi = 1$. Y siempre $\chi(G) \leq |V(G)|$.

Proposición. Sea $\Delta(G) = \max\{\delta(v) : v \in V(G)\}$. Entonces $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

La idea. El corazón en una frase: con $\Delta + 1$ colores en la mano, ningún vértice puede quedarse sin color, porque tiene a lo sumo Δ vecinos y los vecinos no pueden bloquear más de Δ colores. Sobra siempre uno, sea cual sea el orden y sea cual sea lo que se haya hecho antes: por eso basta ir coloreando de uno en uno, sin ninguna estrategia. Ese margen de un color es toda la demostración, y explica de paso por qué la cota es mala en grafos irregulares —un solo vértice de grado alto la sube para todos— y por qué Brooks, que viene después, puede rebajarla a Δ salvo en dos familias.

Primera vía, por inducción sobre el número de vértices (el núcleo de la prueba está en el recuento de colores bloqueados). Sea $p = |V(G)|$. Si $p = 1$, $\chi = 1 = \Delta + 1$. Sea $p \geq 2$ y supóngase la desigualdad para grafos con menos vértices. Sea v un vértice y $H = G - v$, con una $(\Delta(H) + 1)$ -coloración c . Si $\Delta(H) = \Delta(G)$, los vecinos de v son a lo sumo $\Delta(G)$ y usan a lo sumo $\Delta(G)$ colores de los $\Delta(G) + 1$ disponibles: queda uno libre para v . Si $\Delta(H) < \Delta(G)$, se da a v un color nuevo, y se han usado $\Delta(H) + 2 \leq \Delta(G) + 1$ colores.

Segunda vía, sin inducción: el algoritmo voraz. Se ordenan los vértices $v_1, \dots, v_p$ y se

colorea cada uno con el menor color que no tenga ninguno de sus vecinos ya coloreados. Como tiene a lo sumo Δ vecinos, siempre hay un color libre entre $1, \dots, \Delta + 1$. Esta vía explicita el procedimiento que también permite la inducción: construir la coloración en una pasada y sin retroceder nunca. ■

Ejemplo (el voraz en un camino: el orden importa). El camino P_4 con vértices a, b, c, d en fila es bipartito, así que $\chi = 2$, y tiene $\Delta = 2$. Con el orden a, b, c, d el voraz da $1, 2, 1, 2$. Con el orden a, d, b, c pasa esto: a y d reciben el 1, porque todavía no tienen vecinos coloreados; b ve a a con el 1 y recibe el 2; c ve a b con el 2 y a d con el 1, y tiene que estrenar el 3.



Tres colores en un grafo que se colorea con dos: el voraz ha llegado justo a su cota $\Delta + 1$ y se ha quedado ahí. Lo que ha fallado es que a y d se colorearon *antes* de saber que entre ellos hay un camino de longitud impar que les obliga a llevar colores distintos. En un bipartito conexo el remedio es colorear por capas, desde un vértice y en orden de distancia $(0, 1, 2, \dots)$: cada vértice solo ve coloreados vecinos de la capa anterior, que llevan todos el mismo color, y salen los dos colores. Elegir bien el orden es también la idea de Brooks, que viene a continuación.

Teorema (Brooks, 1941; sin demostración). Si G es conexo y no es un grafo completo ni un ciclo de longitud impar, entonces $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Los completos y los ciclos impares alcanzan $\Delta + 1$ (ejemplos (a) y (c)), y Brooks dice que son los únicos entre los grafos conexos. La cota de uso corriente es $\Delta + 1$, y Brooks es la que afina esa unidad cuando hace falta.

La idea de Brooks, en versión intuitiva. El voraz solo estrena el color $\Delta + 1$ cuando le llega un vértice con sus Δ vecinos ya coloreados y con Δ colores distintos. Brooks dice que, eligiendo bien el orden, eso se puede evitar siempre, salvo en las dos familias del enunciado. El caso fácil cabe en un párrafo. Si G es conexo y *no es regular*, tiene un vértice r de grado menor que Δ . Se colorea en orden de distancia a r decreciente: primero los más lejanos, r el último. Todo vértice distinto de r tiene un vecino más cercano a r (el siguiente paso de un camino más corto hacia r), que se colorea después que él. Cuando le llega el turno, ese vértice tiene como mucho $\Delta - 1$ vecinos coloreados, y le queda libre uno de los colores $1, \dots, \Delta$. Y r , el último, tiene menos de Δ vecinos en total. Así $\chi \leq \Delta$. El caso difícil es el regular, porque ningún vértice llega con holgura y hay que fabricarla: se colorean primero, con el mismo color, dos vecinos no adyacentes de un mismo vértice, que será el último y solo verá $\Delta - 1$ colores. Los detalles, que consisten en encontrar esos dos vecinos sin desconectar el resto, no se dan aquí.

Por qué esas dos excepciones. En $K_{\Delta+1}$ los Δ vecinos de cada vértice son adyacentes entre sí, así que siempre llevan Δ colores distintos: no hay orden que fabrique la holgura. En un ciclo impar ($\Delta = 2$) la holgura tampoco existe: dos colores alternados no cierran (ejemplo (c)). **Y la conexión no es un adorno:** K_4 más un vértice aislado tiene $\Delta = 3$, no es completo ni un ciclo, y necesita cuatro colores. Sin conexión, Brooks se aplica componente a componente.

Para qué sirve. El grafo de Petersen es conexo, tiene $\Delta = 3$ y no es completo ni un ciclo: Brooks da $\chi \leq 3$ sin buscar ninguna coloración, y su pentágono da $\chi \geq 3$. Luego $\chi = 3$ con

dos teoremas y ninguna cuenta. Donde Brooks no ayuda es en los grafos muy irregulares: en la rueda W_6 , con $\Delta = 5$, da $\chi \leq 5$, y el valor verdadero es 4.

LA IDEA: COLOREAR CON AVARICIA

El procedimiento «cada vértice, el menor color libre» es lo que uno hace a mano, y da siempre $\leq \Delta + 1$ colores. Lo que no da es el óptimo: el orden importa, y un mal orden puede gastar muchos más colores de los necesarios incluso en un árbol. Por eso el número cromático se calcula en dos pasos: buscar una coloración explícita (cota superior) y una cota inferior que coincida con ella. A veces basta encontrar un completo o un ciclo impar dentro; otras veces hace falta otro argumento. Si las cotas coinciden, se acabó.

Teorema (de los cuatro colores; Appel, Haken y Koch, 1976). Si G es planar, entonces $\chi(G) \leq 4$.

No es un «si y solo si»: $K_{3,3}$ no es planar y $\chi(K_{3,3}) = 2$. Su demostración es extensa y se omite aquí. Hay demostraciones publicadas con verificaciones por ordenador; la de Robertson, Sanders, Seymour y Thomas (1997) redujo la comprobación a 633 configuraciones. Lo que sí se demuestra a continuación es la versión débil, con cinco colores.

Teorema (de los cinco colores; Heawood, 1890). Si G es planar, entonces $\chi(G) \leq 5$.

LA IDEA: DOS CADENAS QUE NO PUEDEN CRUZARSE

La intuición falsa, primero, y es la que le costó once años a la comunidad matemática. Parece que el argumento de las cadenas de Kempe debería dar los cuatro colores igual de bien que los cinco: se toma un vértice de grado ≤ 5 (eso es lo que garantiza Euler), se intercambian colores por bloques y se intenta liberar uno. El caso delicado es el de cinco vecinos coloreados con cuatro colores. Kempe publicó esa demostración en 1879 y se dio por buena hasta que Heawood encontró el fallo en 1890: con cuatro colores hay que hacer *dos* intercambios seguidos, y el segundo puede deshacer lo que consiguió el primero. Con cinco colores basta uno, y por eso el argumento sobrevive. Conviene tenerlo presente, porque muestra por qué este argumento no demuestra por sí solo el teorema de los cuatro colores.

La imagen. Un vértice v rodeado por cinco vecinos, uno de cada color, como cinco sectores de una tarta. Para meter a v hace falta liberar un color, y la herramienta es esta: en el subgrafo formado solo por los vértices de dos colores, 1 y 3, cada componente conexa se puede *voltear* —cambiar todos los 1 por 3 y viceversa— sin estropear nada, porque fuera de ella no hay vecinos de esos colores. Si u_1 y u_3 estuvieran en componentes distintas, se voltea una y los dos quedan del mismo color: el otro queda libre y v entra.

Luego u_1 y u_3 tienen que estar conectados por una cadena de colores 1, 3, 1, 3, ...; y por lo mismo u_2 y u_4 por una cadena 2, 4, 2, 4, ... Y aquí entra la planaridad, de la manera más elemental posible: la primera cadena, cerrada por v , es **una curva cerrada en el plano**, y u_2 y u_4 quedan a lados distintos de ella. La segunda cadena tendría que atravesarla, y no puede: cruzar por una arista es imposible en un dibujo plano, y cruzar por un vértice exigiría que ese vértice tuviera a la vez un color de $\{1, 3\}$ y uno

de $\{2, 4\}$.

El corazón en una frase: *dos cadenas de colores disjuntos no pueden cruzarse en el plano, y toda la demostración consiste en forzar a que existan las dos.*

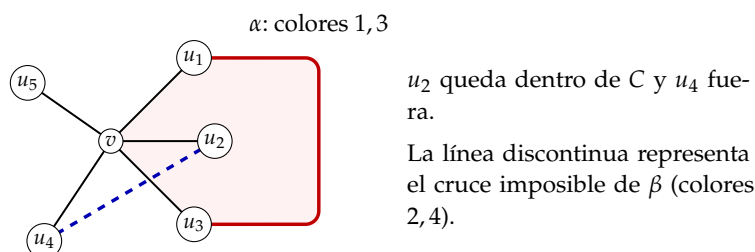
Paso 1: se toma el contraejemplo mínimo. Por reducción al absurdo: supóngase que hay grafos planares con $\chi \geq 6$ y sea G uno con el **menor número de vértices**, dibujado en el plano sin cruces. Se supone G conexo (si no, alguna componente ya sería un contraejemplo más pequeño) y con al menos 6 vértices.

Paso 2: Euler entrega un vértice de grado ≤ 5 . Si todos tuvieran grado ≥ 6 , el apretón de manos daría $2A \geq 6V$, contra $A \leq 3V - 6$: juntas dirían $6V \leq 2A \leq 6V - 12$, que es imposible.

Paso 3: el caso fácil se descarta, y queda la configuración de la tarta. Sea v con $\delta(v) \leq 5$. Por minimalidad, $G - v$ es 5-coloreable; sea c una 5-coloración suya. Si algún color no aparece entre los vecinos de v , se le da a v y G queda 5-coloreado: imposible. Luego los vecinos de v usan los cinco colores y hay exactamente cinco. Se nombran $u_1, \dots, u_5$ en el orden en que aparecen alrededor de v en sentido horario; después se reenumeran los colores para que u_i tenga color i .

Paso 4: los pares de vecinos están unidos por cadenas de dos colores. Para $i < j$ sea G_{ij} el subgrafo de $G - v$ inducido por los vértices de colores i y j . Los vértices u_i y u_j están en la **misma** componente de G_{ij} : si no, por el lema se intercambian i y j en la componente de u_j , y queda una 5-coloración de $G - v$ en la que u_i y u_j tienen el mismo color i , con lo que el color j queda libre para v , imposible por lo anterior.

Paso 5: las dos cadenas tendrían que cruzarse, y en el plano no pueden (el núcleo de la prueba). Aquí se vuelve a usar la planaridad: en el paso 2 dio la cota de Euler; ahora impide el cruce de las cadenas. Hay entonces un arco α en G_{13} de u_1 a u_3 , con colores alternando $1, 3, 1, \dots, 3$, y un arco β en G_{24} de u_2 a u_4 , con colores $2, 4, 2, \dots, 4$. El ciclo $C = v u_1 \alpha u_3 v$ está dibujado sin cruces y parte el plano en dos regiones; como u_2 y u_4 están a lados distintos de v entre u_1 y u_3 en el orden circular, quedan en regiones distintas de C . El arco β va de u_2 a u_4 sin cruzar ninguna arista (el dibujo es plano), luego tiene que pasar por algún vértice de C . Ese vértice no es v (que no está en $G - v$), así que está en α y tiene color 1 o 3; pero está en β y tiene color 2 o 4. Contradicción. Luego no hay contraejemplo. ■



Lo que hay que llevarse. Tres movimientos reconstruyen la prueba. Primero, en un contraejemplo mínimo Euler da un vértice v de grado ≤ 5 , y la minimalidad obliga a que sus vecinos, en $G - v$ ya coloreado, lleven los cinco colores. Segundo, dos vecinos no consecutivos, u_1 y u_3 , tienen que estar en la misma cadena de Kempe: si no, se voltea una y queda un color

libre. Tercero, lo mismo vale para u_2 y u_4 , y esa segunda cadena tendría que cruzar la curva cerrada que forman v y la primera, cosa que un dibujo plano no permite. La planaridad se usa dos veces, y para cosas distintas: en el primer movimiento, a través de Euler; en el tercero, a través del teorema de la curva de Jordan.

DE DÓNDE VIENE: LOS ONCE AÑOS DE LA DEMOSTRACIÓN DE KEMPE

Alfred Kempe publicó en 1879 lo que se tuvo por una demostración del teorema de los cuatro colores, con este mismo argumento de cadenas. Percy Heawood encontró el fallo en 1890 —los dos intercambios que hacen falta con cuatro colores pueden estorbarse— y de los escombros salvó el teorema de los cinco colores tal como está aquí. La distancia entre los dos resultados no se cerró hasta 1976, y solo con ayuda de un ordenador. Las cadenas de Kempe, en cambio, siguen siendo una herramienta viva: reaparecen en la demostración de König al final del capítulo.

Proposición (planar sin triángulos). • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN Si G es planar y no contiene triángulos, entonces $\chi(G) \leq 4$.

El corazón en una frase: prohibir los triángulos abarata el techo de aristas de $3V - 6$ a $2V - 4$, y ese abaratamiento **regala un vértice de grado ≤ 3** ; con un vértice así, colorear es meterlo al final y darle el color que sus tres vecinos no han gastado. No hacen falta cadenas de Kempe: la cota de Euler hace todo el trabajo.

Preparación: inducción sobre el número de vértices, con G conexo. Con $V \leq 4$ cada vértice puede llevar su propio color. Sea $V \geq 5$ y supóngase el resultado para los grafos planares sin triángulos con menos vértices. Se puede suponer G conexo: si no lo es, cada componente tiene menos vértices y es 4-coloreable por hipótesis de inducción, y las coloraciones de las componentes, juntas, colorean G , porque entre componentes no hay aristas. Hace falta decirlo porque la cota $A \leq 2V - 4$ se ha demostrado para grafos conexos, y al quitar un vértice el grafo puede desconectarse.

Paso 1: la cota de los planares sin triángulos regala un vértice de grado ≤ 3 (el núcleo de la prueba). Se prueba primero que **hay un vértice de grado ≤ 3** : si todos tuvieran grado ≥ 4 , $2A \geq 4V$, contra la cota $A \leq 2V - 4$ de los planares sin triángulos (válida con $V \geq 3$; con $V \leq 2$ no hay nada que probar). Juntas dirían $4V \leq 2A \leq 4V - 8$, que es imposible.

Paso 2: inducción quitando ese vértice y devolviéndolo al final. Sea v de grado ≤ 3 ; $G - v$ es planar y sin triángulos, luego 4-coloreable por hipótesis de inducción; sus a lo sumo tres vecinos usan a lo sumo tres colores, y el cuarto queda libre para v .

Hay un camino alternativo: probar primero que hay un vértice de grado ≤ 4 y repetir el argumento de las cadenas de Kempe con cuatro colores ($u_1, \dots, u_4$ alrededor de v y las cadenas 1-3 y 2-4). Funciona igual. Pero la cota $2V - 4$ da directamente grado ≤ 3 , y con grado ≤ 3 el color libre aparece solo: se ahorran las cadenas enteras. Es un buen ejemplo de que una cota mejor sustituye a un argumento ingenioso. ■

Otra vía (con un vértice de grado ≤ 4 y cadenas de Kempe, paso a paso). Es el camino de la demostración de los cinco colores con un color menos. Arranca de una afirmación más débil, que hay un vértice de grado ≤ 4 , y compensa la debilidad con las cadenas de Kempe.

Paso 1: hay un vértice de grado ≤ 4 . Es más débil que lo anterior: si todos tuvieran grado

≥ 5 , $5V \leq 2A \leq 4V - 8$, imposible. La hipótesis «sin triángulos» se usa aquí y en ningún otro sitio.

Paso 2: el caso fácil. Sea G un contraejemplo con el menor número de vértices (conexo, como en la preparación), v de grado ≤ 4 y c una 4-coloración de $G - v$. Si los vecinos de v no usan los cuatro colores, v toma el que falta. Si los usan, v tiene exactamente cuatro vecinos u_1, u_2, u_3, u_4 , en ese orden alrededor de v en el dibujo, y se reenumeran los colores para que u_i lleve el color i .

Paso 3: las cadenas. Si u_1 y u_3 están en componentes distintas del subgrafo de colores 1 y 3, se voltea la de u_3 , como en el ejemplo de la cadena de Kempe: u_1 y u_3 llevan el 1 y el 3 queda libre para v . Luego hay una cadena de colores 1, 3, 1, ... de u_1 a u_3 . Por lo mismo, hay una cadena de colores 2, 4, 2, ... de u_2 a u_4 .

Paso 4: el cruce imposible (el núcleo). La cadena 1–3, cerrada por v , es un ciclo dibujado sin cruces que deja a u_2 y a u_4 en lados distintos. La cadena 2–4 tendría que atravesarlo por un vértice, y ese vértice llevaría a la vez un color de $\{1, 3\}$ y uno de $\{2, 4\}$. Contradicción.

Aquí basta un intercambio por pareja por la misma razón que en los cinco colores: v tiene tantos vecinos como colores hay. El apuro que hundió la demostración de Kempe aparece con cinco vecinos y solo cuatro colores, que es justo lo que la hipótesis «sin triángulos» evita.

Lo que hay que llevarse. Sin triángulos cada cara tiene al menos cuatro lados, el techo de Euler baja a $2V - 4$ y aparece un vértice de grado ≤ 3 . Se quita, se colorea el resto por inducción y se devuelve con el color que sus tres vecinos dejan libre. La inducción necesita dos comprobaciones de una línea: quitar un vértice no crea triángulos ni cruces, y el grafo se puede suponer conexo.

Dónde se falla. En usar el techo $3V - 6$: da solo un vértice de grado ≤ 5 , y con cinco vecinos cuatro colores no bastan sin más, porque eso ya es el terreno del teorema de los cuatro colores. En aplicar $A \leq 2V - 4$ sin comprobar $V \geq 3$ y la conexión. Y en esperar más del recuento: el cubo Q_3 es planar, sin triángulos, tiene $12 = 2 \cdot 8 - 4$ aristas y todos sus vértices de grado 3, así que «grado ≤ 3 » no se puede mejorar a «grado ≤ 2 ».

Hasta dónde llega. La cota no es la mejor posible. Grötzsch demostró en 1959 que los planares sin triángulos se colorean con *tres* colores, con una prueba mucho más difícil. Lo que aquí se obtiene con una cuenta de aristas es el cuatro.

Observación (Heawood). Para grafos de género $n \geq 1$, $\chi(G) \leq \lfloor (7 + \sqrt{48n + 1})/2 \rfloor$. En el toro, 7, y el mapa de la sección anterior muestra que 7 hace falta.

La fórmula, con números. Con $n = 1$, $\sqrt{49} = 7$ y sale $(7 + 7)/2 = 7$. Con $n = 2$ (el doble toro), $\sqrt{97} \approx 9,85$ y sale $\lfloor 8,42 \rfloor = 8$; con $n = 3$, $\sqrt{145} \approx 12,04$ y sale 9. Cada asa añade sitio, pero cada vez menos: el número de colores crece como la raíz del género. Y con $n = 0$ la fórmula da $(7 + 1)/2 = 4$, los cuatro colores del plano. La demostración de Heawood necesita $n \geq 1$ en uno de sus pasos, y no vale para $n = 0$; por eso el plano, que es el caso que la fórmula acierta, fue el último en demostrarse.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: DEFINIR EL NÚMERO CROMÁTICO POR PARTICIONES

La alternativa. Definir $\chi(G)$ como el menor número de partes de una partición de $V(G)$ en conjuntos sin aristas dentro (*conjuntos independientes*), sin hablar de colores.

Su ventaja. Es lo mismo dicho sin decoración, y hace visible que colorear es partir en independientes: las clases cromáticas. Las demostraciones sobre clases cromáticas son más naturales así.

Por qué se conservan los colores. Hacen cómodo describir el intercambio de Kempe mediante la aplicación c ; en la partición es la misma operación, redistribuyendo entre dos clases los vértices de una componente. Además, en las aplicaciones (horarios, frecuencias, registros) los colores representan franjas, canales o registros. Las dos vistas describen el mismo problema.

Ejercicios: número cromático

Ejercicio 6.1. Los números cromáticos de siempre R6.2

Calcular el número cromático de: (i) C_n ; (ii) K_p ; (iii) $K_{p,q}$; (iv) un árbol; (v) el grafo de Petersen; (vi) las ruedas W_n ; (vii) M_8 .

Resolución. La idea. Cada número cromático se encierra entre dos cotas. Por debajo, un subgrafo que obliga: un completo, un ciclo impar, o un ciclo impar con un vértice unido a todos los suyos. Por arriba, una coloración escrita y comprobada arista por arista. Cuando las dos coinciden, el número está calculado.

(i)–(iv) están en los ejemplos: 2 o 3 según la paridad, p , 2 si $p, q \geq 1$, y 2 para un árbol no trivial. El árbol K_1 necesita solo un color; lo mismo ocurre en un bipartito completo sin aristas y con algún vértice.

(v) Petersen contiene C_5 , luego $\chi \geq 3$. Una 3-coloración: pentágono 0, 1, 2, 3, 4 con colores 1, 2, 1, 2, 3 y estrella 5, 6, 7, 8, 9 con colores 2, 3, 3, 1, 1. Se comprueba arista por arista: radios 05 (1, 2), 16 (2, 3), 27 (1, 3), 38 (2, 1), 49 (3, 1); estrella 57 (2, 3), 79 (3, 1), 96 (1, 3), 68 (3, 1), 85 (1, 2). Luego $\chi = 3$.

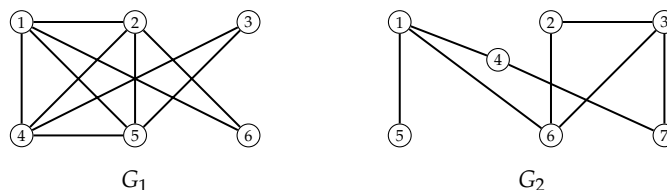
(vi) $W_n = K_1 + C_{n-1}$: el centro necesita un color propio, y el ciclo 2 o 3. Así $\chi(W_n) = 3$ si n es impar (ciclo par) y 4 si n es par (ciclo impar): $\chi(W_5) = 3$, $\chi(W_6) = 4$, y en el segundo caso $K_4 \not\subseteq W_6$, así que la cota inferior viene del ciclo impar más el centro.

(vii) M_8 contiene el ciclo impar 012340: $\chi \geq 3$. Tres colores bastan: 0, 1, 2, 3 con 1, 2, 1, 2 y 4, 5, 6, 7 con 3, 1, 2, 3. Se comprueba: ciclo 01, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 70 da (1, 2), (2, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1), y diagonales 04 (1, 3), 15 (2, 1), 26 (1, 2), 37 (2, 3). Luego $\chi(M_8) = 3$. ■

Dónde se falla. En creer que sin un K_4 bastan tres colores. W_6 no contiene ningún K_4 (tres vértices de su pentágono nunca son adyacentes dos a dos) y necesita cuatro: el centro gasta un color que ningún vértice del ciclo puede usar, y el ciclo impar necesita tres más. Es $\chi(K_1 + C_5) = 1 + 3$, un caso del ejercicio de la suma que viene después. Por la misma razón es falso que $\chi(G) = n$ obligue a contener un K_n : C_5 tiene $\chi = 3$ y ningún triángulo. Y en Petersen, en quedarse con la cota $\Delta + 1 = 4$: Brooks la baja a 3.

Ejercicio 6.2. Los dos grafos dibujados de la relación R6.3

Calcular el número cromático de G_1 y G_2 .



Resolución. La idea. Es el método de las dos cotas aplicado a un dibujo. Primero se busca el mayor grupo de vértices adyacentes dos a dos o, si no lo hay grande, un ciclo impar: eso da la cota inferior. Después se colorea empezando por ese grupo, que obliga, y se sigue por los vértices con más vecinos ya coloreados, porque son los que menos opciones dejan y los que antes delatan un error.

G_1 . Seis vértices, 10 aristas. Los vértices 1, 2, 4, 5 son adyacentes dos a dos (12, 14, 15, 24, 25, 45): un K_4 , luego $\chi(G_1) \geq 4$. Y cuatro colores bastan: $1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 4 \mapsto 3, 5 \mapsto 4$, y para los otros dos, $3 \mapsto 1$ (sus vecinos son 4 y 5, colores 3 y 4) y $6 \mapsto 3$ (sus vecinos son 1 y 2, colores 1 y 2). Luego $\chi(G_1) = 4$.

G_2 . Siete vértices, 8 aristas (15, 14, 47, 16, 23, 26, 36, 37). El triángulo 236 da $\chi(G_2) \geq 3$. Tres colores bastan: $1 \mapsto 1, 4 \mapsto 2, 5 \mapsto 2, 6 \mapsto 3, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 2, 7 \mapsto 1$; se comprueban las ocho aristas: 15 (1, 2), 14 (1, 2), 47 (2, 1), 16 (1, 3), 23 (1, 2), 26 (1, 3), 36 (2, 3), 37 (2, 1). Luego $\chi(G_2) = 3$. ■

Dónde se falla. En leer mal el dibujo. En G_1 las líneas 16 y 34 se cruzan sin que el cruce sea un vértice, y un K_4 hay que comprobarlo con sus seis aristas, una por una. Y en dar el número sin la coloración, o la coloración sin comprobarla: en G_2 son ocho aristas y se miran las ocho. Si en un dibujo no aparece ningún completo grande, la cota inferior puede venir de un ciclo impar con un vértice unido a todo él, como en W_6 .

Ejercicio 6.3. Aristas entre clases R6.4; EXÁMENES DE ENERO 2013 Y 2024–25

Sea G conexo de orden n y tamaño q , con $\chi(G) = k \geq 2$, y c una k -coloración.

- Probar que ninguna clase cromática es vacía.
- Probar que entre dos clases cualesquiera hay al menos una arista, y deducir $k(k-1) \leq 2q$.
- Sea F el grafo con un vértice por clase y una arista entre dos clases cuando hay una arista de G entre ellas. Probar que $F \simeq K_k$.
- Probar que alguna clase tiene al menos n/k vértices.

• CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

Resolución. La idea. Las cuatro afirmaciones salen de una sola: c usa el número mínimo de colores, así que cualquier maniobra que ahorre un color es imposible. Vaciar una clase ahorraría un color: por eso no hay clases vacías. Fundir dos clases sin aristas entre ellas ahorraría otro: por eso hay aristas entre cada dos. Y (d) es solo un reparto de n vértices en k clases.

(a) Si la clase del color i fuera vacía, c sería una coloración con los $k-1$ colores restantes (renumerándolos si $i < k$), contra la minimalidad de k .

(b) Sean $i \neq j$ dos colores. Si no hubiera ninguna arista entre la clase i y la clase j , se podría recolorear toda la clase j con el color i : dos vértices que reciban el mismo color i están ambos en la antigua clase i o en la j o uno en cada una, y en ningún caso son adyacentes. Sería una

$(k-1)$ -coloración, imposible. Luego cada uno de los $\binom{k}{2}$ pares de clases tiene al menos una arista, y esas aristas son distintas para pares distintos (una arista une exactamente dos clases): $\binom{k}{2} \leq q$, es decir, $k(k-1) \leq 2q$.

(c) Por (a), F tiene exactamente k vértices; por (b), cada par de ellos es adyacente. Un grafo con k vértices adyacentes dos a dos es K_k .

(d) Las k clases parten los n vértices; si todas tuvieran menos de n/k vértices, la suma sería menor que n . Luego alguna tiene al menos n/k (y al menos $\lceil n/k \rceil$, por ser entera). ■

QUÉ DEJA. Todo sale de una idea: si una coloración óptima permitiera ahorrar un color, no sería óptima. De ahí salen las clases no vacías y las aristas entre cada par de clases, que hacen completo a F . Son condiciones necesarias, no un criterio suficiente de optimalidad: el camino con colores consecutivos 1, 2, 3, 1 las cumple y, sin embargo, se colorea con dos colores.

Dónde se falla. En olvidar que c usa $\chi(G)$ colores. Con una coloración que no sea óptima, (a) y (b) son falsas: P_3 coloreado 1, 2, 3 tiene las clases 1 y 3 sin aristas entre ellas, y fundirlas, repintando el 3 de 1, da una 2-coloración. Es exactamente la maniobra que la optimalidad prohíbe. En (b), en contar $k(k-1)$ aristas: cada *par* de clases aporta una, y los pares son $\binom{k}{2}$. Y en (d), en escribir «alguna clase tiene n/k vértices» cuando n/k no es entero; lo que se prueba es «al menos $\lceil n/k \rceil$ ».

Ejercicio 6.4. Un vértice de grado pequeño R6.5

Sea u un vértice de G con $\delta(u) < n$. Probar que G es n -coloreable si y solo si $G - u$ lo es.

Resolución. Si G es n -coloreable, la restricción a $G - u$ es una n -coloración. Recíprocamente, dada una n -coloración de $G - u$, los vecinos de u son a lo sumo $n-1$ y usan a lo sumo $n-1$ colores; queda uno libre para u . (Es el paso de la cota $\Delta + 1$, y el que se ha usado en la demostración de los cinco colores para descartar los vértices de grado ≤ 4 .) ■

Ejercicio 6.5. Exactamente un ciclo impar; subdividir R6.6; EXAMEN DE 2025–26

(a) Sea G un grafo con exactamente un ciclo de longitud impar. Probar que $\chi(G) = 3$. (b) Sea H el grafo que resulta de subdividir una vez cada arista de un grafo G con alguna arista. ¿Es cierto que $\chi(H) = 2$? • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

Resolución. La idea. (a) Se quita una arista del ciclo impar: lo que queda es bipartito, y su 2-coloración falla en un solo sitio, que se arregla con un tercer color. (b) Subdividir duplica la longitud de cada ciclo, y un ciclo de longitud par no molesta a dos colores.

(a) Sea C el ciclo impar y $a = uv$ una arista suya. $\chi(G) \geq \chi(C) = 3$. El grafo $G - a$ no tiene ciclos impares (el único que había usaba a), luego es bipartito y tiene una 2-coloración c . Como $C - a$ es un camino de longitud par de u a v con colores alternados, $c(u) = c(v)$. Se define c' igual que c salvo $c'(u) = 3$: es una 3-coloración de G , porque la única arista que podía fallar, uv , tiene ahora colores 3 y $c(v)$. Luego $\chi(G) = 3$.

(b) **Verdadero.** Cada ciclo de G de longitud ℓ se convierte en un ciclo de H de longitud 2ℓ , y todo ciclo de H proviene así de uno de G (los vértices nuevos tienen grado 2). Luego H no tiene ciclos impares, es bipartito, y como tiene aristas, $\chi(H) = 2$. ■

Otra vía (del segundo apartado, en una línea). Se da el color 1 a los vértices de G y el 2 a

los nuevos. Cada arista de G se ha partido en dos mitades, y cada mitad une un vértice viejo con el punto medio nuevo: ninguna arista de H une dos vértices del mismo color. Es una 2-coloración sin mirar ningún ciclo, y el 2 hace falta porque H tiene aristas.

Dónde se falla. En (b), en olvidar la hipótesis de que haya alguna arista: si G no tiene aristas, subdividir no cambia nada y $\chi(H) = 1$. En (a), en quitar una arista que no sea del ciclo impar: el ciclo sigue ahí y $G - a$ no es bipartito. Y en el recoloreo: los extremos u y v de la arista quitada llevan el *mismo* color porque el camino $C - a$ entre ellos tiene longitud par; por eso hace falta el tercer color, y basta ponerlo en uno de los dos.

Ejercicio 6.6. Comités y franjas horarias R6.7

Seis comités se reúnen un día al mes: $C_1 = \{\text{Fernando, Marta, Carmen}\}$, $C_2 = \{\text{Marta, Manuel, Carlos}\}$, $C_3 = \{\text{Fernando, Carlos, Carmen}\}$, $C_4 = \{\text{Manuel, Carlos, Carmen}\}$, $C_5 = \{\text{Marta, Carlos, Carmen}\}$, $C_6 = \{\text{Fernando, Marta}\}$. ¿Cuántas horas de reunión distintas hacen falta como mínimo para que nadie tenga dos reuniones a la vez?

Resolución. Se toma el grafo con un vértice por comité y una arista entre dos comités con algún miembro común. Una coloración es un horario: cada color, una franja; comités adyacentes van en franjas distintas. Hay que calcular χ . Los pares con miembro común: C_1 con C_2 (Marta), C_3 (Fernando, Carmen), C_4 (Carmen), C_5 (Marta, Carmen), C_6 (Fernando, Marta); C_2 con C_3 (Carlos), C_4 (Manuel, Carlos), C_5 (Marta, Carlos), C_6 (Marta); C_3 con C_4 (Carlos, Carmen), C_5 (Carlos, Carmen), C_6 (Fernando); C_4 con C_5 (Carlos, Carmen); C_5 con C_6 (Marta). Solo C_4 y C_6 no son adyacentes. Así $G - C_4 = K_5$ y $\chi \geq 5$; y cinco bastan dando a C_4 y C_6 el mismo color y a los demás uno propio. **Cinco franjas.** ■

Dónde se falla. En elegir mal los vértices: se colorean los comités, que son lo que se reparte en franjas, no las personas. Y en contar seis franjas por tener seis comités: C_4 y C_6 no comparten a nadie y caben a la misma hora. El grafo es K_6 menos una arista, y le basta un color menos que a K_6 .

Ejercicio 6.7. Siete colores en el toro R6.8

Comprobar que cuatro colores no bastan para colorear cualquier mapa sobre el toro. ¿Cuántos hacen falta?

Resolución. El mapa de siete hexágonos de la sección 6.1 tiene siete regiones vecinas dos a dos: necesita siete colores, luego cuatro no bastan. Por la cota de Heawood siete siempre bastan en el toro, así que la respuesta es exactamente **siete**. ■

Ejercicio 6.8. El número cromático de una suma R6.9; EXAMEN DE 2011-12

Sean G_1, G_2 conexos con $n_1 = \chi(G_1)$, $n_2 = \chi(G_2)$ y $G = G_1 + G_2$. (a) Calcular $\chi(K_3 + P_3)$. (b) Probar $\chi(G) \geq n_1 + n_2$. (c) Dar una $(n_1 + n_2)$ -coloración de G y concluir $\chi(G) = n_1 + n_2$. •

CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

Resolución. La idea. Los dos sumandos no pueden compartir ningún color, porque todo vértice de uno es vecino de todo vértice del otro. Los colores se reparten entonces en dos

bloques separados, y cada bloque colorea un sumando, así que necesita al menos su número cromático: eso es (b). Y dos coloraciones óptimas con bloques de colores disjuntos, juntas, funcionan: eso es (c).

(b) Sea c una coloración óptima de G con $n = \chi(G)$ colores, todos usados. Como todo vértice de G_1 es adyacente a todo vértice de G_2 , los colores que aparecen en G_1 y los que aparecen en G_2 son conjuntos disjuntos, y su unión son los n colores. Las restricciones $c|_{G_1}$ y $c|_{G_2}$ son coloraciones con n'_1 y n'_2 colores, $n'_1 + n'_2 = n$, luego $n_1 \leq n'_1$, $n_2 \leq n'_2$ y $n_1 + n_2 \leq n$.

(c) Con coloraciones óptimas c_1 de G_1 (colores $1, \dots, n_1$) y c_2 de G_2 (colores $1, \dots, n_2$), se define $c(v) = c_1(v)$ en G_1 y $c(v) = c_2(v) + n_1$ en G_2 . Las aristas interiores a cada sumando están bien por c_1, c_2 , y las cruzadas unen colores $\leq n_1$ con colores $> n_1$. Luego $\chi(G) \leq n_1 + n_2$, y con (b), igualdad.

(a) $\chi(K_3) = 3, \chi(P_3) = 2$ (bipartito con arista): $\chi(K_3 + P_3) = 5$. ■

Qué hemos aprendido. La conexión de G_1 y G_2 no se usa en ningún paso: la fórmula vale para dos grafos cualesquiera con algún vértice. Por ejemplo, dos vértices aislados más uno dan P_3 , con $\chi = 2 = 1 + 1$. En la unión por un vértice del ejercicio siguiente los colores sí se comparten, y por eso allí sale el máximo en vez de la suma. **Dónde se falla:** en (b), en suponer que la restricción de c a G_1 usa exactamente n_1 colores. Puede usar más; lo que se prueba es $n_1 \leq n'_1$, y con eso basta.

Ejercicio 6.9. Unión por uno o dos vértices R6.12

Sean G_1, G_2 con números cromáticos n_1, n_2 . (a) Si tienen exactamente un vértice común u , probar que $\chi(G_1 \cup G_2) = \max\{n_1, n_2\}$. (b) ¿Qué pasa si tienen dos vértices comunes u, v ?

Resolución. (a) $\chi(G_1 \cup G_2) \geq \max$ porque contiene a ambos. Para la otra desigualdad, sea $m = \max\{n_1, n_2\}$ y tómense m -coloraciones c_1, c_2 de G_1, G_2 ; permutando los colores de c_2 se consigue $c_2(u) = c_1(u)$, y entonces $c_1 \cup c_2$ es una m -coloración de la unión (toda arista está en G_1 o en G_2).

(b) Ya no es cierto en general, y conviene ver exactamente dónde se rompe el argumento de (a). Con un solo vértice común basta permutar los colores de c_2 para que coincida con c_1 en u ; con dos, hay que alinear las dos coloraciones *a la vez* en u y en v , y eso solo se puede hacer si el par $(c_2(u), c_2(v))$ y el par $(c_1(u), c_1(v))$ son del mismo tipo, es decir, si en los dos los colores coinciden o en los dos son distintos.

Cuándo sí sale máx. Si uv es arista **de los dos** grafos, en cualquier coloración de cada uno los colores de u y v son distintos, hay una permutación que lleva $(c_2(u), c_2(v))$ a $(c_1(u), c_1(v))$, y $c_1 \cup c_2$ colorea la unión con $m = \max\{n_1, n_2\}$ colores: $\chi(G_1 \cup G_2) = \max\{n_1, n_2\}$.

Que sean adyacentes en uno solo no basta, y el contraejemplo es minúsculo: $G_1 = K_2$ con vértices u, v y $G_2 = P_3$ con extremos u, v . Los dos son 2-coloreables, pero en toda 2-coloración de P_3 los extremos llevan el *mismo* color, mientras que en G_1 tienen que llevar colores distintos. La unión es el triángulo: $\chi = 3 > 2 = \max$.

Y si no son adyacentes en ninguno, también puede subir. $G_1 = G_2 = P_3$ con extremos u, v (cada uno 2-coloreable, con u, v del mismo color) pegados por u, v dan C_4 , con $\chi = 2 = \max$; pero $G_1 = P_3$ y $G_2 = P_4$, ambos con extremos u, v , dan C_5 , con $\chi = 3 > 2 = \max$: en P_4 los extremos llevan colores distintos y en P_3 iguales, y no hay permutación que lo arregle.

Lo que sí vale siempre: sube como mucho una unidad. $\chi(G_1 \cup G_2) \leq \max\{n_1, n_2\} + 1$. En efecto, con $m = \max$ se toman m -coloraciones c_1, c_2 , se permutan los colores de c_2 para que coincidan

en u , y se le da a v un color nuevo, el $m + 1$. Ninguna arista queda mal: las de G_1 llevan c_1 , las de G_2 llevan c_2 , en u las dos dicen lo mismo, y v lleva un color que no tiene nadie más. El C_5 de arriba enseña que la cota se alcanza. ■

Ejercicio 6.10. Tres afirmaciones R6.13

Sea G simple y conexo. ¿Verdadero o falso? (a) Si G es 4-coloreable, es planar. (b) Si G no es planar, $\chi(G) \geq 4$. (c) Si G es planar maximal, $\chi(G) \leq 3$.

Resolución. (a) **Falso:** $K_{3,3}$ es 2-coloreable (luego 4-coloreable, sobrando colores) y no es planar. (b) **Falso:** el mismo $K_{3,3}$, con $\chi = 2$. (c) **Falso:** K_4 es planar maximal y $\chi(K_4) = 4$. (Un planar maximal con ≥ 3 vértices tiene todas las caras triangulares, luego $\chi \geq 3$; y por los cuatro colores, $\chi \leq 4$.) ■

6.3 Coloración de aristas

LA PREGUNTA

Quien organiza una liga tiene que repartir los partidos en jornadas de modo que ningún equipo juegue dos veces el mismo día, y quiere el menor número de jornadas. Quien hace el horario de un instituto reparte las clases en franjas de modo que ningún profesor ni ningún grupo tenga dos a la vez. Los dos problemas son el mismo: colorear las aristas de un grafo (partidos, clases) de modo que dos aristas que se toquen (mismo equipo, mismo profesor) lleven colores distintos. ¿Cuántas jornadas hacen falta, y por qué la respuesta es casi siempre «tantas como partidos tiene el equipo más ocupado»?

Definición (coloración por aristas). Una n -**coloración por aristas** de G es una aplicación $c' : A(G) \rightarrow \{1, \dots, n\}$ tal que dos aristas incidentes (con un extremo común) reciben colores distintos. El **índice cromático** $\chi'(G)$ es el menor $n \geq 0$ para el que G admite una. Si no hay aristas, vale 0.

Cada clase de color es un conjunto de aristas que no se tocan dos a dos, un **emparejamiento**: colorear aristas es partir $A(G)$ en emparejamientos. Es la versión por aristas de todo lo anterior, pero aquí una cota universal independiente del grado es imposible: una estrella con n aristas necesita n colores.

Lema. • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.

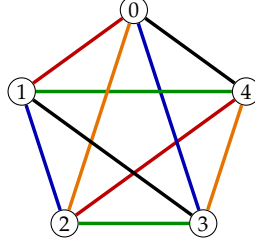
Las $\Delta(G)$ aristas de un vértice de grado máximo son incidentes dos a dos y necesitan colores distintos. ■

Si $H \subseteq G$, $\chi'(H) \leq \chi'(G)$. Y $\chi'(C_n) = \chi(C_n)$: 2 si n es par, 3 si es impar, alternando colores alrededor del ciclo (las aristas de un ciclo se tocan como sus vértices: cada una con la siguiente). Con los completos y los bipartitos completos hay que trabajar.

Ejemplo ($\chi'(K_{2n+1}) = 2n + 1$, $n \geq 1$). Se dibuja K_{2n+1} como un polígono regular de $2n + 1$ lados con todas sus diagonales. En un polígono regular con un número impar de lados, *toda diagonal es paralela a exactamente un lado*. Se da un color a cada lado y a cada diagonal el

color del lado paralelo. Dos aristas del mismo color son paralelas, luego no se tocan: es una $(2n + 1)$ -coloración. Por tanto $\chi'(K_{2n+1}) \leq 2n + 1$.

No se puede con $2n$: cada clase de color es un emparejamiento, y un emparejamiento en $2n + 1$ vértices tiene a lo sumo n aristas (cada una gasta dos vértices). Con $2n$ colores se cubrirían a lo sumo $2n \cdot n = 2n^2$ aristas, y K_{2n+1} tiene $n(2n + 1) = 2n^2 + n$. Luego $\chi'(K_{2n+1}) = 2n + 1$.



K_5 con cinco colores: cada diagonal, como el lado paralelo

En la figura, el lado 01 y la diagonal 24 son paralelos y llevan el mismo color, y así los otros cuatro pares. En cada vértice llegan las cuatro aristas de cuatro colores distintos, y falta exactamente uno: el del lado opuesto. Ese detalle es el que resuelve el caso par.

Por qué toda diagonal es paralela a un solo lado. Se numeran los vértices $0, \dots, 2n$ alrededor del polígono y se trabaja módulo $N = 2n + 1$. La cuerda que une i y j es perpendicular a la dirección que apunta al punto medio del arco entre ellos, y esa dirección solo depende de $i + j$: dos cuerdas son paralelas exactamente cuando $i + j \equiv k + l \pmod{N}$. Los lados son las cuerdas $\{i, i + 1\}$, de suma $2i + 1$, y como N es impar, $2i + 1$ recorre todos los restos módulo N cuando i recorre $0, \dots, 2n$: cada suma es la de un lado, y de uno solo. La coloración es entonces, con los colores numerados $0, \dots, 2n$,

$$c(ij) = i + j \pmod{2n + 1},$$

y se comprueba de un vistazo: dos aristas que salen de i hacia j y hacia k tienen sumas $i + j \neq i + k$. En la figura, 01 y 24 suman 1 y $6 \equiv 1$. La fórmula dice también qué color le falta a cada vértice: el que pediría $j = i$, es decir, $2i \pmod{N}$. Al 0 le falta el 0 , al 1 el 2 , al 2 el 4 , al 3 el 1 y al 4 el 3 , y cada uno es el color del lado opuesto.

Ejemplo ($\chi'(K_{2n}) = 2n - 1$). Con $n = 1$, K_2 tiene una sola arista y un color basta: $\chi'(K_2) = 1 = 2n - 1$. Sea ahora $n \geq 2$. Sea φ la $(2n - 1)$ -coloración anterior de K_{2n-1} . Cada vértice u tiene grado $2n - 2$, así que le falta exactamente un color, su **color ausente**. Y a vértices distintos les faltan colores distintos: cada clase de color es un emparejamiento de K_{2n-1} , tiene a lo sumo $n - 1$ aristas, y como las $2n - 1$ clases suman $(2n - 1)(n - 1)$ aristas, cada clase tiene exactamente $n - 1$ aristas y deja sin cubrir exactamente un vértice. Luego cada color está ausente en un solo vértice, y como cada vértice tiene un solo color ausente, la correspondencia vértice $\mapsto$ color ausente es una biyección.

Ahora $K_{2n} = K_{2n-1} + v$: se colorea la arista nueva $u_i v$ con el color ausente en u_i . En u_i no hay conflicto (ese color no estaba), y en v tampoco porque los $2n - 1$ colores ausentes son distintos. Es una $(2n - 1)$ -coloración, y $\Delta(K_{2n}) = 2n - 1$ da la otra desigualdad.

Con la fórmula de la suma, y con $n = 2$. Con $c(ij) = i + j \pmod{2n - 1}$ el color ausente en u_i es $2i \pmod{2n - 1}$, y la biyección se ve sin contar: como $2n - 1$ es impar, $i \mapsto 2i$ no repite restos. Con $n = 2$ se parte de K_3 con $c(01) = 1$, $c(02) = 2$ y $c(12) = 0$. A los vértices

0, 1, 2 les faltan 0, 2, 1, y las aristas nuevas $0v, 1v, 2v$ llevan esos colores. K_4 queda con tres colores, cada uno formado por dos aristas opuestas: $\{12, 0v\}$, $\{01, 2v\}$ y $\{02, 1v\}$.

Ejemplo ($\chi'(K_{m,n}) = \max\{m, n\}$, $m, n \geq 1$). Primero $K_{N,N}$ con lados $X = \{x_0, \dots, x_{N-1}\}$ e $Y = \{y_0, \dots, y_{N-1}\}$. Para $j = 0, \dots, N-1$ sea $A_j = \{x_i y_{i+j} : 0 \leq i \leq N-1\}$, con índices módulo N . Cada A_j tiene N aristas que no se tocan (un x_i y un y_{i+j} cada una, todos distintos), los A_j son disjuntos y entre todos suman $N^2 = |A(K_{N,N})|$ aristas: son una partición en N emparejamientos, es decir, una N -coloración. Con $\Delta = N$, $\chi'(K_{N,N}) = N$. Para m, n cualesquiera, $K_{m,n} \subseteq K_{N,N}$ con $N = \max\{m, n\}$, luego $\chi'(K_{m,n}) \leq N$, y $\Delta(K_{m,n}) = N$ da la igualdad.

Con $N = 3$, en una tabla. La arista $x_i y_k$ está en A_j cuando $k = i + j$, así que su color es $j = k - i \pmod{3}$. Puestos en una tabla, con una fila por cada x_i y una columna por cada y_k :

	y_0	y_1	y_2
x_0	0	1	2
x_1	2	0	1
x_2	1	2	0

Cada fila y cada columna tienen los tres colores una vez, que es decir que ningún vértice ve un color repetido: es un *cuadrado latino*. Para $K_{2,3}$ basta borrar una fila.

Teorema (König, 1916). Si G es bipartito, entonces $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Teorema (Vizing, 1964; sin demostración). Para todo grafo simple G , $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Con el lema, $\chi'(G)$ solo puede valer $\Delta(G)$ o $\Delta(G) + 1$: el índice cromático está mucho más controlado que el número cromático. Los grafos con $\chi' = \Delta$ se llaman de **clase 1** (los bipartitos, K_{2n} , los ciclos pares) y los de $\chi' = \Delta + 1$ de **clase 2** (K_{2n+1} , los ciclos impares, el grafo de Petersen). Decidir la clase es en general difícil; en cada caso concreto se hace exhibiendo una coloración con Δ colores, o probando que no la hay mediante una obstrucción, de recuento o de otro tipo.

La demostración general de König es corta y va a continuación; el caso particular de los árboles sale con una inducción más sencilla, y está al final como otra vía.

6.3.1 La demostración del teorema de König

La demostración cabe en una página y usa la misma idea que las cadenas de Kempe de los cinco colores: intercambiar dos colores a lo largo de un camino. Contiene además, como caso particular, el resultado para árboles.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: LA BIPARTICIÓN IMPIDE QUE LA CADENA VUELVA

König dice que en un grafo bipartito las aristas se colorean con exactamente Δ colores, ni uno más. Que hacen falta al menos Δ es un recuento en un solo vértice: las Δ aristas de un vértice de grado máximo se tocan dos a dos y necesitan por tanto Δ colores distintos. Lo notable es que no haga falta ninguno más, porque en general sí hace falta: un triángulo tiene $\Delta = 2$ y necesita tres colores.

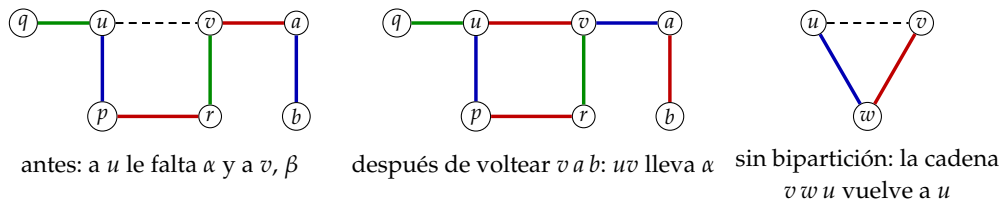
El mecanismo es el de las cadenas de Kempe del teorema de los cinco colores, trasladado a las aristas. Se colorea todo menos una arista uv y se mira qué falta en cada punta. A u , con grado a lo sumo $\Delta - 1$ en lo ya coloreado, le falta algún color α ; a v le falta alguno, β . Si son el mismo, se pinta uv con él y se acabó. Si no, se toma la

cadena que sale de v alternando α y β : como en cada vértice hay a lo sumo una arista de cada color, la cadena no se bifurca, está determinada y no puede morderse la cola. Se intercambian los dos colores a lo largo de ella y, después del intercambio, a v le falta α , que es lo que se quería.

Todo el peso pasa entonces a una única pregunta: *¿y si la cadena llega hasta u ?* Porque el intercambio habría puesto el color α en una arista de u y habría estropeado justo lo que se buscaba. Aquí entra, y solo aquí, la hipótesis de bipartición: u y v están en lados distintos, luego un camino de v a u tiene longitud impar, luego llegaría a u por una arista de índice impar, que en la cadena es de color α ; pero a u le faltaba α . La cadena no puede llegar. Ese es el teorema entero: la bipartición no sirve para colorear, sirve para impedir que la cadena vuelva.

Ejemplo (el intercambio de König, a mano). El grafo de los dos primeros paneles es bipartito, con $\{u, a, r\}$ a un lado y $\{v, b, p, q\}$ al otro, y tiene $\Delta = 3$. Todas sus aristas menos uv están coloreadas con tres colores: α (rojo), β (azul) y γ (verde). A u le llegan β y γ , así que le falta α . A v le llegan α y γ , así que le falta β . Ningún color falta a los dos, y uv no se puede pintar todavía.

La cadena que sale de v alternando α y β es vab : la arista va es α , la ab es β , y en b no hay ninguna arista α , así que termina ahí. Se voltea: va pasa a β y ab a α . No se estropea nada, porque a sigue teniendo una arista de cada color y b solo cambia el color de su única arista. Ahora a v le falta α , igual que a u . La otra cadena $\alpha-\beta$, la upr , es otra componente y no se toca; por eso a u le sigue faltando α . Se pinta uv de α y el grafo entero queda coloreado con $\Delta = 3$ colores.



El tercer panel muestra por qué la bipartición es imprescindible. En el triángulo, con $\Delta = 2$ y dos colores, a u le falta α y a v le falta β . La cadena que sale de v es vwu y llega a u : tiene longitud 2, par, y entra en u por una arista β , cosa que en un bipartito la paridad impediría. Voltéarla solo cambia de sitio el problema: después a u le falta β y a v le falta α . El triángulo necesita un tercer color.

Paso 1: inducción sobre las aristas; se descuelga una y se colorea el resto. Sea G bipartito con $\Delta = \Delta(G)$. Se prueba por inducción sobre el número de aristas que G admite una Δ -coloración por aristas. Sin aristas no hay nada que colorear. Sea uv una arista; por hipótesis de inducción $G - uv$ tiene una Δ -coloración c' (su grado máximo es $\leq \Delta$). En $G - uv$, el vértice u tiene grado $\leq \Delta - 1$, luego le falta algún color α ; a v le falta algún color β .

Paso 2: si a los dos extremos les falta el mismo color, se termina. Si a v también le falta α , se colorea uv con él. En el caso restante, v tiene una arista de color α y ninguna de color β .

Paso 3: si no, se construye la cadena alternante que sale de v . Sea P el camino más largo que sale de v alternando aristas de colores $\alpha, \beta, \alpha, \beta, \dots$ (empezando por una de color α si la hay; en cada vértice hay a lo sumo una arista de cada color, luego el camino está determinado y no se bifurca. No puede cerrar un ciclo: v tiene grado 1 en el subgrafo de esos dos colores, y una componente de grado máximo 2 que tiene un extremo es un camino. Termina, por tanto, en un vértice al que le falta el color que tocaría).

Paso 4: la bipartición impide que la cadena llegue a u (el núcleo de la prueba). Aquí, y solo aquí, se usa que el grafo es bipartito; si la cadena alcanzara a u , el intercambio del paso siguiente pondría el color α en una arista de u y destruiría justo lo que se busca. Se afirma que $u \notin P$. En efecto, G es bipartito y u, v están en lados distintos; un camino de v a u tiene longitud impar, luego llegaría a u por su arista de índice impar, que en P es de color α ; pero a u le falta el color α .

Paso 5: se voltea la cadena y el color queda libre. Se intercambian α y β en las aristas de P . Sigue siendo una coloración: en los vértices interiores de P solo cambian dos aristas que intercambian sus colores; en el último vértice de P faltaba justo el color que ahora recibe; y en v , que tenía α y no tenía β , ahora tiene β y no tiene α . Como $u \notin P$, a u le sigue faltando α . Se colorea uv con α . ■

Lo que hay que llevarse. Se colorea todo menos una arista uv , por inducción. Si a u y a v les falta el mismo color, se usa. Si no, a u le falta α y a v le falta β , y se voltea la cadena α - β que sale de v para que a v también le falte α . El único peligro es que la cadena llegue a u , y la bipartición lo impide por paridad: llegaría por una arista α , que u no tiene.

Otra vía (los árboles por inducción). Sea T un árbol con $\Delta \geq 1$ y u una hoja con vecino v . Por inducción $T - u$ tiene una Δ -coloración por aristas (su grado máximo es $\leq \Delta$); en v hay a lo sumo $\Delta - 1$ aristas coloreadas, queda un color libre, y se da a uv . No hace falta ningún camino alternante porque en un árbol la arista que se añade cuelga.

Proposición (una cota por emparejamientos). • **CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN** Sea G un grafo simple con p vértices, q aristas y grado máximo Δ . Si $q > \Delta \lfloor p/2 \rfloor$, entonces $\chi'(G) = \Delta + 1$. En particular, esto ocurre si G es regular de grado positivo y p es impar.

LA IDEA: UNA COTA POR RECUENTO DE EMPAREJAMIENTOS

Para probar que $\chi' = \Delta$ se exhibe la coloración. Para probar que $\chi' = \Delta + 1$ el recuento puede bastar, como en K_{2n+1} : cada clase de color es un emparejamiento, un emparejamiento tiene a lo sumo $\lfloor V/2 \rfloor$ aristas, y si $\Delta \cdot \lfloor V/2 \rfloor < A$ no hay manera de cubrir todas las aristas con Δ colores. Un grafo regular de grado positivo con un número impar de vértices es de clase 2 por esa cuenta. Si la desigualdad no se cumple, el recuento no decide: Petersen, por ejemplo, necesita otro argumento.

El núcleo: cada color ocupa vértices por parejas. Si bastaran Δ colores, cada clase tendría a lo sumo $\lfloor p/2 \rfloor$ aristas, luego $q \leq \Delta \lfloor p/2 \rfloor$, contradicción. Vizing deja como única posibilidad $\chi' = \Delta + 1$. En el caso regular de grado $r > 0$ y orden impar, $q = rp/2 > r(p-1)/2 = \Delta \lfloor p/2 \rfloor$, que es precisamente la hipótesis anterior. ■

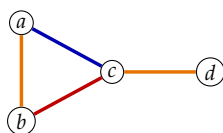
La cota, con números. En K_5 , $p = 5$ y $\Delta = 4$: cada color cubre como mucho $\lfloor 5/2 \rfloor = 2$ aristas, cuatro colores cubren como mucho 8, y hay 10. Clase 2. En K_5 menos una arista el grafo ya no es regular y la cota sigue decidiendo: $9 > 8$, y necesita cinco colores. En C_5 , $5 > 2 \cdot 2$. En el grafo de Petersen, $15 = 3 \cdot 5$: la desigualdad no es estricta y la cota no dice nada, aunque Petersen es de clase 2 (lo prueba el apartado (vii) del ejercicio de los índices cromáticos, por otro camino).

Lo que hay que llevarse. Un color es un emparejamiento, y un emparejamiento no pasa de $\lfloor p/2 \rfloor$ aristas. Si Δ emparejamientos no alcanzan para las q aristas, hace falta uno más, y Vizing dice que con uno más basta. **Dónde se falla:** en usar $p/2$ en lugar de $\lfloor p/2 \rfloor$, porque con p impar es justo esa media arista la que decide; y en leer la implicación al revés: que $q \leq \Delta \lfloor p/2 \rfloor$ no dice que el grafo sea de clase 1.

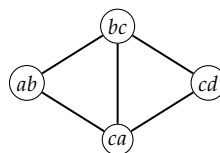
Proposición (el grafo de línea R6.11). • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN Toda n -coloración por aristas de G es una n -coloración por vértices de su grafo de línea $L(G)$, y recíprocamente. En consecuencia $\chi'(G) = \chi(L(G))$.

Los vértices de $L(G)$ son las aristas de G , y dos son adyacentes en $L(G)$ exactamente cuando las aristas se tocan en G . Así que «aristas incidentes con colores distintos» en G es literalmente «vértices adyacentes con colores distintos» en $L(G)$: la misma aplicación c' sirve de coloración en los dos sitios, y los mínimos coinciden. ■

Ejemplo (el grafo de línea, a mano). La *pata* es un triángulo abc con una arista más, cd , colgada de c . Su grafo de línea tiene cuatro vértices, uno por arista: ab , bc , ca y cd . Las tres aristas del triángulo se tocan dos a dos, y cd toca a bc y a ca (en c) pero no a ab . Sale el *diamante*: K_4 menos la arista entre ab y cd .



la pata, con 3 colores en las aristas



su grafo de línea: el diamante

Las tres aristas que llegan a c necesitan tres colores, así que $\chi'(pata) = 3 = \Delta$, con bc rojo, ca azul y cd naranja; ab puede ir de naranja porque no toca a cd . En el diamante es la misma cuenta leída en vértices: bc , ca y cd forman un triángulo y necesitan tres colores, y ab , que no es vecino de cd , repite el suyo. Dos colores iguales en aristas que no se tocan son dos vértices iguales que no son adyacentes. También explica lo visto con los ciclos: $L(C_n) = C_n$, y por eso $\chi'(C_n) = \chi(C_n)$.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: BUSCAR UN TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES PARA ARISTAS

La alternativa. Esperar, como para vértices, una cota universal pequeña para χ' .

Por qué no puede haberla. Porque $\chi' \geq \Delta$, y Δ puede ser cualquier número: una estrella $K_{1,n}$ necesita n colores. Lo que sí hay es un teorema mucho más fuerte que el de los cuatro colores en otro sentido: Vizing dice que nunca hace falta más de un color por encima de lo obvio. Y hay una relación escondida con los cuatro colores: Tait probó en 1880 que el teorema de los cuatro colores equivale a que todo grafo cúbico planar sin puentes admita una coloración de aristas con tres colores. Petersen muestra que no se puede suprimir sin más la planaridad: es

cúbico y no tiene puentes, pero necesita cuatro colores en sus aristas.

Ejercicios: índice cromático y horarios

Ejercicio 6.11. *Los índices cromáticos de siempre* R6.10

Calcular el índice cromático de (i) C_n ; (ii) K_p ; (iii) $K_{p,q}$; (iv) un árbol; (v) W_5 ; (vi) M_8 ; (vii) el grafo de Petersen.

Resolución. (i) 2 si n es par, 3 si es impar. (ii) p si $p \geq 3$ es impar, $p - 1$ si p es par; para $p = 1, 0$. (iii) $\max\{p, q\}$ si $p, q \geq 1$, y 0 si alguno es 0. (iv) Δ , por König (un árbol es bipartito) o por la inducción de las hojas.

(v) W_5 : centro c de grado 4 y ciclo 1 2 3 4; $\Delta = 4$. Radios $c1, c2, c3, c4$ con colores 1, 2, 3, 4; lados: $12 \mapsto 3, 23 \mapsto 4, 34 \mapsto 1, 41 \mapsto 2$. En cada vértice i del ciclo concurren el radio i y dos lados, y los tres colores son distintos: en 1, $\{1, 3, 2\}$; en 2, $\{2, 3, 4\}$; en 3, $\{3, 4, 1\}$; en 4, $\{4, 1, 2\}$. Luego $\chi'(W_5) = 4$.

(vi) M_8 es 3-regular. Las cuatro diagonales $i(i + 4)$ no se tocan: color 3. El ciclo $01 \dots 70$ es par: colores 1, 2 alternados. Cada vértice recibe $\{1, 2, 3\}$. Luego $\chi'(M_8) = 3 = \Delta$.

(vii) Petersen es 3-regular con 10 vértices; una 3-coloración sería una partición de sus 15 aristas en tres emparejamientos de 5 aristas, cada uno cubriendo los 10 vértices. Quitando uno de ellos quedaría un grafo 2-regular con 10 vértices, es decir, una unión de ciclos que tendría que colorearse con los otros dos colores, luego formada por ciclos pares. Pero con contorno 5 las únicas opciones son un 10-ciclo o dos 5-ciclos, y el 10-ciclo no existe porque Petersen no es hamiltoniano (hecho conocido que este libro no demuestra; la otra vía de más abajo lo evita), y dos 5-ciclos son impares. Luego $\chi'(\text{Petersen}) = 4$: es de clase 2 y el ejemplo más pequeño de grafo cúbico sin puentes con esa propiedad. ■

Otra vía (para Petersen, sin usar que no es hamiltoniano). Se usan los nombres del ejercicio del número cromático: pentágono exterior $0, \dots, 4$, estrella interior $5, \dots, 9$ con las aristas 57, 79, 96, 68, 85, y radios $i(i + 5)$. Supóngase una coloración de las aristas con tres colores, a, b y c . Como el grafo es 3-regular, cada vértice ve los tres colores, y cada color es un emparejamiento que cubre los diez vértices.

Paso 1: los radios se reparten $3 + 1 + 1$. Un color empareja los cinco vértices exteriores: unos entre sí, por parejas, y los demás con el interior, por radios. Como cinco es impar, cada color ocupa un número impar de radios. Tres números impares que suman 5 son 1, 1 y 3. Sea c el color de tres radios, y a y b los de uno.

Paso 2: fuera, el color c aparece una sola vez. Los tres vértices exteriores con radio c tienen sus dos aristas exteriores de colores a y b . El extremo del radio a tiene fuera una arista b y una c , y el del radio b , una a y una c . Las aristas c del pentágono solo pueden unir estos dos vértices, que tienen una cada uno: hay una sola, y los une. Los extremos exteriores de los radios a y b son, por tanto, consecutivos en el pentágono: i e $i + 1$.

Paso 3: lo mismo dentro, y la contradicción (el núcleo). La estrella también es un ciclo de cinco vértices con los mismos radios, y el mismo razonamiento obliga a que los extremos interiores de esos dos radios, $i + 5$ e $i + 6$, sean vecinos en la estrella. Pero en la estrella cada vértice $j + 5$ es vecino de los de índice $j + 2$ y $j + 3$ (módulo 5), nunca del de $j + 1$. Contradicción: tres colores no bastan. La idea es que el pentágono y la estrella son dos ciclos de cinco unidos por los radios, y la paridad obliga a los dos a colocar sus aristas c entre los mismos dos radios; en el pentágono esos radios salen de vértices vecinos, y en la estrella, de

vértices que no lo son.

Ejercicio 6.12. *Una semana de ajedrez* R6.14

En un club de ajedrez, ocho jugadores juegan cada día una sola partida con un compañero. Probar que se pueden distribuir de modo que no repitan pareja en toda una semana.

Resolución. Un vértice por jugador y una arista por cada pareja posible: K_8 , con 28 aristas. Un día es un conjunto de partidas sin jugador repetido, es decir, un emparejamiento; repartir todas las partidas en días es colorear las aristas de K_8 , y $\chi'(K_8) = 7$. Siete días, exactamente una semana, con cuatro partidas cada uno. La construcción del caso par da el cuadrante: se colorean las aristas de K_7 (jugadores $0, \dots, 6$ en heptágono) por lados paralelos, y el octavo jugador juega cada día con el que ese día tiene el color ausente.

Con la regla de la suma el cuadrante se escribe solo. Los jugadores $0, \dots, 6$ juegan el día s ($s = 0, \dots, 6$) las parejas $\{i, j\}$ con $i + j \equiv s \pmod{7}$, y el jugador 7 juega con el único que se queda sin pareja, el i con $2i \equiv s$, es decir, $i \equiv 4s \pmod{7}$:

día	partidas			
0	1-6	2-5	3-4	0-7
1	0-1	2-6	3-5	4-7
2	0-2	3-6	4-5	1-7
3	0-3	1-2	4-6	5-7
4	0-4	1-3	5-6	2-7
5	0-5	1-4	2-3	6-7
6	0-6	1-5	2-4	3-7

Cada fila tiene a los ocho jugadores una vez, y las 28 parejas salen una vez cada una. ■

Ejercicio 6.13. *Conferenciantes y grupos* EXAMEN DE 2012

Cuatro conferenciantes (Ana, Carmen, Juan y Pablo) dan charlas de una hora a tres grupos: Juan y Carmen, cada uno, una charla a cada grupo; Pablo y Ana, cada uno, una charla a cada grupo. ¿Cuál es el menor número de franjas horarias necesarias?

Resolución. Vértices: los cuatro conferenciantes y los tres grupos; una arista por cada charla (conferenciante, grupo). Cada conferenciante da una charla a cada grupo, luego el grafo es $K_{4,3}$, con 12 aristas. Una franja horaria es un conjunto de charlas sin conferenciante ni grupo repetido: un emparejamiento. El mínimo de franjas es $\chi'(K_{4,3}) = \max\{4, 3\} = 4$: cada grupo recibe cuatro charlas y necesita cuatro franjas, y cuatro bastan (cada grupo y_j recibe en la franja k al conferenciante x_{j+k} , índices módulo 4). **Cuatro franjas.** ■

QUÉ DEJA. Horarios y turnos: conferenciantes y grupos son los dos lados de un bipartito, las clases son aristas, las franjas son colores, y König dice que bastan tantas franjas como clases tiene el más ocupado. Ligas y torneos: K_n , y $n - 1$ o n jornadas según la paridad.

Ejercicio 6.14. *El índice cromático de un grafo dibujado (exámenes de 2011–12, enero de 2013 y 2025–26)*

Sobre un grafo dibujado, «calcula su índice cromático dando la coloración». Explicar el procedimiento y aplicarlo al prisma triangular.

Resolución. (1) Se lee Δ del dibujo: $\chi' \geq \Delta$. (2) Se intenta una coloración con Δ colores, empezando por el vértice de grado máximo y coloreando ciclos pares alternando; si se consigue, $\chi' = \Delta$ y se entrega la coloración. (3) Si no se consigue, aún no se ha probado que sea imposible: se busca una obstrucción, por ejemplo $\Delta \lfloor V/2 \rfloor < A$. Solo cuando se prueba la imposibilidad se concluye $\chi' = \Delta + 1$ por Vizing, y se entrega una coloración con $\Delta + 1$ colores.

El prisma (triángulos $a_1a_2a_3$ y $b_1b_2b_3$, aristas a_ib_i): $\Delta = 3$. Es 3-regular con 6 vértices, 9 aristas, y una 3-coloración sería una partición en tres emparejamientos perfectos: $\{a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3\}$ de color 3, y los dos triángulos con los colores 1, 2: imposible, porque un triángulo necesita tres colores. ¿Otra partición? Los emparejamientos perfectos del prisma son el de las tres aristas verticales y los tres que toman una vertical y las dos aristas «cruzadas»: $\{a_1b_1, a_2a_3, b_2b_3\}$ y sus dos rotaciones. Tres de ellos disjuntos que cubran las 9 aristas: $\{a_1b_1, a_2a_3, b_2b_3\}$, $\{a_2b_2, a_1a_3, b_1b_3\}$, $\{a_3b_3, a_1a_2, b_1b_2\}$. Son disjuntos y cubren todo: $\chi'(\text{prisma}) = 3$. (La primera partición fallaba y la segunda funciona: conviene buscar la coloración con un poco de sistema en vez de rendirse al primer intento.) ■

Qué hemos aprendido. Antes de buscar a mano conviene mirar si algún teorema decide solo. Si el grafo es bipartito, König da Δ sin más. Si es regular de grado positivo con un número impar de vértices, la cota por emparejamientos da $\Delta + 1$. Solo en el resto hay que construir la coloración o encontrar la obstrucción, y el prisma, que tiene triángulos y seis vértices, es de esos.

REPASO INTERCALADO: CAPÍTULO 6

1. Género de una superficie (asas) y de un grafo; planar $\Leftrightarrow$ género 0; K_5 , $K_{3,3}$, Petersen y K_7 tienen género 1 (siete hexágonos en el toro).
2. χ : cota inferior por un subgrafo (K_k , ciclo impar), cota superior por una coloración; $\chi \leq \Delta + 1$ (para grafos conexos, $\leq \Delta$ salvo completos y ciclos impares: Brooks). Bipartito con arista: 2; C_{2k+1} : 3; K_p : p .
3. Planar $\Rightarrow \chi \leq 4$ (sin demostración) y ≤ 5 (cadenas de Kempe); planar sin triángulos $\Rightarrow \chi \leq 4$ (vértice de grado ≤ 3). Toro: 7 colores, y hacen falta.
4. Clases cromáticas de una coloración óptima: no vacías, con aristas entre cada dos, $k(k-1) \leq 2q$, $F \simeq K_k$, alguna con $\geq n/k$ vértices. $\chi(G_1 + G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$; unión por un vértice: máximo.
5. χ' : $\Delta \leq \chi' \leq \Delta + 1$ (Vizing); bipartitos = Δ (König); $K_{2n+1} = 2n + 1$, $K_{2n} = 2n - 1$ ($n \geq 1$), $K_{m,n} = \max(m, n \geq 1)$; $\chi'(G) = \chi(L(G))$. Horarios y ligas son coloraciones por aristas.

Ideas intuitivas de las demostraciones

Una línea por resultado: lo que hay que recordar para reconstruir la demostración. La idea desarrollada está en el capítulo, junto al enunciado.

- **Principio del producto** (1.3). Numerar por filas las casillas de una tabla de b filas y a columnas es la biyección con $\mathbb{N}_{ab}$; deshacerla es dividir entre a , y la inyectividad y la sobreyectividad son la unicidad y la existencia del cociente y el resto.
- **Inclusión–exclusión** (1.3.4). Cada elemento que está en exactamente $k \geq 1$ conjuntos se cuenta $\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \dots = 1$ vez, por el binomio de $(1 - 1)^k$.
- **Apretón de manos** (2.2). Cada arista tiene dos extremos: sumar grados es contar aristas dos veces.
- **Dos vértices que no son puntos de corte** (ejercicio 2.14). Los extremos de un diámetro, o de un arco que ya no se puede alargar, no separan nada: lo que quedara detrás de uno de ellos estaría más lejos que el máximo elegido.
- **Caracterización de los bloques** (2.7.1). Dos caminos entre u y v distintos que solo comparten los extremos forman un ciclo; para fabricarlos se hace inducción sobre la distancia y se «cose» el nuevo vértice al ciclo anterior usando que no hay puntos de corte.
- **Árboles** (2.8). Un árbol tiene exactamente las aristas justas para ser conexo, $n - 1$; quitar una lo parte, añadir una cierra un ciclo. Todo se demuestra quitando hojas o quitando aristas de ciclos.
- **Hojas de un árbol** (ejercicios 2.22 y 2.24). Quitar un vértice de grado k deja k ramas, y cada rama acaba en una hoja. La fórmula $|L| = 2 + \sum(\delta(v) - 2)$ dice lo mismo en general: un camino tiene dos hojas y cada vértice de grado d abre $d - 2$ ramas más; se prueba sumando los grados de dos maneras con $|A(T)| = |V(T)| - 1$.
- **Bipartitos y ciclos impares** (2.9). Colorear por paridad de la distancia a un vértice funciona salvo que dos vértices a la misma distancia sean adyacentes, y eso permite construir un ciclo impar.
- **Grafos eulerianos** (3.1). Grado par significa «por cada entrada una salida»; se quitan ciclos hasta que no queda nada, y luego se encadenan los ciclos por un vértice común.
- **Fleury** (3.1.2). Si se cruza un puente de lo que queda, la otra orilla se pierde; si no se cruza

- nunca sin necesidad, la paridad garantiza que se vuelve al principio con todo recorrido.
- **Partición en n recorridos abiertos** (ejercicio 3.2). Se emparejan los $2n$ vértices impares y cada pareja se une a un vértice nuevo; el grafo ampliado es euleriano, y al borrar los vértices nuevos su circuito se corta en n recorridos: un collar al que se quitan n cuentas.
 - **Ore** (3.2). En un grafo no hamiltoniano maximal hay un camino hamiltoniano entre dos no adyacentes; cada vecino de un extremo prohíbe un vecino al otro, y eso acota la suma de grados por $n - 1$.
 - **Whitney** (4.2). Un corte de aristas se transforma en uno de vértices no mayor eligiendo los extremos de modo que el grafo restante se desconecte o sea trivial; esa elección requiere distinguir casos y es el paso delicado de $\kappa \leq \lambda$. Aislar un vértice de grado mínimo da $\lambda \leq \delta$.
 - **Menger** (4.6.1). Inducción sobre las aristas contrayendo una: si al contraer baja el corte mínimo, los dos extremos de la arista están en un corte mínimo X , y por inducción hay caminos de A a X y de X a B que se pegan en X .
 - **Dirac** (n -conexo $\Rightarrow n$ vértices en un ciclo, 4.6.2). Un abanico de n caminos desde el vértice nuevo hasta un ciclo que ya tiene $n - 1$ de los vértices; dos de los n extremos caen en el mismo tramo y por ahí se desvía el ciclo.
 - **Fórmula de Euler** (5.2). En un grafo plano conexo, quitar una arista de un ciclo funde dos caras; quitar una hoja no cambia las caras. Las dos operaciones conservan $V - A + C$ hasta llegar a un punto.
 - **Cota del contorno** (5.3.1). Cada cara necesita al menos g aristas y cada arista borda a lo sumo dos caras, luego hay a lo sumo $2q/g$ caras. Metido en la fórmula de Euler, las caras desaparecen y queda $q \leq \frac{g}{g-2}(p-2)$; con $g = 3$ y $g = 4$ salen $3p - 6$ y $2p - 4$.
 - **Kuratowski** (5.4.1). Un contraejemplo mínimo sería 3-conexo y distinto de K_4 ; se contrae una arista sin perder la 3-conexión, se dibuja lo que queda, y al separar los dos vértices contraídos, o caben en una cara o sus vecinos están entrelazados en el ciclo que la bordea, que es la forma de $K_{3,3}$ o de K_5 .
 - **Brooks** (6.2; solo la idea, sin demostración completa). El voraz solo estrena el color $\Delta + 1$ si a un vértice le llegan sus Δ vecinos ya coloreados con colores distintos. En un grafo conexo no regular se evita coloreando por distancia decreciente a un vértice de grado menor que Δ : cada vértice tiene un vecino que se colorea después que él. En el regular hay que fabricar esa holgura, y en los completos y los ciclos impares no se puede.
 - **Cinco colores** (6.2). Un vértice de grado ≤ 5 existe por Euler; sus vecinos pueden usar los cinco colores, pero entonces se intenta liberar uno intercambiando colores. Si todos esos intercambios fallaran, dos cadenas de Kempe, una 1-3 y otra 2-4, tendrían que cruzarse, y en el plano no pueden.
 - **Planar sin triángulos** $\Rightarrow \chi \leq 4$ (6.2). Sin triángulos el techo de aristas baja a $2V - 4$, y si todos los grados fueran ≥ 4 se tendría $4V \leq 2A \leq 4V - 8$: hay un vértice de grado ≤ 3 . Se quita, se colorea el resto por inducción, y sus tres vecinos dejan libre el cuarto color.
 - **König** (6.3.1). Al añadir una arista uv , si falta el mismo color en los dos extremos se usa; si no, se intercambian dos colores a lo largo del camino alternante que sale de v , que en un bipartito nunca llega a u .
 - **Cota por emparejamientos** (6.3). Cada color de aristas es un emparejamiento, que tiene a lo sumo $\lfloor p/2 \rfloor$ aristas; si $\Delta \lfloor p/2 \rfloor < q$, con Δ colores no se cubren todas. Un regular de grado $r > 0$ y orden impar tiene $q = rp/2 > r \lfloor p/2 \rfloor$.

Añadidos y omisiones

Este apéndice reúne los desarrollos añadidos al material de origen y señala lo que se omite, se reubica o se deja sin demostrar. Las marcas grises —del tipo `R4.7` o `CONTROL 2.2`— identifican la procedencia de los ejercicios; el capítulo C reúne la información sobre exámenes.

Qué de este libro no está en el material de origen

- La subsección 1.3.4, inclusión–exclusión para n conjuntos (el material de origen se detiene en tres).
- Cinco ejemplos resueltos del capítulo 1: cifras en su sitio (desarreglos), juntos y separados (técnicas del bloque y de los huecos), triángulos con vértices en puntos dados, etiquetas y bloques (libros de varias materias, distinguidos o no, agrupados o no) y la partida interrumpida. No están en el material de origen; los cuatro primeros enseñan técnicas que piden las convocatorias recientes (capítulo C), y el quinto contesta la pregunta que abre la sección del binomio.
- Cuatro ejemplos resueltos del capítulo 2 —un diccionario a mano, las capas de distancia, puntos de corte y puentes a mano, y la cuenta de aristas, arista a arista—, y los bloques de un grafo concreto con su esquema de bloques y puntos de corte. No están en el material de origen; enseñan los métodos del grafo dibujado y de los verdaderos o falsos de aristas frente a vértices (capítulo C).
- Cuatro ejemplos resueltos del capítulo 3 —cuatro casos a mano (Königsberg y tres grafos pequeños antes del teorema), descoser y coser a mano, euleriano y hamiltoniano son cosas independientes, y el test de las componentes a mano—. No están en el material de origen; preparan el apartado «¿es euleriano?, ¿es hamiltoniano?» del grafo dibujado (capítulo C).
- Cinco ejemplos resueltos del capítulo 4 —un extremo por arista a mano (el ciclo C_4 antes de la prueba de Whitney), la cota de Harary con números, el mismo W_5 con otra explosión ($K_{3,3}$), Menger a mano (el cuello de botella) y cuando las cotas no se juntan (dos K_4 con una arista común)—, el cálculo de la pajarita con la definición, y las figuras del abanico y del palomar de Dirac. No están en el material de origen; preparan el cálculo de κ y λ del grafo

- dibujado y el uso de Tutte (capítulo C).
- Tres ejemplos resueltos del capítulo 5 —las tres casas a mano (un hexágono y tres diagonales, y K_5 con el pentagrama), la tenaza de las dos cotas de aristas y casas y pozos a mano (un ciclo largo y tres cuerdas entrelazadas)—, la tabla de K_4 arista a arista para la fórmula de Euler, la forma $g \leq 2q/(q - p + 2)$ de la cota del contorno y la tabla del signo de $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} - \frac{1}{2}$ en las caras de grado fijo. No están en el material de origen; preparan la planaridad del grafo dibujado y los verdaderos o falsos con la fórmula de Euler (capítulo C).
 - Cuatro ejemplos resueltos del capítulo 6 —el voraz en un camino (el orden importa), una cadena de Kempe a mano, el intercambio de König a mano (con el triángulo en el que la cadena vuelve) y el grafo de línea a mano (la pata y el diamante)—; la idea de Brooks con su caso no regular; la regla $c(ij) = i + j \bmod (2n + 1)$ para colorear K_{2n+1} , con el color ausente $2i$, la tabla de $K_{3,3}$ y el cuadrante de la semana de ajedrez; la escritura paso a paso de la vía de grado ≤ 4 con cadenas de Kempe para los planares sin triángulos, que el material de origen solo indica; la mención del teorema de Grötzsch; la lectura numérica de la cota de Heawood; y una demostración de que el grafo de Petersen no admite tres colores en sus aristas que no usa que no es hamiltoniano. No están en el material de origen; preparan el número y el índice cromático del grafo dibujado y las demostraciones cortas de coloración (capítulo C). El mapa de cuatro países del principio de la sección 6.2, en cambio, redibuja un ejemplo del material de origen.
 - La demostración del teorema de caracterización de los bloques, 2.7.1.
 - La demostración de que el algoritmo de Fleury funciona, 3.1.2.
 - La demostración del teorema de Menger y el lema del abanico, 4.6.1, y la del teorema de Dirac de 1960, 4.6.2.
 - La demostración del teorema de Kuratowski, 5.4.1.
 - La demostración del teorema de König, 6.3.1.
 - La construcción de Petersen en el toro y el esquema de las cadenas de Kempe de 6.1 y 6.2, que completan las explicaciones del libro.
 - Los apéndices A y E, y este.
 - Las cajas (la pregunta, el camino que no se tomó, la idea, de dónde viene, conexión, antes de leer, repaso), las pistas, las otras vías y los «qué deja». También los párrafos que acompañan a la teoría y a los ejercicios: los casos hechos a mano antes de un teorema, «qué se ha ganado» y «lo que hay que llevarse» detrás de una demostración, y «la idea», «qué hemos aprendido» y «dónde se falla» en los ejercicios. Los enunciados de los ejercicios vienen de las relaciones de problemas o de los exámenes del curso, y la marca gris de cada título dice de cuál; los que no llevan marca son variaciones nuestras.
 - **Las comprobaciones que el material de origen deja como ejercicio y aquí se escriben enteras:** el paso «sobreyectiva $\Rightarrow$ inyectiva» de la equivalencia entre inyectiva, sobreyectiva y biyectiva en conjuntos finitos; la biyección $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$; la unicidad de la fracción irreducible que hace inyectiva la correspondencia de la numerabilidad de $\mathbb{Q}$; la inyección $x \mapsto \{x\}$ de X en $\mathcal{P}(X)$; la demostración de inclusión-exclusión para tres conjuntos a partir del caso de dos; y la comprobación de que la numeración por filas del principio del producto es biyectiva.
 - **Un hueco de la inducción del teorema de los grafos eulerianos**, corregido aquí: al descoser el grafo en ciclos, el subgrafo generado por $C_1, \dots, C_{k-1}$ *no* tiene por qué ser conexo (dos triángulos disjuntos unidos por un ciclo largo lo desmienten), así que la demostración de

3.1 inserta los circuitos de todas sus componentes, no solo de una.

- **Un hueco de la demostración de «planar sin triángulos $\Rightarrow \chi \leq 4$ »**, corregido aquí: la cota $A \leq 2V - 4$ se ha demostrado para grafos conexos, y la inducción, al quitar un vértice, puede pasar por grafos que no lo son. La demostración de 6.2 se reduce primero al caso conexo, coloreando cada componente por separado.
- Notas menores señaladas en el texto: la condición (c) de la caracterización de puentes falla vacíamente en grafos no conexos; la versión con todos los detalles de «una arista está en un solo bloque»; el argumento de las aristas inyectivas en la proposición $|V| = |A| + 1$; la segunda demostración de «al menos dos hojas» por arco maximal; el argumento del último vértice común en la caracterización de los bipartitos; y que el teorema de caracterización de los árboles no necesita la hipótesis «con más de una arista» con la que suele enunciarse.

Qué se omite, se reubica o se deja sin demostrar

- Los ejercicios 1 del Control 2 y 1 del Control 3 se refieren a un grafo «de la figura» que no está en la copia del examen (tampoco en el PDF original): el libro resuelve un grafo análogo con el mismo método. Todas las demás figuras de relaciones y exámenes (3.12, 4.9, 4.10, 5.10, 6.3, y los grafos de los exámenes de 2024–25, 2025–26 y junio de 2024) se han recuperado de los PDF originales y están resueltas. El grafo de julio de 2024 también se ha recuperado ampliando la imagen original: sus ocho vértices y veintidós aristas se dibujan y el ejercicio se resuelve en el apéndice de exámenes.
- Los ejercicios 3.5 y 3.7(a) de la relación 3, que son los teoremas de Ore y de Dirac y están demostrados en la teoría.
- El teorema de Brooks, el de Vizing, el de Wagner, el de Chartrand–Harary, el de Tutte sobre grafos 3-conexos, la versión por aristas del teorema de Menger, el de los cuatro colores y la cota de Heawood: van enunciados sin demostración, igual que en el material de origen. De Brooks se da la idea, con el caso no regular argumentado en un párrafo; el caso regular, que es el difícil, no se demuestra.
- La figura del asa que elimina un cruce (sección 6.1) es la del material de origen (tema 6, página 1), reproducida tal cual.
- No se reproduce entero el banco histórico de exámenes: se seleccionan problemas y modelos, cuya procedencia se indica en las marcas grises y en el apéndice C.
- En el grafo de doce vértices del 16 de noviembre de 2011 se conserva el dibujo original, con 20 aristas. La solución de origen escribe 18 al contarlas y $r(G) = 12$ al calcular la circunferencia; aquí se corrigen esas erratas. El radio es 2 y la circunferencia, 12.

Qué cae en el examen

Este apéndice reúne el formato y los antecedentes de examen conservados de Matemática Discreta en la Universidad de Sevilla. Quien estudie en otro contexto puede usar los problemas como práctica; las condiciones de evaluación aquí descritas son locales.

C.1 El formato

El sistema de 2026-27. Según los proyectos docentes de 2026-27, en todos los grupos hay un examen final de convocatoria sobre 10 puntos que se aprueba con 5. Antes, cada grupo ofrece una vía previa voluntaria distinta:

Grupo	Vía previa (voluntaria)
1 y 3	Una prueba en la última semana de clase, con el mismo esquema que el examen final.
2 y 5	Una prueba de características similares al examen final, en fecha avisada con antelación.
4	Evaluación continua: al menos una prueba escrita en clase sobre lo dado hasta el día anterior; hay que sacar 5 en cada una y la nota es la media.

Los tres controles conservados son del curso 2025-26 y de un solo grupo: sirven como práctica de bloques concretos, no como modelo del sistema de 2026-27.

El material conservado incluye tres controles y exámenes de convocatoria. Sus puntuaciones describen esas pruebas, no el peso de la evaluación continua en la nota final: por ejemplo, el ejercicio 1 del Control 1 vale 3 puntos y el 3 vale 4; el ejercicio 2 del Control 2 vale 3, y el 2 del Control 3, 2. Para el sistema vigente hay que consultar el proyecto docente del curso correspondiente. En las convocatorias recientes aparecen con frecuencia estos cuatro bloques:

1. **Combinatoria**, en apartados de 0,5 o 0,75 puntos: contar con inclusión–exclusión, posiciones consecutivas y no consecutivas, puntos del plano y triángulos, bolas en cajas.
2. **Verdadero o falso con demostración o contraejemplo**, a 1 punto el apartado, cuatro o cinco apartados. Se repiten: aristas frente a vértices y existencia de ciclo, conexión y

- número de aristas, sumas de grafos y 2-conexión, caras de grado fijo con la fórmula de Euler, y subdivisiones y número cromático.
3. **Un grafo dibujado** con preguntas, a 0,5 o 0,75 puntos el apartado, sobre: euleriano y hamiltoniano; conectividad puntual y lineal; planaridad; árboles maximales; número cromático o índice cromático.
 4. **Una demostración corta de coloración**, como las variantes del ejercicio 6.4 de la relación 6. El ejercicio del grafo dibujado aparece repetidamente con preguntas parecidas. Los modelos resueltos están en el apéndice D.

C.2 Qué demostraciones caen

No se ha localizado una lista oficial de demostraciones exigibles en el material conservado. La selección siguiente procede de exámenes y controles: **la marca señala resultados o apartados cuya justificación se ha pedido expresamente**. Incluye preguntas de verdadero o falso, que pueden requerir un contraejemplo. Cuando el examen pide solo una consecuencia, la marca no se extiende al teorema completo que permite demostrarla. Que un resultado se *use* no significa que se haya pedido su demostración. La lista puede estar incompleta y no garantiza el contenido de convocatorias futuras.

Cada una de esas demostraciones lleva, junto a su enunciado en el cuerpo del libro, una marca granate en versalitas que dice • **CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN**. Esta es la lista de las marcas del libro, con la página de cada una:

Todo grafo conexo no trivial tiene al menos dos vértices que no son puntos de corte . . .	pág. 89
Un árbol con un vértice de valencia k tiene al menos k hojas	pág. 108
La fórmula de las hojas $ L = 2 + \sum(\delta(v) - 2)$ y las k -arañas	pág. 109
$2n$ vértices de grado impar: partición de las aristas en n recorridos abiertos	pág. 127
Un grafo conexo es euleriano si y solo si lo son todos sus bloques	pág. 128
Verdadero o falso: G y H eulerianos si y solo si $G + H$ lo es	pág. 130
Todo grafo con un punto de corte no es hamiltoniano; hamiltoniano $\Rightarrow G - v$ conexo . .	pág. 144
La cota del contorno: $q \leq \frac{g}{g-2}(p-2)$ para un planar de contorno g	pág. 196
Planar $\Rightarrow \kappa \leq 5$; 5-conexo y planar $\Rightarrow$ al menos 12 vértices	pág. 202
Conexo, regular de grado r y planar $\Rightarrow r \leq 5$ (y $r \leq 3$ sin triángulos)	pág. 203
Planar sin triángulos $\Rightarrow \kappa \leq 3$, con igualdad solo si hay al menos 8 vértices	pág. 203
$G + v$ planar $\Rightarrow q \leq 2p - 3$; $G + K_2$ planar $\Rightarrow G$ es un árbol	pág. 203
Caras de grado fijo con la fórmula de Euler: no hay grafo conexo, plano y regular de grado 4 con todas las caras pentagonales	pág. 204
Bipartito con $\lambda(G) = 6 \Rightarrow G$ no es planar	pág. 205
Planar, conexo y sin triángulos $\Rightarrow \chi(G) \leq 4$	pág. 229
Clases cromáticas: ninguna vacía, $F \simeq K_k$, $k(k-1) \leq 2q$ y alguna clase con n/k vértices	pág. 232
Subdividir una vez cada arista de G , si hay alguna, deja $\chi(H) = 2$	pág. 233
$\chi(G_1 + G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$	pág. 234
$\chi'(G) \geq \Delta(G)$	pág. 236
Cota por emparejamientos; regulares de grado positivo y orden impar son de clase 2 . .	pág. 240
$\chi'(G) = \chi(L(G))$	pág. 241

La prueba de cada marca

Para que la lista se pueda auditar —y corregir, si aparece un examen nuevo—, esta es la procedencia de cada marca:

- *Dos vértices que no son puntos de corte*: pedido tres veces —prefinal del grupo D de 2024, ejercicio 3 (1,5 puntos); junio de 2011, apartado (b); primera prueba del grupo E de 2016, apartado (b)—. Son tres antecedentes concretos; no un ranking de todas las demostraciones del temario.
- *Hojas de un árbol*: Control 1, ejercicio 1 (3 puntos, con el guión de dos pasos) y ejercicio 3 (4 puntos, la fórmula y las k -arañas).
- *Bloques eulerianos y partición en n recorridos abiertos*: Control 2, ejercicios 4 y 3 (2,5 puntos cada uno).
- *G y H eulerianos frente a $G + H$, y punto de corte $\Rightarrow$ no hamiltoniano*: primera convocatoria de 2024-25, ejercicio 2, apartados (b) y (c) (1 punto cada apartado).
- *Consecuencias de Euler sobre grados y conectividad*: enero de 2011, ejercicio 1 (3 puntos), y segunda prueba del grupo E de 2016, parte II, ejercicio 1, piden un vértice de grado a lo sumo 5 y que un planar 5-conexo tenga al menos 12 vértices. Son aplicaciones de las cotas de Euler, no peticiones de demostrar esas cotas por separado.
- *La cota del contorno $q \leq \frac{g}{g-2}(p-2)$* : segunda prueba del grupo A de 2015-16, modelo I del 14 de enero, ejercicio 3 (3 puntos). La copia resuelta es el mismo examen y no cuenta como otra aparición. La segunda prueba A de 2014-15, ejercicio 3 (1,5 puntos), pide la forma equivalente $g \leq 2q/(q-p+2)$.
- *Planar $\Rightarrow \kappa \leq 5$ y 5-conexo planar $\Rightarrow p \geq 12$* : enero de 2011 y la parte II de la segunda prueba E de 2016; enero de 2013 pide la primera de estas dos afirmaciones.
- *Regular planar $\Rightarrow r \leq 5$* : segunda prueba del grupo D de 2015-16, ejercicio 3 (1,5 puntos), también en el caso sin triángulos.
- *Planar sin triángulos $\Rightarrow \kappa \leq 3$* : segunda prueba de 2012.
- *$G + v$ y $G + K_2$ planares*: Control 3, ejercicio 2 (2 puntos); prueba (2) de 2016, ejercicio 3(b).
- *Caras de grado fijo*: primera convocatoria de 2025-26, ejercicio 2(c), y de 2024-25, ejercicio 2(e); prefinales B y D de 2024; febrero de 2013.
- *Bipartito con $\lambda = 6$ no planar*: enero de 2013, apartado (g), repetido en la primera convocatoria de 2024-25, ejercicio 2(d).
- *Planar sin triángulos $\Rightarrow \chi \leq 4$* : Control 3, ejercicio 3 (4 puntos), con el guión del vértice de grado pequeño.
- *Clases cromáticas*: primera convocatoria de 2024-25, ejercicio 4 (0,75 por apartado), y enero de 2013, ejercicio 3 (3 puntos), con cinco apartados (a)–(e). Sus variantes ilustran cómo usar la minimalidad de una coloración óptima.
- $\chi'(G) \geq \Delta(G)$: segunda prueba del grupo A de 2010-11, ejercicio 3(a).
- *Subdividir cada arista de un grafo con alguna arista deja $\chi = 2$* : primera convocatoria de 2025-26, ejercicio 2(d). La condición de tener alguna arista evita el caso sin aristas.
- *Cota por emparejamientos y grafos regulares de orden impar*: segunda prueba A de 2015-16, modelo II, ejercicio 3, y segunda prueba D del mismo curso, ejercicio 4.
- $\chi'(G) = \chi(L(G))$: segunda prueba A de 2010-11, ejercicio 3(c).
- $\chi(G_1 + G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$: segunda prueba de 2011-12, ejercicio 5, apartados (b) y (c).

Lo que no lleva marca, y por qué

La ausencia de marca significa que **no se ha identificado una petición explícita de la demostración completa** en las pruebas revisadas. Es el caso de los teoremas de Whitney, Menger, Dirac, Ore, Bondy–Chvátal, Kuratowski, König, Tutte, Vizing y Brooks. Tampoco se ha identificado para la corrección de Fleury, el teorema de los cinco colores, las caracterizaciones de los grafos eulerianos y de los bipartitos por ciclos impares, la fórmula de Euler, la numerabilidad de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y de $\mathbb{Q}$, el teorema del binomio o la inclusión–exclusión general.

Varios de ellos —Whitney, Menger, Tutte, Kuratowski, la fórmula de Euler— son herramientas para resolver los ejercicios, y hay que saber usarlos con soltura; pero eso es otra cosa que saber reproducir su demostración, y esta selección empírica no sustituye una indicación oficial del curso.

La cota del contorno está demostrada en la subsección del mismo nombre del capítulo de planaridad. Sus hipótesis incluyen que exista un ciclo: para un árbol, el contorno vale ∞ y no se puede sustituir sin más en la fórmula.

Un antecedente requiere cautela: la primera prueba D de 2015–16, ejercicio 4, pide que G sea un árbol si y solo si añadir cualquier arista entre vértices no adyacentes produce un único ciclo. No es literalmente la caracterización de cuatro equivalencias del capítulo 2, y tal como está escrito falla para K_3 : no hay pares no adyacentes, por lo que la condición se cumple vacíamente. No se usa ese enunciado para marcar el teorema entero como exigible.

C.3 Por capítulos

Las entradas identifican ejercicios del libro y describen su relación con las pruebas conservadas.

Combinatoria y métodos de enumeración (capítulo 1)

- *Dos personas con el mismo número de amigos.* Es el ejercicio 2.4 de la relación 2 con otro vocabulario, y reaparece en el capítulo siguiente como «dos vértices con el mismo grado».
- *Trece puntos en un rectángulo de 3×4 .* Primera convocatoria de enero de 2015, ejercicio 2, literal.
- *Ocho sumas en una matriz de 0, 1 y -1 .* Segunda convocatoria de septiembre de 2014, ejercicio 1, literal.
- *Seis números del 1 al 9.* Segunda convocatoria de septiembre de 2013, ejercicio 2, literal.
- *Restos al dividir entre $n - 1$.* Segunda convocatoria de septiembre de 2015, ejercicio 1, literal. La variante «101 números, dos cuya diferencia es múltiplo de 100» cayó en la primera convocatoria de 2023 y en la primera prueba B de 2013.
- *Quince múltiplos de cuatro con cifras distintas.* Primera convocatoria de junio de 2024, ejercicio 1, literal.
- *Pares, impares y enteros.* La prueba del 22 de noviembre de 2010 pidió lo mismo para el conjunto de los múltiplos de 3 aumentados en dos unidades.
- *Cifras en su sitio,* ejemplo de la sección 1.3. Es el modelo de los apartados (a) y (b) del ejercicio 1 de la primera convocatoria de 2024–25: una cifra fijada en su sitio y, por inclusión–exclusión, alguna de las impares en su sitio.
- *Una familia en el cine y el ejemplo juntos y separados* de la misma sección (1.4). El ejemplo, con la técnica del bloque, el complementario y la de los huecos, es el modelo de los

apartados «posiciones consecutivas / no consecutivas» de la primera convocatoria de 2024–25, ejercicio 1(c) y (d), y de la mesa de 40 alumnos de noviembre de 2013. El bloque reaparece en la estantería de julio de 2024, ejercicio 1(b), y en las franjas del prefinal del grupo C de 2024–25, ejercicio 1(a). El ejercicio del cine es la variante con posiciones fijadas de antemano.

- *Etiquetas y bloques*, ejemplo de la sección 1.5, tras las permutaciones con repetición. Es el modelo completo de la estantería de julio de 2024, ejercicio 1 (sin distinguir los libros, agrupados y distinguidos, agrupados en orden alfabético), y de los apartados (a), (b) y (c) de las franjas del prefinal del grupo C de 2024–25, ejercicio 1.
- *Números de cuatro cifras distintas con los dígitos del 1 al 7*. Primera convocatoria de junio de 2023, ejercicio 1, con 7 cifras de 9 dígitos y «contienen el 1, el 2 y el 3». Se resuelve a continuación como otra vía.
- *Números de la seguridad social*. Segunda convocatoria de septiembre de 2013, ejercicio 1, literal.
- *Triángulos con vértices en puntos dados*, ejemplo de la sección 1.5. Es el modelo del ejercicio 1 de la primera convocatoria de 2025–26: puntos sin tres alineados, y puntos repartidos en dos rectas paralelas o secantes.
- *Diez sillas iguales en cuatro habitaciones*. Es el modelo de los ejercicios de «bolas en cajas» de enero de 2014 y enero de 2015, y de la primera prueba del grupo E de 2016.
- *Monomios de grado diez en tres variables*. Los monomios de grado dado son la variante de examen de las bolas en cajas: se pidieron en febrero de 2013, ejercicio 1. Enero de 2015 pide el modelo equivalente de bolas en recipientes, no monomios literalmente.

Introducción a la teoría de grafos (capítulo 2)

- *Dos vértices con el mismo grado*. Es el ejercicio de las personas con el mismo número de amigos del capítulo 1, ahora con su nombre de verdad. Aparece como apartado de verdadero/falso en las primeras pruebas del banco histórico.
- *Un triángulo en G o en $\overline{G}$* . Es el caso más pequeño del teorema de Ramsey, y aparece como apartado de demostración corta en el banco histórico.
- *¿Son isomorfos?*. El prefinal del grupo C de 2024–25 pide diseñar dos grafos no isomorfos con las mismas condiciones, y varias primeras pruebas del banco histórico traen una pareja como la (b).
- *Un arco y un ciclo largos (Relación 2, 2.9)*. Es el modelo de los apartados de demostración corta del ejercicio de verdadero o falso, y el argumento del «arco de longitud máxima» reaparece en el Control 1 y en los ejercicios de árboles.
- *Radio y diámetro (Relación 2, 2.16)*. Aparece como apartado de verdadero o falso; la cota $\text{diam} \leq 2r$ es la que hay que saber justificar en dos líneas.
- *Dos vértices que no son puntos de corte (examen, junio 2011 y prefinal 2024)*. Se ha pedido tal cual en junio de 2011, en la primera prueba de 2016 y en los prefinals de 2024 (grupo B con «al menos uno», grupo D con «al menos dos»). En el prefinal D vale 1,5 puntos; el argumento del árbol maximal da una demostración breve. El capítulo da tres pruebas: por el diámetro y por el arco maximal en la sección 2.6, y por un árbol spanning en la sección 2.8.
- *Puntos de corte y suma de grafos (examen, noviembre 2013)*. El apartado (a) es un verdadero o falso de examen. El (b) es la razón general: la suma «suelda» los grafos.
- *Estudio de un grafo dibujado (examen, noviembre 2011)*. Es un formato habitual del ejercicio

de 3 o 4 puntos: un grafo dibujado y una lista de preguntas. Las excentricidades se sacan con el ejemplo de las capas de distancia (sección 2.5), y los puntos de corte, los puentes y los bloques, con los casos a mano de las secciones 2.6 y 2.7. El apartado (d) del original, «¿es euleriano?», se hace en el capítulo 3 con este mismo grafo. Un «spanning» de G es un subgrafo con todos los vértices de G (sección 2.8).

- *La cuenta de aristas, arista a arista*, ejemplo de la sección 2.8. Es el modelo de los verdaderos o falsos de aristas frente a vértices de la primera convocatoria de 2025–26, ejercicio 2(a) y (b) («si hay más aristas que vértices, hay un ciclo»; «con $|V| > |A| + 2$ no es conexo»), y del mínimo de conexiones de la prueba del grupo C de 2025, ejercicio 2(b).
- *El centro de un árbol* (Relación 2, 2.14). El Control 1 pide el centro de un grafo concreto; este resultado dice qué forma tiene la respuesta cuando el grafo es un árbol.
- *Hojas y grado máximo* (Relación 2, 2.20; Control 1, ejercicio 1). Es el ejercicio 1 del Control 1, con 3 puntos y el guión tal cual. En la relación se pide con v de valencia máxima, pero la hipótesis no hace falta.
- *La fórmula de las hojas y las arañas* (Control 1, ejercicio 3). Vale 4 puntos, los que más, y solo usa dos cosas: el apretón de manos y $|A(T)| = |V(T)| - 1$.
- *El cubo Q_n* (examen, junio 2011). Los apartados (c) y (d) originales, «¿para qué n es euleriano?» y «¿es Q_3 hamiltoniano? ¿y planar?», se hacen en los capítulos 3 y 5.

Grafos eulerianos y hamiltonianos (capítulo 3)

- *Recorridos eulerianos abiertos* (Relación 3, 3.1). Es la primera demostración corta del tema y el modelo de las siguientes: añadir un vértice para reducir al teorema.
- *¿Es euleriano? ¿Es hamiltoniano?, en un grafo dibujado* (prefinales de los grupos B y D de 2024, ejercicio 2(a); primera convocatoria de 2025–26, ejercicio 3(a)). Es el primer apartado del ejercicio del grafo dibujado, y son dos preguntas con herramientas distintas. La de Euler se contesta contando grados, como en el ejemplo de los cuatro casos a mano (sección 3.1); si la respuesta es sí y piden el circuito, se fabrica descosiendo el grafo en ciclos y cosiéndolos, como en el ejemplo «descoser y coser». La de Hamilton se contesta mostrando un ciclo si es que sí y, si es que no, con una de las cuatro pruebas de la sección 3.2. Dos ejemplos de esa sección preparan el apartado: el de los cuatro grafos de la tabla, que muestra que una respuesta no dice nada de la otra, y el del test de las componentes, que enseña a elegir el conjunto S que se quita.
- *Sumas y grafos cúbicos* (Relación 3, 3.4; examen, junio 2024). Los grados en una suma se calculan de una vez: cada vértice de G gana tantas aristas como vértices tiene H . Y el orden de un grafo cúbico es par.
- *La galería de arte* (Relación 3, 3.12(a)). Es Königsberg con salas en vez de islas. La única dificultad es traducir bien el plano: cada sala, y el exterior, es un vértice; cada puerta, una arista.
- *Un grafo que no es hamiltoniano* (Relación 3, 3.12(b)). Cuando ni Ore ni el test de las componentes deciden, se razona con los vértices de grado 2: sus dos aristas están obligadas, y eso propaga obligaciones y prohibiciones hasta una contradicción. Es el argumento que el profesor da en su solución.

Conectividad (capítulo 4)

- *Grafos cúbicos (Relación 4, 4.7).* No está resuelto en las soluciones del profesor. El grado 3 limita las formas de los cortes pequeños y permite demostrar que $\kappa = \lambda$. Hay que distinguir los casos: elegir sin más un extremo de cada arista no garantiza un corte de vértices del mismo tamaño. El verdadero o falso de la segunda convocatoria de julio de 2024, ejercicio 4(a) y (b) («un regular de grado r tiene $\kappa = r$ », «y $\lambda = r$ »), se contesta con los contraejemplos de dos «dónde se falla» del capítulo: el de este ejercicio (grado 4, $\kappa = 1 < \lambda = 2$) y el de los grafos de Harary (3-regular con $\kappa = \lambda = 2$).
- *Grafos de Harary (Relación 4, 4.15; Control 2, ejercicio 2).* Vale 3 puntos en el Control 2 con la sugerencia «empieza por una cota inferior del número de aristas con Whitney y el apretón de manos, y construye un grafo que la alcance».
- *Conectividad puntual y lineal de tres grafos dibujados.* Es el apartado «estudia la conectividad puntual y lineal de G » repetido en varias convocatorias desde 2011. El guion: (i) δ del dibujo y Whitney; (ii) cota inferior de κ con Menger (arcos independientes por parejas no adyacentes, reduciendo por simetría), con Tutte, o con Chartrand para λ ; (iii) conclusión. El ejemplo «Menger a mano: el cuello de botella» (sección 4.6) enseña a leer el paso (ii): los arcos y el separador se certifican el uno al otro.
- *Cuando las cotas no se juntan, ejemplo que cierra la sección 4.6.* Es el modelo de la primera convocatoria de junio de 2024 (grupos 2 y 4), ejercicio 4(a), donde sale $\kappa = 3 < \lambda = \delta = 4$: λ sale de Chartrand o de contar las aristas que salen de un bando, Menger se atasca, y el atasco señala el corte (allí, los vecinos de fuera de dos vértices adyacentes).
- *Tutte sobre un grafo dibujado.* El Control 2 pide «utiliza el teorema de Tutte para probar que G es 3-conexo»: hay que partir de una rueda y describir qué aristas se añaden y qué vértices se explotan hasta obtener G . Esa rueda inicial no tiene por qué ser un subgrafo de G . Con eso $\kappa \geq 3$; Whitney da $\kappa \leq \delta$, y si $\delta = 3$ se acabó. El ejemplo «el mismo W_5 , otra explosión: $K_{3,3}$ » (sección 4.5.1) muestra una historia de explosiones que no deja ninguna rueda dentro del dibujo, y qué explosión es ilegal.
- *Los dos grafos dibujados de la relación (Relación 4, 4.9 y 4.10).* Son los dos grafos dibujados de la relación, y el 4.10 es el modelo exacto del apartado «estudia la conectividad» de las convocatorias: Whitney por arriba, Chartrand para λ , Tutte o Menger para κ , y reducir las parejas por simetría. La resolución del material de origen muestra solo la pareja (x, t) del 4.10; el libro comprueba las cuatro parejas que quedan salvo simetría, y cómo se comprueba que la simetría lo es.

Planaridad (capítulo 5)

- *Planar maximal implica 2-conexo (Relación 5, 5.2).* Es el ejercicio del que depende el apartado (a) del corolario, y el argumento «pegar una arista nueva junto a dos que se tocan» es el que se usa en todas las demostraciones de maximalidad.
- *Sumar un vértice o una arista (Relación 5, 5.12; Control 3, ejercicio 2).* El apartado (b) es el ejercicio 2 del Control 3, con 2 puntos.
- *Caras de grado fijo (exámenes: febrero 2013, prefinals 2024, convocatorias 2024–25 y 2025–26).* Aparece en varias convocatorias. La receta: apretón de manos para vértices, apretón de manos para caras, Euler, y buscar una contradicción. Si las cuentas son compatibles, todavía hace falta construir un grafo o justificar su existencia.
- *Los cuatro grafos de la relación (Relación 5, 5.10).* Es el ejercicio de la relación tal cual, con sus

figuras. Ninguno de los cuatro es planar, y en los cuatro la respuesta es una subdivisión de $K_{3,3}$ señalada en el dibujo.

- *Planaridad de un grafo dibujado (todas las convocatorias revisadas)*. Cuando la cuenta de Euler no decide, el ejemplo «casas y pozos a mano: un ciclo largo y tres cuerdas entrelazadas» (sección 5.4) da el orden de búsqueda de la subdivisión de $K_{3,3}$, y el caso del grafo D enseña a cambiar de ciclo cuando el primero no sirve. En la escalera de Möbius del ejercicio «Cuatro grafos más» ninguna de las dos cotas decide ($12 \leq 18$ y, sin triángulos, $12 \leq 12$).
- *Las demostraciones cortas con la fórmula de Euler (Relación 5, 5.8, 5.11 y 5.12; segunda prueba de 2012; enero de 2013 y primera convocatoria de 2024–25, «bipartito con $\lambda = 6$ »)*. Todas son la tenaza del ejemplo que abre los ejercicios de la sección 5.3: suelo por Whitney y el apretón de manos, techo por Euler. La tabla de ese ejemplo resume seis de ellas.
- *Planar exterior (primera convocatoria de junio de 2024, grupos 2 y 4, ejercicio 5)*. Es la cota $q \leq 2p - 3$ del apartado (a) de «Sumar un vértice o una arista»: $G + v$ es planar exactamente cuando G es planar exterior, como se ve al cerrar ese ejercicio.
- *La cota del contorno despejando g (segunda prueba A de 2014–15, ejercicio 3)*. La forma $g \leq 2q / (q - p + 2)$ está escrita tras la demostración de la cota del contorno, como su otra cara.

Coloración (capítulo 6)

- *Aristas entre clases (Relación 6, 6.4; examen, enero 2013 y convocatoria 2024–25)*. Es el ejercicio de demostración de coloración de las convocatorias: 3 puntos en enero de 2013 (a)–(e) y cuatro apartados de 0,75 en 2024–25 (a y d). Se hace con la definición y nada más. La idea y el «dónde se falla» del ejercicio recogen los tres fallos típicos: razonar con una coloración que no es óptima, contar $k(k - 1)$ aristas en vez de $\binom{k}{2}$, y olvidar el redondeo $\lceil n/k \rceil$.
- *El número cromático de un grafo dibujado (junio y julio de 2024, grupos 2 y 4, ejercicios 4(c) y 3(c); prefinals de mayo de 2024, ejercicio 2(d); prueba del grupo C de 2025, ejercicio 3(d); primera convocatoria de 2024–25, ejercicio 3(c))*. Siempre la misma pareja de cotas: un K_4 o un ciclo impar por debajo y una coloración comprobada arista a arista por arriba. El método está en la idea del ejercicio «Los dos grafos dibujados de la relación» (sección 6.2); el caso sin completo grande (W_6), en el «dónde se falla» de «Los números cromáticos de siempre»; y el atajo de Brooks, tras su enunciado.
- *El índice cromático de un grafo dibujado (primera convocatoria de 2025–26, ejercicio 3(d))*. Se pide Δ y una coloración explícita con Δ colores. El «qué hemos aprendido» del ejercicio «El índice cromático de un grafo dibujado» dice cuándo decide un teorema sin buscar (König si es bipartito, la cota por emparejamientos si es regular de orden impar), y el intercambio de König a mano (subsección 6.3.1) enseña a reparar la arista que no cabe.
- *Subdividir cada arista (primera convocatoria de 2025–26, ejercicio 2(d))*. La otra vía de una línea del ejercicio «Exactamente un ciclo impar; subdividir»: los vértices viejos con un color y los nuevos con otro. La hipótesis «con alguna arista» es la que excluye $\chi(H) = 1$.
- *Verdadero o falso con coloración (primera convocatoria de 2023, ejercicio 5(b); julio de 2024, ejercicio 4(c) y (d))*. « $\chi(G) = n$ obliga a contener K_n » es falso (C_5 , o W_6 sin K_4), como en el «dónde se falla» de «Los números cromáticos de siempre». « n -conexo $\Rightarrow \chi \geq n$ » es falso y « n -conexo lineal $\Rightarrow \chi' \geq n$ » es verdadero, por la cadena $n \leq \lambda \leq \delta \leq \Delta \leq \chi'$; los dos están resueltos en el apéndice de exámenes.
- *Planar sin triángulos $\Rightarrow \chi \leq 4$, «probando antes que hay un vértice de grado ≤ 4 » (Control 3, ejercicio 3, 4 puntos)*. Es la otra vía «con un vértice de grado ≤ 4 y cadenas de Kempe, paso a paso», escrita tras la demostración de la proposición; la de grado ≤ 3 es más corta, y las

dos valen.

- *Horarios y torneos (Relación 6, 6.7 y 6.14; segundas pruebas de 2012 y 2016).* El cuadrante de la semana de ajedrez sale de la regla $c(ij) = i + j \bmod (2n + 1)$ del ejemplo de $\chi'(K_{2n+1})$, y la tabla está en el ejercicio.

Exámenes resueltos

Este apéndice reúne los tres controles y varias convocatorias y prefinales. Los ejercicios ya desarrollados en los capítulos remiten a su solución; los restantes se resuelven aquí. Los controles 2 y 3 tienen una figura ausente en el original disponible: en esos dos ejercicios se explica el método. Para practicar el examen, puedes intentar los demás a libro cerrado y con tiempo limitado.

D.1 Control 1: árboles

1. (3 p.) Sea T un árbol y v un vértice de grado $k \geq 1$. Demuestra, ayudándote del guión, que T tiene al menos k hojas: (1) $T - v$ tiene k componentes; (2) cada componente contiene una hoja de T . **Resuelto** en la sección 2.8 (ejercicio «Hojas y grado máximo»).
 2. (2 p.) ¿Es cierto el recíproco? Contraejemplos con 4 hojas y sin vértice de grado 4, y con 5 hojas y todos los grados > 1 iguales a 3, con sus particiones bipartitas. **Resuelto** en 2.8 («El recíproco, y dos árboles bipartitos»).
 3. (4 p.) Para un árbol no trivial, $|L| = 2 + \sum_{\delta(v) \geq 2} (\delta(v) - 2)$, y las k -arañas con k hojas. **Resuelto** en 2.8 («La fórmula de las hojas»).
 4. (1 p.) Un grafo conexo con 6 vértices con dos árboles spanning no isomorfos, y su centro. **Resuelto** en 2.8 («Dos árboles spanning no isomorfos»).
- Qué buscaba:* que se sepa usar «quitar un vértice de grado k a un árbol deja k árboles», el apretón de manos con $|A| = |V| - 1$, y que el grado máximo es un invariante.

D.2 Control 2: conectividad y eulerianos

- (2 p.) Utiliza el teorema de Tutte para probar que el grafo G de la figura es 3-conexo. (La figura no está en la copia.) **Método** en 4.5.1: partir de una rueda y describir las aristas añadidas y los vértices explotados hasta obtener G ; ejemplo con el prisma.
- (3 p.) Grafos de Harary: un $H(2, 4)$, dos $H(3, 8)$ no isomorfos, y si $H(k, 7)$ con 12 aristas puede tener $k = 4$. **Resuelto** en 4.5 («Grafos de Harary»).
- (2,5 p.) G conexo con exactamente $2n$ vértices de grado impar, $n \geq 1$: sus aristas se parten en n recorridos abiertos sin aristas comunes. **Resuelto** en 3.1 («Partición en recorridos abiertos»).
- (2,5 p.) Si G es conexo, todo bloque de G es euleriano si y solo si G es euleriano. **Resuelto** en 3.1 («Bloques eulerianos»).

Qué buscaba: las dos técnicas de eulerianos (añadir vértices que cierren; partición en ciclos) y la cota $q \geq kn/2$ con su construcción.

D.3 Control 3: planaridad y coloración

- (2 p.) Demuestra que el grafo G de la figura no es planar. (Sin figura.) **Método** en 5.4: cuenta de Euler y, si no decide, $K_{3,3}$ subdividido con tres y tres principales; ejemplo con M_8 .
- (2 p.) G simple y conexo no trivial: si $G + K_2$ es planar, G es un árbol. **Resuelto** en 5.3 («Sumar un vértice o una arista»).
- (4 p.) Planar, conexo y sin triángulos $\Rightarrow \chi(G) \leq 4$, probando antes que hay un vértice de grado ≤ 4 . **Resuelto** en 6.2 (proposición «planar sin triángulos»), con la variante de grado ≤ 3 .
- (2 p.) K_5 no admite inmersión en el plano ni en la esfera; ¿y en el toro? ¿y K_6 ? **Resuelto** en 6.1: sí los dos, porque K_7 cabe en el toro (siete hexágonos).

D.4 Primera convocatoria de 2024–25 (4 de junio de 2025)

Ejercicio 1 (0,5 p. cada apartado)

Números formados con las seis cifras de $\{1, \dots, 6\}$, todas distintas: son las $6! = 720$ permutaciones.

- La cifra 1 en su posición natural: se fija el 1 y se permutan las otras cinco, $5! = 120$.
- Al menos una de las impares 1, 3, 5 en su posición: inclusión–exclusión (1.3.4) con A_i «la cifra i en su sitio»: $3 \cdot 5! - \binom{3}{2} \cdot 4! + 3! = 360 - 72 + 6 = 294$.
- 5 y 6 en posiciones consecutivas: se pegan en un bloque, que puede ir en dos órdenes, y se permutan cinco objetos: $2 \cdot 5! = 240$.
- 2 y 4 en posiciones no consecutivas: el complementario de (c) con 2, 4: $720 - 240 = 480$.

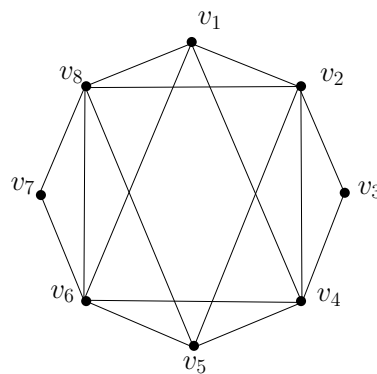
Ejercicio 2 (1 p. cada apartado)

Decidir si es verdadero o falso, justificando la respuesta.

- (a) *Todo grafo conexo de orden $n \geq 3$ tiene un vértice de grado al menos 2.* **Verdadero.** Si todos los grados fueran ≤ 1 , cada componente sería K_1 o K_2 , y un grafo conexo con $n \geq 3$ vértices no puede serlo.
- (b) *G y H son eulerianos si y solo si $G + H$ es euleriano.* **Falso** en las dos direcciones: 3.1, ejercicio «Eulerianos y suma».
- (c) *Todo grafo hamiltoniano es 2-conexo.* **Verdadero:** 3.2, ejercicio «Puntos de corte y hamiltonianos», y corolario de 4.5.
- (d) *Un grafo bipartito con $\lambda = 6$ no es planar.* **Verdadero:** 5.3, ejercicio «Bipartito con conectividad lineal seis».
- (e) *Existe un grafo conexo, plano y 4-regular con todas sus caras pentagonales.* **Falso:** 5.3, ejercicio «Caras de grado fijo», apartado (c).

Ejercicio 3 (0,5 p. cada apartado)

Sobre el grafo G de la figura, con vértices $v_1, \dots, v_8$.



Las aristas son las ocho del octágono exterior, las cuatro del cuadrado $v_2v_4v_6v_8$ sin diagonales, y v_1v_4 , v_1v_6 , v_5v_2 , v_5v_8 : 16 en total. Grados: v_3 y v_7 tienen 2; v_1 y v_5 , 4; y v_2 , v_4 , v_6 , v_8 , 5. La suma es $32 = 2 \cdot 16$.

- (a) *Dos árboles maximales no isomorfos.* Un árbol spanning tiene 7 aristas. T_1 : el camino $v_3 v_2 v_1 v_8 v_7 v_6 v_5 v_4$, cuyas siete aristas existen; es P_8 , con grado máximo 2. T_2 : las aristas v_2v_1 , v_2v_3 , v_2v_4 , v_2v_8 , v_4v_5 , v_5v_6 y v_6v_7 . Son siete aristas y conectan los ocho vértices, luego forman un árbol. Su grado máximo es 4, alcanzado en v_2 . No son isomorfos porque el grado máximo es un invariante (2 frente a 4).
- (b) *¿Es $G + v$ planar?* No: al añadir un vértice adyacente a los ocho de G , quedan 9 vértices y $16 + 8 = 24$ aristas. Como $24 > 3 \cdot 9 - 6 = 21$, se supera la cota de Euler para un grafo simple planar.
- (c) $\chi(G + v)$. El triángulo $v_1v_2v_8$ exige al menos tres colores en G . Tres bastan, como muestran estas clases de color, sin aristas dentro de cada una:

$$\{v_8, v_4\}, \quad \{v_2, v_6\}, \quad \{v_1, v_3, v_5, v_7\}.$$

Luego $\chi(G) = 3$. El nuevo vértice v es adyacente a todos los anteriores y necesita un cuarto color: $\chi(G + v) = 4$.

Ejercicio 4 (0,75 p. cada apartado)

G de orden n con $\chi(G) = k \geq 2$ y una k -coloración: (a) hay un vértice de cada color; (b) alguna clase tiene al menos n/k vértices. **Resuelto** en 6.2, ejercicio «Aristas entre clases», apartados (a) y (d).

Qué buscaba: cuatro bloques, en este orden: combinatoria con inclusión-exclusión y bloques; verdadero o falso con $G + H$, 2-conexo, Euler; el grafo dibujado con árboles, $G + v$ y χ ; y una demostración corta de coloración. La convocatoria de 2025–26 comparte los tres primeros bloques, pero no trae ese cuarto ejercicio separado.

D.5 Primera convocatoria de 2025–26 (3 de junio de 2026)**Ejercicio 1 (0,75 p. cada apartado)**

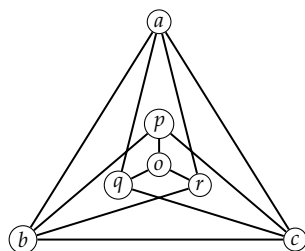
- (a) Dados $n \geq 4$ puntos del plano sin tres alineados, cada tres determinan un triángulo: $\binom{n}{3}$ triángulos. Cada cuatro determinan un K_4 (los seis segmentos entre ellos): $\binom{n}{4}$.
- (b) n puntos en la recta r y m en s , con $n, m > 1$. a) Paralelas: un triángulo necesita puntos no alineados, luego dos en una recta y uno en la otra: $\binom{n}{2}m + n\binom{m}{2}$. b) Cuadriláteros (con los cuatro vértices marcados y sin tres alineados): dos puntos en cada recta, $\binom{n}{2}\binom{m}{2}$. c) Si r y s se cortan en P no marcado, los puntos alineados siguen siendo exactamente los de una misma recta, y la cuenta es la misma que en a): $\binom{n}{2}m + n\binom{m}{2}$.

Ejercicio 2 (1 p. cada apartado)

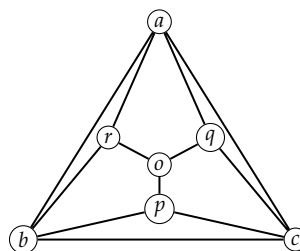
- (a) Si $|A| > |V|$, G contiene un ciclo: un grafo sin ciclos es un árbol o un bosque, y tiene a lo sumo $|V| - 1$ aristas (sección 2.8).
- (b) Si $|V| > |A| + 2$, entonces $|A| < |V| - 2 < |V| - 1$, y un grafo conexo tiene al menos $|V| - 1$ aristas (corolario de la sección 2.8): no es conexo.
- (c) No hay grafo conexo, regular de grado 4 y plano con todas las caras pentagonales: 5.3, ejercicio «Caras de grado fijo», (c).
- (d) Subdividir una vez cada arista da $\chi(H) = 2$ si hay alguna arista: 6.2, ejercicio «Exactamente un ciclo impar; subdividir», (b). Tal como está escrito el enunciado original, falta esa hipótesis: un grafo con dos vértices aislados es no trivial, no cambia al subdividir y tiene $\chi = 1$.

Ejercicio 3 (0,75 p. cada apartado)

El grafo G de la figura: triángulo exterior abc ; dentro, p (arriba), o (centro), q y r (abajo, izquierda y derecha). Sus 12 aristas son $ab, ac, bc, aq, ar, bp, br, cp, cq, op, oq, or$. Grados: a, b, c tienen 4; p, o, q, r tienen 3.



como en el examen



redibujado sin cruces

- (a) ¿Euleriano? No: p, o, q, r tienen grado impar (cuatro impares; ni siquiera hay recorrido euleriano abierto). ¿Hamiltoniano? Sí: $a r o p b c q a$ pasa por los siete vértices y usa las aristas $ar, ro, op, pb, bc, cq, qa$, todas de G .
- (b) Conectividad. Whitney: $\kappa \leq \lambda \leq \delta = 3$. Para $\kappa \geq 3$, Menger. El grafo tiene la simetría del triángulo ($a \rightarrow b \rightarrow c$ con $p \rightarrow q \rightarrow r$ y o fijo), así que los pares no adyacentes se reducen a tres tipos: exterior con el interior opuesto (a, p), exterior con el centro (a, o) e interiores entre sí (p, q). Tres arcos independientes en cada caso:

$$\begin{array}{lll} a, p: & a b p; & a c p; & a r o p \\ a, o: & a q o; & a r o; & a c p o \\ p, q: & p o q; & p c q; & p b r a q \end{array}$$

Luego $\kappa = 3$ y $\lambda = \delta = 3$ (también por Chartrand: $\delta = 3 \geq \lfloor 7/2 \rfloor$).

- (c) ¿Planar? Sí, aunque el dibujo del examen tenga cruces: se coloca p cerca del lado bc , q cerca de ac , r cerca de ab y o en el centro, como en la figura de la derecha, y ninguna arista corta a otra. Tiene $2 - 7 + 12 = 7$ caras. La cota no lo habría decidido ($12 \leq 15$); hay que dar el dibujo.
- (d) Índice cromático. $\Delta = 4$, luego $\chi' \geq 4$; y cuatro colores bastan: $ab \mapsto 1, ac \mapsto 2, bc \mapsto 3, aq \mapsto 3, ar \mapsto 4, op \mapsto 2, pb \mapsto 4, pc \mapsto 1, oq \mapsto 1, or \mapsto 3, qc \mapsto 4, rb \mapsto 2$. Se comprueba vértice a vértice: en a , $\{1, 2, 3, 4\}$; en b , $\{1, 3, 4, 2\}$; en c , $\{2, 3, 1, 4\}$; en p , $\{2, 4, 1\}$; en o , $\{2, 1, 3\}$; en q , $\{3, 1, 4\}$; en r , $\{4, 3, 2\}$. Luego $\chi'(G) = 4$.

Qué buscaba: exactamente el guion fijo del grafo dibujado, con una trampa en (c): el dibujo del enunciado tiene cruces y la cota de Euler no decide, y solo el redibujo demuestra que es planar.

D.6 Primera convocatoria de junio de 2024 (grupos 2 y 4, 6 de junio)

Ejercicio 1 (1,5 p.)

Probar que entre 15 números naturales múltiplos de 4 y con todas sus cifras distintas hay al menos dos cuyas dos últimas cifras suman lo mismo. (Ayuda del enunciado: si un natural es múltiplo de 4, también lo es el número formado por sus dos últimas cifras.)

Resolución. Palomar, y la única gracia está en las cajas. A cada número se le asocia la suma de sus dos últimas cifras. Por la ayuda, esas dos cifras forman un múltiplo de 4 entre 00 y 96, y son distintas entre sí porque todas las cifras del número lo son. Los múltiplos de 4 de dos cifras con cifras distintas son

04, 08, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 92, 96

(quedan fuera 00, 44 y 88), y sus sumas de cifras son, en el mismo orden,

4, 8, 3, 7, 2, 6, 10, 5, 9, 4, 12, 7, 11, 6, 10, 14, 9, 13, 8, 12, 11, 15.

Los valores distintos que aparecen son 2, 3, 4, ..., 15: catorce cajas. Con 15 números y 14 cajas, el principio del palomar da dos en la misma. ■

QUÉ DEJA. La cota 14 hay que justificarla, no vale decir «las sumas van de 0 a 18». Las cajas son los valores *alcanzables*, y aquí alcanzables significa: suma de las cifras de un múltiplo de 4 con las dos cifras distintas.

Ejercicio 2 (2 p.)

Sea G simple, conexo y no trivial.

- (a) Probar que $G + G$ es siempre hamiltoniano y exhibir un ciclo.
 (b) Probar que si G es regular, $G + G$ es euleriano si y solo si G es euleriano de orden par.

Resolución. Sean $u_1, \dots, u_n$ los vértices de la primera copia y $w_1, \dots, w_n$ los de la segunda, con $n \geq 2$. En la suma, *todo* u_i es adyacente a *todo* w_j .

- (a) El ciclo

$$u_1 w_1 u_2 w_2 \cdots u_n w_n u_1$$

pasa por los $2n$ vértices y solo usa aristas del tipo $u_i w_j$, que están todas. Obsérvese que no se ha usado ni una sola arista de G : **el ciclo existe sea cual sea G** , y por eso el enunciado dice «siempre».

(b) Si G es regular de grado r y orden n , en $G + G$ cada vértice conserva sus r aristas y gana las n de la otra copia: todos los grados valen $r + n$. Y $G + G$ es conexo. Luego

$$G + G \text{ euleriano} \iff r + n \text{ par.}$$

Por otro lado, G euleriano de orden par significa r par y n par, que ciertamente da $r + n$ par. Para el recíproco, si $r + n$ es par hay dos casos: los dos pares, que es lo que se quería, o los dos impares. Pero **los dos impares es imposible**: por el apretón de manos, $nr = 2|A(G)|$ es par, y si r fuese impar, n tendría que ser par. Luego solo queda el primer caso. ■

Otra vía ((b) contando el apretón de manos desde el principio). $|A(G + G)| = 2|A(G)| + n^2 = nr + n^2 = n(r + n)$, y los grados son constantes iguales a $r + n$.

Ejercicio 3 (2 p.)

Sea $\mathcal{P}_n$ el conjunto de los n primeros primos, $n \geq 4$. Los vértices de G_n son todos los productos de dos elementos de $\mathcal{P}_n$ (posiblemente iguales), y dos vértices son adyacentes si tienen algún factor común.

- (a) Orden y tamaño. ¿Es regular?
 (b) ¿Es conexo? ¿Es bipartito?

Resolución. Un vértice es un producto $p_i p_j$ con $i \leq j$, es decir, una combinación *con repetición* de dos primos entre n . Como los primos son distintos, dos productos distintos dan vértices distintos (factorización única), luego el orden es

$$|V(G_n)| = \binom{n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(a) *Grados.* Conviene pensar en el **soporte** de un vértice, el conjunto de primos que lo dividen: $\{p_i\}$ si el vértice es p_i^2 , y $\{p_i, p_j\}$ si es $p_i p_j$ con $i \neq j$. Dos vértices son adyacentes exactamente cuando sus soportes se cortan.

- Un cuadrado p_i^2 es adyacente a los vértices que contienen p_i , que son $p_i p_k$ para $k = 1, \dots, n$: en total n , uno de los cuales es él mismo. Grado $n - 1$.
- Un producto $p_i p_j$ con $i \neq j$ es adyacente a los que contienen p_i o p_j . Los que contienen p_i son n ; los que contienen p_j , otros n ; y se han contado dos veces los que contienen ambos, que es solo $p_i p_j$. En total $2n - 1$, uno de los cuales es él mismo. Grado $2n - 2$.

Como $n - 1 \neq 2n - 2$ para $n \geq 2$, G_n **no es regular**. El tamaño sale del apretón de manos:

$$|A(G_n)| = \frac{1}{2} \left[n(n-1) + \binom{n}{2} (2n-2) \right] = \frac{1}{2} [n(n-1) + n(n-1)^2] = \frac{n^2(n-1)}{2}.$$

Para $n = 4$: orden 10 y tamaño 24.

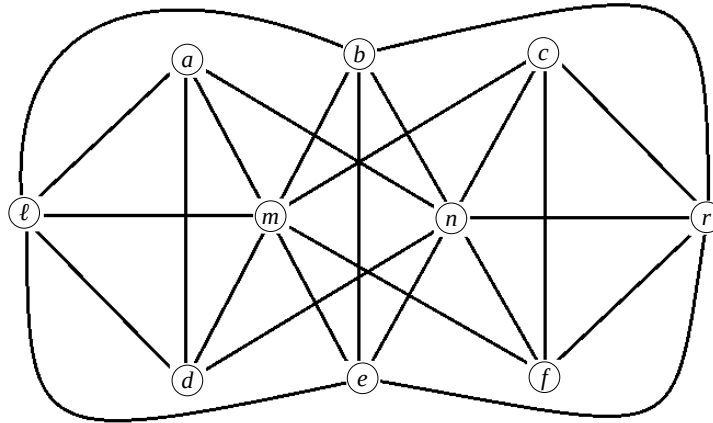
(b) *Conexo*, y además de diámetro 2. Si dos vértices comparten un primo, son adyacentes. Si no, digamos $p_a p_b$ y $p_c p_d$ con $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$, el vértice $p_a p_c$ es adyacente a los dos. Esto también vale si $a = b$ o $c = d$, es decir, para cuadrados de primos. Así, la distancia es a lo sumo 2; y p_1^2 y p_2^2 no son adyacentes, luego el diámetro es 2.

No bipartito. Los tres vértices p_1^2 , $p_1 p_2$ y $p_1 p_3$ contienen todos a p_1 , luego son adyacentes dos a dos: hay un triángulo, y un grafo con un ciclo impar no es bipartito. (Se usa $n \geq 3$, garantizado por la hipótesis $n \geq 4$.) ■

EN EXAMEN: Este modelo, «los vértices son objetos y la adyacencia es compartir algo», es el formato del ejercicio 3 de las dos convocatorias de 2024. La receta es siempre la misma: describir el soporte, contar grados por casos, apretón de manos para el tamaño, y para la conexión exhibir un camino de longitud 2.

Ejercicio 4 (3 p.)

Sobre el grafo G de la figura: (a) calcular $\kappa(G)$ y $\lambda(G)$; (b) ¿es planar? Si no, encontrar una subdivisión de $K_{3,3}$ o de K_5 ; (c) calcular $\chi(G)$ dando una coloración mínima.



Las cuatro aristas dibujadas con arco son lb , br , le y er : pasan por fuera, por encima de a y c y por debajo de d y f , sin tocarlos.

Resolución. El grafo tiene 10 vértices y 25 aristas, y una simetría especular que conviene detectar antes de calcular nada: el intercambio

$$\ell \leftrightarrow r, \quad a \leftrightarrow c, \quad d \leftrightarrow f, \quad m \leftrightarrow n, \quad b, e \text{ fijos}$$

transforma el grafo en sí mismo. Los grados son

$$\delta(a) = \delta(c) = \delta(d) = \delta(f) = 4, \quad \delta(\ell) = \delta(b) = \delta(e) = \delta(r) = 5, \quad \delta(m) = \delta(n) = 7,$$

que suman $50 = 2 \cdot 25$. Así que $\delta(G) = 4$.

(a) **Conectividades.** Whitney da $\kappa \leq \lambda \leq 4$.

$\lambda = 4$. Aislar a da $\lambda \leq 4$. Para probar que no basta quitar tres aristas, sea S el lado menor de una partición de los diez vértices y $s = |S| \leq 5$. Las aristas que salen de S son

$$\sum_{v \in S} \text{grad}(v) - 2|A(G[S])|.$$

Si $s \leq 4$, hay al menos $4s - s(s-1) = s(5-s) \geq 4$. Para $s = 5$ quedan estos casos:

- Si S no contiene a m ni a n , salen hacia ellos al menos 8 aristas: todos los demás vértices son vecinos de ambos salvo ℓ y r , vecinos de uno.
- Si contiene a ambos, la suma de grados es al menos $7 + 7 + 3 \cdot 4 = 26$; como dentro hay a lo sumo $\binom{5}{2} = 10$ aristas, salen al menos 6.
- Si contiene exactamente uno y alguno de ℓ, b, e, r , la suma de grados es al menos $7 + 5 + 3 \cdot 4 = 24$, luego salen al menos 4.
- Solo falta un centro junto con a, c, d, f : la suma de grados es 23 y dentro hay exactamente 6 aristas (las cuatro del centro, ad y cf), luego salen 11.

Todo corte tiene al menos cuatro aristas. Por tanto, $\lambda = 4$.

$\kappa = 3$. Aquí la cadena se rompe, y esa es la gracia del ejercicio. El conjunto $S = \{\ell, m, n\}$ es un corte de vértices: al quitarlo, los vértices a y d quedan aislados del resto. En efecto, los vecinos de a son ℓ, m, n, d y los de d son ℓ, a, m, n ; quitados ℓ, m, n , a a solo le queda d y a d solo le queda a . Así que $\kappa \leq 3$. Por simetría, $\{r, m, n\}$ hace lo mismo con c y f .

Y $\kappa \geq 3$: al quitar a lo sumo dos vértices, el grafo sigue conexo. Si sobreviven m y n , conservan al menos cuatro vecinos comunes de $\{a, b, c, d, e, f\}$, y todos los demás vértices restantes son vecinos de alguno de ellos. Si solo sobrevive n , este es vecino de todos salvo ℓ ; pero ℓ , si sigue presente, conserva algún vecino entre a, d, b, e , pues solo se ha quitado otro vértice además de m . El caso en que solo sobrevive m es simétrico. Si se quitan precisamente m, n , quedan los triángulos ℓad y rcf , unidos por ℓbr y ℓer . Siempre hay conexión. Luego

$$\kappa(G) = 3 < \lambda(G) = \delta(G) = 4.$$

(b) No es planar, y se ve contando. $p = 10$ y $q = 25$, y

$$3p - 6 = 24 < 25 = q.$$

La cota de la fórmula de Euler se viola, luego G no es planar. El enunciado pide además el culpable, y hay una subdivisión de K_5 con vértices principales

$$\{\ell, a, d, m, n\}.$$

De las diez conexiones que exige K_5 , ocho son aristas de G : $\ell a, \ell d, \ell m, ad, am, an, dm, dn$. Las dos que faltan se hacen con un vértice de paso cada una, y son distintos:

$$\ell e n \quad \text{y} \quad m f n.$$

Los interiores e y f no son principales ni se repiten, luego es una subdivisión de K_5 .

(c) $\chi(G) = 4$. Cota inferior: ℓ, a, d y m son adyacentes dos a dos ($\ell a, \ell d, \ell m, ad, am, dm$ son aristas), un K_4 , luego $\chi \geq 4$. Y cuatro colores bastan:

$$m \mapsto 1, \quad n \mapsto 1, \quad d \mapsto 2, \quad e \mapsto 2, \quad f \mapsto 2, \quad \ell \mapsto 3, \quad r \mapsto 3, \quad a \mapsto 4, \quad b \mapsto 4, \quad c \mapsto 4.$$

Se comprueba clase a clase, que es más rápido que arista a arista: $\{m, n\}$ no son adyacentes; $\{d, e, f\}$ tampoco lo son entre sí; $\{\ell, r\}$ no lo son; y $\{a, b, c\}$ tampoco. Cuatro clases independientes que cubren los diez vértices. Luego $\chi(G) = 4$. ■

Ejercicio 5 (1,5 p.)

Un grafo planar G (simple, conexo, no trivial) es **planar exterior** si admite una representación en el plano en la que todos sus vértices están en el borde de la cara exterior. Probar que entonces $q \leq 2p - 3$. ¿Es planar maximal?

Resolución. El truco es añadir un vértice y usar la cota que ya se tiene. Sea un dibujo plano de G con los p vértices en el borde de la cara exterior. Colóquese un vértice nuevo v en esa cara exterior y únase con los p vértices de G : como todos están en el borde de la misma cara, esas p aristas se pueden trazar sin cruces. El resultado $H = G + v$ es un grafo plano, simple y conexo con

$$|V(H)| = p + 1, \quad |A(H)| = q + p.$$

Aplicando a H la cota de la fórmula de Euler,

$$q + p \leq 3(p + 1) - 6 = 3p - 3 \implies q \leq 2p - 3.$$

¿Maximal? Solo puede serlo si es K_2 o K_3 . Un grafo planar maximal con $p \geq 3$ vértices tiene exactamente $3p - 6$ aristas, y

$$2p - 3 < 3p - 6 \iff p > 3.$$

Luego para $p \geq 4$ un grafo planar exterior tiene estrictamente menos aristas de las que tendría uno maximal, y por tanto no lo es: siempre se le puede añadir alguna arista conservando la planaridad (lo que se pierde, claro, es la exterioridad). Para $p = 3$ las dos cotas coinciden en 3 y K_3 es a la vez planar exterior y planar maximal. Para $p = 2$, el único grafo conexo simple es K_2 , también maximal. ■

QUÉ DEJA. «Un vértice nuevo en la cara exterior unido a todos» es la traducción exacta de «todos los vértices están en la cara exterior», y convierte una hipótesis geométrica en una cuenta. El mismo truco sirve para probar que un grafo planar exterior no contiene ni K_4 ni $K_{2,3}$.

Qué buscaba: los mismos cuatro bloques de siempre, aquí en cinco ejercicios: palomar con cajas que hay que justificar; una demostración sobre la suma de grafos; un grafo definido por una regla aritmética, para contar grados por casos; el grafo dibujado con las tres preguntas fijas; y una demostración corta de planaridad. La única trampa real es el apartado (a) del cuarto, donde $\kappa < \lambda$ y hay que encontrar el corte a mano.

D.7 Segunda convocatoria de julio de 2024 (grupos 2 y 4, 11 de julio)**Ejercicio 1 (2 p.)**

Se tienen 2 libros de Análisis, 3 de Álgebra, 3 de Geometría y 4 de Topología, y se quieren colocar en una estantería. ¿De cuántas maneras, (a) atendiendo solo a las materias, sin distinguir libros de una misma materia; (b) si deben aparecer agrupados por materias e importa el orden dentro de cada una; (c) si deben aparecer agrupados por materias y ordenados alfabéticamente por autor dentro de cada una?

Resolución. Son doce libros. Hay dos decisiones distintas: si los de una materia han de ir juntos y si se distingue su orden interno. Separarlas evita dividir o multiplicar por un factorial que no corresponda.

(a) No se distinguen los libros de una misma materia: lo que se ordena es la palabra $AA\,LLL\,GGG\,TTTT$, una permutación con repetición de doce letras con multiplicidades 2, 3, 3, 4:

$$\frac{12!}{2!3!3!4!} = \frac{479\,001\,600}{2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 24} = 277\,200.$$

(b) Ahora los libros sí se distinguen, pero han de ir agrupados. Se decide primero el orden de los cuatro bloques ($4!$ maneras) y después, dentro de cada bloque, el orden de sus libros:

$$4! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 4! = 24 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 24 = 41\,472.$$

(c) Igual que (b), pero dentro de cada materia el orden ya no se elige: el alfabeto lo fija. Queda solo el orden de los bloques:

$$4! = 24.$$



QUÉ DEJA. De (c) a (b) se multiplican los órdenes internos, porque se liberan manteniendo los bloques. En (a) cambian dos cosas: ya no se distinguen los libros de una materia, pero tampoco se exige que estén juntos. Por eso sus configuraciones no son simplemente más o menos restringidas que las de (b); hay que hacer su cuenta propia.

Ejercicio 2 (3 p.)

Sea $\mathcal{P}_n$ el conjunto de los n primeros primos, $n \geq 4$. Los vértices de G_n son los productos de tres elementos distintos de $\mathcal{P}_n$, y dos vértices son adyacentes si tienen *exactamente dos* factores comunes.

- (a) Orden y tamaño. ¿Es regular? ¿Es bipartito?
- (b) ¿Es conexo? ¿Es siempre euleriano?
- (c) ¿Es G_4 hamiltoniano? ¿Y G_5 ?

Resolución. Por la factorización única, un vértice *es* un subconjunto de tres primos, y dos vértices son adyacentes si sus conjuntos se cortan en exactamente dos elementos. Merece la pena decirlo así, porque entonces el grafo se ve de golpe: **los vértices son los subconjuntos de tamaño 3 de un conjunto de n elementos, y moverse por una arista es cambiar un elemento por otro.**

(a) El orden es $\binom{n}{3}$. Para el grado, se cuenta cuántos vecinos tiene un subconjunto A : hay que elegir cuál de sus tres elementos se sustituye (3 maneras) y por cuál de los $n - 3$ de fuera ($n - 3$ maneras), y elecciones distintas dan vecinos distintos. Luego G_n **es regular** de grado

$$\delta = 3(n - 3),$$

y por el apretón de manos

$$|A(G_n)| = \frac{3(n - 3)}{2} \binom{n}{3}.$$

Para $n = 4$: orden 4, grado 3, tamaño 6; es decir, $G_4 = K_4$.

No es bipartito: hay triángulos. Con $n \geq 4$, los conjuntos $\{p_1, p_2, p_3\}$, $\{p_1, p_2, p_4\}$ y $\{p_1, p_3, p_4\}$ se cortan dos a dos en exactamente dos elementos.

(b) *Conexo*. Dados dos subconjuntos A y B , se pasa de uno a otro cambiando de uno en uno los elementos de $A \setminus B$ por los de $B \setminus A$; cada cambio es una arista, y hacen falta a lo sumo tres. Luego G_n es conexo, y de diámetro a lo sumo 3.

Euleriano solo a veces. Es conexo, así que la condición es que todos los grados sean pares:

$$3(n-3) \text{ par} \iff n-3 \text{ par} \iff n \text{ impar.}$$

Así que **no** es siempre euleriano: lo es exactamente cuando n es impar. En particular G_4 , que es K_4 con todos los grados iguales a 3, no lo es, y G_5 sí.

(c) $G_4 = K_4$ es hamiltoniano. Para G_5 : tiene $\binom{5}{3} = 10$ vértices y es regular de grado $3 \cdot 2 = 6$, y

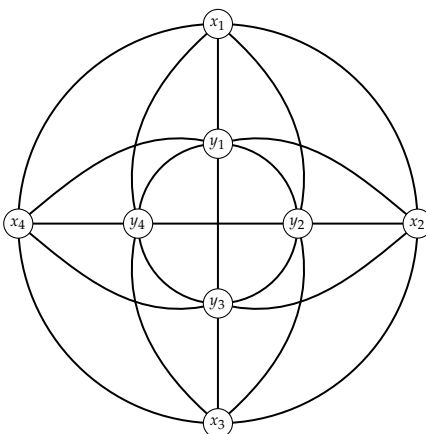
$$\delta = 6 \geq \frac{10}{2} = \frac{p}{2},$$

luego por el teorema de Dirac (el de los grados, sección 3.2) G_5 es **hamiltoniano**. ■

QUÉ DEJA. En cuanto un enunciado defina los vértices como «productos de k primos distintos» y la adyacencia como «comparten exactamente $k-1$ », conviene traducirlo inmediatamente a subconjuntos: el grado se cuenta como «qué quito y qué pongo», la conexión es «se llega cambiando de uno en uno», y la distancia entre A y B es $k - |A \cap B|$. Por tanto, para $k \leq n$ el diámetro es $\min(k, n-k)$; solo vale k cuando hay espacio para dos subconjuntos disjuntos.

Ejercicio 3 (3 p.)

Sobre un grafo G dibujado: (a) calcular $\kappa(G)$ y $\lambda(G)$; (b) ¿es planar?, y si no, encontrar una subdivisión de $K_{3,3}$ o de K_5 ; (c) calcular $\chi(G)$ dando una coloración mínima.



Se han añadido etiquetas a la figura original; los cruces sin vértice marcado no son uniones. El ciclo exterior es $x_1x_2x_3x_4$; los cuatro y_i forman un K_4 . Entre ambas capas están todas las aristas salvo x_1y_3 , x_2y_4 , x_3y_1 y x_4y_2 . Así se puede comprobar el dibujo: hay $4 + 6 + 12 = 22$ aristas, los x_i tienen grado 5 y los y_i , grado 6.

Resolución. (a) $\kappa = \lambda = 5$. Whitney da $\kappa \leq \lambda \leq \delta = 5$. Para la cota inferior es más sencillo mirar las aristas que *faltan*: el complementario es la unión de los dos caminos

$$y_3 x_1 x_3 y_1 \quad \text{y} \quad y_4 x_2 x_4 y_2.$$

Todo subgrafo inducido de G con cuatro vértices es conexo. En efecto, si fuera desconexo, un vértice aislado necesitaría tres no vecinos, pero cada vértice tiene a lo sumo dos. La única otra posibilidad son dos componentes de dos vértices: faltarían sus cuatro aristas cruzadas, formando un ciclo de longitud 4 en el complementario, que solo tiene caminos. También todo

inducido de más de cuatro vértices es conexo: para unir dos de sus vértices, basta incluirlos en un subconjunto de cuatro. Por tanto, quitar a lo sumo cuatro vértices no desconecta G , y $\kappa \geq 5$.

(b) **No es planar.** Ya lo decide $22 > 3 \cdot 8 - 6 = 18$. Además, hay una subdivisión de K_5 con principales y_1, y_2, y_3, y_4, x_1 : las seis aristas entre los y_i y las tres x_1y_1, x_1y_2, x_1y_4 están en G ; la conexión que falta se hace por $x_1x_2y_3$. Solo este camino tiene un vértice interior, x_2 , que no es principal.

(c) $\chi(G) = 4$. El K_4 interior obliga a usar cuatro colores. Bastan las clases

$$\{x_1, y_3\}, \quad \{x_2, y_4\}, \quad \{x_3, y_1\}, \quad \{x_4, y_2\},$$

que son independientes porque sus cuatro parejas son precisamente las aristas ausentes entre capas. ■

Ejercicio 4 (2 p.)

Verdadero o falso, razonadamente.

- (a) Si G es simple, conexo y regular con $\delta(G) = r$, entonces $\kappa(G) = r$.
- (b) Lo mismo con $\lambda(G) = r$.
- (c) Si G es n -conexo, entonces $\chi(G) \geq n$.
- (d) Si G es n -conexo lineal, entonces $\chi'(G) \geq n$.

Resolución. (a) Falso, y (b) también, con el mismo contraejemplo. La regularidad no impide que haya un cuello estrecho; solo impide que el cuello se note en los grados. Se toman dos copias de K_4 menos una arista: en cada copia, los dos extremos de la arista quitada tienen grado 2 y los otros dos, grado 3. Llámense u_1, v_1 y u_2, v_2 a esos extremos, y añádanse las dos aristas u_1u_2 y v_1v_2 .



El resultado es simple, conexo y 3-regular, luego $r = 3$. Pero quitando los dos vértices u_1 y v_1 el grafo se parte, luego $\kappa \leq 2 < 3$; y quitando las dos aristas rojas también, luego $\lambda \leq 2 < 3$. De hecho $\kappa = \lambda = 2$. Las dos afirmaciones son falsas.

Lo único cierto en esta dirección es la cadena de Whitney, $\kappa \leq \lambda \leq \delta = r$, y para grafos cúbicos, la igualdad $\kappa = \lambda$ del ejercicio 4.6, que aquí se cumple: $2 = 2$.

(c) **Falso.** La conexión y la coloración no se hablan. El grafo $K_{3,3}$ es 3-conexo (es 3-regular y se comprueba que hacen falta tres vértices para separarlo), y sin embargo es bipartito, luego $\chi(K_{3,3}) = 2 < 3$. En general, $K_{n,n}$ tiene $\kappa = n$ y $\chi = 2$: la diferencia puede hacerse tan grande como se quiera.

(d) **Verdadero,** y sale de encadenar cotas que ya se conocen:

$$n \leq \lambda(G) \leq \delta(G) \leq \Delta(G) \leq \chi'(G).$$

La primera es la hipótesis, la segunda es Whitney, la tercera es que el mínimo no supera al máximo, y la cuarta es la cota inmediata del índice cromático: las Δ aristas que concurren en un vértice de grado máximo se tocan dos a dos y necesitan colores distintos. ■

QUÉ DEJA. El contraste entre (c) y (d) es la moraleja del ejercicio, y conviene retenerla: la conectividad *lineal* está encadenada con los grados, y los grados están encadenados con el índice cromático, así que (d) sale sola. La conectividad *puntual* también está encadenada con los grados, pero el número cromático no lo está: un grafo bipartito puede ser todo lo conexo que se quiera y seguir necesitando dos colores.

Qué buscaba: el mismo formato de junio con los bloques permutados. La novedad es el ejercicio 4, que en lugar de pedir demostraciones sueltas pide distinguir qué cotas están encadenadas entre sí y cuáles no.

D.8 Primera convocatoria de 2023 (grupos 1 y 4, 6 de junio)

Ejercicio 1 (1,5 p.)

Con los dígitos del 1 al 9 se forman números de 7 cifras distintas. (a) ¿Cuántos hay? (b) ¿Cuántos contienen el 1, el 2 y el 3, no necesariamente consecutivos ni en ese orden? (c) ¿Cuántos contienen alguno de los dígitos 1, 2, 3?

Resolución. (a) Se eligen 7 de los 9 dígitos y se ordenan; es decir, variaciones sin repetición:

$$V_{9,7} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 181\,440.$$

(b) El 1, el 2 y el 3 están fijos como participantes; falta elegir los otros cuatro dígitos de entre los seis restantes y ordenar los siete:

$$\binom{6}{4} \cdot 7! = 15 \cdot 5\,040 = 75\,600.$$

(c) **Todos.** Este apartado es la trampa del ejercicio, y se resuelve por el complementario: un número que no contenga ninguno de los tres tendría sus siete cifras entre $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, que son solo *seis* dígitos, y las cifras han de ser distintas. Imposible. Luego no hay ninguno que falle, y la respuesta es 181 440, la misma que en (a). ■

QUÉ DEJA. Cuando un apartado pide «alguno de...», el complementario es casi siempre más corto; y antes de calcular el complementario conviene mirar si es vacío, que es justo lo que pasa aquí.

Ejercicio 2 (1 p.)

Elegidos 101 enteros no negativos al azar, probar que siempre hay dos cuya diferencia es múltiplo de 100.

Resolución. Las cajas son los 100 restos posibles al dividir entre 100: $0, 1, \dots, 99$. Los objetos son los 101 números. Por el principio del palomar, dos de ellos, a y b , caen en la misma caja, es decir, tienen el mismo resto. Entonces $a - b$ es múltiplo de 100. ■

Ejercicio 3 (2 p.)

Sea T un árbol con k aristas y G un grafo simple con $\delta(G) \geq k$.

- Comprobar que G contiene a T como subgrafo.
- Si $\delta(G) = r$, deducir que G contiene como subgrafo a todo árbol con a lo sumo $r + 1$ vértices.

LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA: EL ÁRBOL SE PLANTA HOJA A HOJA

La idea es que un árbol se puede construir añadiendo hojas de una en una, y que plantar una hoja nueva no necesita gran cosa: basta que el vértice donde se cuelga tenga algún vecino libre. La hipótesis $\delta(G) \geq k$ está justamente calibrada para eso: cuando se han colocado ya k de los $k + 1$ vértices de T , el vértice al que hay que colgar el último tiene k vecinos en G y solo $k - 1$ de ellos pueden estar ocupados. Siempre sobra uno.

Resolución. (a) Inducción sobre k . Si $k = 0$, T es un vértice suelto y cualquier vértice de G sirve.

Sea $k \geq 1$ y supóngase el resultado para árboles con $k - 1$ aristas. Como T es un árbol no trivial, tiene una hoja u (sección 2.8); sea v su único vecino. El grafo $T - u$ es un árbol con $k - 1$ aristas y k vértices. Como $\delta(G) \geq k \geq k - 1$, la hipótesis de inducción da una copia de $T - u$ dentro de G ; llámese v' al vértice de esa copia que corresponde a v .

Ahora se planta la hoja. El vértice v' tiene en G al menos $\delta(G) \geq k$ vecinos. La copia de $T - u$ ocupa k vértices de G , uno de los cuales es el propio v' : como mucho $k - 1$ vecinos de v' están ocupados. Luego v' tiene algún vecino u' libre, y añadiendo u' y la arista $v'u'$ se obtiene una copia de T .

(b) Un árbol con $r + 1$ vértices tiene r aristas, porque un árbol con m vértices tiene $m - 1$ aristas. Aplicando (a) con $k \leq r = \delta(G)$, se concluye. ■

QUÉ DEJA. Este es el modelo de demostración por inducción sobre árboles: se quita una hoja, se aplica la hipótesis y se vuelve a colgar la hoja contando cuántos sitios quedan libres. La cota $\delta \geq k$ no se puede rebajar: en K_k , que tiene $\delta = k - 1$, no cabe el árbol estrella con k aristas.

Ejercicio 4 (4 p.)

Para $n \geq 3$, sea G_n el grafo cuyos vértices son las n -tuplas $(a_1, \dots, a_n)$ con $a_i = \pm 1$, y donde dos vértices distintos son adyacentes si comparten al menos dos coordenadas. Calcular orden y tamaño; ver que es conexo; decidir para qué n es euleriano; si G_3 y G_n son hamiltonianos; calcular $\kappa(G_3)$ y $\lambda(G_3)$; y decidir la planaridad de G_3 y de G_n .

Resolución. Conviene traducir la adyacencia a distancias antes de nada. Dos n -tuplas distintas comparten al menos dos coordenadas si y solo si *difieren* en a lo sumo $n - 2$. Es decir, con la distancia de Hamming,

$$u \sim v \iff 1 \leq d(u, v) \leq n - 2.$$

Cada vértice tiene exactamente n vértices a distancia $n - 1$ y uno a distancia n (su opuesto), y esos $n + 1$ son sus únicos no vecinos.

Orden y tamaño. Hay 2^n vértices. El grado es el mismo para todos,

$$\delta = 2^n - 1 - (n + 1) = 2^n - n - 2,$$

luego G_n es regular y, por el apretón de manos,

$$|A(G_n)| = 2^{n-1}(2^n - n - 2).$$

Para $n = 3$: orden 8, grado 3, tamaño 12.

Quién es G_3 . Con $n = 3$ la condición es $1 \leq d(u, v) \leq 1$, o sea, distancia exactamente 1: dos tuplas son adyacentes cuando difieren en una única coordenada. G_3 es el cubo Q_3 , y eso resuelve de golpe la mitad de los apartados con lo que ya hay en el libro.

Conexo. Para $n = 3$ es Q_3 , que lo es. Para $n \geq 4$, dados u y v no adyacentes se tiene $d(u, v) \in \{n-1, n\}$; se toma w cambiando en u dos coordenadas de las que difieren de v . Entonces $d(u, w) = 2 \leq n-2$ y $d(v, w) = d(u, v) - 2 \leq n-2$, luego $u w v$ es un camino. Así que para $n \geq 4$ el diámetro es 2.

Euleriano. Es conexo, luego basta la paridad de los grados:

$$2^n - n - 2 \text{ par} \iff n \text{ par},$$

porque 2^n y 2 son pares. Es euleriano exactamente para n par. En particular $G_3 = Q_3$ no lo es, y G_4 sí.

Hamiltoniano. $G_3 = Q_3$ lo es (sección 3.2). Para $n \geq 4$ se aplica Dirac: hace falta $\delta \geq p/2$, es decir,

$$2^n - n - 2 \geq 2^{n-1} \iff 2^{n-1} \geq n + 2,$$

cierto para todo $n \geq 4$ ($8 \geq 6$, $16 \geq 7$, y a partir de ahí el lado izquierdo se dobla). Luego G_n es hamiltoniano para todo $n \geq 3$.

Conectividades de G_3 . Es Q_3 , regular de grado 3 y 3-conexo: $\kappa(Q_3) = \lambda(Q_3) = 3$. La cota superior es Whitney, $\kappa \leq \lambda \leq \delta = 3$. Para la inferior hay dos vías, y las dos están en el libro: exhibir tres arcos independientes entre cada par de vértices no adyacentes, aprovechando que las simetrías del cubo reducen los casos a dos (vértices a distancia 2 y vértices opuestos); o usar que en un grafo cúbico $\kappa = \lambda$ (ejercicio 4.6) y comprobar que ningún par de aristas desconecta Q_3 .

Planaridad. $G_3 = Q_3$ es planar: el dibujo del cuadrado dentro de otro cuadrado, sin cruces, con 6 caras y $8 - 12 + 6 = 2$. Para $n \geq 4$ deja de serlo, y se ve contando:

$$q = 2^{n-1}(2^n - n - 2) \quad \text{frente a} \quad 3p - 6 = 3 \cdot 2^n - 6.$$

Para $n = 4$, el grado es 10. Además, al aumentar n en uno el grado aumenta en $2^n - 1 > 0$. Luego para todo $n \geq 4$ se tiene $q = p\delta/2 \geq 5p > 3p - 6$, y G_n no es planar. ■

QUÉ DEJA. Todo el ejercicio se desbloquea con la traducción inicial «compartir al menos k coordenadas = distar a lo sumo $n - k$ en distancia de Hamming». En cuanto está hecha, los grados se cuentan con números combinatorios, el caso pequeño se reconoce ($G_3 = Q_3$) y los apartados generales salen de Dirac y de la cota de Euler. Es el mismo patrón que el ejercicio 3.15 de la relación, con $\{-1, 0, 1\}$ en vez de $\{\pm 1\}$.

Ejercicio 5 (1,5 p.)

Verdadero o falso.

- (a) Si G es bipartito y regular, con $V(G) = X \sqcup Y$, entonces $|X| = |Y|$.
- (b) Si $\chi(G) = n$, entonces G contiene un subgrafo isomorfo a K_n .

Resolución. (a) Falso tal como está escrito. Tres vértices aislados, repartidos en partes de tamaños 1 y 2, forman un grafo bipartito y regular de grado 0. La afirmación sí vale si el grado común r es positivo: Toda arista tiene exactamente un extremo en X y otro en Y , así que contar las aristas mirando desde X y mirando desde Y tiene que dar lo mismo:

$$r|X| = |A(G)| = r|Y|.$$

Si $r \geq 1$ se puede dividir y $|X| = |Y|$. La salvedad: si $r = 0$ el grafo no tiene aristas, la igualdad anterior es $0 = 0$ y no dice nada; y en efecto, un grafo sin aristas es bipartito y regular de grado 0 con las dos partes del tamaño que se quiera. Ser bipartito no exige tener aristas.

(b) Falso, y el contraejemplo más pequeño es el ciclo de longitud cinco. $\chi(C_5) = 3$ porque es un ciclo impar, y sin embargo C_5 no contiene ningún triángulo: sus únicos ciclos son él mismo, de longitud 5. Luego $\chi = 3$ sin K_3 dentro.

Merece la pena entender por qué la implicación es tan tentadora y aun así falsa: contener K_n obliga a usar n colores, luego siempre se tiene $\chi(G) \geq \omega(G)$, el tamaño del mayor subgrafo completo. Lo que el contraejemplo muestra es que esa desigualdad puede ser estricta, y de hecho puede serlo por mucho: hay grafos sin triángulos y con número cromático arbitrariamente grande. Los produce la construcción de Mycielski, que a partir de un grafo sin triángulos con $\chi = k$ fabrica otro sin triángulos con $\chi = k + 1$; arrancando en K_2 y en C_5 se obtiene la sucesión entera. No se desarrolla en este libro; el C_5 ya basta como contraejemplo. ■

Qué buscaba: un examen sin ningún grafo dibujado, cosa poco frecuente. El peso está en el ejercicio 4, que vale casi la mitad y recorre el temario entero sobre una sola familia de grafos; los demás son un conteo con trampa, un palomar, una inducción sobre árboles y dos verdadero o falso.

D.9 Examen prefinal del grupo 2 (23 de mayo de 2024)

Ejercicio 1 (3 p.)

En música, la duración de un compás 4/4 equivale a cuatro negras, y una corchea dura media negra. (a) ¿Cuántos ritmos distintos consistentes en un compás 4/4 se pueden tocar con la caja de una batería (es decir, sin atender a las notas) usando solo negras y corcheas? (b) ¿Y si el compás ha de incluir un silencio de corchea? (c) ¿Y si ha de incluir dos silencios de corchea?

Resolución. Tómese la corchea como unidad de tiempo. Entonces la negra dura 2 y el compás entero dura 8. Un ritmo no es un *conjunto* de figuras sino una *sucesión*: el tiempo va hacia delante y negra-corchea suena distinto de corchea-negra. Así que lo que hay que contar son las sucesiones ordenadas de figuras cuyas duraciones suman 8.

(a) Llámese a_n al número de ritmos de duración n con negras y corcheas. Mirando *la última figura* el problema se parte en dos y no queda nada más que hacer: si termina en corchea, lo anterior es un ritmo de duración $n - 1$; si termina en negra, un ritmo de duración $n - 2$. Y las dos posibilidades son excluyentes y agotan todos los casos. Luego

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 1,$$

donde $a_0 = 1$ cuenta el ritmo vacío, que es el que hace funcionar la recursión en el borde. Desarrollando,

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34

y la respuesta es 34.

LA IDEA: POR QUÉ SALE FIBONACCI

No es una analogía ni una casualidad numérica: es que el enunciado *es* el problema de Fibonacci. Contar ritmos de negras y corcheas es contar formas de recorrer ocho unidades de tiempo dando pasos de longitud 1 o 2, que es literalmente el problema de subir una escalera de ocho escalones de uno en uno o de dos en dos. Cualquier problema con esa forma — una línea que hay que cubrir con piezas de dos tamaños, 1 y 2 — da Fibonacci, y siempre por la misma razón: la última pieza es corta o larga, y al quitarla queda el mismo problema más pequeño.

(b) Ahora hay tres símbolos: negra (2), corchea (1) y silencio de corchea (1), y el compás debe contener exactamente un silencio. La tentación es meter el silencio en la recursión y arrastrar un contador; es mucho mejor darse cuenta de que **el silencio no es una figura más, es una marca que parte el compás en dos trozos independientes**. Fijado el instante en el que suena el silencio, a su izquierda hay un ritmo sin silencios de cierta duración j y a su derecha otro sin silencios de duración $8 - 1 - j = 7 - j$, y esos dos trozos no se condicionan en absoluto. Por tanto

$$\sum_{j=0}^7 a_j a_{7-j} = 1 \cdot 21 + 1 \cdot 13 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 13 \cdot 1 + 21 \cdot 1 = \boxed{130}.$$

Obsérvese que la suma es simétrica, como debe ser: leer el compás del revés intercambia los dos trozos.

(c) Lo mismo con dos marcas. Los dos silencios parten el compás en tres trozos de duraciones j, k y m con

$$j + 1 + k + 1 + m = 8, \quad \text{es decir} \quad j + k + m = 6,$$

y el número buscado es $\sum_{j+k+m=6} a_j a_k a_m$. Se calcula en dos pasos, agrupando primero dos de los tres factores. Con $b_n = \sum_{j=0}^n a_j a_{n-j}$ (el número de maneras de repartir n unidades en dos trozos) se obtiene

n	0	1	2	3	4	5	6
b_n	1	2	5	10	20	38	71

y entonces

$$\sum_{j=0}^6 a_j b_{6-j} = 71 + 38 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 5 + 8 \cdot 2 + 13 \cdot 1 = \boxed{233}.$$

QUÉ DEJA. Cuando una configuración está obligada a contener un objeto distinguido, casi siempre conviene *cortar por él*: el objeto deja de ser una restricción y pasa a ser una frontera, y lo que queda a cada lado es el mismo problema sin restricción. El precio es una convolución en vez de un número, y suele ser un precio bajo. Con dos objetos distinguidos, dos fronteras y tres trozos; con s , una convolución de $s + 1$ factores.

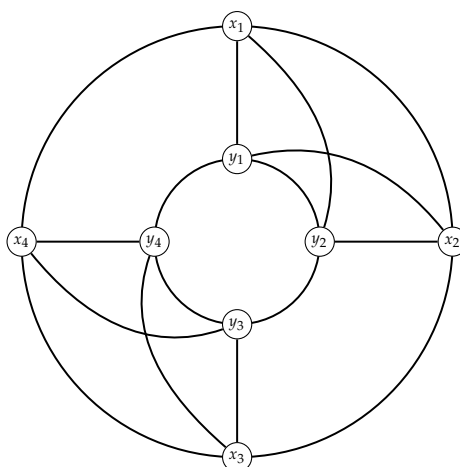
DIGRESIÓN (una coincidencia que conviene no leer como ley)

El 233 del apartado (c) es también a_{12} , el término de Fibonacci que responde al apartado (a) del examen del grupo 4. Es una coincidencia numérica: la sucesión $\sum_{i+j+k=n} a_i a_j a_k$ vale 1, 3, 9, 22, 51, ... para $n = 0, 1, 2, 3, 4$, que no es Fibonacci, y para el examen del grupo 4 los dos

números análogos son 3522 y 233, bien distintos. Coincidencias como esta son frecuentes en combinatoria con números pequeños, y son una mala brújula: dos cuentas que dan lo mismo una vez no tienen por qué ser la misma cuenta.

Ejercicio 2 (4 p.)

Sobre el grafo G de la figura: (a) ¿es euleriano? ¿y hamiltoniano? En caso afirmativo, mostrar uno de tales ciclos. (b) Calcular $\kappa(G)$ y $\lambda(G)$. (c) ¿Es G planar? En caso negativo, encontrar una subdivisión de $K_{3,3}$ o de K_5 . (d) Calcular $\chi(G)$ dando una coloración mínima.



Las dos circunferencias son los ciclos $x_1 x_2 x_3 x_4$ y $y_1 y_2 y_3 y_4$; los cuatro segmentos radiales son las aristas $x_i y_i$; y los cuatro arcos cruzados son $x_1 y_2$, $x_2 y_1$, $x_3 y_4$ y $x_4 y_3$.

Resolución. Antes de contestar nada conviene mirar qué grafo es este, porque las cuatro preguntas se contestan solas en cuanto se ve. Hay 8 vértices y $4 + 4 + 4 + 4 = 16$ aristas, y cada vértice tiene grado 4: dos de su circunferencia, una del radio y una del arco cruzado. Ahora obsérvese qué pasa con los cuatro vértices x_1, x_2, y_1, y_2 :

$$x_1 x_2 \text{ (exterior)}, \quad y_1 y_2 \text{ (interior)}, \quad x_1 y_1, \quad x_2 y_2 \text{ (radios)}, \quad x_1 y_2, \quad x_2 y_1 \text{ (arcos)}.$$

Las seis parejas posibles son aristas: es un K_4 . Y por la misma cuenta x_3, x_4, y_3, y_4 forman otro K_4 . Quedan exactamente cuatro aristas más, las que unen los dos grupos:

$$x_2 x_3, \quad x_4 x_1, \quad y_2 y_3, \quad y_4 y_1,$$

que no comparten ningún extremo. Así que

$$G \text{ son dos } K_4 \text{ unidos por un emparejamiento perfecto,}$$

lo que en la notación de productos es $G \cong K_4 \square K_2$. El dibujo del enunciado esconde esa descripción repartiendo cada K_4 entre la circunferencia de dentro y la de fuera; una vez vista, todo lo demás es corto.

(a) Euleriano y hamiltoniano, los dos. Es conexo y todos los grados valen 4, que es par: euleriano. Un circuito, escrito con la descripción de arriba,

$$x_1 x_2 y_1 y_4 x_4 x_1 y_2 x_2 x_3 y_4 y_3 x_4 x_3 y_3 y_2 y_1 x_1,$$

que recorre las 16 aristas sin repetir ninguna. Y es hamiltoniano de la manera más transparente posible: se da la vuelta al ciclo exterior, se pasa al interior por un radio y se recorre ese segundo ciclo antes de volver al inicio,

$$x_1 x_4 x_3 x_2 y_2 y_3 y_4 y_1 x_1.$$

(b) $\kappa = \lambda = 4$. Como $\delta(G) = 4$, Whitney da $\kappa \leq \lambda \leq 4$, y basta ver que ningún conjunto de tres vértices desconecta. Sea S con $|S| \leq 3$ y llámense A y B a los dos K_4 . Dos observaciones bastan:

- $A \setminus S$ y $B \setminus S$ **no son vacíos y son conexos**. No son vacíos porque S tiene menos de cuatro elementos y cada K_4 tiene cuatro; y son conexos porque un completo al que se le quitan vértices sigue siendo completo.
- **Alguna arista del emparejamiento sobrevive**. Las cuatro aristas que unen A con B no comparten extremos, luego cada vértice de S estropea como mucho una, y con $|S| \leq 3$ queda al menos una intacta.

Entonces $G - S$ tiene dos trozos conexos unidos por una arista, es decir, es conexo. Luego $\kappa \geq 4$ y

$$\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G) = 4.$$

LA IDEA: POR QUÉ AQUÍ NO SE ROMPE LA CADENA DE WHITNEY

La desigualdad $\kappa \leq \lambda \leq \delta$ suele ser estricta cuando el grafo tiene una *cintura estrecha*: un puñado de vértices por los que pasa todo. Aquí pasa lo contrario. El grafo tiene dos mitades masivas (cada una tan conectada como es posible, un completo) y el puente entre ellas no es un cuello sino cuatro aristas *disjuntas*: para cortarlo hay que gastar un vértice por arista. Cuatro aristas disjuntas cuestan cuatro vértices, y cuatro es justo el grado. Por eso las tres cantidades coinciden.

(c) **No es planar**. Aquí la cuenta de Euler no sirve de nada: $p = 8, q = 16$ y $3p - 6 = 18 \geq 16$, así que la cota se cumple sin apuros y no dice nada. Hay que exhibir la subdivisión, y la estructura la regala. Ya hay un K_4 hecho, el de $A = \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$; para tener un K_5 falta un quinto vértice unido a los cuatro por caminos que no se estorben, y el segundo K_4 es exactamente el material para fabricarlo. Tómese x_3 como quinto vértice principal:

$$x_3 x_2; \quad x_3 x_4 x_1; \quad x_3 y_4 y_1; \quad x_3 y_3 y_2.$$

El primero es la arista del emparejamiento $x_2 x_3$. Los otros tres salen de x_3 por sus tres aristas dentro de B (hacia x_4, y_4 e y_3) y saltan a A por la arista del emparejamiento de cada uno. Los interiores x_4, y_4 e y_3 son distintos y ninguno es principal, luego los diez caminos son internamente disjuntos y

$$\{x_1, x_2, y_1, y_2, x_3\}$$

son los vértices principales de una subdivisión de K_5 . Por Kuratowski, G no es planar.

LA IDEA: QUÉ ESTÁ HACIENDO EL SEGUNDO K_4

Si se contrae todo el segundo K_4 a un solo punto, cada una de sus cuatro aristas del emparejamiento se convierte en una arista de ese punto a un vértice distinto del primer K_4 : lo que queda es exactamente K_5 . Esa es la razón de fondo, y la subdivisión de

arriba no es más que esa contracción escrita con caminos en vez de con contracciones. Conviene tener presente ese movimiento: *un bloque muy conectado con cuatro salidas disjuntas funciona como un solo vértice de grado cuatro*.

(d) $\chi(G) = 4$. Como G contiene un K_4 , hacen falta al menos cuatro colores. Y cuatro bastan: dentro de cada K_4 los cuatro colores están obligados a aparecer una vez cada uno, de modo que lo único que hay que decidir es cómo se emparejan las dos asignaciones, y el emparejamiento solo prohíbe repetir color a lo largo de sus cuatro aristas. Basta desplazarlos:

$$x_1, x_3 \mapsto 1, \quad x_2, x_4 \mapsto 2, \quad y_1, y_3 \mapsto 3, \quad y_2, y_4 \mapsto 4.$$

Cada clase tiene dos vértices, uno de cada K_4 , y son no adyacentes: x_1 y x_3 son diagonalmente opuestos en el ciclo exterior, e igual las otras tres parejas. Luego $\chi(G) = 4$.

Ejercicio 3 (1,5 p.)

Demostrar que todo grafo simple y conexo no trivial ha de contener al menos un vértice que no es punto de corte.

Resolución. La demostración cabe en dos frases si se elige bien el objeto con el que mirar el grafo, y el objeto es un árbol generador.

Sea T un árbol generador de G , que existe porque G es conexo. Como G no es trivial, T tiene al menos dos vértices, y **todo árbol con al menos dos vértices tiene al menos dos hojas**. Sea v una de ellas. Al quitar una hoja de un árbol lo que queda, $T - v$, sigue siendo un árbol; y $T - v$ es generador de $G - v$, porque contiene todos los vértices de G salvo v y todas sus aristas están en G . Un grafo que admite un árbol generador es conexo, luego $G - v$ es conexo y v no es punto de corte. ■

LA IDEA: POR QUÉ LA HOJA ES LA ELECCIÓN CORRECTA

Un punto de corte es un vértice por el que *pasa* el paso entre dos partes del grafo. Una hoja de un árbol generador es lo contrario de eso: es un extremo del esqueleto, un sitio al que se entra pero desde el que no se va a ninguna parte. Y la clave técnica es que la hoja lo es *del árbol*, no de G : en G puede tener grado altísimo. No importa. Para conectar el resto de G basta con el esqueleto, y el esqueleto no la necesita.

El mismo argumento da gratis el enunciado del grupo 4, que pide *dos* vértices que no son puntos de corte: el árbol generador tiene al menos dos hojas, no una.

Otra vía (el vértice más lejano). Fijado $u \in V(G)$, sea v un vértice a distancia máxima de u . Entonces v no es punto de corte. En efecto, si lo fuera, $G - v$ tendría una componente C que no contiene a u ; tomando $x \in C$, todo camino de u a x en G pasa por v , luego $d(u, x) > d(u, v)$, contra la elección de v . La imagen es la misma que antes: el punto más lejano no puede ser la puerta de nadie, porque todo lo que estuviera detrás de esa puerta estaría todavía más lejos.

Ejercicio 4 (1,5 p.)

Demostrar que no hay ningún grafo G conexo, plano y regular con $\delta(G) = 3$ que tenga todas sus caras hexagonales.

Resolución. Supóngase que existe, con p vértices, q aristas y c caras. Las dos hipótesis se traducen en dos contajes dobles, cada uno mirando las aristas desde un lado.

Desde los vértices: G es regular de grado 3, luego el apretón de manos da $3p = 2q$, es decir, $p = \frac{2}{3}q$.

Desde las caras: cada cara está bordeada por 6 aristas y cada arista aporta dos lados a los bordes de las caras (aunque ambos pertenezcan a una misma cara), luego $6c = 2q$, es decir, $c = \frac{1}{3}q$.

Ahora la fórmula de Euler:

$$2 = p - q + c = \frac{2}{3}q - q + \frac{1}{3}q = 0,$$

que es falso. Luego tal grafo no existe. ■

LA IDEA: EL HEXÁGONO ES PLANO, Y UNA ESFERA NO LO ES

La cuenta anterior no solo prueba que no existe: dice *por qué* no existe, y merece la pena verlo porque explica de paso el mundo entero de los poliedros. Reescribese la fórmula de Euler repartiendo cada arista y cada cara entre sus vértices. Si a cada vértice v se le asigna

$$\kappa(v) = 1 - \frac{\text{grad}(v)}{2} + \sum_{f \ni v} \frac{1}{\ell(f)},$$

donde $\ell(f)$ es el número de lados de la cara f y la suma cuenta cada incidencia del borde con v , con multiplicidad si el recorrido vuelve a v . Entonces, al sumar sobre todos los vértices cada arista se cuenta dos veces y cada cara f recibe $\ell(f)$ sumandos de $1/\ell(f)$, de modo que

$$\sum_v \kappa(v) = p - q + c = 2.$$

Ese $\kappa(v)$ es la **curvatura** del grafo en el vértice v , y la identidad anterior es la versión discreta, normalizada por 2π , del teorema de Gauss–Bonnet: la curvatura total de una esfera es una constante que no depende de cómo se la dibuje.

Ahora bien, con grado 3 y todas las caras hexagonales,

$$\kappa(v) = 1 - \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} = 0$$

en todos los vértices. Curvatura cero en todas partes: el panal de abejas, que efectivamente tesela el plano euclídeo, pero infinito y sin cerrarse nunca. La suma de ceros no puede valer 2, y esa es exactamente la contradicción de la demostración. Es también la razón por la que un balón de fútbol no puede ser todo hexágonos: para cerrarse sobre una esfera hace falta curvatura positiva en alguna parte, y esa es la función de los doce pentágonos.

CONEXIÓN CON Geometría de superficies

La identidad $\sum_v \kappa(v) = p - q + c$ es el análogo combinatorio de $\int_S K dA = 2\pi \chi(S)$ para una superficie compacta sin borde. Con la normalización usada aquí, $2\pi \sum_v \kappa(v)$ corresponde a la integral de curvatura. El paso al continuo cambia la suma por una integral y la curvatura discreta por la curvatura de Gauss, pero el enunciado es el mismo: la curvatura total está determinada por la topología y no por la forma. Lo que en el plano se ve como una cuenta de aristas y caras, en una superficie se ve como un teorema de geometría diferencial.

Qué buscaba: un conteo con recursión, el grafo dibujado con las cuatro preguntas de siempre, y dos demostraciones cortas, una de conectividad y otra de planaridad. Las cuatro preguntas sobre el grafo se responden casi sin calcular en cuanto se identifica la estructura, que es el trabajo real del ejercicio.

D.10 Examen prefinal del grupo 4 (24 de mayo de 2024)

Este examen es el gemelo del anterior, tomado un día después: mismos cuatro ejercicios con las constantes cambiadas. Conviene resolverlo después del otro y fijarse en qué sobrevive al cambio.

Ejercicio 1 (3 p.)

Un compás $3/4$ dura tres negras. (a) ¿Cuántos ritmos distintos de dos compases $3/4$ se pueden tocar con un cajón flamenco usando solo negras y corcheas? (b) ¿Y si hay que incluir exactamente un silencio de corchea? (c) ¿Y si hay que incluir en total dos silencios de corchea?

Resolución. Dos compases de $3/4$ duran seis negras, es decir, 12 corcheas. Hay que precisar si una figura puede atravesar la separación entre compases. Si cada compás se completa por separado, las respuestas son 169, 988 y 2770, justificadas en el recuadro de abajo. Primero calculamos el otro modelo, un tramo único de 12 unidades sin imponer esa separación. Con la misma sucesión a_n del examen anterior, prolongada,

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

(a) $a_{12} = \boxed{233}$.

(b) El silencio parte el tramo en dos de duraciones j y $11 - j$:

$$\sum_{j=0}^{11} a_j a_{11-j} = 2(144 + 89 + 2 \cdot 55 + 3 \cdot 34 + 5 \cdot 21 + 8 \cdot 13) = 2 \cdot 654 = \boxed{1308}.$$

(c) Los dos silencios lo parten en tres de duraciones $j + k + m = 10$. Con $b_n = \sum_j a_j a_{n-j}$, cuyos primeros valores son

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_n	1	2	5	10	20	38	71	130	235	420	744

se tiene

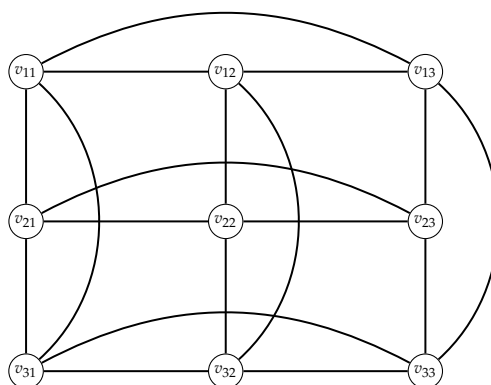
$$\sum_{j=0}^{10} a_j b_{10-j} = \boxed{3522}.$$

DIGRESIÓN (la barra de compás)

Si las figuras deben quedar dentro de su compás, se cuentan dos compases independientes de 6 corcheas cada uno. Con esa lectura los tres números cambian: cada compás admite $a_6 = 13$ ritmos, luego (a) sería $13^2 = 169$; (b) sería $2 \cdot b_5 \cdot a_6 = 2 \cdot 38 \cdot 13 = 988$, según en cuál de los dos compases caiga el silencio; y (c) sería $2 \cdot 51 \cdot 13 + 38^2 = 2770$, separando el caso de los dos silencios en el mismo compás del caso de uno en cada uno. El «en total» indica que hay dos silencios entre ambos compases, pero no resuelve por sí solo si se permite atravesar la barra. Por eso conviene indicar el modelo usado; las dos cuentas aplican el mismo método a restricciones distintas.

Ejercicio 2 (4 p.)

Sobre el grafo G de la figura, las mismas cuatro preguntas del examen del grupo 2.



Los nueve vértices están dispuestos en un cuadrado 3×3 ; además de las aristas entre vecinos, cada fila se cierra con un arco por arriba y cada columna con un arco por la derecha.

Resolución. De nuevo lo primero es leer la figura. Cada fila tiene tres vértices unidos dos a dos (los dos vecinos y el arco que cierra los extremos): **cada fila es un triángulo**. Lo mismo cada columna. Y no hay ninguna arista más. Es decir:

Dos vértices distintos v_{ij} y v_{kl} son adyacentes si y solo si $i = k$ o $j = l$,

que es el grafo de las torres del tablero 3×3 , o en notación de productos $G \cong K_3 \square K_3$. Cada vértice tiene 2 vecinos en su fila y 2 en su columna: grado 4, y $q = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4 = 18$ aristas.

(a) Conexo y 4-regular, luego **euleriano**. Un circuito euleriano se obtiene uniendo los seis triángulos de filas y columnas:

$$\begin{aligned} &v_{11} v_{12} v_{13} v_{11} v_{21} v_{22} v_{12} v_{32} v_{22} v_{23} \\ &v_{13} v_{33} v_{23} v_{21} v_{31} v_{32} v_{33} v_{31} v_{11}. \end{aligned}$$

Se lee seguido, incluyendo el salto entre las dos líneas: recorre las 18 aristas una vez. Y **hamiltoniano**, recorriendo el tablero en bustrófedon y cerrando por la columna:

$$v_{11} v_{12} v_{22} v_{21} v_{23} v_{13} v_{33} v_{32} v_{31} v_{11},$$

donde el último salto $v_{31}v_{11}$ es legítimo porque comparten columna.

(b) $\kappa = \lambda = 4$. Whitney da $\kappa \leq \lambda \leq \delta = 4$. Para la otra desigualdad, sea S con $|S| \leq 3$; hay que ver que $G - S$ sigue siendo conexo. Todo el argumento descansa en una observación: **si alguna fila entera se salva, el grafo entero cuelga de ella**. En efecto, supóngase que una fila F cumple $F \cap S = \emptyset$. Entonces F es un triángulo dentro de $G - S$, luego un trozo conexo; y si $v \notin S$ es cualquier otro vértice, su columna corta a F en exactamente un vértice, que no está en S porque está en F , y v es adyacente a él por compartir columna. Así que todo vértice de $G - S$ es un vértice de F o un vecino de F : conexo.

Lo mismo vale con «columna» en lugar de «fila». Así que solo queda por tratar el caso en que S corta a las tres filas y también a las tres columnas. Con $|S| \leq 3$ eso obliga a $|S| = 3$ y a que S tenga exactamente un vértice en cada fila y uno en cada columna, es decir, a que S sea una transversal: hay $3! = 6$ posibilidades. Pero entonces $G - S$ tiene seis vértices, dos en cada fila y dos en cada columna, de modo que cada fila y cada columna aportan una arista; con $S = \{v_{11}, v_{22}, v_{33}\}$, por ejemplo, las seis aristas encadenan

$$v_{12} v_{13} v_{23} v_{21} v_{31} v_{32} v_{12},$$

que es un ciclo de longitud seis, y en particular conexo. Cualquier otra transversal se lleva a esta permutando las columnas, que es una simetría del grafo. En todos los casos $G - S$ es conexo, luego $\kappa = \lambda = 4$.

(c) **No es planar.** La cuenta de Euler otra vez no decide: $3p - 6 = 21 \geq 18 = q$. Pero hay una subdivisión de $K_{3,3}$ que se lee directamente en el tablero. Tómense como vértices principales las dos «diagonales latinas»

$$\mathcal{C} = \{v_{11}, v_{22}, v_{33}\}, \quad \mathcal{P} = \{v_{12}, v_{23}, v_{31}\},$$

que son conjuntos independientes, porque dos vértices de una diagonal no comparten ni fila ni columna. De las nueve conexiones que exige $K_{3,3}$, **seis ya son aristas**:

$$\begin{aligned} v_{11}v_{12} \text{ (fila 1)}, \quad v_{11}v_{31} \text{ (col. 1)}, \quad v_{22}v_{12} \text{ (col. 2)}, \\ v_{22}v_{23} \text{ (fila 2)}, \quad v_{33}v_{23} \text{ (col. 3)}, \quad v_{33}v_{31} \text{ (fila 3)}. \end{aligned}$$

Las tres que faltan — $v_{11}v_{23}$, $v_{22}v_{31}$ y $v_{33}v_{12}$ — se hacen con un vértice de paso cada una, y los tres de paso son justamente los tres vértices sobrantes:

$$v_{11} v_{13} v_{23}; \quad v_{22} v_{21} v_{31}; \quad v_{33} v_{32} v_{12}.$$

Cada uno de esos caminos usa una arista de fila y otra de columna, los interiores v_{13}, v_{21}, v_{32} son distintos y ninguno es principal. Luego G contiene una subdivisión de $K_{3,3}$ y, por Kuratowski, no es planar.

LA IDEA: LAS TRES DIAGONALES

Las tres diagonales latinas del tablero 3×3

$$\{v_{11}, v_{22}, v_{33}\}, \quad \{v_{12}, v_{23}, v_{31}\}, \quad \{v_{13}, v_{21}, v_{32}\}$$

forman una partición en tres conjuntos independientes. Cada vértice tiene dos vecinos en cada una de las otras dos clases. De ahí salen las dos respuestas que quedan: dos diagonales cualesquiera dan los seis vértices principales del $K_{3,3}$, y las tres a la vez dan la coloración óptima. Este es el patrón del cuadrado latino, y merece la pena

reconocerlo: cuando un grafo se define por «coincidir en alguna coordenada», en este tablero un conjunto independiente escoge a lo sumo un vértice por fila y por columna. Si tiene tres vértices es una *transversal*; las tres de arriba son una partición conveniente, no las únicas transversales posibles.

(d) $\chi(G) = 3$. Cada fila es un triángulo, luego $\chi \geq 3$. Y las tres diagonales dan la coloración:

$$\{v_{11}, v_{22}, v_{33}\} \mapsto 1, \quad \{v_{12}, v_{23}, v_{31}\} \mapsto 2, \quad \{v_{13}, v_{21}, v_{32}\} \mapsto 3.$$

Cada clase es independiente y las tres cubren los nueve vértices, luego $\chi(G) = 3$. Escrita como tabla, la coloración es literalmente un cuadrado latino de orden 3:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}$$

y la condición «ningún color se repite en una fila ni en una columna» es exactamente la condición de coloración propia de este grafo.

Ejercicio 3 (1,5 p.)

Demostrar que todo grafo simple, finito y conexo no trivial ha de contener al menos *dos* vértices que no son puntos de corte.

Resolución. Es la demostración del ejercicio 3 del grupo 2 sin ningún cambio, aprovechando que el árbol generador da dos hojas y no una. Sea T un árbol generador de G . Como G es conexo, finito y no trivial, T tiene al menos dos vértices y por tanto al menos dos hojas $u \neq v$. Para cada una de ellas, $T - u$ es un árbol generador de $G - u$, luego $G - u$ es conexo y u no es punto de corte; e igual con v . ■

QUÉ DEJA. Que un árbol con $p \geq 2$ vértices tiene al menos dos hojas es lo que hace que este enunciado sea el correcto y «al menos uno» sea solo la mitad de la verdad. La razón es la misma cuenta de siempre: un árbol tiene $p - 1$ aristas, luego la suma de grados es $2p - 2$; si hubiera como mucho una hoja, la suma sería al menos $1 + 2(p - 1) = 2p - 1 > 2p - 2$.

Ejercicio 4 (1,5 p.)

Demostrar que no hay ningún grafo G conexo, plano y regular con $\delta(G) = 3$ que tenga todas sus caras octogonales.

Resolución. Mismo esquema, y ahora la contradicción es aún más violenta. Si existiera con p vértices, q aristas y c caras, el apretón de manos da $3p = 2q$ y el recuento de incidencias cara-arista da $8c = 2q$, luego

$$p = \frac{2}{3}q, \quad c = \frac{1}{4}q,$$

y la fórmula de Euler queda

$$2 = p - q + c = \frac{2}{3}q - q + \frac{1}{4}q = -\frac{1}{12}q \implies q = -24,$$

imposible, porque $q \geq 0$. ■

LA IDEA: EL SIGNO DICE DE QUÉ MUNDO ES LA FIGURA

Con la curvatura del ejercicio 4 del grupo 2,

$$\kappa(v) = 1 - \frac{\text{grad}(v)}{2} + \sum_{f \ni v} \frac{1}{\ell(f)} = 1 - \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{8} < 0$$

en todos los vértices. La curvatura total, que debería valer 2, es aquí estrictamente negativa: por eso el q que sale es negativo, y el signo no es un accidente del álgebra sino el contenido del resultado. Un grado 3 con caras octogonales define una teselación de curvatura negativa constante, que existe perfectamente pero *en el plano hiperbólico*, no en la esfera ni en el plano euclídeo. Las tres respuestas están en un mismo cuadro, según el signo de $1 - \frac{\text{grad}}{2} + \frac{\text{grad}}{\ell}$:

caras	$\kappa(v)$	dónde vive
pentágonos	$+1/10$	la esfera: el dodecaedro
hexágonos	0	el plano euclídeo: el panal, infinito
octágonos	$-1/8$	el plano hiperbólico

Solo la primera fila puede cerrarse en un poliedro convexo finito, y el dodecaedro es la comprobación: sus 20 vértices aportan $20 \cdot \frac{1}{10} = 2$ de curvatura total, y en efecto $p = 20, q = 30, c = 12$ y $20 - 30 + 12 = 2$.

Qué buscaba: exactamente lo mismo que el examen del grupo 2, y por eso los dos se leen mejor seguidos. Lo único que cambia de verdad es el grafo dibujado, que aquí admite la partición en tres transversales, mientras el anterior contiene un K_4 , y el signo del ejercicio 4.

D.11 Prueba de evaluación del grupo C (21 de mayo de 2025)

Ejercicio 1 (0,75 p. cada apartado)

Un terreno agrícola está dividido en 10 franjas paralelas. Se quieren cultivar 3 franjas de frutos rojos, 4 de hortalizas y 3 de legumbres. ¿De cuántas maneras, en cada caso? (a) Cultivando los del mismo tipo en franjas consecutivas. (b) Distinguiendo los cultivos dentro de cada tipo (fresas, moras y arándanos como frutos rojos, por ejemplo). (c) Sin distinguirlos. (d) Distinguiendo los cultivos dentro de cada tipo y dejando además una de las diez franjas en barbecho.

Resolución. Las franjas son *paralelas*, es decir, están en fila y se distinguen unas de otras: el terreno es una sucesión de diez posiciones, no un montón de diez cosas. Todo el ejercicio consiste en decidir, en cada apartado, qué se está permutando.

(c) **primero, porque es el núcleo.** Si los cultivos de un mismo tipo son indistinguibles, una plantación es una palabra de diez letras con tres R, cuatro H y tres L. Son permutaciones con repetición:

$$\frac{10!}{3! 4! 3!} = \boxed{4200}.$$

(b) Si dentro de cada tipo los cultivos se distinguen, hay diez cultivos distintos que colocar

en diez posiciones distintas, y no queda ninguna simetría que dividir:

$$10! = \boxed{3\,628\,800}.$$

La relación entre los dos apartados es exactamente el factor que se había dividido en (c): al distinguir los tres frutos rojos entre sí, las cuatro hortalizas entre sí y las tres legumbres entre sí, cada plantación de (c) se abre en $3!4!3! = 864$ plantaciones de (b), y en efecto $4200 \cdot 864 = 3\,628\,800$.

(a) Ahora los tres tipos han de ocupar tramos consecutivos, de modo que la plantación queda determinada por el orden en que aparecen los tres bloques: RHL, RLH, HRL, HLR, LRH, LHR. Sin distinguir los cultivos dentro de cada tipo,

$$3! = \boxed{6},$$

y si se distinguen, cada uno de esos seis órdenes admite $3!4!3!$ maneras de ordenar los cultivos dentro de sus bloques, lo que da $6 \cdot 864 = 5184$.

(d) Aquí hay que leer con cuidado. Hay diez cultivos distintos y diez franjas; si una de ellas se deja sin plantar, uno de los cultivos se queda fuera, y con él uno de los tres tipos plantará una franja menos. La decisión se toma en dos pasos independientes: qué franja va en barbecho (10 maneras) y cómo se colocan nueve de los diez cultivos en las nueve franjas restantes, que son variaciones de diez elementos tomados de nueve en nueve:

$$10 \cdot \frac{10!}{1!} = 10 \cdot 3\,628\,800 = \boxed{36\,288\,000}.$$

Equivalentemente: se elige el cultivo que se queda fuera (10), la franja que queda vacía (10) y se permutan los nueve restantes (9!), lo que da el mismo $10 \cdot 10 \cdot 9!$.

QUÉ DEJA. Los apartados (b) y (c) son el mismo problema visto con y sin etiquetas, y la razón de la división por $3!4!3!$ es que cada configuración sin etiquetas corresponde a exactamente ese número de configuraciones con etiquetas. Ese «exactamente» es lo que hay que comprobar siempre antes de dividir: si las clases no tuvieran todas el mismo tamaño, la división no valdría.

Ejercicio 2 (1 p. cada apartado)

Cien ciudades, todas con aeropuerto. Se quiere poder viajar de cualquiera a cualquier otra mediante conexiones aéreas, tal vez con escalas. (a) Diseñar dos grafos no isomorfos que resuelvan el problema. (b) ¿Cuál es el mínimo número de conexiones necesarias? (c) Diseñar una red con los 100 aeropuertos, exactamente 114 conexiones, y en la que sea posible un viaje que pase por todas las ciudades sin repetir ninguna y vuelva al origen.

Resolución. La traducción es inmediata y conviene hacerla explícita: las ciudades son vértices, las conexiones aéreas aristas, «poder viajar de cualquiera a cualquier otra con escalas» es la conexión del grafo, y el viaje del apartado (c) es un ciclo hamiltoniano.

(a) Dos ejemplos tan distintos como se pueda: el camino P_{100} (las ciudades en fila, cada una unida a la siguiente) y la estrella $K_{1,99}$ (una ciudad central y las otras noventa y nueve colgando de ella, que es el modelo real de un aeropuerto *hub*). Los dos son conexos, y no son isomorfos porque la estrella tiene un vértice de grado 99 y en el camino ningún grado pasa de 2; el grado máximo es un invariante por isomorfismo.

(b) **Noventa y nueve.** Un grafo conexo con p vértices tiene al menos $p - 1$ aristas, luego hacen falta al menos 99 conexiones; y el camino del apartado anterior tiene exactamente 99 y

resuelve el problema, luego el mínimo se alcanza. La cota inferior se prueba por inducción sobre p : para $p = 1$ es trivial; y si G es conexo con $p \geq 2$ vértices, o bien tiene un vértice v de grado 1, y entonces $G - v$ es conexo con $p - 1$ vértices y $q - 1$ aristas y la hipótesis de inducción da $q - 1 \geq p - 2$; o bien todos los grados son ≥ 2 y el apretón de manos da ya $q \geq p > p - 1$.

LA IDEA: POR QUÉ EL MÍNIMO SON EXACTAMENTE LOS ÁRBOLES

Cada arista que se añade a un grafo puede, como mucho, fundir dos componentes en una. Se empieza con 100 ciudades aisladas, es decir, 100 componentes, y se quiere llegar a una: hay que reducir el número de componentes en 99, y cada arista reduce a lo sumo en 1. Esa es toda la demostración, y además dice cuándo se alcanza la igualdad: cuando *ninguna* arista se desperdicia, o sea, cuando ninguna une dos ciudades ya comunicadas. Un grafo conexo sin aristas desperdiciadas es un grafo conexo sin ciclos, es decir, un árbol.

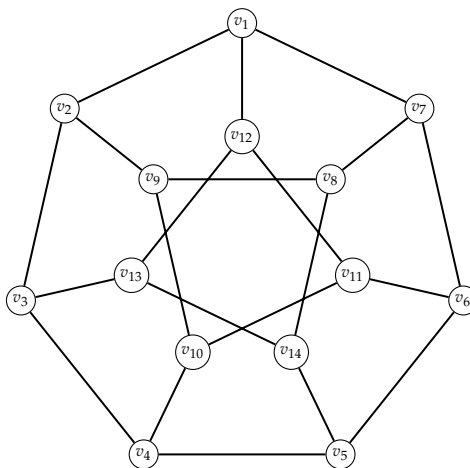
(c) La condición pedida es tener un ciclo hamiltoniano, y la manera más económica de garantizarlo es *ponerlo*. Tómese el ciclo C_{100} , que usa las cien ciudades y cien conexiones y ya admite el viaje $c_1 c_2 \cdots c_{100} c_1$; y añádanse catorce conexiones cualesquiera entre ciudades no consecutivas, por ejemplo

$$c_1 c_3, c_1 c_4, \dots, c_1 c_{16},$$

que son catorce. El resultado tiene 100 vértices, $100 + 14 = 114$ aristas y sigue conteniendo el ciclo original, luego sigue siendo hamiltoniano: añadir aristas nunca destruye un ciclo que ya estaba.

Ejercicio 3 (1 p. cada apartado)

Sobre el grafo G de la figura: (a) si v es un vértice nuevo, ¿es $G + v$ euleriano? ¿Por qué? (b) Estudiar $\kappa(G)$ y $\lambda(G)$. (c) ¿Es G planar? (d) Calcular $\chi(G)$ dando una coloración mínima.



Resolución. El grafo tiene 14 vértices y $7 + 7 + 7 = 21$ aristas, y es 3-regular: cada v_i del heptágono exterior tiene dos vecinos en él y un radio, y cada v_j interior tiene dos vecinos en la estrella interior y un radio. Es el grafo de Petersen generalizado $GP(7, 2)$: heptágono exterior, heptágono interior recorrido de dos en dos, y los siete radios.

(a) **Sí, $G + v$ es euleriano.** La suma $G + v$ une el vértice nuevo a los catorce vértices de G . Entonces

$$\text{grad}_{G+v}(v) = 14, \quad \text{grad}_{G+v}(v_i) = 3 + 1 = 4 \text{ para todo } i,$$

y todos los grados son pares. Además $G + v$ es conexo, porque v es adyacente a todo. Un grafo conexo con todos los grados pares es euleriano, luego $G + v$ lo es. Obsérvese que G **no** lo era: todos sus grados valían 3. El vértice nuevo arregla los catorce a la vez, y esa es la gracia del apartado: sumar un vértice cambia la paridad de *todos* los grados de golpe, de modo que un grafo regular de grado impar y orden par siempre se vuelve euleriano al sumarle un vértice.

(b) $\kappa(G) = \lambda(G) = 3$. Como $\delta = 3$, Whitney da $\kappa \leq \lambda \leq 3$, y basta ver que ningún par de vértices desconecta. La clave es que G está hecho de *dos ciclos de siete* — el exterior $v_1 \cdots v_7$ y el interior $v_8 v_9 v_{10} v_{11} v_{12} v_{13} v_{14}$, que también es un C_7 aunque el dibujo lo trace saltando de dos en dos — y *siete radios* que emparejan un vértice de cada uno. Sea S con $|S| = 2$ y distínganse tres casos según dónde caiga S .

Los dos en el ciclo exterior. El ciclo interior queda intacto, luego es un trozo conexo que contiene sus siete vértices. Y cada uno de los cinco vértices exteriores que sobreviven conserva su radio, que lo une a ese trozo. Conexo.

Los dos en el ciclo interior. Simétrico del anterior, intercambiando los papeles.

Uno en cada ciclo. Un C_7 al que se le quita *un* vértice es un camino, luego lo que queda del ciclo exterior es conexo y lo que queda del interior también. Solo falta un radio que los una, y de los siete radios se pierde a lo sumo uno por cada vértice quitado: sobreviven al menos cinco. Conexo.

En los tres casos $G - S$ es conexo, luego $\kappa \geq 3$ y $\boxed{\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G) = 3}$.

(c) **No es planar.** La cuenta de Euler no decide ($3p - 6 = 36 \geq 21$), pero hay una subdivisión de $K_{3,3}$ con vértices principales

$$\text{casas } \{v_1, v_3, v_{10}\}, \quad \text{pozos } \{v_2, v_4, v_{12}\}.$$

Cinco de las nueve conexiones son ya aristas de G :

$$v_1 v_2, \quad v_1 v_{12}, \quad v_3 v_2, \quad v_3 v_4, \quad v_{10} v_4$$

— tres del heptágono exterior ($v_1 v_2$, $v_3 v_2$ y $v_3 v_4$) y dos radios ($v_1 v_{12}$ y $v_4 v_{10}$). Las cuatro restantes son caminos:

$$v_1 v_7 v_6 v_5 v_4; \quad v_3 v_{13} v_{12}; \quad v_{10} v_9 v_2; \quad v_{10} v_{11} v_{12}.$$

Los interiores empleados son $v_7, v_6, v_5, v_{13}, v_9$ y v_{11} : seis vértices distintos, ninguno principal. Los nueve caminos son internamente disjuntos, luego G contiene una subdivisión de $K_{3,3}$ y no es planar.

LA IDEA: DÓNDE ESTABA ESCONDIDO EL $K_{3,3}$

Las tres casas v_1, v_3, v_{10} y los tres pozos v_2, v_4, v_{12} no se han buscado a ciegas. La idea es que en un grafo 3-regular cada vértice principal de un $K_{3,3}$ debe gastar sus *tres* aristas, de modo que los seis principales no pueden ser vecinos entre sí más que por aristas que se usen. Elijiendo dos vértices del ciclo exterior a distancia dos (v_1 y v_3) y su «pozo» común v_2 , se buscan las conexiones que aún faltan, y el heptágono interior,

que salta de dos en dos, es lo que permite volver a cerrar los caminos restantes sin repetir interiores. El grafo $GP(7, 2)$ es no planar precisamente porque el salto de dos en dos entrelaza los radios: en $GP(7, 1)$, que es el prisma heptagonal, no hay entrelazado y el grafo es planar.

(d) $\chi(G) = 3$. El grafo tiene ciclos impares (el heptágono exterior, sin ir más lejos), luego no es bipartito y $\chi \geq 3$. Y tres colores bastan:

color 1 : $v_1, v_3, v_5, v_8, v_{10}$

color 2 : $v_2, v_4, v_6, v_{12}, v_{14}$

color 3 : v_7, v_9, v_{11}, v_{13}

Se comprueba clase a clase. En el ciclo exterior, los colores van 1, 2, 1, 2, 1, 2, 3: no hay dos iguales seguidos. En el ciclo interior $v_8v_9v_{10}v_{11}v_{12}v_{13}v_{14}$ van 1, 3, 1, 3, 2, 3, 2: tampoco. Y los siete radios unen v_1v_{12} (1-2), v_2v_9 (2-3), v_3v_{13} (1-3), v_4v_{10} (2-1), v_5v_{14} (1-2), v_6v_{11} (2-3) y v_7v_8 (3-1): ninguno repite. Luego $\chi(G) = 3$. ■

Qué buscaba: un conteo de permutaciones con y sin etiquetas, en el que la única dificultad real es el apartado del barbecho; la traducción de un enunciado hablado a lenguaje de grafos, con la cota $q \geq p - 1$ y un ciclo hamiltoniano fabricado a mano; y el grafo dibujado con las mismas cuatro preguntas de los otros dos exámenes. Los tres prefinales comparten esqueleto: un conteo, un grafo dibujado y una o dos demostraciones cortas del temario de conectividad y planaridad.

Lo que este libro da por sabido

Es una lista, no un curso: lo que se usa sin explicar, para saber qué repasar si algo suena raro.

- **Conjuntos y aplicaciones:** unión, intersección, complementario, producto cartesiano, partición; aplicación inyectiva, sobreyectiva, biyectiva, inversa; relación de equivalencia y clases. Es el arranque del capítulo 1, que lo recuerda.
- **Inducción** sobre n , en las dos formas: «para $n - 1$ implica para n » y «para todo $k < n$ implica para n ». La mitad de las demostraciones del libro son inducciones sobre vértices o aristas.
- **Reducción al absurdo y contrarrecíproco**, y la diferencia entre «si» y «solo si».
- **Aritmética elemental:** paridad, divisibilidad, índices módulo n (usados en ciclos, en $K_{N,N}$ y en las cenas de Walecki), parte entera $\lfloor x \rfloor$ y $\lceil x \rceil$.
- **Matrices:** producto, traspuesta, matriz simétrica, para las matrices de adyacencia e incidencia del capítulo 2.
- **Geometría del plano** a nivel de dibujo: curvas cerradas, regiones, y el hecho de Jordan de que una curva cerrada simple parte el plano en dos, que el capítulo 5 admite sin demostración.

La inducción sobre conjuntos finitos usada en el capítulo 1. Una inyección $\mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{N}_n$ obliga a $m \leq n$. Se prueba por inducción sobre m , admitiendo $\mathbb{N}_0 = \emptyset$. Para $m = 0$ no hay nada que contar. Si $m > 0$, el codominio no puede ser vacío; quitamos del dominio el elemento m y del codominio su imagen. La inyectividad garantiza que ninguna otra imagen era esa, de modo que queda una inyección entre conjuntos que se pueden reenumerar como $\mathbb{N}_{m-1}$ y $\mathbb{N}_{n-1}$. La hipótesis inductiva da $m - 1 \leq n - 1$, y por tanto $m \leq n$.

En particular, un subconjunto propio S de un conjunto de n elementos se puede incluir en los $n - 1$ que quedan al quitar un elemento que no está en S , luego tiene a lo sumo $n - 1$ elementos. Una sobreyección entre conjuntos finitos da la desigualdad contraria: elegimos una preimagen para cada elemento del codominio, y esas preimágenes son distintas.

Cómo usar este libro

Este apéndice explica las convenciones del libro y ofrece sugerencias para estudiar con sus ejemplos y ejercicios.

Este libro desarrolla los apuntes del profesor y explica con más detalle los pasos que pueden costar. Combina preguntas, ejemplos e imágenes con los enunciados formales y sus demostraciones. La intuición ayuda a anticipar el argumento; la demostración permite comprobarlo y saber bajo qué hipótesis vale.

El código visual.

El código visual distingue siete tipos de bloque:

- **Filete ciruela, «La pregunta».** Abre cada sección. Propone una pregunta que motiva el tema, planteada de manera que se pueda pensar sin saber todavía la respuesta. No se contesta en la caja: la sección entera es la respuesta.
- **Filete azul.** Una demostración. Va entera y comentada: si un paso no es evidente, se dice por qué se da.
- **Filete ocre, «La idea».** La imagen mental de lo que viene o de lo que acaba de pasar. Ayuda a seguir el argumento de la demostración.
- **Filete verde, «Antes de leer» y «Repaso intercalado».** El andamiaje de estudio. Intentar responder antes de consultar el texto permite comprobar qué se recuerda.
- **Filete gris fino, «De dónde viene», «Conexión» y «El camino que no se tomó».** Historia del concepto, enlaces con otras asignaturas y las definiciones que se descartaron. Se pueden saltar sin perder el hilo, y pueden ayudar a relacionar lo nuevo con lo que ya sabes.
- **Filete azul pizarra, «Diálogo».** Preguntas que pueden surgir al leer y sus respuestas.
- **Filetes negros arriba y abajo, «Ejercicio».** Un ejercicio, numerado dentro de su capítulo: el 4.2 es el segundo del capítulo 4. Debajo van, si hacen falta, las pistas de menor a mayor, y después la resolución.

Hay además dos marcas pequeñas, pensadas para leerse solo si se buscan. La gris, del tipo R4.7 o CONTROL 2.2, va al final del título de un ejercicio y dice de qué relación o de qué prueba sale. La granate, junto a un enunciado (• CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN), señala una

demostración que se ha pedido en las pruebas conservadas; la lista completa, con enlaces, está en el apéndice C.

Los ejemplos resueltos van dentro de la teoría, sin caja, con el rótulo **Ejemplo** en negrita. Casi siempre son casos pequeños hechos a mano antes de un teorema o de un método, y conviene seguirlos con lápiz: son el escalón entre la idea y el enunciado general.

Intercalados en el texto hay además avisos breves en cursiva verde que empiezan por EXPLÍCATE. Invitan a explicar un paso con tus propias palabras antes de seguir leyendo.

Qué es del profesor y qué hemos añadido.

Los seis capítulos son los seis temas del programa, con sus nombres y en su orden, y las secciones de cada capítulo son los apartados de los apuntes del profesor, también con sus nombres. Los títulos dicen de qué trata cada sección y nada más: lo que no está en sus apuntes se registra en el apéndice B, *Añadidos y omisiones*, donde se consulta de una vez y donde se dice también qué de sus apuntes no está aquí. Los añadidos más grandes son las demostraciones de los teoremas de Menger y de Kuratowski, que el profesor enuncia sin demostrar; los más numerosos, los ejemplos hechos a mano que preparan cada método antes de que aparezca en un ejercicio.

Los ejercicios.

Los ejercicios de las relaciones van dentro del tema, en el punto donde ya se tiene lo necesario para intentarlos; los exámenes se reúnen en su apéndice. Tras el enunciado aparece la resolución, y en algunos ejercicios también hay pistas y otras vías. Muchas resoluciones empiezan por **la idea**, que dice qué se va a hacer y por qué por ese camino, y muchas terminan con **dónde se falla**, los errores que se cometen al hacerlo. Si te atascas, lee primero la idea y vuelve a intentarlo antes de leer la resolución entera. Puedes tapar la solución para intentar resolverlo antes de consultarla. Cuando un ejercicio procede de una convocatoria concreta, se indica cuál junto al enunciado.

Las conexiones entre temas.

Las conexiones se orientan en tres direcciones:

- **Hacia atrás**, con lo ya estudiado. Las biyecciones y el principio del producto intervienen en la construcción de las distribuciones binomial e hipergeométrica en Probabilidad; las matrices de adyacencia son Álgebra lineal; la fórmula de Euler y el teorema de la curva de Jordan son Topología.
- **Hacia dentro**, con los capítulos anteriores. El lema del apretón de manos del capítulo 2, combinado con la fórmula de Euler, permite obtener cotas de grados útiles en planaridad y coloración.
- **Hacia delante**, con *Geometría y topología de superficies*. La cantidad $V - A + C$ de la fórmula de Euler es la característica de Euler–Poincaré, y el género de una superficie compacta, conexa, orientable y sin borde es el número de asas de la clasificación de superficies.

El ritmo.

No hay reparto de horas ni calendario de sesiones: el ritmo lo pone el lector. Antes de cerrar una sección, conviene comprobar con algún ejercicio a libro cerrado que puedes usar lo aprendido. Si ya dominas un procedimiento, pasa a sus variantes; si te atascas, consulta una pista o el ejemplo resuelto y vuelve a intentarlo después. El apéndice B, *Añadidos y omisiones*,

distingue las ampliaciones del material original.

Por qué los repasos mezclan temas.

Mezclar tipos de problema obliga a *decidir qué herramienta toca*, además de aplicarla. En un ensayo aleatorizado con 787 estudiantes de séptimo curso escolar, el grupo que practicó con problemas intercalados obtuvo un 61 % frente a un 38 % en una prueba un mes después (Rohrer y colaboradores, 2020). Es evidencia a favor de ese tipo de práctica en ese contexto, no una promesa de la misma mejora en matemática universitaria. Los repasos de este libro permiten volver a conceptos anteriores y ensayar esa elección de herramientas.

Una advertencia sobre la notación.

La notación es la del profesor, y hay dos puntos en los que sus apuntes no son uniformes. El libro los resuelve así y lo avisa aquí:

1. El **grado de un vértice** se escribe $\text{grad}_G(v)$ en el tema 2 y en los controles, y $\delta(v)$ o $\delta_G(v)$ en los temas 4 a 6 y en las relaciones. Son la misma cosa. El libro usa $\text{grad}(v)$ en el texto y recuerda la otra escritura cada vez que un enunciado la trae.
2. La palabra **valencia** significa en el tema 2 el grado máximo $\Delta(G)$ y en el tema 4 el grado mínimo $\delta(G)$. El libro escribe siempre $\delta(G)$ para el mínimo y $\Delta(G)$ para el máximo, y dice «valencia mínima» o «valencia máxima» con todas las letras.

La numeración de los apuntes del profesor (*Definición 2.4*, *Teorema 58*) desaparece. Cuando hace falta citar un resultado anterior, se le llama por lo que dice.