Notas de

Programación matemática

Nota editorial.

Estos apuntes han sido redactados con inteligencia artificial a partir de múltiples materiales, bajo la dirección y revisión del autor. Pueden contener errores; ante cualquier discrepancia, manda el material oficial de la asignatura.

El temario sigue el proyecto docente de la asignatura *Programación Matemática* del Grado en Matemáticas de la Universidad de Sevilla, y los exámenes resueltos proceden de sus convocatorias. Aun así, el contenido es el de un curso estándar de la materia y puede ser útil a estudiantes de otras universidades. Lo específico de cómo se imparte y se examina en Sevilla está reunido en el apéndice «Qué cae en el examen», que se puede saltar entero.

Versión de septiembre de 2026.

Índice general

1. Introducción a la Programación Matemática **1**

1.1. Qué es la Programación Matemática 1

1.2. Formulación de problemas reales como modelos 5

1.2.1. El catálogo de recursos de modelización 7

1.3. Tipos de modelos y algunos hitos 43

2. Análisis convexo **47**

2.1. Definiciones básicas. Teorema de Caratheodory 48

2.1.1. Combinaciones lineales, afines y convexas 49

2.1.2. Conjuntos convexos 50

2.1.3. Puntos extremos y direcciones 54

2.1.4. Envolvente convexa 56

2.1.5. El teorema de Caratheodory 58

2.2. Separación de conjuntos convexos. Lema de Farkas 66

2.2.1. Hiperplanos, semiespacios y separación 67

2.2.2. El teorema de la proyección 68

2.2.3. Separación de un punto y un convexo 71

2.2.4. Los tres órdenes entre vectores 73

2.2.5. El lema de Farkas 73

2.2.6. Consecuencias: Gordan, el corolario y el enunciado de Tucker . . 79

2.3. Anexo: el teorema de Tucker 87

2.4. Conjuntos poliédricos. Representación de conjuntos poliédricos 91

2.4.1. Poliedros y forma estándar 92

2.4.2. Rouché-Frobenius y la partición $A = [B \mid N]$ 92

2.4.3. Caracterización de los puntos extremos 93

2.4.4. Caracterización de las direcciones extremas 98

2.4.5. El teorema de representación 101

3. Programación lineal **113**
3.1. Definiciones básicas. Planteamiento del problema . . . 114
3.1.1. Las dos formas del problema . . . 115
3.1.2. El conjunto factible . . . 117
3.1.3. La partición $A = [B \mid N]$ y las soluciones básicas . . . 119
3.1.4. Un ejemplo completo, con todas sus bases . . . 121
3.2. Teorema fundamental de la Programación lineal . . . 126
3.2.1. Lo que ya está demostrado . . . 126
3.2.2. El teorema . . . 128
3.2.3. Lo que el teorema regala . . . 130
3.3. El método del simplex . . . 135
3.3.1. El simplex en forma matricial . . . 136
3.3.2. El simplex en formato tabla . . . 143
3.3.3. Solución básica factible inicial . . . 146
3.3.4. El algoritmo del simplex . . . 154
3.3.5. Convergencia . . . 155
3.4. Ejemplos . . . 157
3.4.1. Solución óptima finita y única . . . 157
3.4.2. Un problema ilimitado . . . 159
3.4.3. Solución óptima finita múltiple . . . 161
3.4.4. La M grande, con la trayectoria dibujada . . . 163

4. Dualidad en programación lineal **181**
4.1. El problema dual . . . 182
4.1.1. La definición canónica y la estándar . . . 184
4.1.2. La forma general y la tabla de correspondencias . . . 186
4.1.3. El dual del dual es el primal . . . 188
4.2. Teoremas de dualidad e interpretación económica del dual . . . 190
4.2.1. Dualidad débil: el certificado . . . 190
4.2.2. El teorema fundamental de dualidad lineal . . . 192
4.2.3. Dualidad fuerte . . . 196
4.2.4. Holgura fuerte . . . 198
4.2.5. Holguras complementarias . . . 199
4.2.6. Interpretación económica: los precios sombra . . . 202
4.3. Algoritmo del simplex dual . . . 207
4.3.1. La base óptima del primal da una solución factible del dual . . . 209
4.3.2. Qué hacer cuando la base es óptima pero no factible . . . 211
4.3.3. El algoritmo . . . 214
4.3.4. Un ejemplo completo, y lo que enseña su dibujo . . . 216
4.4. Análisis de sensibilidad y post-optimalidad . . . 218
4.4.1. Cambio en el vector de costos . . . 220
4.4.2. Perturbación del vector de recursos . . . 224
4.4.3. Añadir una nueva variable . . . 227
4.4.4. Añadir una nueva restricción . . . 229
4.4.5. Consultar la sensibilidad en AMPL . . . 233
4.5. Ejercicios de dualidad, sensibilidad y post-optimalidad . . . 234

5. Programación lineal entera **265**
5.1. Introducción . . . 266
5.1.1. Por qué redondear no vale . . . 267
5.2. Problemas con estructura especial . . . 270
5.2.1. Poliedros enteros y matrices totalmente unimodulares . . . 270
5.2.2. El problema del transporte . . . 282
5.2.3. El problema de asignación . . . 286
5.2.4. Problemas de flujo . . . 288
5.3. Esquemas de ramificación y acotación . . . 290
5.3.1. Las dos operaciones . . . 291
5.3.2. Un árbol completo . . . 293
5.4. Métodos de hiperplanos de corte . . . 296
5.4.1. Corte todo entero de Gomory (f-corte) . . . 297
5.4.2. Corte mixto de Gomory (m-corte) . . . 302
5.5. Ejercicios de programación entera . . . 306

6. Programación no lineal sin restricciones **319**
6.1. Introducción . . . 320
6.1.1. El problema general de la programación no lineal . . . 321
6.1.2. ¿Existe solución? El teorema de Weierstrass . . . 322
6.1.3. Mínimo local y mínimo global . . . 323
6.1.4. Funciones convexas . . . 323
6.2. Condiciones de optimalidad sin restricciones . . . 328
6.2.1. Las dos herramientas: los desarrollos de primer y segundo orden 329
6.2.2. La condición necesaria de optimalidad . . . 330
6.2.3. Puntos críticos, sillas y lo que la condición necesaria no ve . . . 335
6.2.4. La condición suficiente de optimalidad local . . . 336
6.2.5. Cómo se reconoce en la práctica una hessiana definida positiva . 340
6.2.6. De lo local a lo global: la convexidad otra vez . . . 342
6.3. Métodos iterados tipo gradiente . . . 350
6.3.1. Direcciones de descenso . . . 350
6.3.2. La dirección de máximo descenso . . . 352
6.3.3. El método del gradiente . . . 354
6.3.4. Primera opción: $D_k = \alpha_k I$, y las tres reglas de paso . . . 355
6.3.5. Segunda opción: el método de Newton . . . 360
6.4. Ejercicios . . . 364

7. Programación no lineal con restricciones **377**
7.1. Condiciones de optimalidad . . . 378
7.1.1. El problema, y qué restricciones cuentan en cada punto . . . 379
7.1.2. Direcciones factibles y direcciones de descenso . . . 381
7.1.3. De la geometría al álgebra: las condiciones de Fritz John . . . 385
7.1.4. Las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker . . . 387
7.1.5. Por qué hace falta una cualificación: la cúspide . . . 388
7.1.6. Cualificaciones de restricciones . . . 389
7.1.7. Suficiencia en el caso convexo . . . 394
7.1.8. Holgura complementaria, y lo que vale un recurso que sobra . . . 398

7.1.9. Restricciones de igualdad: los multiplicadores de Lagrange clásicos 401
7.1.10. Condiciones de segundo orden sobre el cono crítico 403
7.2. Métodos de gradiente proyectado y reducido 408
7.2.1. Proyectar una dirección sobre las restricciones activas 409
7.2.2. Cuándo se suelta una restricción, y por qué lo dice el signo 412
7.2.3. El algoritmo de Rosen, y un recorrido completo 413
7.2.4. El gradiente reducido de Wolfe 417
7.2.5. El algoritmo de Wolfe, y un recorrido completo 420
7.3. Teoría lagrangiana 424
7.3.1. La función lagrangiana y los puntos de silla 425
7.3.2. La función dual, y las dos cosas que se cumplen siempre 428
7.3.3. El salto de dualidad 430
7.3.4. El dual de un problema lineal es un dual lagrangiano 435
7.3.5. Relajación lagrangiana 437
7.4. Ejercicios 442

A. Ideas intuitivas **458**
A.1. Análisis convexo 458
A.2. Programación lineal 460
A.3. Dualidad 461
A.4. Programación lineal entera 463
A.5. Programación no lineal sin restricciones 464
A.6. Programación no lineal con restricciones 466

B. Añadidos y omisiones **468**

C. Qué cae en el examen **479**
C.1. Cómo se califica 479
C.2. El formato 480
C.3. Qué aparece en las pruebas resueltas 481
C.4. Las demostraciones que hay que saber 482
C.5. Por capítulos 483

D. Teoremas que caen **487**

E. Exámenes resueltos **489**
E.1. Examen parcial del curso 2025–26 (mayo de 2026) 489
E.2. Examen parcial del grupo 3, curso 2024–25 501
E.3. Examen parcial del grupo B, curso 2024–25 507
E.4. Prefinal del grupo 1, curso 2024–25 517
E.5. Primera convocatoria de 2024 525
E.6. Preparcial del grupo B, curso 2023–24 532
E.7. Segunda convocatoria del curso 2022–23 540
E.8. Primera convocatoria de 2023 (parte de teoría) 548
E.9. El banco histórico 552
E.9.1. Tercera convocatoria de 2018 (17 de diciembre) 553
E.9.2. Examen parcial del grupo A, 2018 558

E.9.3. Prueba de evaluación continua, 4 de junio de 2018 565
E.9.4. Examen de teoría de 2018 571
E.9.5. Examen parcial del grupo B, 31 de mayo de 2017 572
E.9.6. Examen del 29 de mayo de 2015 576
E.9.7. Examen del 17 de junio de 2015 577

F. Apoyo de otras asignaturas **584**
F.1. Álgebra lineal 584
F.2. Análisis 587
F.3. La convexidad que se usa, y de dónde viene 590
F.4. Conocimientos previos 590

G. Sesión cero de AMPL **591**
Qué es AMPL y por qué existe un lenguaje solo para modelar 592
Instalar AMPL, o usarlo sin instalar nada 593
El primer modelo, completo y sin índices 594
Separar el modelo de los datos: .mod, .dat y .run 596
Conjuntos con nombre, y los datos de un conjunto 599
Variables enteras y binarias 601
Tres modelos del curso, del enunciado al código 602
Resolver y leer la salida 609
Los valores duales y los costes reducidos 611
La plantilla que sirve para casi todo 613
Cuando el modelo deja de ser lineal 616
Los tropiezos que de verdad ocurren 617

H. Cómo usar este libro **619**

ANTES DE EMPEZAR, SI NUNCA SE HA USADO AMPL.

La introducción al lenguaje está en el **apéndice G**. Consúltese al empezar a trabajar con los modelos de los ejercicios: explica cómo preparar los ficheros, ejecutarlos y leer sus resultados.

CAPÍTULO 1

Introducción a la Programación Matemática

ANTES DE LEER

Intenta estas cuatro preguntas antes de leer. Sirven para reconocer las ideas que faltan; si alguna no sale, contrasta el intento con la explicación cuando aparezca.

1. Un almacén tiene que decidir cuántas unidades manda a cada tienda. ¿Qué tres cosas hay que escribir, y en qué orden, para que ese problema se pueda entregar a una máquina en vez de a una persona?
2. ¿Por qué «tomar la mejor decisión» es un problema matemático distinto de «resolver una ecuación»? Piensa en qué se busca en cada caso.
3. Se quiere decidir si se abre o no una fábrica. ¿Cómo se escribe «abrir o no abrir» con un número? ¿Y cómo se escribe «si no se abre, no puede servir a nadie»?
4. ¿Qué tiene de especial un problema en el que todo es lineal, para que en 1947 alguien decidiera empezar por ahí y no por el caso general?

Las respuestas están, respectivamente, en las secciones 1.2, 1.1, 1.2 (en los ejercicios de localización) y 1.3.

1.1 Qué es la Programación Matemática

LA PREGUNTA

En 1945 el economista George Stigler quiso saber cuánto costaba, como mínimo, alimentar a un hombre adulto durante un año con los precios de 1939: setenta y siete alimentos, nueve nutrientes obligatorios, y un presupuesto que había que hacer lo más pequeño posible. Hay infinitas dietas que cumplen los requisitos, y no se pueden probar todas. ¿Cómo se busca la más barata entre infinitas, y cómo se sabe que de verdad es la más barata?

LA IDEA: DECIDIR NO ES LO MISMO QUE CALCULAR

En un problema de factibilidad se buscan los objetos que cumplen unas condiciones. En uno de optimización se añade un criterio para compararlos: entre los permitidos, se busca el mejor según ese criterio. Es una distinción que ya aparece en cálculo al buscar máximos y mínimos; aquí se estudia de forma sistemática y con restricciones que pueden ser numerosas. La consecuencia práctica es que un problema de optimización tiene siempre tres piezas, y faltando cualquiera de ellas no hay problema: qué se decide, qué se quiere y qué se puede.

Definición. La **Programación Matemática** es la disciplina de la Investigación Operativa que estudia cómo describir y alcanzar lo que es lo mejor cuando se dispone de una medida cuantitativa; matemáticamente, lo óptimo. Su objetivo es el estudio teórico de los problemas de optimización y la puesta en marcha de los algoritmos de resolución cuando el objetivo y el conjunto factible pueden formalizarse mediante funciones reales de variable real:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x), \\ &\text{sujeto a:} && g(x) \leq 0, \\ &&& h(x) = 0, \\ &&& x \in X, \end{aligned}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ y $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

Conviene leer despacio cada pieza de esa formulación, porque el resto del libro no hace otra cosa que especializarla.

- El vector $x \in \mathbb{R}^n$ son las **variables de decisión**: lo que se puede elegir.
- La función f es el **objetivo**: el número que se quiere hacer lo más pequeño posible. Maximizar es minimizar $-f$, así que no se pierde nada escribiendo siempre «minimizar».
- Las desigualdades $g(x) \leq 0$, las igualdades $h(x) = 0$ y la pertenencia $x \in X$ son las **restricciones**. El conjunto de los x que las cumplen todas es el **conjunto factible**. Si está vacío, el problema es *infactible*.
- El conjunto X recoge lo que no es cómodo escribir como desigualdad: por ejemplo, que las variables sean enteras, $X = \mathbb{Z}^n$.

Observación. Es frecuente ver la función objetivo escrita como $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, lo que permitiría varios objetivos a la vez (problemas multiobjetivo). En todo este libro $p = 1$: un solo objetivo, un solo número que minimizar. Y la tercera función, la de las igualdades, se llama h y toma valores en $\mathbb{R}^l$; conviene fijarse porque es fácil confundirla con f al leerla deprisa.

La pregunta de Stigler en miniatura. Antes de seguir con el vocabulario conviene ver la formulación general funcionando en el caso más pequeño que conserva la pregunta del principio: dos alimentos y dos nutrientes, en lugar de setenta y siete y nueve. Una ración del alimento 1 cuesta 2 euros y aporta una unidad del nutriente A y tres del nutriente B; una ración del alimento 2 cuesta 3 euros y aporta dos unidades de A y una de B. Hacen falta al menos 8 unidades de A y 9 de B. Con x_1 y x_2 las raciones de cada alimento, el problema es

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && 2x_1 + 3x_2, \\ &\text{sujeto a:} && x_1 + 2x_2 \geq 8 \quad \text{(nutriente A)}, \\ &&& 3x_1 + x_2 \geq 9 \quad \text{(nutriente B)}, \\ &&& x_1,\ x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

En el lenguaje de la definición, $f(x) = 2x_1 + 3x_2$; las cuatro desigualdades forman $g(x) = (8 - x_1 - 2x_2,\ 9 - 3x_1 - x_2,\ -x_1,\ -x_2)^T \leq 0$, donde cada «$\geq$» se ha pasado a la forma «≤ 0» cambiando el signo; no hay igualdades, así que h no aparece, y $X = \mathbb{R}^2$. Con dos variables, la pregunta de Stigler se puede contestar mirando.

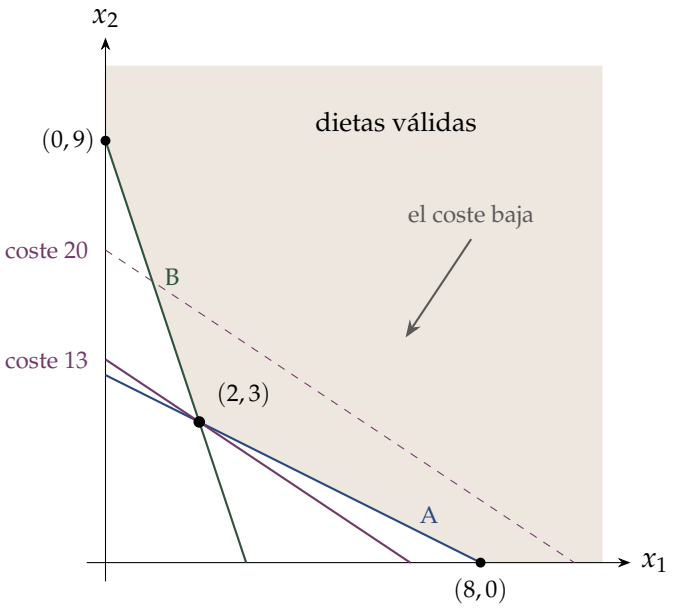


Figura 1.1: La dieta en miniatura. La región sombreada son las dietas que cumplen los dos requisitos; no está acotada hacia arriba ni hacia la derecha. Las rectas de coste constante son paralelas. La de coste 13 toca la región solo en el vértice $(2,3)$; la de coste 20, discontinua, la atraviesa: hay dietas de 20 euros, pero ninguna válida baja de 13.

El óptimo, mirando. Las dietas que cuestan exactamente k euros forman la recta $2x_1 + 3x_2 = k$; al bajar k, la recta se desplaza paralela a sí misma hacia el origen, y mientras toque la región sombreada hay alguna dieta válida de coste k. La última posición en que la toca pasa por el vértice donde se cortan las dos rectas de los nutrientes: de $3x_1 + x_2 = 9$ sale $x_2 = 9 - 3x_1$, y llevado a $x_1 + 2x_2 = 8$ da $x_1 + 18 - 6x_1 = 8$, es decir $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$, con coste $2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13$ euros. Los otros dos vértices de la región, $(0,9)$ y $(8,0)$, cuestan 27 y 16.

El certificado, que es lo que Stigler no podía dar. Mirar la figura convence, pero no demuestra, y con setenta y siete alimentos no hay figura. Hay otra forma de saber que 13 es lo mínimo, y cabe en una línea: se multiplican las dos restricciones de nutrientes por $\frac{7}{5}$ y por $\frac{1}{5}$ y se suman,

$$\tfrac{7}{5}\,(x_1 + 2x_2) + \tfrac{1}{5}\,(3x_1 + x_2) \;=\; 2x_1 + 3x_2 \;\geq\; \tfrac{7}{5} \cdot 8 + \tfrac{1}{5} \cdot 9 \;=\; 13.$$

El lado izquierdo es, término a término, el coste de la dieta. Luego *toda* dieta que cumpla los requisitos cuesta al menos 13 euros, y la dieta $(2,3)$ cuesta exactamente 13: es la más barata, y se sabe sin haber mirado ninguna otra. Los multiplicadores no se adivinan. Se buscan y_1, y_2 tales que $y_1(x_1 + 2x_2) + y_2(3x_1 + x_2)$ reproduzca el coste, es decir $y_1 + 3y_2 = 2$ y $2y_1 + y_2 = 3$, y la solución de ese sistema es $y_1 = \frac{7}{5}$, $y_2 = \frac{1}{5}$. Tienen que salir no negativos, porque multiplicar una desigualdad por un número negativo le da la vuelta y el argumento se hunde. Y tienen un significado: si se exige una unidad más de nutriente A, el coste mínimo sube de 13 a 14,4, justo $\frac{7}{5}$; si se exige una más de B, sube $\frac{1}{5}$, hasta 13,2. Son el precio de cada

exigencia. El capítulo 4 convierte esta línea en teoría: los multiplicadores son la solución del problema *dual*, y en programación lineal existen siempre que haya óptimo.

Las otras dos salidas. Dos cambios en los datos enseñan lo que también puede pasar. Si se exige además no pasar de tres raciones en total, $x_1 + x_2 \leq 3$, el problema es *infactible*: toda dieta con $x \geq 0$ que cumpla eso da $x_1 + 2x_2 \leq 2(x_1 + x_2) \leq 6 < 8$, y el nutriente A no llega. Y si en vez de minimizar el coste se quisiera maximizarlo, el problema es *no acotado*: las dietas (t, t) con $t \geq 3$ son todas válidas y cuestan $5t$, que crece sin límite. Óptimo alcanzado, conjunto factible vacío y objetivo no acotado: en programación lineal no hay más casos, y el capítulo 3 lo demuestra en la sección 3.2. Fuera de lo lineal aparece un cuarto, el ínfimo que no se alcanza: $1/x$ con $x \geq 1$ baja hacia 0 sin llegar nunca.

La Programación Matemática incluye cualesquiera de los siguientes aspectos, y merece la pena verlos como el índice oculto del libro:

1. **Formulación de problemas reales** como modelos de programas matemáticos. Es la sección 1.2 de este capítulo, la más larga de las tres.
2. **Teoremas sobre la estructura del modelo**: factibilidad, redundancia y otras relaciones. Es el capítulo 2, donde se estudia la forma del conjunto factible.
3. **Teoremas sobre la existencia de soluciones.** El teorema fundamental de la programación lineal, capítulo 3.
4. **Teoremas sobre la forma de la solución.** Bajo qué hipótesis se alcanza un óptimo en un vértice, que el dual lo certifica, que un poliedro entero tiene vértices enteros: capítulos 3, 4 y 5.
5. **Algoritmos** para buscar una solución o concluir que no existe ninguna. El simplex, el simplex dual, la ramificación y acotación, los cortes de Gomory y los métodos de gradiente.

DE DÓNDE VIENE: LA DIETA DE STIGLER Y LOS NUEVE CALCULISTAS

La pregunta que abre la sección es real. George Stigler publicó en 1945 «The Cost of Subsistence», donde planteó la dieta mínima con 77 alimentos y 9 nutrientes. No tenía ningún método general: por tanteo y con mucha habilidad llegó a una dieta de 39,93 dólares al año a precios de 1939, y reconoció que no podía garantizar que fuera la mejor. Dos años después, en 1947, el equipo de George Dantzig usó el problema de Stigler como primera prueba a gran escala del método del simplex: nueve empleados con calculadoras de mesa tardaron unos 120 días-persona en resolverlo y obtuvieron 39,69 dólares, es decir, Stigler se había quedado a 24 centavos del óptimo. La diferencia no está en el número sino en la palabra *garantizar*: por primera vez se podía afirmar que ninguna otra dieta era más barata. Eso es lo que compra la teoría de los capítulos siguientes.

CONEXIÓN: INFERENCIA ESTADÍSTICA

La máxima verosimilitud es un problema de optimización: dada una muestra independiente del modelo $f(x;\theta)$, se elige θ en el espacio paramétrico para maximizar $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$. Donde $L > 0$, equivale a minimizar $-\log L$. Las variables de decisión son los parámetros y el conjunto factible es el espacio paramétrico: puede imponer restricciones, como $\sigma > 0$ o $0 \leq p \leq 1$. En un óptimo interior diferenciable, las ecuaciones de verosimilitud son la condición de gradiente nulo del capítulo 6; en la frontera hay que estudiar las restricciones. La hessiana de $-\log L$ es la información observada. Bajo las hipótesis de regularidad estadísticas, su esperanza es la información de Fisher; no son, en general, la misma matriz para una muestra concreta.

De fuera de este libro hacen falta pocas cosas, y conviene decir cuáles desde el principio:

rango de una matriz y compatibilidad de sistemas, bases y matrices por bloques, determinantes y la regla de Cramer, gradiente y hessiana, y la compacidad con el teorema de Weierstrass. Las herramientas previas se reúnen en el apéndice F, con ejemplos y referencias para repasarlas. La convexidad, en cambio, no está en esa lista: este libro la construye desde la definición en el capítulo 2 y no la supone sabida.

Qué se ha ganado. La pregunta de Stigler tiene ya forma: tres piezas (variables, objetivo y restricciones), tres desenlaces posibles en el caso lineal (óptimo, infactible y no acotado) y, en el caso pequeño, las dos cosas que se le piden a un método: encontrar la dieta y demostrar que ninguna es más barata. Quedan abiertas dos preguntas. Cómo se pasa de un enunciado en palabras a esas tres piezas, que es la sección siguiente. Y cómo se encuentran el vértice y los multiplicadores cuando no hay figura que mirar, que es lo que hacen los capítulos 3 y 4.

EXPLÍCATE. *Antes de seguir: escribe con tus palabras la diferencia entre «resolver $g(x) \leq 0$» y «minimizar f sujeto a $g(x) \leq 0$». ¿Cuál de los dos problemas puede tener solución única aunque el primero tenga infinitas?*

1.2 Formulación de problemas reales como modelos

LA PREGUNTA

Un oficial de logística tiene que planificar, para los próximos meses, cuántos hombres se entrenan en cada base, qué material se envía a dónde y en qué orden se despliegan las unidades. Hasta 1947 eso se hacía a mano, con reglas de sentido común, y a ese trabajo se le llamaba *programar*. ¿Qué habría que escribir, exactamente, para que una máquina que no entiende nada de tropas pudiera hacer ese trabajo mejor que el oficial?

LA IDEA: LAS TRES PREGUNTAS QUE SE HACEN SIEMPRE

Formular un problema es contestar tres preguntas. Este orden ayuda a empezar, aunque al escribir las restricciones puede hacer falta afinar las variables:

1. **¿Qué se decide?** Cada decisión elemental se convierte en una variable con índices. «Cuántas unidades van del almacén i a la tienda j» es x_{ij}. «Si se abre o no la planta i» es $y_i \in \{0, 1\}$. Se escribe la definición completa, con sus índices y sus rangos, antes de escribir nada más.
2. **¿Qué se quiere?** Una sola expresión numérica en las variables: el coste total, el beneficio neto, el número de cuerpos móviles. Si hay dos criterios, una posibilidad es fijar un umbral para uno y optimizar el otro; esa elección debe reflejar qué se pretende.
3. **¿Qué se puede?** Cada condición del enunciado se traduce a una igualdad o desigualdad en las variables. Se recorre el enunciado frase a frase; cada frase que limita algo es una restricción, y cada restricción debe poder señalarse en el enunciado.

Lo que separa una formulación correcta de una que parece correcta es casi siempre la primera pregunta: una variable mal definida (sin índice, con dos significados, o continua cuando debía ser binaria) lo contamina todo.

Un modelo pensado paso a paso

La caja anterior dice qué preguntas hay que hacerse; falta ver cómo se contestan cuando el enunciado viene en palabras. Se hace aquí con el problema de la primera pregunta del capítulo, en su versión más pequeña. Dos almacenes tienen 30 y 25 unidades de un producto; tres tiendas piden 20, 15 y 18; y enviar una unidad cuesta, en euros,

	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3
Almacén 1	4	6	9
Almacén 2	5	3	7

Se quiere atender a las tiendas con el menor coste de envío.

Paso 0: separar los datos de las decisiones. Todo número del enunciado es un dato: 30, 25, 20, 15, 18 y la tabla. Nadie los elige. Lo que el enunciado deja sin fijar es cuánto va de cada almacén a cada tienda, y eso es lo que se decide.

Paso 1: los índices. Hay dos clases de objetos, los almacenes $i \in \{1,2\}$ y las tiendas $j \in \{1,2,3\}$, y la decisión habla de parejas almacén–tienda. Los datos se nombran con esos mismos índices: la existencia a_i de cada almacén, la demanda d_j de cada tienda y el coste c_{ij} de cada pareja.

Paso 2: las variables, con su definición completa. $x_{ij} \geq 0$ son las unidades que el almacén i envía a la tienda j: seis variables, medidas en unidades de producto. La prueba de que la lista está completa es esta: quien conociera los seis valores podría ejecutar el plan sin tener que decidir nada más. Si todavía le quedara algo por decidir —qué almacén abrir, en qué mes enviar—, faltaría una variable.

Paso 3: el objetivo, con sus unidades. El coste total es $\sum_{i,j} c_{ij}x_{ij}$: euros por unidad multiplicados por unidades dan euros. Comprobar las unidades de cada término no es un formalismo: un objetivo que suma euros por hora con euros al mes está mal escrito aunque parezca razonable.

Paso 4: las restricciones, frase a frase y con nombre. «Los almacenes tienen 30 y 25 unidades» da la *oferta*, $\sum_j x_{ij} \leq a_i$: no se envía más de lo que hay. «Las tiendas piden 20, 15 y 18» da la *demanda*, $\sum_i x_{ij} \geq d_j$: cada tienda recibe al menos lo que pide. Y «se envían unidades» da $x_{ij} \geq 0$, porque un envío negativo sería un envío en sentido contrario, que nadie ha permitido. El modelo completo es

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} \\
\text{sujeto a:} \quad & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1,2 \quad \text{(oferta)}, \\
& \sum_{i=1}^{2} x_{ij} \geq d_j, \quad j = 1,2,3 \quad \text{(demanda)}, \\
& x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1,2,\ j = 1,2,3,
\end{aligned}
$$

y se lee así: se reparte lo que hay en cada almacén sin pasarse, cada tienda recibe al menos lo que pide, y entre todos los repartos posibles se elige el más barato. Cada restricción se puede señalar con el dedo en el enunciado, y cada frase que limita algo tiene la suya.

Paso 5: probar el modelo con un plan hecho a mano. Se inventa un plan que se sabe válido y se pasa por el modelo. El almacén 1 manda 20 a la tienda 1 y 10 a la 3; el 2 manda 15 a la tienda 2 y 8 a la 3. Las existencias usadas son $30 \leq 30$ y $23 \leq 25$; las tiendas reciben 20, 15 y 18; el coste

es $4 \cdot 20 + 9 \cdot 10 + 3 \cdot 15 + 7 \cdot 8 = 271$ euros. Si un plan que se sabe válido incumpliera alguna restricción, o uno absurdo las cumpliera todas, el modelo estaría mal. Y una comprobación global, que cuesta una suma: la oferta total, 55, cubre la demanda total, 53. Si no la cubriera, el modelo sería infactible, y lo que habría que revisar es la lectura de los datos.

El plan de prueba no es el mejor. Resuelto, el óptimo cuesta 267 euros: es el mismo plan, salvo que la tienda 3 recibe 8 unidades del almacén 1 y 10 del 2, porque desde el 2 la unidad cuesta 7 y no 9, y al almacén 2 le quedaban dos unidades libres. Ver que no conviene vaciar el almacén 1 es justo lo que un plan a mano no garantiza y un algoritmo sí. Este modelo es el *problema del transporte*, y el capítulo 5 lo estudia a fondo (sección 5.2.2). Allí se ve además que, con existencias y demandas enteras, cuando tiene óptimo tiene uno entero, de modo que no hace falta exigir que las unidades sean enteras para obtenerlo.

Lo que hay que llevarse de este ejemplo no es el modelo, que es sencillo, sino el orden: datos, índices, variables con su definición completa, objetivo con unidades, restricciones con nombre y una prueba con números. Los ejercicios de esta sección siguen ese orden bajo los tres encabezados «qué se decide», «qué se quiere» y «qué se puede».

Los ejercicios de formulación van aquí, en el capítulo de introducción, porque la formulación es el primero de los cinco aspectos de la Programación Matemática que se acaban de enumerar, y porque los capítulos siguientes dan por sabido que uno sabe escribir un modelo. Antes de los ejercicios conviene tener a mano el pequeño catálogo de recursos que se repiten en todos ellos.

1.2.1 El catálogo de recursos de modelización

Variables binarias para decisiones de sí o no. Una decisión del tipo «se construye o no», «se selecciona o no», «el alumno i va o no al centro j» se escribe con una variable $y \in \{0, 1\}$. La suma de binarias cuenta: $\sum_i y_i$ es cuántas cosas se han elegido.

Ligar una decisión a otra. «Si la planta i no se abre, no puede servir al cliente j» se escribe $x_{ij} \leq y_i$, con ambas variables binarias: si $y_i = 0$ fuerza $x_{ij} = 0$, y si $y_i = 1$ no dice nada. Cuando x_{ij} es una cantidad y no una binaria, la misma idea es $0 \leq x_{ij} \leq C_i\, y_i$ con C_i la capacidad: cerrada, no sirve nada; abierta, sirve hasta su capacidad.

Exactamente uno, al menos uno, a lo sumo uno. Con binarias x_{ij} que valen uno si i se asigna a j: $\sum_j x_{ij} = 1$ dice que i se asigna a exactamente un j; $\sum_j x_{ij} \leq 1$, a lo sumo a uno; $\sum_j x_{ij} \geq 1$, al menos a uno.

Cobertura. «Cada punto i debe quedar cubierto por al menos un elemento seleccionado de los que pueden cubrirlo» se escribe $\sum_{j \in N(i)} x_j \geq 1$, con $N(i)$ el conjunto de los que llegan a i. Es la forma de todos los problemas de antenas, de defensa y de dominación.

Costes fijos. Un coste que se paga por abrir, independientemente de cuánto se use, va multiplicado por la binaria de apertura: $\sum_i f_i y_i$.

Balance. Lo que entra en un nodo menos lo que sale es lo que se queda: en un almacén, $\sum_i x_{ik} = \sum_j y_{kj}$; en un inventario mensual, $z_t = z_{t-1} + x_t - y_t$.

Periodos y existencias. El balance mensual merece unas líneas más, porque es el esqueleto de todos los modelos de planificación por periodos. Con x_t lo fabricado, y_t lo vendido y z_t lo que queda al cerrar el mes t, la ecuación $z_t = z_{t-1} + x_t - y_t$, con z_0 dato, dice que lo que hay al final es lo que había, más lo que entra, menos lo que sale. Y la condición $z_t \geq 0$ ya contiene «no se vende lo que no se tiene», porque equivale a $y_t \leq z_{t-1} + x_t$. Un caso mínimo: dos meses en los que hay que vender exactamente 10 y 30 unidades, con capacidad de 20 al mes y sin existencias iniciales. El segundo mes no puede fabricar 30, así que el primero tiene que adelantar trabajo, y no hay otro plan posible: $x_1 = 20$, $y_1 = 10$, $z_1 = 10$, y después $x_2 = 20$, $y_2 = 30$, $z_2 = 10 + 20 - 30 = 0$. El coste de almacenar se cobra sobre las z_t. Si el producto se deteriora, el inventario deja de ser un número y pasa a ser uno por antigüedad, cada uno con su balance; está hecho en la sección E.6, y la versión sin deterioro, con horas extra, en la E.7.

Contar lo que se usa. Cuando se quiere usar el menor número posible de algo —franjas horarias, vehículos, colores—, se pone una binaria y_k por cada unidad de ese recurso que *podría* usarse, se liga cada asignación a ella, $x_{ik} \leq y_k$, y se minimiza $\sum_k y_k$. Es la ligadura de las plantas cerradas leída desde el otro lado: allí y_i se pagaba por abrir, aquí se paga por usar. Un caso mínimo: tres reuniones, la 2 comparte asistentes con la 1 y con la 3. Con dos franjas basta, una para las reuniones 1 y 3 y otra para la 2; con una no, porque la 1 y la 2 no pueden coincidir. En el modelo, $x_{ik} + x_{jk} \leq y_k$ para cada par incompatible $\{i, j\}$ y cada franja k hace las dos cosas a la vez: prohíbe que coincidan y obliga a pagar la franja usada. Es la coloración de un grafo, resuelta entera en la sección E.1.

Minimizar el máximo. Un objetivo como «que el último camión termine lo antes posible» es $\min \max_i T_i$, y un máximo no es una función lineal. Se sube a variable: se introduce T, se exige $T \geq T_i$ para cada i y se minimiza T. Las restricciones solo dicen que T está por encima de todos los T_i; es el sentido de la optimización el que lo empuja hasta el mayor de ellos, porque si sobrara holgura se podría bajar T y mejorar. Un caso mínimo: hay que repartir 10 toneladas entre dos camiones que tardan 3 y 2 horas por tonelada, y se quiere que el reparto acabe cuanto antes. Con $y_1 + y_2 = 10$, $T \geq 3y_1$ y $T \geq 2y_2$, el mínimo iguala los dos tiempos: $3y_1 = 2(10 - y_1)$ da $y_1 = 4$, $y_2 = 6$ y $T = 12$ horas. El mismo recurso sirve para maximizar un mínimo, con las desigualdades al revés, y *no* sirve para minimizar un mínimo ni para maximizar un máximo: ahí el objetivo empuja T justo en la dirección en que las restricciones no lo sujetan, y el problema queda no acotado.

Tiempos y precedencias. Cuando lo que se decide es *cuándo* empieza cada tarea, la variable es un instante $t_i \geq 0$ y la duración d_i es un dato; la tarea termina en $t_i + d_i$. «La tarea i no empieza hasta que acabe la j» es $t_i \geq t_j + d_j$: lineal y sin binarias, porque el orden viene dado. Con dos tareas encadenadas, A de 3 días y B de 2 que va detrás, $t_B \geq t_A + 3$; con el recurso anterior, el fin del proyecto es la T mínima con $T \geq t_A + 3$ y $T \geq t_B + 2$, que vale 5 días. La planificación con precedencias de la sección E.2 usa estos dos recursos y nada más.

Una de dos: la disyunción con una constante M. «O la tarea 1 va antes que la 2, o la 2 antes que la 1», que es lo que pasa cuando dos tareas comparten una máquina, no es una restricción lineal: es una *o* entre dos desigualdades. Se escribe con una binaria δ que elige la rama y una constante M que desactiva la otra:

$$t_2 \;\geq\; t_1 + d_1 - M\delta, \qquad t_1 \;\geq\; t_2 + d_2 - M(1 - \delta).$$

Con $\delta = 0$ la primera obliga a que la 2 espere a la 1 y la segunda deja de restringir; con $\delta = 1$, al revés. M tiene que ser lo bastante grande para que la rama desactivada no recorte nada. Si los instantes están entre 0 y H, la primera, desactivada, pide $t_2 \geq t_1 + d_1 - M$, que se cumple siempre si $M \geq H + d_1$; la segunda, si $M \geq H + d_2$. Una M mayor de lo necesario no invalida el modelo, pero debilita su relajación continua (capítulo 5). La misma forma sirve para «si $\delta = 1$, entonces $g(x) \leq b$», que se escribe $g(x) \leq b + M(1 - \delta)$. Aparece en la variante del problema romano del apéndice G y en la regla de vender primero lo más antiguo de la sección E.6.

Datos y variables. Un error frecuente es convertir en variable lo que es dato. Los costes, las demandas y las capacidades son números conocidos; se escriben con letra y se listan aparte, pero no se deciden.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: UNA VARIABLE ENTERA «POSICIÓN» EN VEZ DE UNA BINARIA POR PAREJA

Para un problema de asignación de n objetos a n lugares se podría usar una sola variable entera por objeto, $p_i \in \{1, \ldots, n\}$, que diga en qué lugar va: n variables en vez de n^2. La ventaja es exactamente esa cuenta —para $n = 20$, veinte variables frente a cuatrocientas—, y de hecho es cómo se codifica una permutación en programación por restricciones. La dificultad aquí es que «todos los p_i distintos» no se traduce directamente en una familia como las anteriores: $p_i \neq p_j$ es una disyunción ($p_i < p_j$ o $p_i > p_j$), y el coste de asignar i al lugar p_i tampoco es, en general, lineal en p_i. Se pueden introducir variables auxiliares para linealizar, pero entonces se pierde parte de la ventaja inicial. Con las binarias x_{ij} todo es lineal: $\sum_j x_{ij} = 1$, $\sum_i x_{ij} = 1$ y el coste $\sum_{ij} c_{ij} x_{ij}$. Se paga en número de variables lo que se gana en linealidad, y en esta asignatura la linealidad es lo que permite resolver.

Ejercicios: localización, cobertura y carteras R1

Ejercicio 1.1. *Localización de plantas con costes fijos y clientes exclusivos* R1.1, DIC 2019

Se dispone de tres posibles ubicaciones para localizar plantas industriales. Según la ubicación, la planta tendría un coste fijo de mantenimiento y podría satisfacer una demanda total máxima:

Ubicación	1	2	3
Coste de mantenimiento	10	14	13
Demanda total máxima	25	32	30

Hay cuatro clientes, cada uno con una demanda que debe ser servida íntegramente por exactamente una planta. La demanda y el beneficio de servir una unidad de ella desde cada planta potencial son:

Cliente	1	2	3	4
Demanda	15	16	10	14
Beneficio unitario desde la ubicación 1	4	2	3	2
Beneficio unitario desde la ubicación 2	3	3	5	1
Beneficio unitario desde la ubicación 3	1	5	2	4

Formular un problema de Programación Matemática para determinar qué plantas deben construirse y a qué clientes debe servir cada una, maximizando los beneficios menos los costes.

Resolución. *La idea.* Hay dos decisiones de naturaleza distinta y conviene verlas antes de escribir nada: dónde se construye, que es un sí o un no por ubicación, y a quién sirve cada planta, que también es un sí o un no, ahora por pareja, porque cada cliente se sirve entero desde una sola. La capacidad, multiplicada por la binaria de construcción, será la restricción que une las dos.

Qué se decide. Sean $i \in \{1,2,3\}$ las ubicaciones y $j \in \{1,2,3,4\}$ los clientes.

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se construye la planta en la ubicación } i, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la planta } i \text{ sirve al cliente } j, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

La variable x_{ij} es binaria y no una cantidad porque el enunciado dice que cada cliente se sirve *íntegramente* desde una sola planta: o se le sirve toda su demanda desde i o no se le sirve nada desde i.

Datos. Costes fijos $f = (10,14,13)$, capacidades $C = (25,32,30)$, demandas $d = (15,16,10,14)$ y beneficios unitarios p_{ij} dados por la tabla. Como servir al cliente j desde i significa servirle sus d_j unidades, el beneficio de esa decisión es $p_{ij}d_j$. Conviene calcularlo una vez:

$$(p_{ij}d_j) = \begin{pmatrix} 4\cdot 15 & 2\cdot 16 & 3\cdot 10 & 2\cdot 14 \\ 3\cdot 15 & 3\cdot 16 & 5\cdot 10 & 1\cdot 14 \\ 1\cdot 15 & 5\cdot 16 & 2\cdot 10 & 4\cdot 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 32 & 30 & 28 \\ 45 & 48 & 50 & 14 \\ 15 & 80 & 20 & 56 \end{pmatrix}.$$

Qué se quiere. Maximizar beneficios menos costes:

$$\text{Maximizar} \ \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} p_{ij}d_j\, x_{ij} - \sum_{i=1}^{3} f_i\, y_i.$$

Qué se puede. Se recorre el enunciado.

1. «Cada cliente debe ser servido por exactamente una planta»:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 1, \qquad j = 1,2,3,4.$$

2. «Podría satisfacer una demanda total máxima»: la demanda total asignada a la planta i no supera su capacidad, y si la planta no se construye la capacidad es cero:

$$\sum_{j=1}^{4} d_j\, x_{ij} \le C_i\, y_i, \qquad i = 1,2,3.$$

   Escritas con números: $15x_{11} + 16x_{12} + 10x_{13} + 14x_{14} \le 25y_1$, $15x_{21} + 16x_{22} + 10x_{23} + 14x_{24} \le 32y_2$ y $15x_{31} + 16x_{32} + 10x_{33} + 14x_{34} \le 30y_3$.
3. Naturaleza de las variables: $x_{ij} \in \{0,1\}$, $y_i \in \{0,1\}$.

La segunda familia hace dos trabajos a la vez: limita la capacidad y, con $y_i = 0$, impide servir a nadie desde una planta no construida. Por eso no hace falta añadir $x_{ij} \leq y_i$; está implícita, porque si $y_i = 0$ el lado derecho es cero y todas las x_{ij} de esa fila tienen que anularse. ■

Otra vía (añadiendo las restricciones $x_{ij} \leq y_i$). Se puede añadir la familia $x_{ij} \leq y_i$ para todo i, j aunque sea redundante. No cambia el conjunto de soluciones enteras, pero sí el conjunto de soluciones del problema *relajado* (el que se obtiene al olvidar que las variables son enteras, capítulo 5): con y_i continua, la restricción agregada permite y_i fraccionaria pequeña sirviendo a un cliente entero, y las desagregadas lo prohíben. Cuando se resuelve por ramificación y acotación, la formulación con más restricciones suele ser más rápida precisamente porque su relajación se parece más al problema entero. Las dos formulaciones son correctas; se elige una u otra por eficiencia, no por validez.

De la formulación a AMPL. Se conserva la notación: el primer índice de x_{ij} es la planta y el segundo, el cliente. El fichero `plantas.mod` describe el modelo. `set` declara conjuntos de índices; `1..3` son los enteros del 1 al 3. `param` declara datos conocidos y `var`, las incógnitas que resolverá el programa. La palabra `binary` restringe una variable a cero y uno:

```
set PLANTAS := 1..3;
set CLIENTES := 1..4;
param f {PLANTAS} >= 0;
param C {PLANTAS} >= 0;
param d {CLIENTES} > 0;
param p {PLANTAS,CLIENTES};
var y {PLANTAS} binary;
var x {PLANTAS,CLIENTES} binary;

maximize beneficio:
  sum {i in PLANTAS, j in CLIENTES} p[i,j]*d[j]*x[i,j]
  - sum {i in PLANTAS} f[i]*y[i];
subject to cliente {j in CLIENTES}:
  sum {i in PLANTAS} x[i,j] = 1;
subject to capacidad {i in PLANTAS}:
  sum {j in CLIENTES} d[j]*x[i,j] <= C[i]*y[i];
```

`maximize` introduce el objetivo. Cada `subject to` introduce una restricción con nombre: `cliente` crea una por cliente y `capacidad`, una por planta. Las llaves indican los índices que se recorren; `sum` es el sumatorio. Los corchetes seleccionan una entrada, como `x[i,j]`, y el punto y coma cierra cada declaración.

El fichero `plantas.dat` contiene los números del enunciado:

```
param f := 1 10 2 14 3 13;
param C := 1 25 2 32 3 30;
param d := 1 15 2 16 3 10 4 14;
param p : 1 2 3 4 :=
1 4 2 3 2
2 3 3 5 1
3 1 5 2 4;
```

En las tres primeras líneas se escriben pares *índice, valor*: por ejemplo, `1 10` asigna $f_1 = 10$. En la tabla de `p`, la cabecera enumera los clientes y el primer número de cada fila identifica la

planta.

Con AMPL y HiGHS preparados como se explica en el apéndice G, se guardan los tres ficheros juntos y se ejecuta `include plantas.run;` en AMPL. El guion es:

```
reset;
model plantas.mod;
data plantas.dat;
option solver highs;
solve;
display solve_result, beneficio, x, y;
```

`reset` vacía la sesión; `model` y `data` cargan modelo y datos. `option solver` elige el programa de resolución, `solve` lo llama y `display` muestra los resultados. Primero se comprueba que `solve_result` sea `solved`. Aquí el beneficio máximo es 209: la planta 1 sirve al cliente 1, la 2 al cliente 3 y la 3 a los clientes 2 y 4. Las demandas asignadas son 15, 10 y 30, y el beneficio neto es $60 + 50 + 80 + 56 - (10 + 14 + 13) = 209$.

Este problema deja una pareja de recursos que resuelve casi todos los modelos de localización: una binaria por instalación, con su coste fijo en el objetivo, y la capacidad multiplicada por esa binaria en la restricción, que cierra la instalación cuando vale cero. Y deja un hábito: comprobar si x_{ij} debe ser una cantidad o un sí-o-no leyéndose la frase del enunciado que habla de cómo se sirve al cliente.

Dónde se falla. En la ligadura. Si la capacidad se escribe sin la binaria, $\sum_j d_j x_{ij} \leq C_i$, el modelo puede servir desde una planta que no ha construido: toma $y = (0, 0, 0)$, no paga ningún coste fijo y declara un beneficio de 246, el de servir a cada cliente desde su mejor planta respetando las capacidades. Es un número mayor que 209 y parece una mejora, que es por lo que el error pasa inadvertido. La segunda trampa está en el objetivo: el beneficio del enunciado es por unidad y servir a un cliente es servirle d_j unidades, así que escribir $\sum p_{ij} x_{ij}$, sin el d_j, resuelve otro problema.

Ejercicio 1.2. *Antenas de telefonía y cobertura de poblaciones* R1.2, SEP 2022

La siguiente es una matriz de distancias en kilómetros entre seis poblaciones y cuatro posibles ubicaciones de antenas de telefonía:

	A1	A2	A3	A4
P1	23	61	7	93
P2	15	18	48	28
P3	32	15	33	51
P4	53	34	18	42
P5	40	83	9	27
P6	18	50	66	57

El coste de construcción es idéntico para todas, pero el de mantenimiento mensual difiere por la orografía: 230, 156, 79 y 221 euros para A1, A2, A3 y A4. La cobertura de calidad requiere una distancia de a lo sumo 30 km. Formular el problema que determina las antenas que deben construirse con menor coste de mantenimiento garantizando la cobertura de las seis poblaciones.

Resolución. *La idea.* Cada población es una condición que hay que cubrir y cada antena un recurso que se paga. Todo el trabajo está en construir, para cada población, la lista de antenas que la alcanzan; la desigualdad sale después sola.

Qué se decide. $x_k \in \{0,1\}$ vale uno si se construye la antena k, para $k = 1,2,3,4$.

Datos. Los costes $c = (230, 156, 79, 221)$ y, para cada población i, el conjunto $N(i)$ de antenas a distancia no superior a 30 km, que se lee de la tabla:

$$N(1) = \{1,3\}, \quad N(2) = \{1,2,4\}, \quad N(3) = \{2\},$$
$$N(4) = \{3\}, \quad N(5) = \{3,4\}, \quad N(6) = \{1\}.$$

Qué se quiere. Minimizar el mantenimiento: $230x_1 + 156x_2 + 79x_3 + 221x_4$.

Qué se puede. Cada población cubierta por al menos una antena construida de las que la alcanzan:

$$\begin{array}{lrcl} \text{P1:} & x_1 + x_3 & \geq & 1, \\ \text{P2:} & x_1 + x_2 + x_4 & \geq & 1, \\ \text{P3:} & x_2 & \geq & 1, \\ \text{P4:} & x_3 & \geq & 1, \\ \text{P5:} & x_3 + x_4 & \geq & 1, \\ \text{P6:} & x_1 & \geq & 1, \end{array} \qquad x_k \in \{0,1\}.$$

En forma matricial, $Ax \geq \mathbf{1}$ con A la matriz de ceros y unos que tiene un uno en la posición (i,k) cuando la antena k cubre la población i.

Este problema se resuelve a ojo, y merece la pena hacerlo para ver qué forma tiene una solución: las poblaciones P3, P4 y P6 solo pueden cubrirse desde A2, A3 y A1 respectivamente, luego $x_2 = x_3 = x_1 = 1$ es obligado. Con esas tres, P1, P2 y P5 quedan cubiertas, así que A4 no hace falta: $x_4 = 0$ y el coste mínimo es $230 + 156 + 79 = 465$ euros. ■

Con esto queda fijada la forma canónica del problema de *cobertura*: binarias por recurso, minimizar coste, y una desigualdad ≥ 1 por cada elemento que hay que cubrir, sumando solo las binarias que llegan a él. El trabajo real está en construir los conjuntos $N(i)$ a partir de los datos, no en escribir la desigualdad.

Dónde se falla. En escribir «= 1» donde el enunciado pide cobertura, que es «al menos una». Con igualdades el modelo sería infactible: las antenas 1, 2 y 3 son obligadas, y la 1 y la 2 alcanzan las dos a la población 2, que quedaría cubierta dos veces. Y en la dirección de la tabla: la condición se escribe una vez por población, sumando antenas, y no una vez por antena.

Ejercicio 1.3. *Selección de columnas de una matriz de ceros y unos* R1.3, SEP 2017

Sea $A \in \{0,1\}^{m \times n}$ una matriz de ceros y unos con m filas y n columnas, y sea c un vector de costes con c_j el de la columna j. Formular el problema de obtener un subconjunto de columnas tal que para cada fila i haya al menos una columna seleccionada con un uno en su componente i-ésima, y el coste total de las columnas seleccionadas sea mínimo.

Resolución. Sea $x_j \in \{0,1\}$ igual a uno si se selecciona la columna j, para $j = 1, \ldots, n$. El objetivo es Minimizar $c^T x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$. La condición sobre la fila i dice que entre las columnas seleccionadas hay alguna con $a_{ij} = 1$, es decir,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geq 1, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

porque la suma cuenta exactamente cuántas columnas seleccionadas tienen un uno en la fila i. En forma matricial: Minimizar $c^T x$ sujeto a $Ax \geq \mathbf{1}$, $x \in \{0,1\}^n$. Es el *problema de recubrimiento* (*set covering*), y el ejercicio anterior es el caso $m = 6$, $n = 4$. ■

Lo aprovechable de este problema es reconocer el mismo modelo con números y sin ellos. Conviene escribir siempre primero la versión con índices y sumatorios y solo después, si se pide, desplegar las desigualdades con los datos.

Ejercicio 1.4. *Alumnos, distritos y colegios: tiempo medio y preferencias* R1.4

Los alumnos de nuevo ingreso de cuatro distritos deben asignarse a alguno de tres colegios con plazas libres. Las plazas libres son 400 en el colegio C_1, 300 en C_2 y 300 en C_3. La demanda de cada distrito, desglosada según el colegio que prefieren los alumnos, y el tiempo medio de desplazamiento en minutos por cada conexión permitida son:

Distrito	prefieren C_1	prefieren C_2	prefieren C_3
D_1	50	—	100
D_2	150	50	—
D_3	25	150	75
D_4	—	100	300

Tiempo	C_1	C_2	C_3
D_1	15	—	30
D_2	17	23	—
D_3	35	10	5
D_4	—	18	7

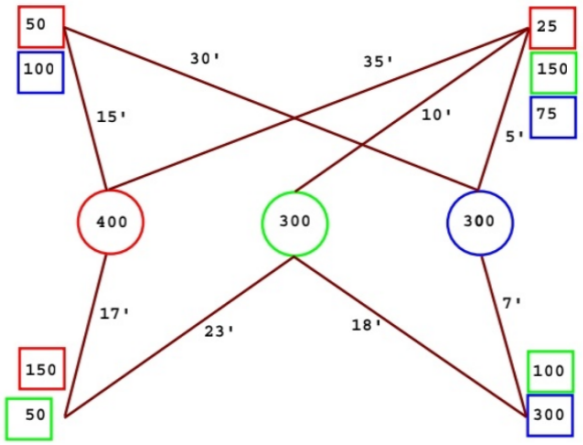


Diagrama de la relación original. Los distritos D_1, D_2 están arriba y abajo a la izquierda; D_3, D_4, arriba y abajo a la derecha. Los colegios C_1, C_2, C_3 van de izquierda a derecha. Los colores indican preferencias; los números sobre las conexiones son minutos de desplazamiento.

Un alumno solo puede ir a un colegio conectado con su distrito. Se pide:

(a) Formular el problema que determina la asignación que minimiza, en media, el tiempo de desplazamiento requerido para asistir a clase.

(b) Formular el problema que maximiza el número total de alumnos asignados de acuerdo con sus preferencias manteniendo un tiempo medio de desplazamiento inferior a 14 minutos.

Resolución. *Datos.* Demanda total de cada distrito: $D = (150, 200, 250, 400)$; en total 1000 alumnos. Plazas $O = (400, 300, 300)$. Conexiones permitidas

$$E = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3), (4,2), (4,3)\},$$

con tiempos t_{ij} de la tabla, y preferencias p_{ij} (número de alumnos de D_i que prefieren C_j) de la primera tabla.

(a) Qué se decide. $x_{ij} \geq 0$, entero, número de alumnos del distrito i que van al colegio j, para $(i,j) \in E$.

Qué se quiere. El tiempo medio es $\frac{1}{1000}\sum_{(i,j)\in E} t_{ij}x_{ij}$; como 1000 es constante, minimizar la media es minimizar el total:

$$\text{Minimizar } \frac{1}{1000}\big(15x_{11}+30x_{13}+17x_{21}+23x_{22}+35x_{31}+10x_{32}+5x_{33}+18x_{42}+7x_{43}\big).$$

Qué se puede. Todos los alumnos de cada distrito quedan asignados, y ningún colegio supera sus plazas:

$$\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} = D_i \ (i=1,\dots,4), \qquad \sum_{i:(i,j)\in E} x_{ij} \leq O_j \ (j=1,2,3), \qquad x_{ij} \in \mathbb{Z}_+.$$

Escritas: $x_{11}+x_{13}=150$, $x_{21}+x_{22}=200$, $x_{31}+x_{32}+x_{33}=250$, $x_{42}+x_{43}=400$; $x_{11}+x_{21}+x_{31}\leq 400$, $x_{22}+x_{32}+x_{42}\leq 300$, $x_{13}+x_{33}+x_{43}\leq 300$. Las plazas suman 1000, igual que la demanda, así que las tres desigualdades serán de hecho igualdades en cualquier solución factible.

(b) Qué se decide. Se mantiene x_{ij} como el total que va de i a j, y se añade $u_{ij} \geq 0$, entero: cuántos se cuentan como asignados según su preferencia. Al maximizar, estas variables alcanzan el mayor recuento compatible con x.

Qué se quiere. Maximizar $\sum_{(i,j)\in E} u_{ij}$.

Qué se puede. Las mismas restricciones de demanda y plazas sobre x; los asignados según preferencia no pueden superar ni a los que prefieren ese colegio ni a los que van:

$$u_{ij} \leq p_{ij}, \qquad u_{ij} \leq x_{ij}, \qquad (i,j) \in E;$$

y el tiempo medio inferior a 14 minutos:

$$\sum_{(i,j)\in E} t_{ij}\, x_{ij} < 14 \cdot 1000.$$

Una desigualdad estricta no define un conjunto cerrado y los algoritmos de esta asignatura trabajan con desigualdades no estrictas; como los tiempos son enteros y las x_{ij} también, el lado izquierdo es entero y «< 14000» equivale a «≤ 13999». Es un detalle que conviene dejar escrito. ■

Otra vía (una variable por preferencia). La solución manuscrita de la relación usa tres índices: x_{ijk}, alumnos del distrito i que prefieren el colegio k y van al colegio j. Entonces las preferencias se cumplen cuando $j=k$, el objetivo es $\sum_{i,j} x_{ijj}$, y las restricciones son $\sum_j x_{ijk} = p_{ik}$ (cada grupo de preferencia queda asignado entero) y $\sum_{i,k} x_{ijk} \leq O_j$. Da el mismo óptimo que el modelo con u_{ij}: para una asignación agregada x, el máximo número de preferencias satisfechas es $\sum_j \min(p_{ij}, x_{ij})$ en cada distrito. Se asignan primero esas coincidencias; los grupos y destinos que aún tienen alumnos o plazas pendientes ya no coinciden, y se distribuyen los restantes entre ellos. Así se alcanza ese máximo. Fuera del óptimo, las cotas sobre u permiten contar de menos; la equivalencia es de optimización, no una identidad entre todas las asignaciones. La versión de tres índices hace explícitos los grupos; la de dos es más corta.

En AMPL: solo las conexiones permitidas. El fichero `colegios.mod` resuelve el apartado (a). La novedad es el conjunto `E` de parejas distrito–colegio: `within` exige que pertenezcan al producto de los dos conjuntos de índices. Solo se crean variables para esas parejas; una conexión prohibida no se representa mediante un coste artificialmente grande. Ahora `x` es entera no negativa, porque cuenta alumnos:

```
set DISTRITOS := 1..4;
set COLEGIOS := 1..3;
set E within {DISTRITOS,COLEGIOS};
param demanda {DISTRITOS} integer >= 0;
param plazas {COLEGIOS} integer >= 0;
param tiempo {E} >= 0;
param preferencia {E} integer >= 0;
var x {E} integer >= 0;

minimize tiempo_total:
  sum {(i,j) in E} tiempo[i,j]*x[i,j];
subject to asignar {i in DISTRITOS}:
  sum {(i,j) in E} x[i,j] = demanda[i];
subject to caben {j in COLEGIOS}:
  sum {(i,j) in E} x[i,j] <= plazas[j];
```

En la restricción `asignar`, el índice `i` ya está fijado: la suma recorre los colegios `j` tales que `(i,j)` pertenece a `E`. En `caben`, se fija el colegio y se recorren los distritos conectados.

Los datos de `colegios.dat` son los del enunciado. En su última tabla, las dos primeras columnas identifican el distrito y el colegio; las dos siguientes dan el tiempo y el número de alumnos que prefieren esa conexión:

```
set E := (1,1) (1,3) (2,1) (2,2) (3,1)
         (3,2) (3,3) (4,2) (4,3);
param demanda := 1 150 2 200 3 250 4 400;
param plazas := 1 400 2 300 3 300;
param: tiempo preferencia :=
1 1 15  50
1 3 30 100
2 1 17 150
2 2 23  50
3 1 35  25
3 2 10 150
3 3  5  75
4 2 18 100
4 3  7 300;
```

Para el apartado (b), el fichero `colegios-preferencias.mod` añade las variables u_{ij}, sus dos cotas y el límite entero equivalente al tiempo medio estrictamente menor que 14. Se reutilizan las restricciones de asignación y plazas:

```
var u {E} integer >= 0;
maximize preferencias: sum {(i,j) in E} u[i,j];
subject to lo_prefieren {(i,j) in E}:
  u[i,j] <= preferencia[i,j];
subject to van_ahi {(i,j) in E}:
  u[i,j] <= x[i,j];
subject to limite_tiempo:
  sum {(i,j) in E} tiempo[i,j]*x[i,j] <= 13999;
```

El guion `colegios.run` resuelve primero (a) y después (b). La nueva orden `objective preferencias;` selecciona el objetivo del segundo problema; `tiempo_total` sigue sirviendo para calcular su tiempo medio:

```
reset;
model colegios.mod;
data colegios.dat;
option solver highs;
solve;
display solve_result, x, tiempo_total/1000;

model colegios-preferencias.mod;
objective preferencias;
solve;
display solve_result, x, u, preferencias, tiempo_total/1000;
```

El mínimo del apartado (a) es 13,3 minutos. En (b) se pueden satisfacer como máximo 797 preferencias con tiempo medio inferior a 14 minutos. Hay varias asignaciones que alcanzan ese máximo; basta comprobar las sumas de alumnos, plazas y tiempo en la que devuelva el programa.

De aquí salen dos ideas. Que una media con denominador constante se minimiza minimizando el numerador, y que cuando el enunciado pide contar «cuántos cumplen algo» dentro de una cantidad ya decidida hace falta una segunda variable acotada por la primera.

Dónde se falla. En el apartado (b), en «respetar las preferencias» escribiendo $x_{ij} \leq p_{ij}$. Eso no cuenta preferencias: limita cuántos alumnos van a cada colegio. Y como las preferencias de cada distrito suman exactamente su demanda, la única asignación que lo cumple es mandar a todos a su colegio preferido, que es imposible: el colegio C_3 recibiría $100 + 75 + 300 = 475$ alumnos para 300 plazas. El modelo quedaría infactible, y la variable u_{ij} es justo lo que lo evita: cuenta sin limitar.

Ejercicio 1.5. *Dos almacenes, cuatro poblaciones y una ampliación posible* R1.5, OCT 2023

Para abastecer la demanda de cuatro poblaciones $P_1, \ldots, P_4$, cifrada en 100, 150, 75 y 125 unidades por hora, se dispone de dos almacenes A_1 y A_2 con capacidad de suministro de 300 y 400 unidades por hora. Su coste de mantenimiento es de 50 y 75 euros por hora de funcionamiento. Los costes en euros por unidad suministrada desde cada almacén a cada población son:

	P_1	P_2	P_3	P_4
A_1	6	3	2	9
A_2	15	23	12	19

Se plantea ampliar la capacidad de A_1 en 200 unidades por hora, con un coste de mantenimiento de 90 euros por hora. Formular el problema que determina la forma óptima de atender las demandas permitiendo cerrar o ampliar alguno de los almacenes si fuese necesario.

Resolución. *La idea.* Tres clases de decisión: cuánto se envía, que son cantidades; qué almacén funciona, que es un sí o un no; y si se amplía A_1, otro sí o no. La capacidad de A_1 se escribe

como suma de piezas que se encienden con sus binarias: 300 si funciona, y 200 más si además se amplía.

Qué se decide. $x_{ij} \geq 0$, unidades por hora enviadas del almacén j a la población i ($i = 1, \ldots, 4$; $j = 1, 2$); $y_j \in \{0, 1\}$, uno si el almacén j funciona; $z \in \{0, 1\}$, uno si se amplía A_1.

Qué se quiere. Minimizar el coste por hora, transporte más mantenimiento:

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{2} c_{ij} x_{ij} + 50y_1 + 75y_2 + 90z,$$

con $c_{i1} = (6, 3, 2, 9)$ y $c_{i2} = (15, 23, 12, 19)$.

Qué se puede.

1. Demanda de cada población: $x_{i1} + x_{i2} \geq d_i$ con $d = (100, 150, 75, 125)$. Se puede escribir con igualdad; con $\geq$ se deja al modelo no enviar de más, que nunca compensa porque los costes son positivos.
2. Capacidad de A_2, nula si está cerrado: $\sum_i x_{i2} \leq 400y_2$.
3. Capacidad de A_1, nula si cerrado, 300 si abierto y 500 si abierto y ampliado: $\sum_i x_{i1} \leq 300y_1 + 200z$.
4. La ampliación exige el almacén abierto: $z \leq y_1$. Sin esta restricción el modelo podría poner $y_1 = 0$, $z = 1$ y disponer de 200 unidades pagando solo 90 euros, que no es una opción real.
5. $x_{ij} \geq 0$; $y_j, z \in \{0, 1\}$.

La demanda total es 450 y la capacidad máxima sin ampliar es 700, así que el problema es factible con los dos abiertos; la decisión interesante es si compensa pagar 90 euros por la ampliación para no usar el almacén caro. ■

El recurso que hay que retener es la restricción de acoplamiento $z \leq y_1$: cuando una decisión solo tiene sentido si otra se ha tomado, se escribe la binaria de la primera menor o igual que la de la segunda. Es el mismo mecanismo que $x_{ij} \leq y_i$, y se olvida con facilidad porque el enunciado no lo dice con esas palabras.

La respuesta. Resuelto, compensa ampliar: el óptimo cierra A_2, amplía A_1 y lo sirve todo desde él, con un coste de $6 \cdot 100 + 3 \cdot 150 + 2 \cdot 75 + 9 \cdot 125 + 50 + 90 = 2465$ euros por hora. Sin ampliar, lo mejor es abrir los dos almacenes y llenar A_1 con los envíos que más ahorran frente a A_2, y cuesta 3850. *Dónde se falla:* en olvidar $z \leq y_1$. Con estos datos el óptimo no llega a usar ese hueco, y precisamente por eso el error es peligroso: el resultado sale bien y, sin embargo, el modelo admite un plan imposible, el de ampliar un almacén cerrado.

Ejercicio 1.6. *Las pesas de Bachet* R1.6

La obra de Bachet de Méziriac, un compendio de matemática recreativa publicado por primera vez en 1612, contiene problemas de pesas como el siguiente: se desea poder pesar un objeto cuyo peso sea cualquier número entero entre 1 y 20 en una balanza de dos platos. Hallar el mínimo número de pesas necesarias y sus pesos respectivos (números enteros inferiores a 20). Formular el problema y resolverlo con AMPL.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *La balanza tiene dos platos: una pesa puede ir en el plato del objeto o en el contrario. Eso son dos decisiones por pesa y por peso a medir.*
2. *Que un peso j se pueda medir es una igualdad: lo que hay en un plato es igual a lo que hay en el otro.*

3. *Solo se puede usar una pesa si se ha comprado, y no puede estar en los dos platos a la vez.*

Resolución. *Qué se decide.* Como las pesas son enteras y menores que 20, las candidatas son $1, 2, \ldots, 19$ kilos. Buscamos una solución con tamaños distintos; al final se comprobará que alcanza el mínimo incluso si se permiten pesas repetidas. Sean $i \in \{1, \ldots, 19\}$ y $j \in \{1, \ldots, 20\}$:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se dispone de una pesa de } i \text{ kilos,} \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si, al pesar } j \text{ kilos, la pesa } i \text{ va en el plato contrario al objeto,} \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si, al pesar } j \text{ kilos, la pesa } i \text{ va con el objeto,} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Qué se quiere. Minimizar $\sum_{i=1}^{19} x_i$.

Qué se puede.

1. Equilibrio para cada peso j: en el plato del objeto hay j más las pesas z; en el otro, las pesas y:
$$j + \sum_{i=1}^{19} i\, z_{ij} = \sum_{i=1}^{19} i\, y_{ij}, \qquad j = 1, \ldots, 20.$$
2. Una pesa se usa solo si existe, y no en los dos platos a la vez: $y_{ij} + z_{ij} \le x_i$ para todo i, j.
3. Binarias: $x_i, y_{ij}, z_{ij} \in \{0, 1\}$.

La restricción 2 hace dos cosas: si $x_i = 0$ obliga $y_{ij} = z_{ij} = 0$, y si $x_i = 1$ impide $y_{ij} = z_{ij} = 1$.

El mínimo se obtiene sin recorrer todas las combinaciones: con pesas de 1, 3 y 9 kilos se pesa cualquier entero de 1 a 13, y para llegar a 20 hace falta una cuarta; las pesas $1, 3, 7, 9$ resuelven el problema con cuatro: las tres primeras de la lista $1, 3, 9$ producen todos los valores de -13 a 13; al añadir o quitar 7, se cubre de -20 a 20. Que tres no bastan se ve contando: con tres pesas en un plato, en el otro o fuera hay $3^3 = 27$ configuraciones, que dan a lo sumo 13 valores positivos distintos, menos de 20. ■

El modelo enseña cómo se escribe «puede estar en un lado, en el otro o en ninguno»: dos binarias por objeto con $y + z \le 1$. También se puede usar una variable entera $t_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$, con $-x_i \le t_{ij} \le x_i$ y $\sum_i i\, t_{ij} = j$: esa formulación también es lineal. Y enseña una comprobación de cordura por conteo, que en modelización vale tanto como el modelo.

El mismo modelo en AMPL. El fichero `bachet.mod` traduce las tres decisiones anteriores sin cambiarlas. Los dos conjuntos distinguen las pesas candidatas, de 1 a 19, de los pesos que se quiere medir, de 1 a 20. Las familias binarias `y` y `z` indican en qué plato se usa cada pesa.

```
set PESAS := 1..19;
set OBJETOS := 1..20;

var x {PESAS} binary;
var y {PESAS, OBJETOS} binary;
var z {PESAS, OBJETOS} binary;

minimize numero_pesas: sum {i in PESAS} x[i];
```

```
subject to equilibrio {j in OBJETOS}:
    j + sum {i in PESAS} i*z[i,j]
      = sum {i in PESAS} i*y[i,j];
subject to uso {i in PESAS, j in OBJETOS}:
    y[i,j] + z[i,j] <= x[i];
```

`minimize` sustituye a `maximize` porque ahora se minimiza el número de pesas. La restricción `uso` conserva en una sola desigualdad las dos condiciones: no usar una pesa inexistente ni ponerla en ambos platos.

Para ejecutar el modelo con HiGHS instalado, se guarda este guion como `bachet.run`, junto al modelo, y se escribe `include bachet.run;` en AMPL:

```
reset;
model bachet.mod;
option solver highs;
solve;
display solve_result, numero_pesas, x;
```

Aquí no hace falta un fichero de datos: los dos conjuntos de enteros ya están fijados en el modelo. `display` pide el valor del objetivo y las pesas elegidas.

El valor óptimo es 4, como acaba de probarse sin ordenador. El programa puede elegir otras pesas con ese mismo valor. Compruébese también `solve_result`: encontrar una solución factible y certificar que es óptima son cosas distintas.

Ejercicio 1.7. *Becas Erasmus y valoración ponderada* R1.7

Un conjunto de N estudiantes, con notas medias $e_1, \dots, e_N$, ha solicitado una beca Erasmus. Para asignar destinos han puntuado de 0 a 10 sus preferencias sobre las N plazas disponibles, de modo que v_{ij} es la valoración que el estudiante i da al destino j. Formular el problema de maximizar la valoración media ponderada de los estudiantes al destino asignado, con pesos las notas medias. Escribir el código AMPL asociado.

Resolución. Sea $x_{ij} \in \{0,1\}$ igual a uno si el estudiante i obtiene el destino j. La valoración que recibe i es $\sum_j v_{ij} x_{ij}$, y la media ponderada es $\sum_i e_i \sum_j v_{ij} x_{ij} \big/ \sum_i e_i$. Suponemos $\sum_i e_i > 0$, como requiere una media ponderada con notas no negativas. El denominador es entonces un dato positivo, luego

$$\text{Maximizar} \quad \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} e_i \, v_{ij} \, x_{ij} \quad \text{sujeto a:} \quad \sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1 \ (i = 1, \dots, N), \quad \sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1 \ (j = 1, \dots, N), \quad x_{ij} \in \{0,1\}.$$

Es el *problema de asignación* con costes $e_i v_{ij}$, que reaparecerá en el capítulo 5 con una propiedad notable: resolverlo sin exigir que las variables sean enteras conserva el valor óptimo y permite elegir una solución óptima entera. No obliga a que toda solución óptima sea entera: si hay varias, sus mezclas pueden ser fraccionarias. ■

Conviene quedarse con la forma del problema de asignación, que hay que reconocer al instante: matriz cuadrada de binarias con todas las filas y todas las columnas sumando uno.

En AMPL. Aquí los datos varían de un reparto de becas a otro. `N` fija el tamaño del conjunto `I`; `e[i]` es la nota y `v[i,j]` la preferencia. El fichero `erasmus.mod` queda así:

```
param N integer >= 1;
set I := 1..N;
param e {I} >= 0;
param v {I,I} >= 0, <= 10;
check: sum {i in I} e[i] > 0;

var x {I,I} binary;
maximize valoracion:
    sum {i in I, j in I} e[i]*v[i,j]*x[i,j];
subject to un_destino {i in I}:
    sum {j in I} x[i,j] = 1;
subject to un_estudiante {j in I}:
    sum {i in I} x[i,j] = 1;
```

La orden nueva `check` comprueba una condición sobre los datos: que la suma de notas sea positiva. Las dos familias de restricciones son las sumas por filas y columnas que ya aparecen en la formulación. Se suministran `N`, `e` y `v` en un fichero de datos antes de resolver; el enunciado no fija una instancia numérica. El objetivo devuelve el numerador de la media ponderada: para obtener la media se divide ese valor por `sum {i in I} e[i]`.

Ejercicio 1.8. *La cartera de préstamos de un banco* DIC 2018 Y TERCERA DE 2018

Un banco está desarrollando una política de préstamos con una inversión máxima de 12 millones de euros durante un año. Los préstamos disponibles son:

Tipo	Tasa de interés	% de deudas impagables
Personal	0,140	10
Automóvil	0,130	7
Vivienda	0,120	3
Agrícola	0,125	5
Comercial	0,100	2

Las deudas impagables son irrecuperables y no producen intereses: en los préstamos personales el banco pierde el 10 % por impago y recibe el 14 % de intereses sobre el 90 % restante. La competencia dicta asignar al menos el 40 % de los fondos a préstamos agrícolas y comerciales; los préstamos para vivienda deben ser al menos el 50 % del montante dedicado a préstamos personales; y el banco limita la proporción total de deudas impagables sobre todos los préstamos a un máximo del 4 %. Todos los préstamos se emiten en bloque al principio del periodo.

(a) Plantear el problema que maximiza el rendimiento neto, ingresos menos pérdidas.
(b) Escribir la formulación del problema en código AMPL.

Resolución. *Qué se decide.* $x_i \geq 0$, millones dedicados al préstamo de tipo i, con $i = 1$ personal, 2 automóvil, 3 vivienda, 4 agrícola y 5 comercial. Sea r_i la tasa y q_i la proporción de impago: $r = (0{,}14; 0{,}13; 0{,}12; 0{,}125; 0{,}10)$ y $q = (0{,}10; 0{,}07; 0{,}03; 0{,}05; 0{,}02)$.

Qué se quiere. De cada tipo se cobra interés sobre la parte pagada, $r_i(1 - q_i)x_i$, y se pierde

la impagada, $q_i x_i$. El rendimiento neto es

$$\text{Maximizar} \quad \sum_{i=1}^{5} \big[r_i(1-q_i) - q_i\big] x_i = 0{,}026x_1 + 0{,}0509x_2 + 0{,}0864x_3 + 0{,}06875x_4 + 0{,}078x_5.$$

Los coeficientes salen de $0{,}14 \cdot 0{,}90 - 0{,}10 = 0{,}026$, $0{,}13 \cdot 0{,}93 - 0{,}07 = 0{,}0509$, $0{,}12 \cdot 0{,}97 - 0{,}03 = 0{,}0864$, $0{,}125 \cdot 0{,}95 - 0{,}05 = 0{,}06875$ y $0{,}10 \cdot 0{,}98 - 0{,}02 = 0{,}078$.

Qué se puede. Con $T = x_1 + \cdots + x_5$ el total prestado:

1. Inversión máxima: $T \le 12$.
2. Agrícolas y comerciales al menos el 40 % de los fondos: $x_4 + x_5 \ge 0{,}4\,T$.
3. Vivienda al menos la mitad de personales: $x_3 \ge 0{,}5\,x_1$.
4. Impagos totales a lo sumo el 4 % de lo prestado: $\sum_i q_i x_i \le 0{,}04\,T$, es decir $0{,}10x_1 + 0{,}07x_2 + 0{,}03x_3 + 0{,}05x_4 + 0{,}02x_5 \le 0{,}04(x_1 + \cdots + x_5)$.
5. $x_i \ge 0$.

Las restricciones 2 y 4 tienen variables a los dos lados. Para escribirlas en la forma $Ax \le b$, se pasan todas al izquierdo: $0{,}4x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}4x_3 - 0{,}6x_4 - 0{,}6x_5 \le 0$ y $0{,}06x_1 + 0{,}03x_2 - 0{,}01x_3 + 0{,}01x_4 - 0{,}02x_5 \le 0$. ■

Lo que este problema deja es que un problema lineal puro también es un problema de formulación, y que las trampas están en los datos derivados — el rendimiento neto se calcula, no se copia — y en los porcentajes «de los fondos», que son porcentajes de una suma de variables y no de una constante.

En AMPL. El fichero `banco.mod` conserva los cinco tipos en el mismo orden. La variable `x` es continua: se decide un importe, no un número entero de préstamos. AMPL admite variables a ambos lados de una restricción, por lo que los porcentajes pueden escribirse tal como se han formulado:

```
set TIPOS := 1..5;
param capital >= 0;
param r {TIPOS} >= 0;
param q {TIPOS} >= 0, <= 1;
var x {TIPOS} >= 0;  # millones prestados a cada tipo

maximize rendimiento:
    sum {i in TIPOS} (r[i]*(1-q[i])-q[i])*x[i];
subject to presupuesto: sum {i in TIPOS} x[i] <= capital;
subject to sectores:
    x[4]+x[5] >= 0.4*sum {i in TIPOS} x[i];
subject to vivienda: x[3] >= 0.5*x[1];
subject to impagos:
    sum {i in TIPOS} q[i]*x[i] <= 0.04*sum {i in TIPOS} x[i];
```

En `banco.dat`, cada fila da el índice del tipo y sus dos parámetros, `r` y `q`. Los impagos se escriben como proporciones: 10 % es `0.10`.

```
param capital := 12;
# 1 personal, 2 automovil, 3 vivienda, 4 agricola, 5 comercial
param: r      q :=
1      0.140  0.10
2      0.130  0.07
3      0.120  0.03
4      0.125  0.05
```

```
5      0.100  0.02;
```

El guion `banco.run` carga los dos ficheros y muestra la cartera y el rendimiento:

```
reset;
model banco.mod;
data banco.dat;
option solver highs;
solve;
display solve_result, x, rendimiento;
```

Con estos datos, `solve_result` es `solved`, y la salida da

$$x = (0;\ 0;\ 7{,}2;\ 0;\ 4{,}8), \qquad \text{rendimiento} = 0{,}99648.$$

Son 7,2 millones en vivienda y 4,8 en préstamos comerciales, con un rendimiento neto de 996 480 euros. El impago previsto es el 2,6 % de lo prestado. La solución también se entiende sin el algoritmo: vivienda tiene el mayor rendimiento por unidad, y comercial el mayor entre los dos sectores que deben recibir al menos el 40 %. De ahí se obtiene la cota

$$\text{rendimiento} \leq \big(0{,}6 \cdot 0{,}0864 + 0{,}4 \cdot 0{,}078\big)T \leq 0{,}99648.$$

La cartera encontrada cumple todas las restricciones y alcanza esa cota; por eso es óptima.

Ejercicios: tableros, asignación y redes de dos etapas R2

Ejercicio 1.9. *Cuadrados mágicos* R2.1, JUN 2017

Un cuadrado mágico $n \times n$ es una matriz $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ con sus n^2 coeficientes diferentes, de tal modo que la suma de cada fila, de cada columna y de cada una de las dos diagonales principales dé el mismo resultado.

1. Definir variables binarias y las restricciones lineales que deben cumplir para modelar el conjunto de cuadrados mágicos $n \times n$ que contienen como entradas los enteros $p_1, p_2, \ldots, p_{n^2}$.
2. Escribir en `ampl` un modelo de optimización lineal en números enteros para obtener una solución.
3. ¿Cómo se modificaría el apartado anterior si cada número puede usarse en r posiciones diferentes del cuadrado?

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *La entrada de la casilla (i, j) no puede ser la variable: no es binaria y «todas distintas» no es lineal. Piensa en una binaria por casilla y por número candidato.*
2. *La suma mágica no es una incógnita: si se usan todos los p_k exactamente una vez, la suma de todo el cuadrado es conocida, y hay n filas.*
3. *Escribe la entrada a_{ij} como combinación lineal de las binarias y luego las sumas.*

Resolución. *Qué se decide.* Para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ y $k \in \{1, \ldots, n^2\}$,

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si en la posición } (i, j) \text{ está el número } p_k, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La entrada de la casilla es entonces la expresión lineal $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n^2} p_k x_{ijk}$.

La constante mágica. Si cada p_k ocupa exactamente una casilla, la suma de todas las entradas es $\sum_k p_k$, y como hay n filas que suman lo mismo,

$$a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} p_k.$$

Qué se puede.

1. Cada número en exactamente una casilla: $\sum_{i,j} x_{ijk} = 1$ para $k = 1, \ldots, n^2$.
2. Cada casilla con exactamente un número: $\sum_k x_{ijk} = 1$ para todo i, j.
3. Filas: $\sum_{j=1}^{n} \sum_k p_k x_{ijk} = a$ para $i = 1, \ldots, n$.
4. Columnas: $\sum_{i=1}^{n} \sum_k p_k x_{ijk} = a$ para $j = 1, \ldots, n$.
5. Diagonal principal: $\sum_{i=1}^{n} \sum_k p_k x_{iik} = a$; diagonal secundaria: $\sum_{i=1}^{n} \sum_k p_k x_{i,n+1-i,k} = a$.
6. $x_{ijk} \in \{0, 1\}$.

Apartado 2. No hay nada que optimizar: cualquier punto factible es un cuadrado mágico. El fichero `magico.mod` usa un objetivo constante y traduce las cinco familias de restricciones:

```
param n integer >= 1;
set I := 1..n;
set K := 1..n^2;
param p {K} integer;
param a := (sum {k in K} p[k])/n;
var x {I,I,K} binary;

minimize nada: 0;
subject to numero {k in K}:
    sum {i in I, j in I} x[i,j,k] = 1;
subject to casilla {i in I, j in I}:
    sum {k in K} x[i,j,k] = 1;
subject to filas {i in I}:
    sum {j in I, k in K} p[k]*x[i,j,k] = a;
subject to columnas {j in I}:
    sum {i in I, k in K} p[k]*x[i,j,k] = a;
subject to diagonal_principal:
    sum {i in I, k in K} p[k]*x[i,i,k] = a;
subject to diagonal_secundaria:
    sum {i in I, k in K} p[k]*x[i,n+1-i,k] = a;
```

`I` enumera las filas y columnas; `K`, los números candidatos. Las dos sumas anidadas se escriben con ambos índices entre las mismas llaves. La declaración de a calcula un dato a partir de otros datos: no añade una incógnita al problema. Para comprobar el modelo con los números del 1 al 9, el fichero `magico.dat` es

```
param n := 3;
param p := 1 1  2 2  3 3  4 4  5 5  6 6  7 7  8 8  9 9;
```

Los pares de la segunda línea son *índice, valor*: por ejemplo, `3 3` asigna $p_3 = 3$. Este es un caso de prueba; el modelo admite cualquier lista de n^2 enteros distintos. El guion `magico.run` carga los dos ficheros y muestra el cuadrado:

```
reset;
model magico.mod;
data magico.dat;
```

```
option solver highs;
solve;
display solve_result;
display {i in I, j in I} sum {k in K} p[k]*x[i,j,k];
```

`data` carga los parámetros. La última orden muestra las entradas $a_{ij} = \sum_k p_k x_{ijk}$, en lugar de la lista más larga de variables binarias. Cada fila, columna y diagonal debe sumar 15 en este ejemplo.

Apartado 3. Si cada número puede usarse hasta en r posiciones, la restricción 1 pasa a ser $\sum_{i,j} x_{ijk} \le r$. Con eso la suma total del cuadrado ya no es un dato, así que la constante mágica se convierte en una variable libre $a \in \mathbb{R}$ que aparece en las restricciones 3, 4 y 5 como incógnita: siguen siendo lineales porque a entra sumando. No se exige $a \ge 0$: los enteros p_k pueden ser negativos. En el código se sustituye la declaración `param a := ...;` por `var a;`, se añade `param r integer >= 1;` y la restricción `numero` pasa a `sum {i in I, j in I} x[i,j,k] <= r;`. Se conserva el objetivo constante.

■

QUÉ DEJA. El recurso de *una binaria por casilla y por valor*, x_{ijk}, que convierte «qué número va aquí» en decisiones de sí o no y hace lineales las sumas. Sirve para todos los pasatiempos que siguen y para cualquier problema de asignar valores de un conjunto finito a posiciones.

Ejercicio 1.10. *Sudoku* R2.2

Se dan dos sudokus de un periódico, uno marcado como fácil y otro como difícil, con sus casillas prefijadas. Se pide: (a) formular el problema de completar un sudoku como un modelo de Programación Matemática; (b) resolver ambos con `ampl` y un solver adecuado; (c) justificar por qué el periódico distingue entre fácil y difícil.

fácil

	3				6		7	
		8	5	1		3	2	
				3	4		1	8
2	1			4				7
			3	9	1	2	4	5
9	4					8		
	9				3	7	6	
				6			8	
3			9	7	8			4

difícil

			1		8			4
	2	1					7	
		4				2		
			5					
			3	9	1	7		
2	5			8			9	
	3						4	
	4		6		5		8	2
	7							

Resolución. *(a)* Sea $x_{ijk} \in \{0,1\}$ igual a uno si el valor k se coloca en la posición (i,j), con $i,j,k \in \{1,\dots,9\}$. No hay objetivo; se busca un punto factible.

1. Cada valor una vez por fila: $\sum_{j=1}^{9} x_{ijk} = 1$ para todo i,k.
2. Cada valor una vez por columna: $\sum_{i=1}^{9} x_{ijk} = 1$ para todo j,k.
3. Un valor por casilla: $\sum_{k=1}^{9} x_{ijk} = 1$ para todo i,j.
4. Cada valor una vez en cada bloque 3×3. Los bloques se indexan por $s,t \in \{0,1,2\}$ y ocupan las filas $3s+1, 3s+2, 3s+3$ y las columnas $3t+1, 3t+2, 3t+3$:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_{3s+i,\,3t+j,\,k} = 1, \qquad s,t \in \{0,1,2\},\ k = 1,\dots,9.$$

5. Las casillas dadas: si el enunciado trae el valor k_0 en (i_0, j_0), se añade $x_{i_0 j_0 k_0} = 1$.

(b) El modelo es el mismo para los dos sudokus; solo cambian las casillas fijadas. Las soluciones son las siguientes. Se comprueban en dos pasos: respetan todos los datos iniciales y cada fila, columna y bloque contiene los números del 1 al 9 una sola vez.

Solución: fácil

5	3	1	2	8	6	4	7	9
4	7	8	5	1	9	3	2	6
6	2	9	7	3	4	5	1	8
2	1	3	8	4	5	6	9	7
7	8	6	3	9	1	2	4	5
9	4	5	6	2	7	8	3	1
8	9	4	1	5	3	7	6	2
1	5	7	4	6	2	9	8	3
3	6	2	9	7	8	1	5	4

Solución: difícil

7	9	6	1	2	8	5	3	4
5	2	1	4	6	3	9	7	8
3	8	4	9	5	7	2	1	6
9	1	7	5	4	2	8	6	3
4	6	8	3	9	1	7	2	5
2	5	3	7	8	6	4	9	1
8	3	5	2	1	9	6	4	7
1	4	9	6	7	5	3	8	2
6	7	2	8	3	4	1	5	9

La unicidad se ha comprobado por búsqueda exhaustiva; no se deduce solo de haber encontrado una solución factible.

El código de ambos tableros. El fichero `sudoku.mod` mantiene las mismas binarias y restricciones del apartado (a):

```
set I := 1..9;
param dado {I,I} integer >= 0, <= 9;
var x {I,I,I} binary;

minimize nada: 0;
subject to filas {i in I, k in I}:
    sum {j in I} x[i,j,k] = 1;
subject to columnas {j in I, k in I}:
    sum {i in I} x[i,j,k] = 1;
subject to casillas {i in I, j in I}:
    sum {k in I} x[i,j,k] = 1;
subject to bloques {s in 0..2, t in 0..2, k in I}:
    sum {i in 1..3, j in 1..3} x[3*s+i,3*t+j,k] = 1;
subject to pistas {i in I, j in I: dado[i,j] > 0}:
    x[i,j,dado[i,j]] = 1;
```

La novedad está en `pistas`: la condición tras los dos puntos dentro de las llaves crea restricciones solo en las casillas prefijadas. `dado[i,j]=0` representa una casilla vacía; si vale, por ejemplo, 7, se fija `x[i,j,7]=1`. En `bloques`, los índices s, t eligen el bloque y los índices i, j recorren sus nueve casillas.

Los dos ficheros de datos reproducen los tableros del enunciado. En cada tabla, la primera línea numera las columnas y la primera entrada de cada línea numera la fila.
`sudoku-facil.dat`:

```
param dado : 1 2 3 4 5 6 7 8 9 :=
1  0 3 0 0 0 6 0 7 0
2  0 0 8 5 1 0 3 2 0
3  0 0 0 0 3 4 0 1 8
4  2 1 0 0 4 0 0 0 7
5  0 0 0 3 9 1 2 4 5
6  9 4 0 0 0 0 8 0 0
7  0 9 0 0 0 3 7 6 0
8  0 0 0 0 6 0 0 8 0
```

```
  9  3 0 0 9 7 8 0 0 4;
```

`sudoku-dificil.dat`:

```
  param dado : 1 2 3 4 5 6 7 8 9 :=
  1  0 0 0 1 0 8 0 0 4
  2  0 2 1 0 0 0 0 7 0
  3  0 0 4 0 0 0 2 0 0
  4  0 0 0 5 0 0 0 0 0
  5  0 0 0 3 9 1 7 0 0
  6  2 5 0 0 8 0 0 9 0
  7  0 3 0 0 0 0 0 4 0
  8  0 4 0 6 0 5 0 8 2
  9  0 7 0 0 0 0 0 0 0;
```

Este es el guion `sudoku-facil.run`. Para el tablero difícil se sustituye el fichero `sudoku-facil.dat` por `sudoku-dificil.dat`:

```
  reset;
  model sudoku.mod;
  data sudoku-facil.dat;
  option solver highs;
  solve;
  display solve_result;
  display {i in I, j in I} sum {k in I} k*x[i,j,k];
```

La última línea reconstruye el número de cada casilla a partir de las binarias. Una resolución correcta devuelve los tableros mostrados arriba.

(c) El primero trae 36 casillas fijadas y el segundo 25, pero esa diferencia por sí sola no justifica su dificultad. Añadir una pista recorta el conjunto factible; otra cosa es cuánto facilita encontrar el punto que queda. Para una persona importan qué deducciones están disponibles y cómo dependen unas de otras. Para un solver importa además el procedimiento de búsqueda. El modelo de factibilidad no contiene una escala de dificultad humana: las etiquetas «fácil» y «difícil» no son una consecuencia matemática del número de pistas. ■

«No repetir» se expresa aquí como «cada valor exactamente una vez» en la fila, columna o bloque correspondiente. Las restricciones describen las soluciones; no miden, por sí solas, el esfuerzo de encontrarlas.

Ejercicio 1.11. *Rollos de cable y patrones de corte* R2.3

Una empresa recibe rollos de cable de 100 metros y debe servir pedidos de cable de distintas longitudes: 90 pedidos de 45 metros, 720 de 36 metros y 570 de 27 metros. Formular el problema de distribuir los pedidos consumiendo la menor cantidad posible de rollos. Idea: de un rollo de 100 metros se pueden obtener, por ejemplo, dos pedidos de 45 metros.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *La decisión no es «cuántos pedidos de cada tipo», que es dato, sino «cómo se corta cada rollo».*
2. *Enumera todas las formas de cortar un rollo de 100 metros en piezas de 45, 36 y 27 sin pasarse. Son pocas.*
3. *La variable es cuántos rollos se cortan según cada forma.*

Resolución. *Los patrones.* Un patrón es una terna (n_{45}, n_{36}, n_{27}) de enteros no negativos

con $45n_{45} + 36n_{36} + 27n_{27} \leq 100$. Conviene quedarse con los patrones *maximales*, a los que no se puede añadir ninguna pieza, porque cualquier otro desperdicia más sin servir más. Recorriendo las posibilidades:

Patrón	Piezas	Metros usados
1	$45 + 45$	90
2	$45 + 36$	81
3	$45 + 27 + 27$	99
4	$36 + 36 + 27$	99
5	$36 + 27 + 27$	90
6	$27 + 27 + 27$	81

Por ejemplo, $45 + 36 + 27 = 108$ se pasa, y $36 + 36 + 36 = 108$ también.

Qué se decide. $x_p \geq 0$, entero, número de rollos cortados según el patrón p, $p = 1, \ldots, 6$.

Qué se quiere. Minimizar $\sum_{p=1}^{6} x_p$.

Qué se puede. Cada tipo de pedido queda cubierto por las piezas de su longitud que producen los patrones elegidos:

$$\begin{array}{lrcll} \text{piezas de 45:} & 2x_1 + x_2 + x_3 & \geq & 90, & \\ \text{piezas de 36:} & x_2 + 2x_4 + x_5 & \geq & 720, & x_p \in \mathbb{Z}_+. \\ \text{piezas de 27:} & 2x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 & \geq & 570, & \end{array}$$

Se escribe $\geq$ y no $=$ porque cortar alguna pieza de más puede ser inevitable con patrones enteros, y no está prohibido. ■

El movimiento que hay que retener es el cambio de variable que hace lineal un problema de corte: no se decide pieza a pieza sino *patrón a patrón*, y los patrones se enumeran antes. Es la formulación clásica del *cutting stock* de Gilmore y Gomory, y la idea de enumerar primero las formas admisibles y decidir después cuántas de cada una reaparece en muchos modelos.

Ejercicio 1.12. *Tres fábricas en tres localizaciones* R2.4, JUN 2023

Tres fábricas F_1, F_2, F_3 pueden ubicarse en tres localizaciones L_1, L_2, L_3, una en cada una. Entre las fábricas hay un flujo mensual de producto y cada unidad transportada tiene un coste que depende de las localizaciones:

Flujo	F_1	F_2	F_3
F_1	—	3	1
F_2	2	—	3
F_3	3	1	—

Coste	L_1	L_2	L_3
L_1	—	1	5
L_2	4	—	1
L_3	2	3	—

Formular el problema que determina la localización óptima de cada fábrica.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *La decisión básica es una asignación: fábrica i en localización j.*
2. *El coste de una pareja de fábricas depende de* dónde están las dos. *Con x_{ij} binarias, eso es un producto de dos variables: no es lineal.*
3. *Hay dos salidas: aceptar el producto y linealizarlo, o enumerar las seis asignaciones posibles.*

Resolución. *Datos.* b_{ik} es el flujo de F_i a F_k y c_{jl} el coste unitario de transportar de L_j a L_l.

Qué se decide. $x_{ij} \in \{0,1\}$ igual a uno si la fábrica i va a la localización j, con $\sum_j x_{ij} = 1$ para cada i y $\sum_i x_{ij} = 1$ para cada j.

Qué se quiere. Si F_i está en L_j y F_k en L_l, el flujo de i a k cuesta $b_{ik}c_{jl}$. Eso ocurre exactamente cuando $x_{ij}x_{kl} = 1$, luego el coste total es

$$\sum_{i \neq k} \sum_{j \neq l} b_{ik}\, c_{jl}\, x_{ij}\, x_{kl},$$

que es cuadrático en las variables. Es el *problema de asignación cuadrática*, y tal cual no es un programa lineal.

Linealización. Se introduce $y_{ijkl} \in \{0,1\}$ que debe valer $x_{ij}x_{kl}$. Como las x son binarias, el producto es uno si y solo si las dos lo son, y eso se impone linealmente con

$$y_{ijkl} \leq x_{ij}, \qquad y_{ijkl} \leq x_{kl}, \qquad y_{ijkl} \geq x_{ij} + x_{kl} - 1.$$

Las dos primeras hacen $y = 0$ si alguna x es cero; la tercera hace $y = 1$ si las dos son uno. El objetivo pasa a ser Minimizar $\sum b_{ik}c_{jl}y_{ijkl}$, lineal, con las restricciones de asignación sobre x y las tres anteriores sobre y. Como el objetivo es de minimizar y todos los coeficientes son no negativos, quitar las dos cotas superiores conserva el valor óptimo: siempre se puede bajar y hasta el producto sin empeorar el coste. Si un coeficiente es cero, un óptimo podría mantener un y innecesario; para que *toda* solución respete $y_{ijkl} = x_{ij}x_{kl}$ se conservan las tres desigualdades. ■

Otra vía (enumerar las asignaciones, como hace la solución de la relación). Con tres fábricas hay solo $3! = 6$ asignaciones posibles. Se puede definir una binaria z_σ por cada permutación σ de $\{1,2,3\}$ (la fábrica i va a $L_{\sigma(i)}$), calcular de antemano el coste $C_\sigma = \sum_{i \neq k} b_{ik}c_{\sigma(i)\sigma(k)}$ de cada una, e imponer $\sum_\sigma z_\sigma = 1$: el problema queda en Minimizar $\sum_\sigma C_\sigma z_\sigma$, lineal porque los C_σ son números calculados antes de resolver, no expresiones en las variables. Es exacto y rápido para $n = 3$, y es lo que hace la resolución manuscrita de la relación. Su límite está en ese mismo recuento: con n fábricas hay $n!$ permutaciones, y el modelo deja de escribirse a mano en cuanto n pasa de cinco o seis; la linealización con y_{ijkl} tiene n^4 variables, que crecen mucho más despacio que $n!$.

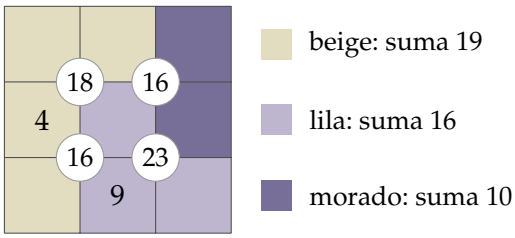
Quedan dos herramientas. La linealización de un producto de binarias con tres desigualdades, que hay que saber escribir de memoria; y el criterio para elegir entre enumerar y modelar, que es el tamaño: enumerar gana cuando el número de casos es pequeño y fijo, y pierde en cuanto crece.

La cuenta, para comprobar el modelo. Con los datos del enunciado, las seis asignaciones cuestan 27, 28, 29, 41, 41 y 42. El óptimo, 27, pone F_1 en L_2, F_2 en L_3 y F_3 en L_1: por ejemplo, el flujo $F_1 \to F_2$, de 3 unidades, va de L_2 a L_3 a coste 1 y aporta 3. *Dónde se falla:* en escribir el coste como $b_{ik}c_{jl}x_{ij}$, con una sola binaria, que no sabe dónde está la otra fábrica y por eso no puede saber qué coste le toca. Y, al linealizar, en quitar desigualdades sin mirar el sentido del objetivo: minimizando con coeficientes no negativos, la imprescindible es $y \geq x_{ij} + x_{kl} - 1$; si se maximizara, lo serían las dos cotas superiores.

Ejercicio 1.13. *El Subarai* R2.5, MAY 2023

El Subarai es un tablero 3×3 que hay que rellenar con los números del 1 al 9 sin repetir ninguno. Entre cada cuatro casillas que se tocan en un vértice hay un círculo blanco con

la suma de esas cuatro: 18 (casillas $(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)$), 16 ($(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)$), 16 ($(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)$) y 23 ($(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)$). Además las casillas están coloreadas y la suma de las de cada color debe coincidir con el total indicado: beige, casillas $(1,1),(1,2),(2,1),(3,1)$, suma 19; lila, casillas $(2,2),(3,2),(3,3)$, suma 16; morado, casillas $(1,3),(2,3)$, suma 10. Vienen dados el 4 en la casilla $(2,1)$ y el 9 en la $(3,2)$. Formular el problema.



Resolución. Sea $x_{ijk} \in \{0,1\}$ igual a uno si el valor k va en la casilla (i,j), para $i,j \in \{1,2,3\}$ y $k \in \{1,\dots,9\}$, y sea $v_{ij} = \sum_{k=1}^{9} k\, x_{ijk}$ el valor de la casilla. No hay objetivo.

1. Cada valor una vez en el tablero: $\sum_{i,j} x_{ijk} = 1$ para $k = 1,\dots,9$.
2. Cada casilla un valor: $\sum_k x_{ijk} = 1$ para todo i,j.
3. Círculos blancos: $v_{11}+v_{12}+v_{21}+v_{22} = 18$, $v_{12}+v_{13}+v_{22}+v_{23} = 16$, $v_{21}+v_{22}+v_{31}+v_{32} = 16$, $v_{22}+v_{23}+v_{32}+v_{33} = 23$.
4. Colores: $v_{11}+v_{12}+v_{21}+v_{31} = 19$, $v_{22}+v_{32}+v_{33} = 16$, $v_{13}+v_{23} = 10$.
5. Datos iniciales: $x_{214} = 1$, $x_{329} = 1$.
6. $x_{ijk} \in \{0,1\}$.

Cada v_{ij} es lineal en las binarias, así que todas las sumas son lineales.

Como comprobación, el tablero

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

cumple todo: los círculos dan $8+5+4+1 = 18$, $5+3+1+7 = 16$, $4+1+2+9 = 16$ y $1+7+9+6 = 23$; los colores, $8+5+4+2 = 19$, $1+9+6 = 16$ y $3+7 = 10$. ■

La expresión que conviene retener es $v_{ij} = \sum_k k\, x_{ijk}$, que traduce «el número que hay en la casilla» a una forma lineal. Así, las condiciones lineales sobre los valores siguen siendo lineales en las binarias. Un producto de dos valores, en cambio, requiere una reformulación adicional, como en el ejercicio de las fábricas.

Ese tablero es, además, el único: recorrer las 9! colocaciones de los números del 1 al 9 lo confirma. *Dónde se falla:* en escribir las sumas sobre las binarias en lugar de sobre los valores. La expresión $\sum_k (x_{11k}+x_{12k}+x_{21k}+x_{22k})$ cuenta casillas, que siempre son cuatro, y no suma los números que contienen; por eso se define primero v_{ij} y después se escriben las sumas.

Ejercicio 1.14. *Cinco centros, dos almacenes y tres ciudades* R2.6, JUN 2023

Cinco centros de producción $P_1,\dots,P_5$ producen una unidad cada uno, que se envía a uno de los dos almacenes A_1, A_2. Desde los almacenes se envía el producto a tres ciudades C_1, C_2, C_3; las dos primeras consumen una unidad y la tercera dos. Los costes unitarios son:

	A_1	A_2	C_1	C_2	C_3
P_1	1	3	—	—	—
P_2	2	2	—	—	—
P_3	3	1	—	—	—
P_4	2	2	—	—	—
P_5	1	3	—	—	—
A_1	—	—	1	2	3
A_2	—	—	3	2	1

Formular el problema que determina la distribución que satisface la demanda de las ciudades con mínimo coste de transporte total.

Resolución. *La idea.* Son dos etapas de transporte encadenadas con un nodo en medio, y lo que las une es el balance en cada almacén: no puede salir de él lo que no ha entrado.

Qué se decide. $x_{ij} \in \{0,1\}$ igual a uno si el centro i envía su unidad al almacén j ($i = 1,\dots,5$; $j = 1,2$), e $y_{jk} \geq 0$, entero, unidades que el almacén j envía a la ciudad k ($k = 1,2,3$).

Qué se quiere. Minimizar $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{2} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} d_{jk}y_{jk}$ con c y d las dos tablas.

Qué se puede.

1. Cada centro envía su unidad a un almacén: $x_{i1} + x_{i2} = 1$ para cada i.
2. Demanda de cada ciudad: $y_{1k} + y_{2k} = e_k$ con $e = (1,1,2)$.
3. Balance en cada almacén: lo que sale no supera lo que entra, $\sum_k y_{jk} \leq \sum_i x_{ij}$ para $j = 1,2$.
4. $x_{ij} \in \{0,1\}$, $y_{jk} \in \mathbb{Z}_+$.

Como se producen 5 unidades y se consumen 4, una se queda en algún almacén; por eso el balance es una desigualdad. Si se prefiere trabajar con igualdades, se crea una ciudad ficticia C_4 con demanda 1 y coste cero desde ambos almacenes, que es lo que hace la solución de la relación; entonces el balance es $\sum_{k=1}^{4} y_{jk} = \sum_i x_{ij}$.

El coste de la primera etapa, considerado por separado, se minimiza mandando P_1, P_5 a A_1 (coste 1) y P_3 a A_2 (coste 1); P_2 y P_4 cuestan lo mismo en ambos y se reparten según convenga a la segunda etapa, donde C_1 prefiere A_1 y C_3 prefiere A_2. ■

De aquí salen la restricción de balance en un nodo intermedio y el truco del nodo ficticio para convertir «sobra producto» en un problema equilibrado. Los dos vuelven en el problema del transporte del capítulo 5.

La cuenta, con un certificado. Ninguna etapa puede costar menos que su propio mínimo. La primera cuesta al menos $1+2+1+2+1 = 7$, mandando cada centro a su almacén más barato; la segunda, al menos $1 + 2 + 2\cdot 1 = 5$, sirviendo C_1 desde A_1, las dos unidades de C_3 desde A_2 y C_2 desde cualquiera. Luego ningún plan baja de 12. Y 12 se alcanza: P_1, P_2 y P_5 envían a A_1, y P_3 y P_4 a A_2; A_1 sirve a C_1 y a C_2, A_2 las dos unidades de C_3, y en A_1 sobra una. Acotar por piezas y construir una solución que llegue a la cota es la misma técnica que se usará con el problema de Constantino y con la dominación. *Dónde se falla:* en escribir el balance con igualdad y sin el nodo ficticio. Sumando en los dos almacenes, lo que entra es 5 y lo que sale 4, y el modelo sería infactible.

Ejercicio 1.15. *Seleccionar entradas de una matriz* R2.7, OCT 2024

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de tamaño $m \times n$, se quiere seleccionar a lo sumo una entrada de cada fila y a lo sumo dos de cada columna, de modo que la suma de los elementos seleccionados sea máxima. Formular como problema de Programación Entera.

Resolución. *La idea.* Una binaria por entrada; y las dos frases del enunciado, «a lo sumo una de cada fila» y «a lo sumo dos de cada columna», son dos familias de desigualdades $\leq$ del catálogo.

Sea $x_{ij} \in \{0, 1\}$ igual a uno si se selecciona a_{ij}. Entonces

$$\text{Maximizar} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \quad \text{sujeto a:} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \ (i = 1, \ldots, m), \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 2 \ (j = 1, \ldots, n),$$
$$x_{ij} \in \{0, 1\}.$$

Si alguna entrada es negativa, el modelo simplemente no la selecciona; el «a lo sumo» lo permite. ■

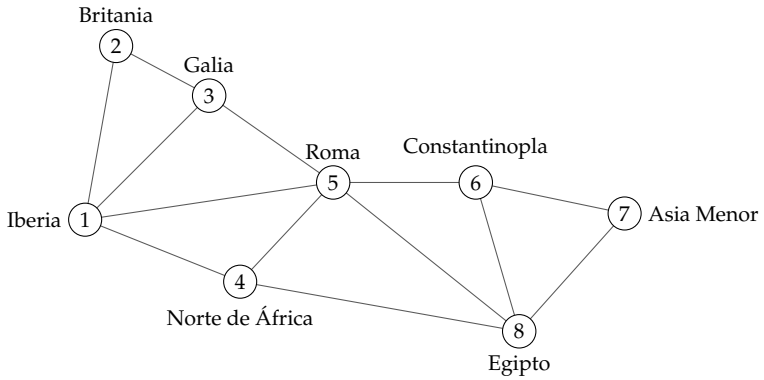
Visto de lejos, el problema es una asignación con capacidades distintas por fila y por columna, y se formula en dos líneas: la dificultad estaba en leer bien «a lo sumo una» y «a lo sumo dos».

Una comprobación pequeña. Con $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 4 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, lo mejor es tomar el 3, el 5 y el 4: suman 12, y la primera columna recibe dos, que es lo permitido. Si se resuelve el modelo relajado, con $0 \leq x_{ij} \leq 1$ en lugar de binarias, sale la misma solución, entera, y no por casualidad: cada variable aparece en una restricción de fila y en una de columna, que es la matriz de incidencia de un grafo bipartito con las filas a un lado y las columnas al otro. El capítulo 5 demuestra que con esas matrices y datos enteros los vértices del conjunto factible son enteros (sección 5.2.1). *Dónde se falla:* en cambiar «a lo sumo» por «exactamente». Con $\sum_j x_{ij} = 1$, una matriz con más del doble de filas que de columnas no tendría solución, porque las columnas solo admiten $2n$ entradas seleccionadas.

Ejercicios: grafos, cobertura y transporte R3

Ejercicio 1.16. *La defensa del Imperio romano de Constantino* R3.1

Se modela la defensa de ocho regiones del Imperio romano, inspirándose en la estrategia de Constantino el Grande. Cada grupo de seis legiones, con su infantería, caballería y artillería, forma un cuerpo móvil (CM). Una región se considera protegida si hay un CM en ella, o si hay dos CM en una región vecina. En Iberia y en Constantinopla debe haber al menos un CM. Las regiones, numeradas en el grafo siguiente, y sus vecindades son: 1 Iberia, vecina de 2, 3, 4 y 5; 2 Britania, de 1 y 3; 3 Galia, de 1, 2 y 5; 4 Norte de África, de 1, 5 y 8; 5 Roma, de 1, 3, 4, 6 y 8; 6 Constantinopla, de 5, 7 y 8; 7 Asia Menor, de 6 y 8; 8 Egipto, de 4, 5, 6 y 7.



1. Formular el problema de determinar el mínimo número de CM necesarios para proteger las ocho regiones.
2. Resolverlo numéricamente.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *En cada región puede haber* 0, 1 *o* 2 *cuerpos. «Tres valores» se modela con dos binarias que no pueden ser uno a la vez.*
2. *Una región protegida: tiene un CM, o tiene dos, o alguna vecina tiene dos. Es una cobertura con dos tipos de cobertura.*
3. *Para resolver, empieza por lo obligado (Iberia y Constantinopla) y mira cuánto cubre poner dos cuerpos ahí.*

Resolución. *Qué se decide.* Para cada región $i = 1, \dots, 8$,

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si en la región } i \text{ hay un solo CM,} \\ 0 & \text{si no,} \end{cases} \qquad y_i = \begin{cases} 1 & \text{si en la región } i \text{ hay dos CM,} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

El número de cuerpos en i es $x_i + 2y_i$.

Qué se quiere. Minimizar $\sum_{i=1}^{8}(x_i + 2y_i)$.

Qué se puede. Con $N(i)$ el conjunto de vecinas de i:

1. No hay uno y dos a la vez: $x_i + y_i \leq 1$ para todo i.
2. Iberia y Constantinopla con al menos un CM: $x_1 + y_1 \geq 1$, $x_6 + y_6 \geq 1$.
3. Cada región protegida: $x_i + y_i + \sum_{j \in N(i)} y_j \geq 1$ para todo i. Escritas:

$$\begin{aligned} &x_1 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 1, && x_2 + y_2 + y_1 + y_3 \geq 1, \\ &x_3 + y_3 + y_1 + y_2 + y_5 \geq 1, && x_4 + y_4 + y_1 + y_5 + y_8 \geq 1, \\ &x_5 + y_5 + y_1 + y_3 + y_4 + y_6 + y_8 \geq 1, && x_6 + y_6 + y_5 + y_7 + y_8 \geq 1, \\ &x_7 + y_7 + y_6 + y_8 \geq 1, && x_8 + y_8 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 \geq 1. \end{aligned}$$

4. $x_i, y_i \in \{0, 1\}$.

Resolución numérica. Se razona por cotas. Iberia y Constantinopla obligan a gastar al menos un cuerpo en cada una, luego el coste es al menos 2. Con exactamente dos cuerpos ($x_1 = x_6 = 1$) solo quedan protegidas las regiones 1 y 6. Con tres cuerpos las opciones son: dos en Iberia y uno en Constantinopla ($y_1 = x_6 = 1$), que protege $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{6\}$ y deja fuera 7 y 8; uno en Iberia y dos en Constantinopla ($x_1 = y_6 = 1$), que protege $\{1\} \cup \{5, 6, 7, 8\}$ y deja fuera 2, 3 y 4; o uno en cada una y un tercero suelto en otra región, que solo se protege a sí misma y no llega a cubrir las seis restantes. Luego tres no bastan.

Con cuatro cuerpos, dos en Iberia y dos en Constantinopla, $y_1 = y_6 = 1$: Iberia protege a sus vecinas 2, 3, 4 y 5, y Constantinopla a 5, 7 y 8. Las ocho regiones quedan cubiertas con coste 4, que es el óptimo. Se comprueba además que es la única solución con cuatro: con cuatro cuerpos separados, solo se protegen las cuatro regiones que los albergan. Las demás combinaciones de coste 4 que respetan «al menos uno» en 1 y en 6 son de la forma (y_1, x_6, x_k), (x_1, y_6, x_k) o (x_1, x_6, y_k), y ninguna cubre las ocho regiones porque un solo cuerpo suelto protege una región y dos cuerpos en $k \notin \{1, 6\}$ no llegan a la vez a Britania y a Egipto. ■

En AMPL: una familia de vecindades. `set N {V} within V;` declara un conjunto de vecinos para cada región. Así, `sum {j in N[i]} y[j]` recorre exactamente las vecinas de i. El fichero `romano.mod` conserva las dos binarias del modelo:

```
set V := 1..8;
set N {V} within V;
var x {V} binary;
var y {V} binary;

minimize cuerpos: sum {i in V} (x[i]+2*y[i]);
subject to un_estado {i in V}: x[i]+y[i] <= 1;
subject to guarnicion {i in {1,6}}: x[i]+y[i] >= 1;
subject to proteccion {i in V}:
  x[i]+y[i]+sum {j in N[i]} y[j] >= 1;
```

Las vecindades se guardan en `romano.dat`:

```
set N[1] := 2 3 4 5;
set N[2] := 1 3;
set N[3] := 1 2 5;
set N[4] := 1 5 8;
set N[5] := 1 3 4 6 8;
set N[6] := 5 7 8;
set N[7] := 6 8;
set N[8] := 4 5 6 7;
```

Cada arista del mapa aparece en ambos sentidos: por ejemplo, $8 \in N(4)$ y $4 \in N(8)$. El guion `romano.run` muestra el número de cuerpos en cada región, $x_i + 2y_i$, y devuelve $(2, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0)$, de coste 4:

```
reset;
model romano.mod;
data romano.dat;
option solver highs;
solve;
display solve_result, cuerpos;
display {i in V} x[i]+2*y[i];
```

Observación. La unicidad cambia si se sustituye «hay dos CM en una región vecina» por otra regla: «entre las regiones vecinas hay dos CM». Son modelos distintos. Aquí se ha leído como que *una sola* vecina reúne los dos cuerpos, que es lo que dice el enunciado al pie de la letra, y entonces el óptimo de coste 4 es único. Si en cambio se lee que basta con que *entre todas* las vecinas sumen dos, la región queda protegida también cuando los dos cuerpos están separados, el modelo se relaja y aparecen cinco soluciones de coste 4 en lugar de una.

El mínimo no cambia: en las dos lecturas hacen falta cuatro cuerpos. El apéndice G usa esa variante para ilustrar una disyunción con una constante M. El código de este ejercicio conserva la regla de una sola vecina. Resolver una vez con AMPL devuelve una solución óptima; por sí solo no demuestra que sea única ni enumera las demás.

Otra vía (una variable entera por región). Se podría usar $n_i \in \{0, 1, 2\}$, número de cuerpos en i, con objetivo $\sum_i n_i$. La dificultad está en «alguna vecina tiene dos»: con n_j entera eso no es una desigualdad lineal ($n_j \geq 2$ es una condición, no una cantidad que sumar). Haría falta de todos modos una binaria y_j con $2y_j \leq n_j$ para detectar el «dos», y así se obtiene otra formulación con dos variables por región: una entera y una binaria. La relación usa dos binarias y distingue directamente los estados «uno» y «dos».

DE DÓNDE VIENE: CONSTANTINO Y EL PROBLEMA DE REVELLE

Charles ReVelle y Kenneth Rosing publicaron en 2000 *Defendens Imperium Romanum*. Su regla permite enviar un cuerpo a la región vecina si queda otro en la región de origen. El artículo describe el despliegue de dos cuerpos en Roma y dos en Constantinopla, pero advierte que *no* protege Britania en un solo paso. Ese despliegue histórico no es la solución del modelo de cobertura inmediata. El mapa es el mismo que aquí; lo añadido en este ejercicio es la obligación de guarnecer Iberia y Constantinopla. Cambiar dónde deben quedar cuerpos o cuánto pueden desplazarse cambia el problema, aunque el número total siga siendo cuatro.

Queda el patrón de *cobertura con dos niveles* — cubrirse a sí mismo con una unidad o cubrir a los vecinos con dos — y el método para resolver a mano un entero pequeño: una cota inferior por lo obligatorio, y una construcción que la alcanza.

Ejercicio 1.17. *Cruces en una cuadrícula* R3.2, JUN 2021

Se considera una cuadrícula de $n \times n$ celdas. Formular el problema de encontrar el número máximo de cruces (una celda central y sus cuatro vecinas, arriba, abajo, izquierda y derecha) que se pueden incluir en la cuadrícula sin que se solapen.

Resolución. *La idea.* Cada celda es un recurso que solo puede usar una cruz. Se decide dónde van los centros, y la condición de no solaparse se escribe celda a celda: entre las cruces que ocuparían esa celda, a lo sumo una.

Qué se decide. $x_{ij} \in \{0, 1\}$ igual a uno si hay una cruz con centro en (i, j). Como la cruz necesita las cuatro vecinas, el centro está en $2 \leq i, j \leq n - 1$; para las celdas del borde se fija $x_{ij} = 0$, o directamente no se define la variable.

Qué se quiere. Maximizar $\sum_{i,j} x_{ij}$.

Qué se puede. La celda (r, c) pertenece a la cruz centrada en (r, c) y a las centradas en $(r \pm 1, c)$ y $(r, c \pm 1)$. Que pertenezca a lo sumo a una es

$$x_{rc} + x_{r-1,c} + x_{r+1,c} + x_{r,c-1} + x_{r,c+1} \leq 1, \qquad r, c = 1, \ldots, n,$$

entendiendo que los términos con índices fuera de $\{2, \ldots, n-1\}$ valen cero. Con $x_{ij} \in \{0, 1\}$ el modelo está completo. ■

Otra vía (prohibir centros próximos, como en la solución de la relación). Dos cruces se solapan exactamente cuando sus centros están a distancia de Manhattan menor o igual que dos. Se puede escribir, para cada centro posible, que si $x_{ij} = 1$ entonces los doce centros a

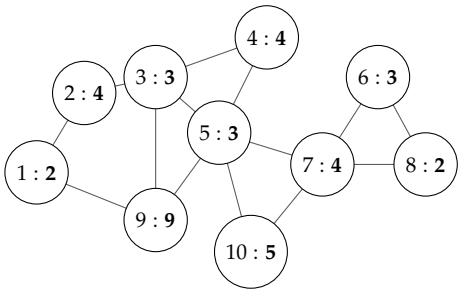
distancia uno o dos están vacíos: $\sum_{(k,l)\in V(i,j)} x_{kl} \leq 12(1 - x_{ij})$, con $V(i,j)$ ese conjunto de doce celdas. Es correcto y es lo que hace la solución manuscrita, pero tiene dos inconvenientes frente a la formulación por celdas: usa una constante grande, 12, que debilita la relajación lineal, y no aprovecha directamente que todos los centros que cubren una misma celda compiten por ella. Las cotas por celdas expresan esa competencia y dan una relajación más fuerte. Algunas pueden ser redundantes, sobre todo en el borde: por ejemplo, una celda que solo pueda cubrir una cruz da simplemente la cota $x_{ij} \leq 1$, que ya tenía la variable.

El patrón que aparece aquí es el *empaquetamiento*: cuando varios objetos no pueden compartir recurso, se escribe una desigualdad ≤ 1 por recurso sumando las binarias de los objetos que lo usan. Es el espejo de la cobertura, que era ≥ 1.

Una comprobación. Resuelto para tableros pequeños, el máximo es 1 para $n = 3$ y para $n = 4$, 2 para $n = 5$, 4 para $n = 6$, 6 para $n = 7$ y 8 para $n = 8$. Que en el tablero 4×4 quepa una sola no es un fallo del modelo: sus cuatro centros posibles están a distancia de Manhattan uno o dos entre sí, y dos cruces cualesquiera se solapan. *Dónde se falla:* en olvidar el borde y dejar centros en la primera o la última fila o columna; la cruz se saldría del tablero y el modelo contaría cruces que no existen.

Ejercicio 1.18. *Nodos que vigilan a sus vecinos* R3.3, JUN 2022

Se da un grafo de diez nodos con un peso en el interior de cada uno: $a = (2,4,3,4,3,3,4,2,9,5)$ para los nodos 1 a 10, con aristas $\{1,2\}$, $\{1,9\}$, $\{2,3\}$, $\{3,4\}$, $\{3,5\}$, $\{3,9\}$, $\{4,5\}$, $\{5,7\}$, $\{5,9\}$, $\{5,10\}$, $\{6,7\}$, $\{6,8\}$, $\{7,8\}$ y $\{7,10\}$. Formular el problema de seleccionar un conjunto de nodos tal que todo nodo no seleccionado esté conectado con al menos uno de los seleccionados, y la suma de los pesos de los seleccionados sea mínima.



Rótulo $i : a_i$: índice del nodo y peso.

Resolución. *La idea.* Es una cobertura en la que cada nodo queda cubierto por sí mismo o desde un vecino: lo que hay que sumar en la restricción de cada nodo es su vecindad *cerrada*, el propio nodo junto con sus vecinos.

Sea $x_i \in \{0,1\}$ igual a uno si se selecciona el nodo i, y $N(i)$ sus vecinos: $N(1) = \{2,9\}$, $N(2) = \{1,3\}$, $N(3) = \{2,4,5,9\}$, $N(4) = \{3,5\}$, $N(5) = \{3,4,7,9,10\}$, $N(6) = \{7,8\}$, $N(7) = \{5,6,8,10\}$, $N(8) = \{6,7\}$, $N(9) = \{1,3,5\}$, $N(10) = \{5,7\}$.

$$\text{Minimizar } \sum_{i=1}^{10} a_i x_i \quad \text{sujeto a:} \quad x_i + \sum_{j\in N(i)} x_j \geq 1 \ (i = 1,\ldots,10), \quad x_i \in \{0,1\}.$$

Es el *conjunto dominante* de peso mínimo del grafo.

Aunque solo se pide formular, el problema se resuelve a mano. Tres nodos tienen vecindades cerradas disjuntas: el nodo 1 exige elegir en $\{1,2,9\}$ (peso mínimo 2, el propio nodo 1), el

nodo 4 exige elegir en $\{3,4,5\}$ (mínimo 3) y el nodo 6 exige elegir en $\{6,7,8\}$ (mínimo 2, el nodo 8). Como los tres conjuntos no comparten nodos, cualquier solución cuesta al menos $2+3+2=7$. Y $\{1,5,8\}$ cuesta exactamente 7 y domina todo: el 1 cubre $1,2,9$; el 5 cubre $3,4,5,7,9,10$; el 8 cubre $6,7,8$. Luego el óptimo es 7. ■

En AMPL. Se reutiliza la familia de vecindades del problema romano; ahora cada nodo seleccionado cubre tanto a sí mismo como a sus vecinos. El modelo `dominante.mod` es:

```
set V := 1..10;
set N {V} within V;
param a {V} >= 0;
var x {V} binary;
minimize peso: sum {i in V} a[i]*x[i];
subject to cubierto {i in V}:
  x[i]+sum {j in N[i]} x[j] >= 1;
```

El fichero `dominante.dat` recoge pesos y vecindades del grafo:

```
param a := 1 2 2 4 3 3 4 4 5 3 6 3 7 4 8 2 9 9 10 5;
set N[1] := 2 9;
set N[2] := 1 3;
set N[3] := 2 4 5 9;
set N[4] := 3 5;
set N[5] := 3 4 7 9 10;
set N[6] := 7 8;
set N[7] := 5 6 8 10;
set N[8] := 6 7;
set N[9] := 1 3 5;
set N[10] := 5 7;
```

El guion `dominante.run` devuelve peso 7 y selecciona los nodos 1, 5 y 8:

```
reset;
model dominante.mod;
data dominante.dat;
option solver highs;
solve;
display solve_result, peso, x;
```

Se lleva uno la misma cobertura de siempre, ahora con el propio nodo incluido en su vecindad, y la técnica de las vecindades disjuntas para certificar un óptimo entero sin ningún algoritmo: es el germen de la idea de *cota dual* que el capítulo 4 hará sistemática.

Dónde se falla. En olvidar el propio nodo en su restricción y escribir $\sum_{j\in N(i)} x_j \geq 1$ a secas. Eso exige que todo nodo, también los seleccionados, tenga un vecino seleccionado: es otro problema, el de la dominación *total*, y aquí su óptimo sube de 7 a 13, con los nodos 2, 3, 7 y 8.

Ejercicio 1.19. *Cinco trabajadores y cinco puestos* R3.4, JUN 2024

Cinco trabajadores $t_1,\ldots,t_5$ deben asignarse a cinco puestos $p_1,\ldots,p_5$ con la mayor eficiencia posible, medida sobre 10:

---

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
t_1	8	9	1	3	1
t_2	9	7	2	2	2
t_3	1	4	7	8	1
t_4	3	2	5	6	9
t_5	3	8	8	2	1

(a) ¿Cuántas asignaciones posibles hay?
(b) No se permite que t_1 vaya a p_2 y t_2 a p_1 simultáneamente. Formular el problema que determina la asignación de máxima eficiencia.

Resolución. *La idea.* Es un problema de asignación de los de siempre al que se le añade una sola prohibición entre dos parejas, y la prohibición es una exclusión entre dos binarias.

(a) Una asignación es una biyección entre cinco trabajadores y cinco puestos: hay $5! = 120$.

(b) Sea $x_{ij} \in \{0,1\}$ igual a uno si t_i va a p_j, y a_{ij} la tabla.

$$\text{Maximizar} \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} a_{ij}x_{ij} \quad \text{sujeto a:} \quad \sum_j x_{ij} = 1\ (\forall i), \qquad \sum_i x_{ij} = 1\ (\forall j),$$
$$x_{12} + x_{21} \le 1, \qquad x_{ij} \in \{0,1\}.$$

La única restricción nueva es la de incompatibilidad: «no ambas a la vez» es la suma de las dos binarias menor o igual que uno. ■

Las dos cláusulas que hay que tener a mano son «no las dos a la vez», $x + y \le 1$, y su compañera «si una entonces la otra», $x \le y$. Con esas dos se escriben casi todas las implicaciones y exclusiones entre pares de decisiones binarias.

Por qué la restricción importa, con los números. Sin la prohibición, la mejor asignación es precisamente la prohibida: t_1 en p_2 y t_2 en p_1, con t_3 en p_4, t_4 en p_5 y t_5 en p_3, y eficiencia total $9+9+8+9+8 = 43$. Con ella, lo mejor es intercambiar esos dos, t_1 en p_1 y t_2 en p_2, con el resto igual: $8+7+8+9+8 = 40$. *Dónde se falla:* en escribir «no las dos a la vez» como $x_{12}x_{21} = 0$, que es correcto pero no es lineal, o como $x_{12} + x_{21} = 1$, que obliga a usar una de las dos parejas y cambia el problema. Y, en el apartado (a), en contar 5^5, que son todas las formas de mandar cada trabajador a un puesto, incluidas las que repiten puesto; las asignaciones son las biyecciones.

Ejercicio 1.20. *Minas, fábricas y ciudades* R3.5, JUL 2024

Hay tres minas con producción máxima $a = (10, 20, 30)$ toneladas y tres ciudades con demanda mínima $d = (15, 26, 19)$. El mineral debe procesarse en una fábrica antes de enviarse a una ciudad. Hay tres ubicaciones posibles para fábricas, con coste fijo de construcción $f = (120, 193, 730)$ y coste de procesado por tonelada $\alpha = (1{,}2; 2{,}3; 1{,}1)$. Los costes de envío por tonelada son:

Mina→fábrica	1	2	3
1	60	55	72
2	57	61	45
3	81	57	61

Fábrica→ciudad	1	2	3
1	62	50	67
2	36	62	42
3	58	36	60

1. Formular el problema de elegir qué fábricas construir y cómo surtir a las ciudades con coste total mínimo, respetando producciones y demandas.
2. Si se decide de antemano construir las tres fábricas, ¿cómo cambia la formulación?

Resolución. *La idea.* Tres capas, minas, fábricas y ciudades, con dos familias de envíos y una binaria por fábrica. El balance en cada fábrica une las dos etapas, y la binaria cierra el paso por una fábrica que no se construye.

Qué se decide. $x_{ik} \geq 0$, toneladas de la mina i a la fábrica k; $y_{kj} \geq 0$, toneladas de la fábrica k a la ciudad j; $z_k \in \{0, 1\}$, uno si se construye la fábrica k.

Qué se quiere. Envíos más procesado más costes fijos:

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{i,k} c_{ik} x_{ik} + \sum_{k,j} e_{kj} y_{kj} + \sum_{k} \alpha_k \Big(\sum_{i} x_{ik} \Big) + \sum_{k} f_k z_k,$$

con c y e las dos tablas. El procesado se puede cargar a la entrada o a la salida de la fábrica; como entra lo mismo que sale, da igual.

Qué se puede.

1. Producción de cada mina: $\sum_k x_{ik} \leq a_i$.
2. Demanda de cada ciudad: $\sum_k y_{kj} \geq d_j$.
3. Balance en cada fábrica: $\sum_i x_{ik} = \sum_j y_{kj}$.
4. Nada pasa por una fábrica cerrada: $\sum_i x_{ik} \leq \big(\sum_i a_i\big) z_k = 60 z_k$. La constante 60 es la producción total, la mayor cantidad que podría llegar a una fábrica, de modo que con $z_k = 1$ la restricción no limita nada.
5. $x, y \geq 0$, $z_k \in \{0, 1\}$.

Apartado 2. Si las tres se construyen, $z_k = 1$ es dato: desaparecen las variables z, el término $\sum f_k z_k$ pasa a ser la constante $120 + 193 + 730$, que no afecta al óptimo, y la restricción 4 se vuelve $\sum_i x_{ik} \leq 60$, que es redundante con las de producción y se puede quitar. Queda un problema lineal continuo de dos etapas. ■

Y una advertencia que vale para todos los modelos con constante grande: la M de $\sum_i x_{ik} \leq M z_k$ debe ser la más pequeña que no recorte ninguna solución real; aquí, la producción total. Tomarla mayor no invalida el modelo entero, pero puede debilitar la relajación y dificultar el algoritmo del capítulo 5.

Dónde se falla. En olvidar el balance de las fábricas: sin él, nada obliga a que lo que sale de una fábrica haya entrado, y el modelo serviría a las ciudades sin comprar a las minas ni construir nada. En cobrar el procesado dos veces, a la entrada y a la salida. Y en una M menor que la producción total, que impediría pasar por una sola fábrica más de M toneladas aunque fuera lo mejor. La misma estructura, con los datos como parámetros y la pregunta de si la matriz de restricciones es totalmente unimodular cuando se construyen las tres fábricas, está en la sección E.5.

El mismo problema con números, y cómo certificar el óptimo R4

El problema de las tres fábricas y las tres localizaciones dejó dos herramientas y una pregunta sin contestar. Las herramientas eran linealizar el producto de dos binarias y decidir entre enumerar y modelar. La pregunta es la que aparece en cuanto hay datos delante: encontrada la mejor de las seis asignaciones, ¿cómo se sabe que es la mejor sin haber mirado las seis? El ejercicio que sigue es el mismo modelo con dos diferencias que importan —los datos son simétricos y vienen con números— y admite un certificado de optimalidad que no pasa por ninguna enumeración.

Ejercicio 1.21. *Tres departamentos de un hospital y tres ubicaciones* R4.1, JUN 2025

Se desea determinar dónde instalar físicamente tres departamentos de un hospital —Urgencias (U), Laboratorio (L) y Quirófano (Q)— asignándolos a tres ubicaciones disponibles dentro del edificio (A, B y C). El personal tiene que desplazarse entre estos departamentos en su quehacer cotidiano, por lo que se pretende ubicarlos óptimamente de acuerdo con dos datos:

- la **frecuencia de interacción** f_{ij} entre cada par de departamentos, es decir, cuántas veces al día uno requiere servicios del otro;
- la **distancia física** d_{kl} entre las ubicaciones posibles en la planta.

(a) Formule el problema general como un modelo de Programación Matemática.

(b) Escriba la formulación específica para el problema con los datos

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 \\ 10 & 0 & 15 \\ 20 & 15 & 0 \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 5 & 0 & 4 \\ 10 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resolución. *(a) La misma estructura, y por qué ahora se puede escribir con la mitad de términos.* Con $x_{ik} \in \{0,1\}$ igual a uno si el departamento i se instala en la ubicación k, las restricciones son las de asignación de siempre,

$$\sum_k x_{ik} = 1 \ \ (\forall i), \qquad \sum_i x_{ik} = 1 \ \ (\forall k), \qquad x_{ik} \in \{0,1\},$$

y el objetivo es de nuevo cuadrático, porque el coste de un par de departamentos depende de dónde estén los dos. La diferencia con el problema de las fábricas está en los datos: allí el flujo de F_1 a F_2 y el de F_2 a F_1 eran distintos (3 y 2), de modo que había que recorrer los pares ordenados. Aquí «cuántas veces al día uno requiere servicios del otro» y la distancia entre dos ubicaciones son ambas relaciones simétricas, $f_{ij} = f_{ji}$ y $d_{kl} = d_{lk}$, y entonces cada interacción aparecería dos veces. Se recorren los pares no ordenados, y así cada interacción se escribe una sola vez:

$$\text{Minimizar} \quad z = \sum_{i<j} \sum_k \sum_{l \neq k} f_{ij}\, d_{kl}\, x_{ik} x_{jl}.$$

Fijado el par $\{i, j\}$, la doble suma en k y l tiene un único sumando no nulo, el de las ubicaciones que reciben a i y a j; el par aporta por tanto su término exactamente una vez. Recorriendo pares ordenados habría que multiplicar por $\frac{1}{2}$: las dos escrituras son la misma. La linealización, si se quiere un programa lineal entero, es la de tres desigualdades que ya se usó con las

fábricas, y con $n = 3$ y datos simétricos necesita $3 \cdot 6 = 18$ variables producto, una por cada par de departamentos y cada par ordenado de ubicaciones distintas.

(b) Los datos, y la cuenta. Hay nueve binarias, $x_{UA}, \dots, x_{QC}$. Los datos dan tres frecuencias, $f_{UL} = 10$, $f_{UQ} = 20$ y $f_{LQ} = 15$, y tres distancias, $d_{AB} = 5$, $d_{AC} = 10$ y $d_{BC} = 4$, de modo que el objetivo es

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{k \neq l} \big(10\, d_{kl}\, x_{Uk} x_{Ll} + 20\, d_{kl}\, x_{Uk} x_{Ql} + 15\, d_{kl}\, x_{Lk} x_{Ql}\big)$$

sujeto a

$$\begin{gathered} x_{UA} + x_{UB} + x_{UC} = 1, \quad x_{LA} + x_{LB} + x_{LC} = 1, \quad x_{QA} + x_{QB} + x_{QC} = 1, \\ x_{UA} + x_{LA} + x_{QA} = 1, \quad x_{UB} + x_{LB} + x_{QB} = 1, \quad x_{UC} + x_{LC} + x_{QC} = 1, \\ x_{ik} \in \{0, 1\}. \end{gathered}$$

Con tres departamentos hay $3! = 6$ ubicaciones posibles y el coste de cada una es la suma de tres productos:

$U\ L\ Q$	$10 \cdot d(U,L)$	$20 \cdot d(U,Q)$	$15 \cdot d(L,Q)$	total
$C\ A\ B$	$10 \cdot 10$	$20 \cdot 4$	$15 \cdot 5$	**255**
$A\ C\ B$	$10 \cdot 10$	$20 \cdot 5$	$15 \cdot 4$	260
$B\ A\ C$	$10 \cdot 5$	$20 \cdot 4$	$15 \cdot 10$	280
$B\ C\ A$	$10 \cdot 4$	$20 \cdot 5$	$15 \cdot 10$	290
$A\ B\ C$	$10 \cdot 5$	$20 \cdot 10$	$15 \cdot 4$	310
$C\ B\ A$	$10 \cdot 4$	$20 \cdot 10$	$15 \cdot 5$	315

El óptimo es único: Urgencias en C, Laboratorio en A y Quirófano en B, con $z^* = 255$. ■

Otra vía (el certificado que evita mirar las seis). La tabla da el número pero no dice por qué gana esa distribución, y hay una razón que se ve sin calcular nada. Los datos son dos listas de tres números: las frecuencias 20, 15 y 10, y las distancias 4, 5 y 10. Toda ubicación de los departamentos empareja cada frecuencia con una distancia —la del par de ubicaciones que reciben a ese par de departamentos— y el coste es la suma de los tres productos. Con dos listas fijas, la suma de productos más pequeña se obtiene emparejando el mayor de una con el menor de la otra, el segundo con el segundo y el tercero con el tercero: es la desigualdad del reordenamiento. Aquí da

$$20 \cdot 4 + 15 \cdot 5 + 10 \cdot 10 = 80 + 75 + 100 = 255.$$

De entrada eso es solo una **cota inferior**, porque el mínimo se ha tomado sobre todos los emparejamientos y no todo emparejamiento proviene de una ubicación real. Falta comprobar que este sí, y son dos líneas: el par $\{U, Q\}$, el de frecuencia 20, ha de ocupar las ubicaciones a distancia 4, que son $\{B, C\}$; el par $\{L, Q\}$, de frecuencia 15, las que están a 5, que son $\{A, B\}$; el Quirófano aparece en los dos pares, luego va a la ubicación común, B; de ahí U en C y L en A, y el par restante $\{U, L\}$ cae sobre $\{A, C\}$, a distancia 10, que es justo lo que pedía el emparejamiento. Alcanzada la cota, 255 es el óptimo, y queda demostrado sin haber evaluado las seis asignaciones.

Dónde deja de funcionar el atajo, que es lo que hay que retener. Con tres departamentos hay tres pares a cada lado y $3! = 6$ emparejamientos, tantos como ubicaciones posibles; la

correspondencia resulta ser biyectiva y la cota se alcanza siempre. Con cuatro ya no: $4! = 24$ ubicaciones frente a $6! = 720$ emparejamientos de los seis pares, de modo que casi ningún emparejamiento proviene de una ubicación y la desigualdad del reordenamiento se queda en una cota que puede no alcanzarse. Si coincide con el coste de una asignación, certifica el óptimo; si no, sigue acotando cuánto podría mejorarse la mejor asignación conocida.

Una relajación que da una cota débil. Alguien podría pensar que, una vez linealizado el modelo, basta con relajar las binarias a $0 \le x_{ik} \le 1$ y resolver un programa lineal para tener una cota inferior decente. No la hay. Tomando $x_{ik} = 1/3$ para todos los i y k —que cumple las seis igualdades de asignación— y todas las variables producto iguales a cero, la desigualdad $y \ge x_{ik} + x_{jl} - 1$ se lee $0 \ge \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$ y se cumple con holgura. Ese punto es factible en la relajación y su objetivo vale 0, frente a los 255 del óptimo entero: esta relajación solo recupera la cota evidente $z \ge 0$. Es el fenómeno que abre el capítulo 5 con el ejemplo del redondeo, llevado al extremo. Una cota inicial tan débil ayuda poco a podar en ramificación y acotación; las cotas pueden mejorar al fijar variables en las ramas o al reforzar la formulación.

Dónde se falla. En recorrer pares ordenados con datos simétricos sin el factor $\frac{1}{2}$. Cada interacción se cuenta dos veces: la ubicación óptima sale la misma, porque todo se ha multiplicado por dos, pero el valor que se da como coste mínimo es 510 en lugar de 255. Se detecta con la prueba de la sección: evaluar a mano una ubicación cualquiera y compararla con lo que da la fórmula.

Este modelo tiene nombre —problema cuadrático de asignación— y lo introdujeron Tjalling Koopmans y Martin Beckmann en 1957, precisamente para decidir dónde situar actividades económicas cuando el coste de cada emplazamiento depende de dónde estén las demás. La misma estructura aparece al colocar los módulos de un circuito, al distribuir las máquinas de una nave y al asignar las puertas de embarque de un aeropuerto.

Lo que se lleva el lector es una jerarquía de tres niveles que reaparecerá en el capítulo 5: enumerar es exacto y solo sirve mientras los casos sean pocos; linealizar convierte el problema en algo que un algoritmo general puede atacar, a cambio de una relajación que aquí empieza siendo muy débil; y una cota inferior alcanzada es una demostración de optimalidad tan válida como una tabla del simplex, con la ventaja de caber en dos líneas cuando existe.

El problema restante de esa misma hoja, el de colocar el mayor número de reinas en un tablero $n \times n$ sin que se coman, es de la misma familia que «Cruces en una cuadrícula» de más arriba —elegir casillas con condiciones de no solapamiento— y está resuelto entero, con las cuatro familias de restricciones y la cota n, en el apéndice de exámenes resueltos.

Dónde se falla al formular

Cada ejercicio ha dejado su error típico. Juntos forman una lista corta que conviene pasar sobre cualquier modelo antes de darlo por bueno, y casi todos se detectan con las dos pruebas del principio de la sección: la del plan completo (conocidas las variables, no queda nada por decidir) y la del plan hecho a mano (uno válido cumple todo; uno absurdo, no).

1. **Un dato convertido en variable.** Si la demanda o la capacidad se declaran variables, el modelo las elige a su favor, por ejemplo con demanda cero. Se detecta preguntando si el valor está escrito en el enunciado.
2. **Una cantidad donde iba un sí o un no, o al revés.** Decide la frase que dice cómo se sirve: «íntegramente desde una sola planta» es una binaria por pareja (plantas); «unidades por hora» es una cantidad (almacenes).

3. **Una ligadura olvidada.** Capacidad sin la binaria de apertura, ampliación sin el almacén abierto, franja usada sin contarla. El modelo usa lo que no existe: en las plantas, el beneficio falso sube de 209 a 246.
4. **Una igualdad donde el enunciado dice «al menos» o «a lo sumo».** La cobertura exacta de las antenas, el balance con igualdad en la red de dos etapas y «exactamente una por fila» al seleccionar entradas convierten en infactibles modelos que no lo son.
5. **Un porcentaje de una suma de variables tratado como porcentaje de una constante.** «El 40 % de los fondos» es $0{,}4\,T$, con T la suma de lo invertido, y no $0{,}4 \cdot 12$ (cartera del banco).
6. **Una desigualdad estricta.** Con variables y datos enteros se convierte en una no estricta restando una unidad (colegios); con variables continuas no hay equivalente exacto, y hay que decidir si el caso de igualdad es aceptable.
7. **Un producto o un cociente de variables.** El coste que depende de dos ubicaciones es un producto de binarias y se linealiza con tres desigualdades (fábricas, hospital). Una media cuyo denominador es un dato se optimiza por su numerador (colegios, becas); si el denominador depende de las variables, el objetivo deja de ser lineal.
8. **Un máximo o un mínimo en el sentido que no toca.** Minimizar un máximo y maximizar un mínimo se linealizan con una variable auxiliar; minimizar un mínimo y maximizar un máximo, con ese recurso no.
9. **Un objetivo que no depende de la decisión.** Antes de dar por bueno un objetivo se comprueba que no es constante sobre el conjunto factible: intercambiar los sumatorios y usar una restricción de asignación lo revela en una línea, como en el calendario de la sección E.3.
10. **Contar dos veces.** Con datos simétricos, recorrer pares ordenados duplica cada término: en el hospital, 510 en lugar de 255.
11. **Una M mal elegida.** Demasiado pequeña recorta soluciones reales; mayor de lo necesario debilita la relajación (minas y fábricas, disyunción del catálogo).
12. **El signo o el tipo olvidados.** Una variable que puede ser negativa declarada no negativa por inercia, como la constante mágica, o una binaria escrita como continua entre 0 y 1, resuelven otro problema sin avisar.

1.3 Tipos de modelos y algunos hitos

La pregunta

En 1947 Dantzig tenía un método que resolvía la dieta de Stigler, pero nueve empleados habían tardado ciento veinte días de trabajo. ¿Merecía la pena inventar un método general, que sirve para cualquier problema, si cada problema concreto parecía resolverse antes a mano? ¿Qué tenía que ocurrir para que la respuesta fuera que sí?

Dependiendo de la forma de la función objetivo y de la definición del conjunto factible hay modelos **determinísticos** o **estocásticos** (según los datos sean conocidos o aleatorios), **dinámicos** o **estáticos** (según haya o no una sucesión de decisiones en el tiempo), **escalares** o **multiobjetivo**, **restringidos** o **irrestringidos**, **lineales** o **no lineales**, y **continuos**, **discretos** o **booleanos**. Este libro recorre la diagonal más útil de esa clasificación: determinísticos, estáticos, escalares, y sucesivamente lineales continuos (capítulos 3 y 4), lineales enteros y booleanos (capítulo 5) y no lineales, sin restricciones (capítulo 6) y con ellas (capítulo 7).

Conviene ver la clasificación sobre los modelos que ya se han escrito, porque un mismo problema cambia de casilla en cuanto cambia una palabra del enunciado o una decisión de la formulación:

Tipo	Qué lo define	Modelos de este capítulo
Lineal continuo	objetivo y restricciones lineales, variables reales	la dieta en miniatura, el transporte pequeño, la cartera del banco
Lineal entero	lo mismo, con variables enteras	los colegios, porque se cuentan alumnos; los rollos de cable
Booleano	variables que solo valen 0 o 1	las plantas con clientes exclusivos, las antenas, la dominación, el sudoku, la asignación
Entero mixto	binarias y continuas a la vez	los almacenes con ampliación, las minas y fábricas
No lineal	algún producto o cociente de variables	las fábricas en tres localizaciones y el hospital, antes de linealizar

Todos son deterministas, estáticos y de un solo objetivo. La última fila enseña algo más: ser no lineal es una propiedad de la formulación, no solo del problema. El problema de las fábricas pasó a la fila de los booleanos en cuanto el producto de dos binarias se sustituyó por una variable y tres desigualdades.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: EMPEZAR POR LO NO LINEAL

Se podría empezar por el problema general del principio del capítulo, permitiendo funciones no lineales. La ventaja sería admitir más modelos sin forzar la linealidad. La dificultad es que se pierde la estructura que hace manejable el primer caso. En forma estándar, $Ax = b$, $x \geq 0$, si hay óptimo lineal puede elegirse uno en un vértice; hay un número finito de bases y el simplex las recorre, con una regla que evita el ciclado. Fuera de esa forma hay que precisar las hipótesis: minimizar x_2 sobre el semiplano $x_2 \geq 0$ tiene óptimos, pero el semiplano no tiene vértices. Para un objetivo no lineal, incluso sobre un poliedro, el mínimo puede estar en el interior y un mínimo local puede no ser global. Las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker del capítulo 7 organizan el análisis; bajo convexidad proporcionan un certificado global. Empezar por lo lineal permite entender primero el papel del conjunto factible y de la dualidad. Después se verá qué parte de esa estructura sobrevive al pasar a lo no lineal.

Estos hitos sitúan las herramientas que aparecerán en el libro:

- **1947, método del simplex**, de George Dantzig. En su desarrollo discutió técnicas con Leonid Hurwicz y recibió sugerencias de Tjalling Koopmans. Dantzig cuenta que primero desconfió de recorrer las aristas; mirar el problema mediante las columnas de la matriz le hizo reconsiderarlo.
- **1947, teoría de la dualidad**. En octubre, von Neumann relacionó el problema de Dantzig con el minimax de la teoría de juegos y le presentó la idea de dualidad.
- **1948, condiciones necesarias de optimalidad con desigualdades**, de Fritz John. Es una sola persona; sus condiciones no se limitan al caso convexo.
- **1951, condiciones de Kuhn y Tucker**. Bajo cualificación de restricciones son necesarias; la convexidad da la suficiencia global. Hoy se llaman de Karush-Kuhn-Tucker por el antecedente de Karush de 1939.
- **1954, método del transporte de Charnes y Cooper**, conocido como *stepping stone*.
- **1955, método húngaro de asignación**, de Harold Kuhn.

- **1958, cortes de Gomory para programación entera**. Permiten descartar una solución fraccionaria mediante nuevas desigualdades válidas para todas las soluciones enteras.
- **1959, algoritmo de caminos mínimos**, de Edsger Dijkstra.
- **1984, algoritmo de punto interior**, de Narendra Karmarkar: un método polinómico para programación lineal.

El desarrollo de los ordenadores amplió decisivamente el alcance práctico de estos métodos. La teoría ya permitía demostrar optimalidad; la máquina hizo viable repetir a gran escala los cálculos de un procedimiento general. El simplex se programó por primera vez en el SEAC del National Bureau of Standards a principios de los años cincuenta; a partir de ahí, los avances de los algoritmos y del hardware se apoyaron entre sí. El tamaño por sí solo no determina cuánto tarda un problema: importan también su estructura y su formulación. La teoría de los capítulos siguientes permite comprobar factibilidad y optimalidad; un programa numérico aplica esas comprobaciones con tolerancias.

DE DÓNDE VIENE: DE DÓNDE VIENE LA PALABRA «PROGRAMACIÓN»

El término *programación* fue acuñado a mediados del siglo pasado y en su origen equivalía a una serie de métodos de planificación resueltos con calculadora, porque en el ámbito militar «programar» era planificar secuencias de entrenamientos, paradas logísticas o despliegues. El término *programación lineal* fue propuesto por T. C. Koopmans en 1948; Dantzig atribuye a Robert Dorfman la propuesta de usar el nombre más amplio *programación matemática*. Aquí «programa» significa el plan que se quiere elegir. Escribir código es una manera de calcularlo.

REPASO INTERCALADO: INTRODUCCIÓN, PRIMERA RONDA

Se contestan **a libro cerrado**, en un folio, y solo después se comprueban. Este es el primer bloque de repaso del libro y, por serlo, no puede mezclar con capítulos anteriores; los de los capítulos siguientes sí lo hacen, y ahí está buena parte de su valor.

Primera ronda: reconstruir. Al terminar el capítulo.

1. Escribe la forma general de un problema de programación matemática y di qué es cada pieza. ¿Qué significa que el problema sea infactible?
2. Enuncia los cinco aspectos que incluye la Programación Matemática, y asocia cada uno a un capítulo de este libro.
3. Escribe de memoria las tres formas de ligar decisiones binarias: «si A entonces B», «no A y B a la vez», «capacidad nula si cerrado».
4. Formula el problema de recubrimiento con una matriz A de ceros y unos y costes c.
5. ¿Por qué «todos los valores distintos» no se puede escribir con desigualdades lineales en las propias entradas, y cómo se resuelve?
6. En la dieta en miniatura, ¿qué condiciones tienen que cumplir los multiplicadores de las dos restricciones para que su combinación dé una cota inferior del coste, y por qué no pueden ser negativos?

Segunda ronda: aplicar. Dos o tres sesiones después.

1. Un problema tiene dos objetivos: minimizar coste y minimizar tiempo. Da las dos formas habituales de convertirlo en un problema con un solo objetivo, y di qué se pierde en cada una.
2. Linealiza el producto $x_1 x_2$ de dos binarias con una variable auxiliar y y tres des-

igualdades. Comprueba las cuatro combinaciones de valores.
3. En el problema de las antenas, cambia la distancia de cobertura a 20 km y resuelve a ojo. ¿Sigue habiendo solución?
4. Escribe el modelo de asignación y di por qué la solución de la relación para el problema de las fábricas enumera permutaciones en lugar de usarlo.
5. Escribe con una variable auxiliar «minimizar el mayor de T_1, T_2 y T_3», y explica por qué el mismo recurso no sirve para minimizar el menor de los tres.
6. Planifica tres meses de fabricación y venta con existencias: escribe el balance y di qué restricción de «no vender lo que no se tiene» sobra, y por qué.

Tercera ronda: subir el nivel. Al terminar el capítulo de análisis convexo.
1. Toma el modelo de localización de plantas y sustituye cada condición binaria por $0 \leq y_i \leq 1$. ¿Qué forma geométrica tiene el conjunto factible que queda? ¿Es convexo? ¿Es acotado?
2. ¿Por qué el mínimo de una función lineal sobre ese conjunto está en un vértice, y por qué un vértice de ese conjunto no tiene por qué tener coordenadas enteras?
3. Explica en tres frases por qué el problema de Constantino se pudo resolver a mano con una cota inferior, y qué nombre recibirá esa idea más adelante.

CAPÍTULO 2

Análisis convexo

ANTES DE LEER

Cuatro preguntas antes de leer. No hace falta acertarlas; hace falta intentarlas.

1. Un farmacéutico tiene tres disoluciones de la misma sal al 10 %, al 30 % y al 50 %. Mezclándolas en las proporciones que quiera, ¿qué concentraciones puede conseguir? ¿Y si tiene diez disoluciones distintas: cuántas necesita, como mucho, para conseguir una concentración que sea alcanzable?
2. Dibuja un cuadrado y un disco. ¿Cuáles son las «esquinas» de cada uno? ¿Qué propiedad tiene una esquina que no tenga un punto del borde que no sea esquina?
3. Un sistema de ecuaciones lineales con la condición añadida de que las incógnitas sean no negativas no tiene solución. ¿Puedes convencer a alguien de ello sin que él vuelva a intentar resolverlo?
4. El conjunto de soluciones de un sistema de desigualdades lineales en el plano es una región con lados rectos. Si es acotada, ¿basta conocer sus vértices para conocerla entera? ¿Y si no es acotada?

Las respuestas están, por este orden, en las secciones 2.1 (Caratheodory), 2.1 (puntos extremos), 2.2 (lema de Farkas) y 2.4 (teorema de representación).

Mapa del capítulo. Tres bloques y un anexo, en este orden: primero las definiciones (combinaciones, convexos, puntos extremos, direcciones, envolvente) y el teorema de Caratheodory; después la separación de convexos, que produce el lema de Farkas y sus corolarios; entre medias, como sección propia, el anexo con el teorema de Tucker, que se enuncia al final del segundo bloque y cuya demostración es la pieza que el capítulo de dualidad necesitará; y por último los poliedros, con la caracterización de sus puntos y direcciones extremas y el teorema de representación.

2.1 Definiciones básicas. Teorema de Caratheodory

LA PREGUNTA

Un farmacéutico dispone de setenta y siete productos, cada uno con una composición conocida de nueve nutrientes, y quiere preparar una mezcla con una composición determinada. Sabe que es posible, porque alguien la ha preparado antes con una receta larga y complicada. ¿Puede estar seguro de que existe una receta que use solo diez de los setenta y siete productos? ¿Y por qué diez y no, por ejemplo, tres?

LA IDEA: MEZCLAR ES LO ÚNICO QUE HACE FALTA SABER

Casi todo el capítulo se reduce a una operación: *mezclar*. Mezclar dos cosas en proporciones λ y $1-\lambda$ es tomar $\lambda x + (1-\lambda)y$. Un conjunto es convexo si mezclar dos de sus elementos no saca de él. Un punto es extremo si no es mezcla de otros dos. La envolvente convexa de un conjunto es todo lo que se puede obtener mezclando sus puntos. Y el teorema de Caratheodory dice cuántos ingredientes hacen falta, como mucho, para obtener una mezcla dada. Todo lo demás son consecuencias.

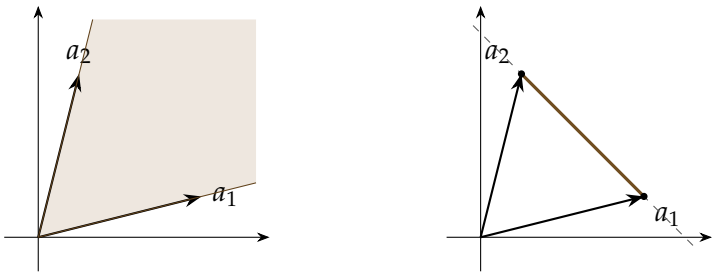
2.1.1 Combinaciones lineales, afines y convexas

Definición. Sean los vectores $a_1, \dots, a_k, b \in \mathbb{R}^n$. Diremos que b es

- **combinación lineal** (**positiva**) de $a_1, \dots, a_k$ si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ($\lambda_j \geq 0$) tales que $b = \sum_{j=1}^k \lambda_j a_j$;
- **combinación afín** de $a_1, \dots, a_k$ si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ con $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ tales que $b = \sum_{j=1}^k \lambda_j a_j$;
- **combinación convexa** (**estricta**) de $a_1, \dots, a_k$ si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ con $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ y $\lambda_j \geq 0$ ($\lambda_j > 0$) tales que $b = \sum_{j=1}^k \lambda_j a_j$.

Las cuatro nociones se ordenan por lo que exigen a los coeficientes, y conviene tener la imagen de cada una para dos vectores a_1, a_2 del plano que no estén alineados con el origen (figura 2.1):

- Las *combinaciones lineales* de a_1, a_2 llenan todo el plano: no hay condición.
- Las *combinaciones lineales positivas* llenan el *cono* de vértice el origen limitado por las semirrectas que pasan por a_1 y por a_2: es lo que se alcanza «estirando» a_1 y a_2 sin invertir su sentido y sumando.
- Las *combinaciones afines* llenan la *recta* que pasa por a_1 y a_2: la condición $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ deja un solo grado de libertad y $b = a_2 + \lambda_1(a_1 - a_2)$ recorre la recta cuando λ_1 recorre $\mathbb{R}$.
- Las *combinaciones convexas* llenan el *segmento* $[a_1, a_2]$: la recta anterior, pero solo entre los dos puntos, porque $\lambda_1 \in [0, 1]$. Si además se pide $\lambda_j > 0$, se quitan los dos extremos.



lineales positivas: un cono — afines: la recta; convexas: el segmento

Figura 2.1: Lo que alcanzan dos vectores según lo que se exija a los coeficientes.

Con tres vectores no alineados, las combinaciones convexas llenan el triángulo que tienen por vértices, y las estrictas, su interior. La regla general es la del farmacéutico: una combinación convexa es una *mezcla*, y los λ_j son las proporciones de cada ingrediente. Que sumen uno dice que se está repartiendo el total; que sean no negativas dice que no se puede «quitar» un ingrediente que no se ha puesto.

EXPLÍCATE. *Si b es combinación convexa de a_1, a_2, a_3 con todos los coeficientes estrictamente positivos, ¿puede b ser uno de los tres vértices? Contesta pensando en el triángulo, y después con los coeficientes.*

2.1.2 Conjuntos convexos

Definición. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremos que S es **convexo** si para todo $x, y \in S$ y para todo $\lambda \in [0,1]$ se tiene que $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$.

Es decir: el segmento que une dos puntos cualesquiera del conjunto está dentro del conjunto. El conjunto vacío es convexo (no hay pares que comprobar) y un punto también. En la figura 2.2 hay dos conjuntos convexos y dos que no lo son; en los que no lo son se ha dibujado el segmento que delata el fallo.

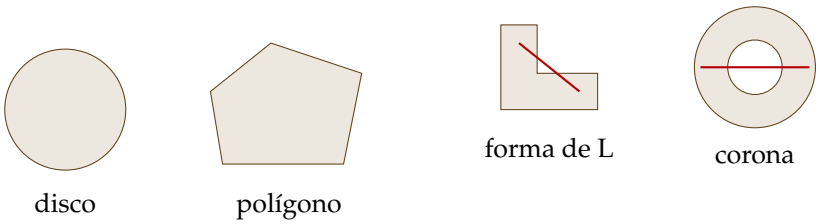


Figura 2.2: Convexos y no convexos. En los dos de la derecha, el segmento marcado sale del conjunto.

Ejemplo. Los conjuntos que más van a aparecer son convexos, y merece la pena comprobarlo una vez con la definición, porque el argumento es siempre el mismo: *la condición que define el conjunto es lineal, y una condición lineal se conserva al mezclar*.

- Un *semiespacio cerrado* $\{x : p^T x \leq \alpha\}$ con $p \neq 0$. Si $p^T x \leq \alpha$ y $p^T y \leq \alpha$, entonces $p^T(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda p^T x + (1-\lambda)p^T y \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha$, donde se ha usado que $\lambda \geq 0$ y $1-\lambda \geq 0$ para multiplicar las desigualdades sin cambiarlas de sentido.
- Un *hiperplano* $\{x : p^T x = \alpha\}$: el mismo cálculo con igualdades.
- El *ortante no negativo* $\{x : x \geqq 0\}$: si todas las componentes de x e y son no negativas, las de $\lambda x + (1-\lambda)y$ también.
- Una *bola cerrada* $\bar{B}(a,r) = \{x : \|x-a\| \leq r\}$: $\|\lambda x + (1-\lambda)y - a\| = \|\lambda(x-a) + (1-\lambda)(y-a)\| \leq \lambda\|x-a\| + (1-\lambda)\|y-a\| \leq r$, por la desigualdad triangular.

La definición habla de mezclar dos puntos. El primer lema dice que da igual mezclar dos que mezclar cualquier número finito.

Lema. Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si y solo si toda combinación convexa de puntos de S pertenece a S.

> Toda la prueba cabe en una frase: *una mezcla de k ingredientes es una mezcla de dos si se considera «todo lo demás» como un único ingrediente ya premezclado*. El farmacéutico que combina cinco jarabes puede preparar antes un frasco con cuatro de ellos y mezclarlo después con el quinto: el resultado es el mismo. Eso reduce el caso general al caso de la definición, y la inducción no hace más que repetir esa operación.
> *Paso 1: la implicación inmediata.* Si toda combinación convexa de puntos de S está en S, en particular lo están las de dos puntos, que es lo que pide la definición de convexo.
> *Paso 2: el esquema de inducción.* Recíprocamente, sea S convexo. Probamos por inducción sobre k que toda combinación convexa de k puntos de S está en S. Para $k = 1$ la combinación es el propio punto. Para $k = 2$ es la definición. Supongamos que es cierto

para $k-1$ puntos y sea $x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j$ con $x_j \in S$, $\lambda_j \geq 0$ y $\sum_j \lambda_j = 1$. Si $\lambda_k = 1$, entonces los demás coeficientes son cero y $x = x_k \in S$.
Paso 3: premezclar los $k-1$ primeros ingredientes (el núcleo de la prueba). Si $\lambda_k < 1$, sacamos factor común $1-\lambda_k > 0$ en los $k-1$ primeros sumandos:

$$x = (1-\lambda_k) \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_k} x_j + \lambda_k x_k.$$

Los coeficientes $\lambda_j/(1-\lambda_k)$ son no negativos y suman $\frac{1}{1-\lambda_k}\sum_{j=1}^{k-1}\lambda_j = \frac{1-\lambda_k}{1-\lambda_k} = 1$, luego el sumatorio es una combinación convexa de $k-1$ puntos de S y, por la hipótesis de inducción, es un punto $y \in S$. Ese y es el frasco premezclado. Entonces $x = (1-\lambda_k)y + \lambda_k x_k$ es una combinación convexa de dos puntos de S, y está en S por convexidad.
Dónde entra cada hipótesis. La convexidad de S se usa una sola vez, en el último renglón, y solo para dos puntos: todo lo anterior es álgebra de coeficientes. La condición $\lambda_k < 1$ es la que permite dividir por $1-\lambda_k$, y por eso el caso $\lambda_k = 1$ se aparta antes; sin apartarlo, la prueba se rompe por una división por cero. Y los $\lambda_j \geq 0$ son imprescindibles: si se admitieran coeficientes negativos, los pesos premezclados $\lambda_j/(1-\lambda_k)$ podrían salirse del intervalo $[0,1]$ y el punto y dejaría de ser una mezcla.

Lema. Sean $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ convexos. Entonces
- $S_1 \cap S_2$ es convexo;
- $S_1 + S_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in S_1,\ x_2 \in S_2\}$ es convexo;
- $S_1 \ominus S_2 = \{x_1 - x_2 : x_1 \in S_1,\ x_2 \in S_2\}$ es convexo;
- $\alpha \cdot S_1 = \{\alpha x_1 : x_1 \in S_1\}$ es convexo para todo $\alpha \in \mathbb{R}$;
- la proyección de un convexo es un convexo.

Los cinco apartados son *el mismo cálculo escrito cinco veces*, y merece la pena verlo antes de leerlos: en todos, se mezcla, se reordena la mezcla para que quede una mezcla dentro de cada conjunto de partida, y se aplica la convexidad de cada uno. La reordenación funciona siempre porque la operación que define el conjunto (sumar, escalar, proyectar) es *lineal*, y una operación lineal conmuta con la mezcla. Esa es la frase que hay que retener: *la convexidad se conserva por todo lo que sea lineal*.
Paso 1: intersección. Si $x, y \in S_1 \cap S_2$, el punto $\lambda x + (1-\lambda)y$ está en S_1 por ser S_1 convexo y en S_2 por ser S_2 convexo; luego está en la intersección. El argumento vale para intersecciones de cualquier familia de convexos, finita o no.
Paso 2: suma. Sean $x = x_1 + x_2$ e $y = y_1 + y_2$ con $x_1, y_1 \in S_1$ y $x_2, y_2 \in S_2$. Entonces $\lambda x + (1-\lambda)y = [\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1] + [\lambda x_2 + (1-\lambda)y_2]$, y cada corchete está en su conjunto por convexidad; la suma está en $S_1 + S_2$.
Paso 3: diferencia. Igual que la suma, con signo menos en el segundo corchete: $S_1 \ominus S_2$ es $S_1 + (-1)\cdot S_2$, y el apartado siguiente dice que $(-1)\cdot S_2$ es convexo.
Paso 4: producto por escalar. Si $x = \alpha x_1$ e $y = \alpha y_1$ con $x_1, y_1 \in S_1$, entonces $\lambda x + (1-\lambda)y = \alpha[\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1] \in \alpha \cdot S_1$.
Paso 5: proyección (el núcleo, porque es el único que no es una cuenta directa). Proyectar

sobre las primeras k coordenadas es la aplicación lineal $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$. Si $u = \pi(x)$ y $v = \pi(y)$ con $x, y \in S$, entonces $\lambda u + (1-\lambda)v = \pi(\lambda x + (1-\lambda)y)$ por linealidad, y el argumento de π está en S. El mismo cálculo prueba que la imagen de un convexo por cualquier aplicación lineal es convexa.
Dónde entra cada hipótesis. En ningún paso se ha usado que los conjuntos sean cerrados, ni acotados, ni que tengan interior: la convexidad sola basta. Y en ninguno se ha usado que λ esté entre 0 y 1 salvo al invocar la convexidad de S_1 y S_2; el peso de la prueba está, por tanto, entero en la linealidad de las tres operaciones. Cambiando una aplicación lineal por una no lineal, ya no hay garantía. Por ejemplo, $t \mapsto (t, t^2)$ lleva el intervalo convexo $[-1, 1]$ a un arco de parábola: contiene $(-1, 1)$ y $(1, 1)$, pero no su punto medio $(0, 1)$.

Observación. La *unión* de dos convexos no es convexa en general: dos discos disjuntos, o los dos brazos de la L de la figura 2.2. Es la razón por la que los problemas con variables enteras del capítulo 5 son tan distintos de los lineales: un conjunto de puntos aislados es una unión de convexos (cada punto lo es), pero no es convexo.

El siguiente resultado es de naturaleza topológica y dice que un convexo con interior es «macizo»: el segmento que une un punto del cierre con un punto interior entra inmediatamente en el interior. Recuérdese que $\operatorname{int}(S)$ es el conjunto de puntos de S que tienen una bola abierta alrededor contenida en S, y que $\operatorname{cl}(S)$ es S junto con sus puntos límite.

Teorema. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo con interior no vacío. Sea $x_1 \in \operatorname{cl}(S)$ y $x_2 \in \operatorname{int}(S)$. Entonces $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \operatorname{int}(S)$ para cada $\lambda \in (0, 1)$.

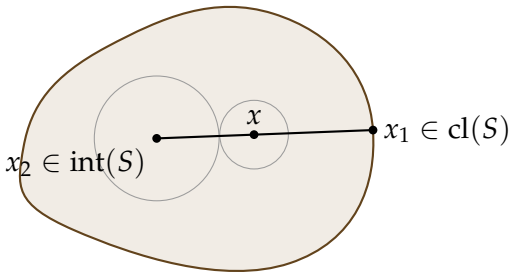


Figura 2.3: La bola alrededor de x_2 se contrae, por homotecia desde x_1, en una bola alrededor de x que sigue dentro de S.

Simplificado al máximo, lo que se hace es *una homotecia*. La bola que rodea a x_2 se empuja hacia x_1 y, al hacerlo, se encoge en el factor $1-\lambda$; pero encogerse no es desaparecer, y por eso el punto intermedio sigue teniendo una bola propia. Toda la prueba consiste en escribir esa homotecia con fórmulas: dado un punto y cerca de x, se le busca la pareja (z_1, z_2) de la que y es mezcla, con z_1 cerca de x_1 y z_2 dentro de la bola de x_2. La figura 2.3 es el argumento entero.
Paso 1: fijar el radio que se va a exhibir. Sea $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ con $\lambda \in (0, 1)$. Como $x_2 \in \operatorname{int}(S)$, existe $\varepsilon > 0$ con $B(x_2, \varepsilon) \subseteq S$. Vamos a probar que la bola $B(x, \delta)$ con $\delta = (1-\lambda)\varepsilon/2$ está contenida en S; eso es exactamente que $x \in \operatorname{int}(S)$. El radio no es

arbitrario: en el paso 3 habrá que dividir por $1-\lambda$, y la mitad de ε se reserva para el error de y y la otra mitad para el de z_1.
Paso 2: descomponer el punto vecino (el núcleo de la prueba). Tomemos $y \in B(x,\delta)$, es decir, $\|y-x\| < \delta$. Queremos escribir y como mezcla de un punto de S y de un punto de $B(x_2,\varepsilon)$, con las mismas proporciones λ y $1-\lambda$. Como $x_1 \in \mathrm{cl}(S)$, existe $z_1 \in S$ tan cerca de x_1 como queramos; lo elegimos con $\|z_1 - x_1\| < \delta/\lambda$, y el denominador λ está puesto para que, cuando este error aparezca multiplicado por λ, valga menos que δ. Definimos entonces el segundo punto despejando:

$$z_2 = \frac{y-\lambda z_1}{1-\lambda}, \qquad \text{de modo que} \qquad y = \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2.$$

Paso 3: comprobar que la pareja construida sirve. Solo falta comprobar que $z_2 \in B(x_2,\varepsilon)$. Usando que $(1-\lambda)x_2 = x - \lambda x_1$,

$$z_2 - x_2 = \frac{y-\lambda z_1-(1-\lambda)x_2}{1-\lambda} = \frac{y-\lambda z_1 - x + \lambda x_1}{1-\lambda} = \frac{(y-x)+\lambda(x_1-z_1)}{1-\lambda},$$

y por la desigualdad triangular

$$\|z_2 - x_2\| \le \frac{\|y-x\| + \lambda\|x_1-z_1\|}{1-\lambda} < \frac{\delta + \lambda\cdot\delta/\lambda}{1-\lambda} = \frac{2\delta}{1-\lambda} = \varepsilon.$$

Luego $z_2 \in B(x_2,\varepsilon) \subseteq S$, y $y = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2$ es combinación convexa de dos puntos de S: está en S. Como y era cualquier punto de $B(x,\delta)$, $B(x,\delta) \subseteq S$ y $x \in \mathrm{int}(S)$.
Dónde entra cada hipótesis. Que x_2 sea *interior* da el ε con el que se fabrica todo; sin él no hay nada que encoger. Que x_1 esté en el *cierre* (y no necesariamente en S) es justo lo que obliga a sustituirlo por un $z_1 \in S$ próximo: si x_1 estuviera en S el paso 2 sería inmediato con $z_1 = x_1$. Y que λ sea *estrictamente* menor que 1 es lo que hace que $1-\lambda > 0$ y que el radio $\delta = (1-\lambda)\varepsilon/2$ sea positivo: en $\lambda = 1$ el punto es x_1, que puede estar en la frontera, y el enunciado falla.

Corolario. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo. Entonces
1. $\mathrm{int}(S)$ es convexo;
2. $\mathrm{cl}(S)$ es convexo;
3. si $\mathrm{int}(S) \neq \emptyset$, entonces $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(S)) = \mathrm{cl}(S)$ y $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(S)) = \mathrm{int}(S)$.

Los tres apartados salen del teorema anterior sin trabajo nuevo: es siempre el mismo gesto, *mirar un punto como mezcla de un punto cualquiera con un punto interior*, y dejar que el teorema haga el resto. El único que exige algo más es el tercero, y lo que añade es un truco de una línea: prolongar el segmento un poco más allá del punto.
Paso 1: el interior es convexo. Si $x_1, x_2 \in \mathrm{int}(S)$, en particular $x_1 \in \mathrm{cl}(S)$, y el teorema da $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \mathrm{int}(S)$ para $\lambda \in (0,1)$; en $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ el punto es x_2 o x_1, que son interiores por hipótesis.
Paso 2: el cierre es convexo. No hace falta interior. Sean $x_1, x_2 \in \mathrm{cl}(S)$ y $\lambda \in [0,1]$. Hay sucesiones $x_1^k \to x_1$ y $x_2^k \to x_2$ de puntos de S; los puntos $\lambda x_1^k + (1-\lambda)x_2^k$ están en S por convexidad y convergen a $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, que por tanto está en $\mathrm{cl}(S)$.

Paso 3: interior y cierre se determinan mutuamente (el núcleo). La inclusión $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(S)) \subseteq \mathrm{cl}(S)$ sale de $\mathrm{int}(S) \subseteq S$ y de que tomar cierre respeta las inclusiones. Para la otra, sea $x_1 \in \mathrm{cl}(S)$ y fijemos $x_2 \in \mathrm{int}(S)$. Por el teorema, los puntos $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ con $\lambda \in (0,1)$ están en $\mathrm{int}(S)$, y cuando $\lambda \to 1$ tienden a x_1. Luego x_1 es límite de puntos interiores: $x_1 \in \mathrm{cl}(\mathrm{int}(S))$.
Para $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(S)) = \mathrm{int}(S)$, la inclusión $\supseteq$ sale igual: $S \subseteq \mathrm{cl}(S)$ y tomar interior también respeta las inclusiones. Sea $x \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(S))$ y fijemos $x_2 \in \mathrm{int}(S)$. Si $x = x_2$ no hay nada que probar. Si no, prolongamos el segmento de x_2 a x un poco más allá de x: como x es interior a $\mathrm{cl}(S)$, para $\mu > 0$ pequeño el punto $y = x + \mu(x - x_2)$ sigue en $\mathrm{cl}(S)$. Despejando,

$$x = \frac{1}{1+\mu}\, y + \frac{\mu}{1+\mu}\, x_2,$$

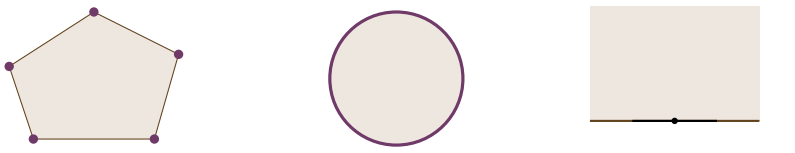
que es una mezcla del punto $y \in \mathrm{cl}(S)$ con el punto interior x_2, con proporción $\frac{1}{1+\mu} \in (0,1)$ para y. El teorema dice que $x \in \mathrm{int}(S)$.

EXPLÍCATE. *En la prueba de (3) se ha usado que x es interior a $\mathrm{cl}(S)$ para prolongar el segmento «un poco más allá». ¿Dónde falla el argumento si x está en el borde de $\mathrm{cl}(S)$? Piensa en un disco cerrado y en un punto de su circunferencia.*

2.1.3 Puntos extremos y direcciones

Definición. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y convexo. Un punto $x \in S$ es un **punto extremo** de S si $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ con $x_1, x_2 \in S$ y $\lambda \in (0,1)$ implica $x = x_1 = x_2$. Es decir, x no puede expresarse como combinación convexa estricta de otros puntos de S.

Un punto extremo es una «esquina» en el sentido preciso de que no está en el interior de ningún segmento contenido en S. La definición hace algo más que decir «vértice»: se aplica a conjuntos sin lados rectos. En la figura 2.4, los puntos extremos del polígono son sus cinco vértices; los del disco cerrado son *todos* los puntos de la circunferencia (cualquier segmento que pase por un punto de la circunferencia y esté dentro del disco tiene ese punto como extremo); el disco abierto no tiene ninguno; y un semiplano tampoco, porque todo punto suyo está en medio de un segmento que no sale de él.



cinco puntos extremos | toda la circunferencia | semiplano: ninguno

Figura 2.4: Puntos extremos (en ciruela) de tres convexos. En el semiplano, cualquier punto del borde es punto medio de un segmento del propio borde.

Definición. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y convexo. Un vector $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, es una **dirección** de S si para todo $x \in S$ se tiene que $x + \lambda d \in S$ para todo $\lambda \geq 0$.

Dos direcciones d_1, d_2 son **distintas** si $d_1 \neq \alpha d_2$ para todo $\alpha > 0$.

Una dirección de S se dice **extrema** si no puede expresarse como combinación lineal positiva de dos direcciones distintas de S; es decir, si $d = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$ con $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ implica que d_1 y d_2 son iguales (no distintas).

Una dirección es un rumbo por el que se puede caminar indefinidamente sin salir del conjunto, *desde cualquier punto de él*. Un conjunto acotado no tiene direcciones: si $d \neq 0$, $\|x + \lambda d\| \to \infty$. Una dirección se identifica con su semirrecta: d y $2d$ son la misma dirección, y por eso se definen las direcciones «distintas» salvo múltiplos positivos. Las direcciones extremas son a las direcciones lo que los puntos extremos a los puntos: los rumbos que no son mezcla de otros dos.

Ejemplo.

- El ortante $\{x \in \mathbb{R}^2 : x \geqq 0\}$ tiene por direcciones todos los vectores $d \geqq 0$, $d \neq 0$. Sus direcciones extremas son $(1,0)$ y $(0,1)$ (y sus múltiplos positivos). Que ninguna otra lo es: $d = (d_1, d_2)$ con $d_1, d_2 > 0$ es $d_1(1,0) + d_2(0,1)$, combinación positiva de dos direcciones distintas. Y que $(1,0)$ sí lo es, se lee en la segunda coordenada, que es la que hace todo el trabajo: si $(1,0) = \lambda_1 d^1 + \lambda_2 d^2$ con $\lambda_i > 0$ y $d^1, d^2 \geqq 0$, entonces $\lambda_1 d^1_2 + \lambda_2 d^2_2 = 0$ con los dos sumandos no negativos obliga a $d^1_2 = d^2_2 = 0$, y los dos son ya múltiplos positivos de $(1,0)$: no son distintos.
- Un semiplano $\{x \in \mathbb{R}^2 : p^T x \leq \alpha\}$ tiene por direcciones los $d \neq 0$ con $p^T d \leq 0$, que forman a su vez un semiplano de rumbos, y **no tiene ninguna dirección extrema**. Lo decide el borde: si $p^T d_0 = 0$, tanto d_0 como $-d_0$ son direcciones, y son distintas (una no es múltiplo *positivo* de la otra), de modo que $d_0 = 2d_0 + 1 \cdot (-d_0)$ ya exhibe d_0 como combinación positiva de dos direcciones distintas. Y las de dentro, con $p^T d < 0$, tampoco lo son: $d = \frac{1}{2}(d + d_0) + \frac{1}{2}(d - d_0)$, y los dos sumandos son direcciones (su producto por p sigue siendo $p^T d < 0$) y son distintas, porque d y d_0 son independientes.
- Una recta no tiene puntos extremos y tampoco tiene direcciones extremas: sus dos direcciones son d_0 y $-d_0$, y el mismo truco, $d_0 = 2d_0 + 1 \cdot (-d_0)$, deja fuera a las dos.
- El conjunto $\{(x_1, x_2) : x_2 \geq x_1^2\}$ (lo que queda por encima de una parábola) es convexo, tiene un único rumbo, $(0,1)$, que es su única dirección extrema, y todos los puntos de la parábola son extremos.

Los dos casos de en medio dicen una regla que conviene tener desde ahora: *un convexo cuyo cono de rumbos contiene una recta entera no tiene ninguna dirección extrema*. Si esa recta es la de d_0, cualquier dirección d que no esté sobre ella se parte como $\frac{1}{2}(d + d_0) + \frac{1}{2}(d - d_0)$, y cualquiera que esté sobre ella se parte como $2d + 1 \cdot (-d)$: en los dos casos, dos rumbos distintos. La misma obstrucción impide tener puntos extremos: si d_0 y $-d_0$ son direcciones de S, cada $x \in S$ es el punto medio de los dos puntos distintos $x - d_0$ y $x + d_0$ de S. Por eso los dos teoremas de caracterización del final del capítulo se enuncian sobre $\{Ax = b,\ x \geqq 0\}$: allí las direcciones cumplen $d \geqq 0$, el cono de rumbos vive dentro del ortante y no puede contener ninguna recta.

EXPLÍCATE. *Un convexo no acotado que sí tiene puntos extremos, ¿puede no tener ninguna dirección extrema? Prueba con $S = \{(0,0)\} \cup \{(x_1, x_2) : x_2 > 0\}$: comprueba que el origen es extremo y que los rumbos posibles son exactamente los d con $d_2 > 0$. ¿Puedes descomponer cada uno en dos rumbos distintos? Este conjunto no es cerrado.*

2.1.4 Envolvente convexa

Definición. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Llamaremos **envolvente convexa** de X, $H(X)$, al conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos de X:

$$H(X) = \Big\{ x : \ x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \ x_i \in X, \ \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \ k = 1, 2, \ldots \Big\}.$$

Definición. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Llamaremos **cierre** o **clausura convexa** de X a la intersección de todos los conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ que contienen a X.

El nombre «clausura convexa» puede despistar: no exige que el resultado sea cerrado. Por ejemplo, si $X = (0,1) \subset \mathbb{R}$, su clausura convexa es $(0,1)$ y su cierre topológico es $[0,1]$.

Son dos maneras de decir «el menor convexo que contiene a X»: la primera lo construye desde dentro, mezclando; la segunda lo recorta desde fuera, intersecando. Que coincidan no es gratis y hay que probarlo.

LA IDEA: LA GOMA ELÁSTICA

Hay una imagen física de la envolvente convexa que conviene tener delante durante todo el capítulo, porque predice casi todo lo que se va a demostrar.

Para un conjunto finito X de puntos del plano, clave una chincheta en una tabla por cada punto. Coja una goma elástica grande, estírela hasta que rodee a todas las chinchetas y suéltela. La goma se contrae, deja de contraerse cuando ya no puede, y queda apoyada sobre algunas de las chinchetas. La región que encierra es exactamente $H(X)$.

Esa imagen no es un adorno: cada cosa que hace la goma corresponde a un enunciado.

Por qué sale convexa. Una goma solo puede *tirar*; no puede empujar. Un entrante en la frontera obligaría a un trozo de goma a empujar hacia dentro para mantenerse ahí, y eso no lo sabe hacer. Por eso la figura que queda no tiene entrantes, que es justamente lo que significa ser convexa: el segmento entre dos puntos suyos no se sale.

Por qué es la más pequeña. La goma se contrae hasta el límite. Cualquier convexo que contenga a las chinchetas contiene también a la región encerrada por la goma, porque la goma no puede apretar más sin soltar alguna chincheta. Esa es la definición por intersección: el menor convexo que contiene a X.

Quién toca la goma y quién no. Las chinchetas interiores no la tocan: se pueden arrancar y la figura no cambia. Las que obligan a la goma a cambiar de dirección son los vértices, y están en X. Una chincheta intermedia en un lado también puede tocar la goma, pero no es un vértice: se puede quitar sin alterar ese lado. Conviene distinguir estar en la frontera de ser un punto extremo. Y lleva también a la pregunta que contesta el teorema de Caratheodory: si para escribir un punto de dentro basta con mezclar unas pocas chinchetas, ¿cuántas hacen falta como máximo? La goma sugiere la respuesta: un punto interior de un polígono se ve dentro de algún triángulo de vértices chinchetas, y un triángulo tiene tres vértices, que es $n+1$ con $n = 2$.

En el espacio, el análogo geométrico es el menor poliedro convexo que contiene los puntos: cuatro puntos no coplanarios forman un tetraedro. Una película de jabón o una bolsa al vacío pueden hundirse entre los apoyos; por eso no representan necesariamente esa envolvente.

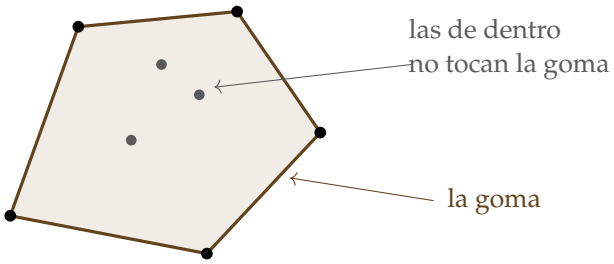


Figura 2.5: La envolvente convexa de ocho puntos. La goma se apoya en cinco de ellos, que son los puntos extremos; los otros tres se pueden arrancar sin que la figura cambie.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: DEFINIR LA ENVOLVENTE SOLO DESDE FUERA

Se podría haber definido la envolvente convexa únicamente como intersección de convexos que contienen a X. Tiene la ventaja de que la convexidad es automática (intersección de convexos) y de que se generaliza sin cambios a la envolvente afín, a la cónica o a la clausura topológica. Lo que deja pendiente es una descripción de sus puntos mediante coeficientes, necesaria para construir una mezcla concreta y contar cuántos ingredientes usa. El teorema de Caratheodory, que es la herramienta útil de esta sección, se enuncia con combinaciones y no con intersecciones. Por eso hacen falta las dos definiciones, y la proposición que sigue prueba que son la misma cosa.

Proposición. Para cualquier $X \subseteq \mathbb{R}^n$, su envolvente y su clausura convexa coinciden.

Se está comparando una definición *constructiva* (mezclar puntos de X) con una definición *descriptiva* (lo que queda al cortar todos los convexos que contienen a X), y probar que coinciden es probar dos inclusiones fáciles: la construcción da un convexo, luego es uno de los que se cortan; y cualquier convexo que contenga a X tiene que contener todas las mezclas, por el lema anterior. Llamemos $C(X)$ a la intersección de todos los convexos que contienen a X.
Paso 1: la construcción es uno de los conjuntos que se cortan; $C(X) \subseteq H(X)$. Basta ver que $H(X)$ es un convexo que contiene a X, porque entonces es uno de los conjuntos que se intersecan. Contiene a X: cada $x \in X$ es la combinación convexa de un solo punto ($k = 1$, $\lambda_1 = 1$). Es convexo: si $x = \sum_i \lambda_i x_i$ e $y = \sum_j \mu_j y_j$ son combinaciones convexas de puntos de X, entonces $\lambda x + (1-\lambda)y = \sum_i \lambda\lambda_i x_i + \sum_j (1-\lambda)\mu_j y_j$ tiene coeficientes no negativos que suman $\lambda \cdot 1 + (1-\lambda)\cdot 1 = 1$: es otra combinación convexa de puntos de X.
Paso 2: todo convexo que contiene a X contiene las mezclas (el núcleo, y es donde se usa el lema anterior); $H(X) \subseteq C(X)$. Sea C cualquier convexo que contenga a X. Toda combinación convexa de puntos de X es combinación convexa de puntos de C, y por el lema de las combinaciones convexas está en C. Luego $H(X) \subseteq C$ para todo C de la familia, y por tanto $H(X)$ está en la intersección.

Corolario. Para cualquier $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $H(X)$ es el menor convexo que lo contiene, y si X es convexo, entonces $H(X) = X$.

Lo segundo sale de la segunda descripción: si X es convexo, es uno de los convexos que lo contienen, y la intersección de todos ellos no puede ser mayor que él; y no puede ser menor porque contiene a X.

2.1.5 El teorema de Caratheodory

Volvamos al farmacéutico. Un punto de $H(X)$ es, por definición, una mezcla de *algún* número finito de puntos de X, sin cota sobre ese número. El teorema de Caratheodory pone la cota, y la cota depende solo de la dimensión del espacio, no de cuántos puntos tenga X.

Teorema (de Caratheodory)**.** Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $x \in H(X)$, entonces x puede ser expresado como combinación convexa estricta de a lo sumo $n+1$ puntos de X. • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: POR QUÉ $n+1$

En el plano ($n = 2$) el teorema dice que todo punto de la envolvente de X está en un *triángulo* con vértices en X. Es lo que se ve en la figura 2.6: la envolvente de cuatro puntos es un cuadrilátero, y cualquier punto del cuadrilátero cae en uno de los dos triángulos en que lo parte una diagonal. Nunca hacen falta los cuatro.
La cota es $n+1$ porque $n+1$ puntos en posición general son los vértices de un *símplice* (segmento, triángulo, tetraedro), que es el convexo con menos vértices que tiene interior en $\mathbb{R}^n$. Con $n+2$ puntos sobra uno, y la demostración consiste exactamente en encontrar cuál sobra: si hay más de $n+1$ puntos, los vectores diferencia son linealmente dependientes, y una dependencia lineal permite «mover peso» de unos coeficientes a otros hasta que uno de ellos se anula.

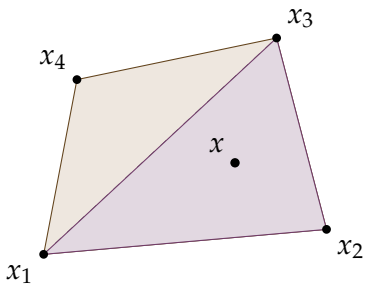


Figura 2.6: En el plano, un punto de la envolvente de cuatro puntos está siempre en un triángulo formado por tres de ellos: el cuarto sobra.

La demostración entera es *un mecanismo para quitar un ingrediente de la mezcla sin cambiar el resultado*, aplicado tantas veces como haga falta. Y el mecanismo es siempre el mismo: si sobran puntos, hay una relación de dependencia entre ellos; una relación de dependencia es una manera de añadir cero a la mezcla; y añadir múltiplos de ese cero mueve peso de unos coeficientes a otros hasta que el primero de ellos toca fondo y se anula. El resto son comprobaciones de signo.
Sea $x \in H(X)$. Por definición existen $x_1, \dots, x_r \in X$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ con $\lambda_i \geq 0$ y $\sum_i \lambda_i = 1$ tales que $x = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i$. Quitando los sumandos con $\lambda_i = 0$, podemos suponer $\lambda_i > 0$ para todo i, de modo que la combinación es estricta.
Si $r \leq n+1$, ya está.
Si $r > n+1$, vamos a encontrar otra expresión de x como combinación convexa estricta de a lo sumo $r-1$ de los mismos puntos. Repitiendo el argumento (a lo sumo $r-n-1$

veces) se llega a $n+1$ puntos o menos.
Paso 1: una dependencia lineal. Consideremos los $r-1$ vectores $x_2-x_1,\ x_3-x_1,\ \ldots,\ x_r-x_1$ de $\mathbb{R}^n$. Como $r-1>n$, hay más vectores que la dimensión del espacio, luego son linealmente dependientes: existen $\mu_2,\ldots,\mu_r\in\mathbb{R}$, no todos nulos, con

$$\sum_{i=2}^{r}\mu_i(x_i-x_1)=0.$$

Definimos $\mu_1=-\sum_{i=2}^{r}\mu_i$. Entonces la igualdad anterior se reescribe como

$$\sum_{i=1}^{r}\mu_i x_i=0 \qquad \text{y además} \qquad \sum_{i=1}^{r}\mu_i=0.$$

La segunda es la definición de μ_1; la primera se obtiene desarrollando: $\sum_{i\geq 2}\mu_i x_i-\left(\sum_{i\geq 2}\mu_i\right)x_1=\sum_{i\geq 2}\mu_i x_i+\mu_1 x_1$.
Paso 2: algún μ_i es positivo. Los μ_i no son todos nulos y suman cero, luego no pueden ser todos ≤ 0: alguno es estrictamente positivo.
Paso 3: mover peso hasta que uno se anule (el núcleo de la prueba). Para cualquier $\alpha\in\mathbb{R}$ se tiene

$$x=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i x_i-\alpha\sum_{i=1}^{r}\mu_i x_i=\sum_{i=1}^{r}(\lambda_i-\alpha\mu_i)\,x_i,$$

y los nuevos coeficientes $\tilde{\lambda}_i=\lambda_i-\alpha\mu_i$ siguen sumando uno: $\sum_i\tilde{\lambda}_i=\sum_i\lambda_i-\alpha\sum_i\mu_i=1-0=1$. Lo que hay que conseguir es que sigan siendo no negativos y que uno de ellos se anule. Para eso se elige

$$\alpha=\min\Big\{\frac{\lambda_i}{\mu_i}:\ \mu_i>0\Big\},$$

que existe por el paso 2 y es estrictamente positivo porque los λ_i lo son. Sea k un índice en el que se alcanza el mínimo.
Paso 4: comprobar los coeficientes. Hay dos casos:

- Si $\mu_i\leq 0$, entonces $\tilde{\lambda}_i=\lambda_i-\alpha\mu_i\geq\lambda_i>0$.
- Si $\mu_i>0$, entonces $\tilde{\lambda}_i=\mu_i\left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}-\alpha\right)\geq 0$ porque α es el mínimo de esos cocientes; y para $i=k$ es exactamente cero.

Luego $x=\sum_{i\neq k}\tilde{\lambda}_i x_i$ con $\tilde{\lambda}_i\geq 0$ y $\sum_{i\neq k}\tilde{\lambda}_i=1$: una combinación convexa de $r-1$ puntos de X. Quitando los coeficientes que hayan quedado nulos (si el mínimo se alcanzaba en varios índices) es estricta y con $r-1$ puntos o menos.
Volvemos al principio con esta nueva expresión. Cada vuelta reduce el número de puntos al menos en uno, y el proceso se detiene en cuanto quedan $n+1$ o menos.
Dónde entra cada hipótesis. La dimensión n del espacio interviene en un solo sitio, el paso 1: es la que garantiza que $r-1>n$ vectores son dependientes, y por eso la cota del teorema es $n+1$ y no otra. Que los λ_i sean *estrictamente* positivos se usa en el paso 3, para que $\alpha>0$ y el movimiento vaya en el sentido correcto; si alguno fuera cero, el punto correspondiente ya sobraba y se habría quitado antes. Y que el conjunto X sea arbitrario — sin cerrado, sin acotado, sin finito — no estorba en ningún paso: la prueba solo manipula una expresión finita ya dada.
Para reconstruirla. Tres frases bastan. Si sobran puntos, sus diferencias son dependientes. Una dependencia es una manera de sumar cero a la mezcla. Se le suma el múltiplo α

más grande que no vuelve negativo ningún coeficiente, y ese α anula por lo menos uno: un punto menos. Se repite hasta $n+1$.

EXPLÍCATE. *¿En qué paso exacto se usa que el espacio es $\mathbb{R}^n$ y no otro? ¿Y dónde se usa que los λ_i eran estrictamente positivos (y no solo no negativos)?*

Ejemplo. Sea $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subset \mathbb{R}^2$ con $x_1 = (0,0)$, $x_2 = (4,0)$, $x_3 = (4,4)$ y $x_4 = (0,4)$, y sea $x = (1, \frac{3}{2})$, que es combinación convexa de los cuatro con coeficientes $\lambda = (\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4})$: en efecto, $\frac{1}{2}(0,0) + \frac{1}{8}(4,0) + \frac{1}{8}(4,4) + \frac{1}{4}(0,4) = (\frac{4}{8} + \frac{4}{8},\ \frac{4}{8} + 1) = (1, \frac{3}{2})$. Son $r = 4 > n+1 = 3$ puntos: Caratheodory dice que sobra uno. Seguimos la demostración.

Paso 1. Los vectores $x_2 - x_1 = (4,0)$, $x_3 - x_1 = (4,4)$ y $x_4 - x_1 = (0,4)$ son tres vectores del plano: dependientes. Una dependencia es $(4,0) - (4,4) + (0,4) = 0$, es decir $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = -1$, $\mu_4 = 1$, y entonces $\mu_1 = -(1 - 1 + 1) = -1$. Comprobación: $-1 \cdot (0,0) + 1 \cdot (4,0) - 1 \cdot (4,4) + 1 \cdot (0,4) = (0,0)$ y $-1 + 1 - 1 + 1 = 0$.

Pasos 2 y 3. Los $\mu_i > 0$ son $\mu_2 = \mu_4 = 1$, con cocientes $\lambda_2/\mu_2 = \frac{1}{8}$ y $\lambda_4/\mu_4 = \frac{1}{4}$. Luego $\alpha = \frac{1}{8}$, alcanzado en $k = 2$.

Paso 4. Los nuevos coeficientes $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i - \frac{1}{8}\mu_i$ son $\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$, $\tilde{\lambda}_2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0$, $\tilde{\lambda}_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ y $\tilde{\lambda}_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$. Suman $\frac{5}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = 1$, y $\frac{5}{8}(0,0) + \frac{1}{4}(4,4) + \frac{1}{8}(0,4) = (1,\ 1 + \frac{1}{2}) = (1, \frac{3}{2})$. El punto x es combinación convexa estricta de x_1, x_3, x_4: en este cuadrado basta el triángulo que no usa x_2.

DE DÓNDE VIENE: DEL ANÁLISIS A LA GEOMETRÍA CONVEXA

En su trabajo de 1911 sobre los coeficientes de Fourier de funciones armónicas positivas, Constantin Carathéodory demuestra que un punto de la envolvente de un compacto puede verse como centro de masas de a lo sumo $n+1$ puntos. La conexión con las mezclas estaba ya en ese argumento geométrico, dentro de un problema de análisis. En Programación Matemática su papel es doble. Por un lado dice que la envolvente convexa de un conjunto *compacto* es compacta, porque es imagen continua del compacto $X^{n+1} \times \{\lambda \geq 0 : \sum \lambda_i = 1\}$ — se usa aquí que la imagen de un compacto por una aplicación continua vuelve a ser compacta, que es el teorema del que Weierstrass es corolario inmediato en $\mathbb{R}$: un compacto de la recta contiene su máximo y su mínimo (apéndice F, sección «Análisis») —, y eso es lo que garantiza que existan soluciones en muchos problemas. Por otro, es la primera aparición de una idea que el método del simplex explota sin descanso: cuando hay más ingredientes de los necesarios, una dependencia lineal permite eliminar uno moviendo peso hasta que un coeficiente se anula. El «cociente mínimo» $\alpha = \min\{\lambda_i/\mu_i\}$ del paso 3 es, letra por letra, la *regla del cociente mínimo* con la que el simplex elige la variable que sale de la base en el capítulo 3.

CONEXIÓN: LA DIETA DE STIGLER OTRA VEZ

La pregunta que abre la sección es la de la dieta del capítulo 1, mirada de otra forma. Cada alimento es un vector de $\mathbb{R}^9$ (sus nueve nutrientes por unidad de gasto), y las mezclas de alimentos que gastan un total fijo son las combinaciones convexas de esos 77 vectores. Caratheodory dice que cualquier composición alcanzable se alcanza con a lo sumo $9 + 1 = 10$ alimentos. La dieta óptima calculada en 1947 usaba solo cinco. Que sean menos de diez no es casualidad: el teorema fundamental de la programación lineal del capítulo 3 afinará la cota hasta el número de restricciones.

Qué se ha ganado. La pregunta del farmacéutico tiene respuesta: con setenta y siete productos y nueve nutrientes, cualquier composición alcanzable se alcanza con diez productos a lo sumo, porque las composiciones viven en $\mathbb{R}^9$ y Caratheodory da $9+1$. Y diez no se puede rebajar en general. En el plano se ve con tres: el centro $(1,1)$ del triángulo de vértices $(0,0)$, $(3,0)$ y $(0,3)$ necesita los tres vértices, porque mezclando solo dos se obtienen únicamente los puntos de un lado; en $\mathbb{R}^9$, el centro de un símplice de diez vértices necesita los diez. Por el camino han aparecido las piezas que usará todo el libro: los convexos, que se conservan al cortar y al aplicar operaciones lineales; las esquinas, que son los puntos extremos; y los rumbos, que son las direcciones. Falta la herramienta contraria. Caratheodory sirve para construir una mezcla cuando existe; la sección siguiente contesta cómo convencer a alguien de que una mezcla es imposible.

Ejercicios

Ejercicio 2.1. *Comprobar convexidad con la definición*

Decide, demostrándolo, si cada uno de los siguientes conjuntos es convexo:
(a) $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \geq 1,\ x_1 > 0\}$;
(b) $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| \leq \|x-b\|\}$, con $a \neq b$ fijos;
(c) $S_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq |x_1|\}$;
(d) $S_4 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \geq 1\}$.

Resolución. *La idea.* Primero se dibuja, porque los cuatro conjuntos son del plano o se reducen a una condición sencilla, y el dibujo dice qué hay que probar. Para probar que un conjunto es convexo se toma una mezcla de dos puntos suyos y se comprueba la condición que lo define; para probar que no lo es basta un solo segmento que se salga.
(a) Sí. Sean $u, v \in S_1$ y $x = \lambda u + (1-\lambda)v$ con $\lambda \in [0,1]$. La primera condición se hereda: $x_1 = \lambda u_1 + (1-\lambda)v_1$ es suma de dos términos ≥ 0 y al menos uno de los dos coeficientes es positivo, luego $x_1 > 0$. Para la otra condición, la clave es que sobre S_1 se tiene $x_2 \geq 1/x_1$ y la función $t \mapsto 1/t$ es convexa en $t > 0$, pero se puede hacer a mano:

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= (\lambda u_1 + (1-\lambda)v_1)(\lambda u_2 + (1-\lambda)v_2) \\ &= \lambda^2 u_1 u_2 + (1-\lambda)^2 v_1 v_2 + \lambda(1-\lambda)(u_1 v_2 + v_1 u_2). \end{aligned}$$

Los dos primeros términos son $\geq \lambda^2$ y $\geq (1-\lambda)^2$. Para el tercero, $u_1 v_2 + v_1 u_2 \geq 2\sqrt{u_1 v_2\, v_1 u_2} = 2\sqrt{(u_1 u_2)(v_1 v_2)} \geq 2$ por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica (todo es positivo). Luego $x_1 x_2 \geq \lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda) = (\lambda + 1 - \lambda)^2 = 1$.
(b) Sí, y es un semiespacio. Elevando al cuadrado (las normas son no negativas), $\|x-a\|^2 \leq \|x-b\|^2$ equivale a $\|x\|^2 - 2a^T x + \|a\|^2 \leq \|x\|^2 - 2b^T x + \|b\|^2$, es decir, a $2(b-a)^T x \leq \|b\|^2 - \|a\|^2$. Es un semiespacio cerrado con normal $p = 2(b-a) \neq 0$, y ya se vio que los semiespacios son convexos. Geométricamente, S_2 es el lado de a del hiperplano mediador entre a y b.
(c) Sí. Si $u_2 \geq |u_1|$ y $v_2 \geq |v_1|$, entonces $x_2 = \lambda u_2 + (1-\lambda)v_2 \geq \lambda|u_1| + (1-\lambda)|v_1| \geq |\lambda u_1 + (1-\lambda)v_1| = |x_1|$, por la desigualdad triangular en $\mathbb{R}$. Es la intersección de los semiplanos $x_2 \geq x_1$ y $x_2 \geq -x_1$, lo que da otra prueba.
(d) No. Los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$ están en S_4, y su punto medio $(0,0)$ no.

Otra vía (para (a)). S_1 es el *epigrafo* de la función convexa $g(t) = 1/t$ sobre $t > 0$, es decir,

$\{(t,s) : s \geq g(t)\}$, y el epigrafo de una función convexa es siempre convexo: si $s \geq g(t)$ y $s' \geq g(t')$, entonces $\lambda s + (1-\lambda)s' \geq \lambda g(t) + (1-\lambda)g(t') \geq g(\lambda t + (1-\lambda)t')$. La segunda desigualdad es la definición de función convexa. Este punto de vista es el del capítulo 6.
Para probar convexidad se toma la mezcla y se comprueba la condición; para refutarla basta exhibir un segmento que se salga. Las condiciones lineales, igualdades y desigualdades, dan siempre convexos, y sus intersecciones también: esa es toda la razón de que los poliedros sean convexos.
Dónde se falla. En (a), en olvidar el papel de $x_1 > 0$. Sin esa condición, $\{x_1 x_2 \geq 1\}$ tiene dos ramas: $(1,1)$ y $(-1,-1)$ están en él y su punto medio, el origen, no. En (b), en quedarse en la forma con normas, que no se parece a nada conocido: elevar al cuadrado, lo que es lícito porque las dos normas son no negativas, la convierte en un semiespacio. Y en (d), en pensar que el complementario de un convexo es convexo: S_4 es el complementario del disco abierto, y el segmento entre dos puntos opuestos atraviesa el agujero.

Ejercicio 2.2. *Puntos extremos y direcciones de conjuntos concretos*

Determina los puntos extremos y las direcciones (y cuáles de ellas son extremas) de:
(a) el cuadrado $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1\}$;
(b) la banda $T = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_2 \leq 1\}$;
(c) el conjunto $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geq 1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Dibuja. Los candidatos a punto extremo son las esquinas; para descartar un punto del borde que no sea esquina, escríbelo como punto medio de dos puntos del conjunto.*
2. *Para las direcciones, la condición «$x + \lambda d \in S$ para todo $\lambda \geq 0$ y todo $x \in S$» se traduce en desigualdades sobre d solas: sustituye y haz $\lambda \to \infty$.*

Resolución. *La idea.* Dos preguntas distintas con dos herramientas distintas. Para los puntos extremos, los candidatos son las esquinas del dibujo: se prueba que lo son apretando las dos restricciones que pasan por ellas, y se descarta todo lo demás escribiéndolo como punto medio de dos puntos del conjunto. Para las direcciones se hace $\lambda \to \infty$ en las restricciones, y solo sobreviven sus versiones homogéneas, que son condiciones sobre d solo.
(a) Los puntos extremos son los cuatro vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$. Que son extremos: si $(0,0) = \lambda u + (1-\lambda)v$ con $u, v \in Q$ y $\lambda \in (0,1)$, entonces $0 = \lambda u_1 + (1-\lambda)v_1$ con los dos sumandos no negativos obliga a $u_1 = v_1 = 0$, y lo mismo para la segunda coordenada; luego $u = v = (0,0)$. Los otros tres, igual. Que no hay más: un punto del lado inferior $(t,0)$ con $0 < t < 1$ es el punto medio de $(t-\varepsilon, 0)$ y $(t+\varepsilon, 0)$ para ε pequeño, ambos en Q (y en los otros tres lados vale literalmente lo mismo moviendo ε a lo largo del lado, que es la dirección en la que el lado no está apretado contra ninguna de las dos desigualdades que lo definen); y un punto interior es punto medio de dos puntos de una bola contenida en Q. Q es acotado: no tiene direcciones.
(b) T no tiene puntos extremos: cualquier $(x_1, x_2) \in T$ es punto medio de $(x_1 \pm 1, x_2)$, que están en T. Direcciones: $d \neq 0$ es dirección si $0 \leq x_2 + \lambda d_2 \leq 1$ para todo $\lambda \geq 0$ y todo $x \in T$; haciendo $\lambda \to \infty$ eso obliga a $d_2 = 0$, y recíprocamente todo $d = (d_1, 0)$ con $d_1 \neq 0$ sirve. Salvo múltiplos positivos hay dos rumbos, $(1,0)$ y $(-1,0)$, y **ninguno de los**

dos es extremo: son opuestos, luego distintos en el sentido de la definición, y entonces $(1,0) = 2(1,0) + 1 \cdot (-1,0)$ escribe el primero como combinación positiva de dos direcciones distintas, y $(-1,0) = 2(-1,0) + 1 \cdot (1,0)$ hace lo mismo con el segundo. La banda es el caso de la regla de la sección: su cono de rumbos es la recta horizontal entera, y un cono que contiene una recta no tiene aristas. Igual que no hay esquinas, no hay rumbos irreducibles.
(c) Es un conjunto no acotado con dos vértices. Puntos extremos: $(1,0)$ y $(0,1)$. Por ejemplo, $(1,0)$: si $(1,0) = \lambda u + (1-\lambda)v$, la segunda coordenada da $u_2 = v_2 = 0$, y entonces $u_1 \geq 1$ y $v_1 \geq 1$ por la primera restricción, con $\lambda u_1 + (1-\lambda)v_1 = 1$, que fuerza $u_1 = v_1 = 1$. Un punto del lado $x_1 + x_2 = 1$ entre los dos vértices es punto medio de otros dos del mismo lado, y un punto de las semirrectas $x_2 = 0$, $x_1 > 1$ (o simétrica) es punto medio de otros dos de la semirrecta. Direcciones: $x + \lambda d \in P$ para todo $\lambda \geq 0$ pide $d_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$ y $d_1 + d_2 \geq 0$; luego las direcciones son los $d \geqq 0$, $d \neq 0$. Ninguna otra es extrema, porque cualquier d con $d_1, d_2 > 0$ es $d_1(1,0) + d_2(0,1)$; y $(1,0)$ y $(0,1)$ sí lo son, por el argumento de la coordenada nula: si $(1,0) = \lambda_1 d^1 + \lambda_2 d^2$ con $\lambda_i > 0$ y $d^1, d^2 \geqq 0$, la segunda coordenada da $\lambda_1 d_2^1 + \lambda_2 d_2^2 = 0$ con sumandos no negativos, luego $d_2^1 = d_2^2 = 0$ y los dos ingredientes son múltiplos positivos de $(1,0)$, o sea, no distintos.
Un punto extremo se reconoce «apretando» las desigualdades: en un vértice de un poliedro del plano hay dos restricciones activas independientes, y una combinación convexa que lo produzca obliga a que sus dos ingredientes cumplan las mismas igualdades. Las direcciones se obtienen dejando $\lambda \to \infty$: solo sobreviven las restricciones homogéneas. Y los tres apartados juntos dicen una cuarta cosa: el cuadrado tiene esquinas y no tiene rumbos, la banda no tiene ni esquinas ni rumbos irreducibles porque contiene rectas en las dos escalas —una recta dentro del conjunto y una recta dentro de su cono de rumbos—, y solo P, que no contiene ninguna, tiene las dos cosas. Todas estas ideas se convertirán en teoremas en la sección 2.4.
Dónde se falla. En confundir «estar en la frontera» con «ser extremo»: el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ está en el borde de P, sobre la recta $x_1 + x_2 = 1$, y es el punto medio de $(1,0)$ y $(0,1)$, así que no es extremo. En declarar extrema una dirección de la banda porque va «a lo largo del borde»: en la banda las dos direcciones son opuestas, y cada una es combinación positiva de ella misma y de la otra. Y en olvidar que una dirección permite avanzar *sin límite*: desde el lado inferior del cuadrado se puede subir un poco en la dirección $(0,1)$, pero no indefinidamente, así que $(0,1)$ no es una dirección del cuadrado.

Ejercicio 2.3. *Caratheodory en el plano, con números*

Sea $X = \{(0,0), (6,0), (6,6), (0,6), (3,3)\} \subset \mathbb{R}^2$ y $x = (2,3)$. Comprueba que

$$x = \tfrac{1}{4}(0,0) + \tfrac{1}{12}(6,0) + \tfrac{1}{12}(6,6) + \tfrac{1}{4}(0,6) + \tfrac{1}{3}(3,3),$$

y aplica el procedimiento de la demostración del teorema de Caratheodory, tantas veces como haga falta, hasta escribir x como combinación convexa de tres puntos de X.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Empieza por una dependencia lineal entre los vectores $x_i - x_1$; en este conjunto hay una muy visible que involucra al centro $(3,3)$ y a dos vértices.*
2. *En cada vuelta calcula $\alpha = \min\{\lambda_i / \mu_i : \mu_i > 0\}$ y comprueba que los nuevos coeficientes suman uno y*

reproducen x. Con la dependencia sugerida y la que usa la resolución, hacen falta dos vueltas.

Resolución. *La idea.* Sobran $5-3=2$ puntos, así que hacen falta dos vueltas del mecanismo de la demostración. En cada una se busca una dependencia entre las diferencias $x_i - x_1$, se convierte en una manera de sumar cero a la mezcla, y se suma el múltiplo más grande que no vuelve negativo ningún coeficiente: ese múltiplo vacía uno de ellos.
Comprobación de la expresión de partida. Numeramos $x_1=(0,0)$, $x_2=(6,0)$, $x_3=(6,6)$, $x_4=(0,6)$, $x_5=(3,3)$ con $\lambda=(\frac14,\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac14,\frac13)$. Los coeficientes suman $\frac{3+1+1+3+4}{12}=1$. Primera coordenada: $\frac{1}{12}\cdot 6+\frac{1}{12}\cdot 6+\frac13\cdot 3=\frac12+\frac12+1=2$. Segunda: $\frac{1}{12}\cdot 6+\frac14\cdot 6+\frac13\cdot 3=\frac12+\frac32+1=3$. Correcto. Son $r=5>n+1=3$ puntos: hay que quitar al menos dos; las vueltas que siguen quitan uno cada una.
Primera vuelta. Los vectores $x_2-x_1=(6,0)$, $x_3-x_1=(6,6)$, $x_4-x_1=(0,6)$ y $x_5-x_1=(3,3)$ son cuatro vectores del plano; una dependencia visible es $(6,0)+(0,6)-2(3,3)=(0,0)$, es decir, $\mu_2=1$, $\mu_3=0$, $\mu_4=1$, $\mu_5=-2$, y entonces $\mu_1=-(1+0+1-2)=0$. Comprobación con los puntos: $1\cdot(6,0)+1\cdot(0,6)-2\cdot(3,3)=(0,0)$ y $\sum\mu_i=0$. Los $\mu_i>0$ son μ_2 y μ_4, con cocientes $\lambda_2/\mu_2=\frac{1}{12}$ y $\lambda_4/\mu_4=\frac14$; luego $\alpha=\frac{1}{12}$, alcanzado en $k=2$. Nuevos coeficientes $\tilde\lambda_i=\lambda_i-\frac{1}{12}\mu_i$:

$$\tilde\lambda_1=\tfrac14,\quad \tilde\lambda_2=\tfrac{1}{12}-\tfrac{1}{12}=0,\quad \tilde\lambda_3=\tfrac{1}{12},\quad \tilde\lambda_4=\tfrac14-\tfrac{1}{12}=\tfrac16,\quad \tilde\lambda_5=\tfrac13+\tfrac{2}{12}=\tfrac12.$$

Suman $\frac{3+1+2+6}{12}=1$. Comprobación: primera coordenada $\frac{1}{12}\cdot 6+\frac12\cdot 3=\frac12+\frac32=2$; segunda $\frac{1}{12}\cdot 6+\frac16\cdot 6+\frac12\cdot 3=\frac12+1+\frac32=3$. Ahora x es combinación convexa estricta de los cuatro puntos x_1,x_3,x_4,x_5.
Segunda vuelta. Diferencias con x_1: $x_3-x_1=(6,6)$, $x_4-x_1=(0,6)$ y $x_5-x_1=(3,3)$. Dependencia: $(6,6)-2(3,3)=(0,0)$, o sea $\mu_3=1$, $\mu_4=0$, $\mu_5=-2$ y $\mu_1=-(1+0-2)=1$. Comprobación: $1\cdot(0,0)+1\cdot(6,6)-2\cdot(3,3)=(0,0)$ y $1+1+0-2=0$. Los $\mu_i>0$ son μ_1 y μ_3, con cocientes $\tilde\lambda_1/\mu_1=\frac14$ y $\tilde\lambda_3/\mu_3=\frac{1}{12}$; luego $\alpha=\frac{1}{12}$ en $k=3$. Nuevos coeficientes:

$$\tfrac14-\tfrac{1}{12}=\tfrac16\ (x_1),\qquad \tfrac{1}{12}-\tfrac{1}{12}=0\ (x_3),\qquad \tfrac16\ (x_4),\qquad \tfrac12+\tfrac{2}{12}=\tfrac23\ (x_5).$$

Suman $\frac16+\frac16+\frac23=1$, y $\frac16(0,0)+\frac16(0,6)+\frac23(3,3)=(2,\,1+2)=(2,3)$. Hemos terminado:

$$x=\tfrac16(0,0)+\tfrac16(0,6)+\tfrac23(3,3),$$

tres puntos, como promete el teorema. Geométricamente, $(2,3)$ está en el triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,6)$ y $(3,3)$, que es el cuarto izquierdo del cuadrado partido por sus diagonales.

Otra vía (geométrica). Sin el procedimiento: las dos diagonales del cuadrado se cortan en $(3,3)$ y lo parten en cuatro triángulos con vértice común en el centro. El punto $(2,3)$ tiene $x_1<x_2$ y $x_1+x_2<6$, luego está en el triángulo izquierdo, el de vértices $(0,0)$, $(0,6)$ y $(3,3)$. Resolviendo $(2,3)=\lambda_1(0,0)+\lambda_4(0,6)+\lambda_5(3,3)$ con $\lambda_1+\lambda_4+\lambda_5=1$: de la primera coordenada $3\lambda_5=2$, $\lambda_5=\frac23$; de la segunda $6\lambda_4+2=3$, $\lambda_4=\frac16$; y $\lambda_1=\frac16$. Es la misma respuesta, y explica por qué el procedimiento la encontró: cada vuelta anula el coeficiente de un punto que «sobra». En estas dos vueltas se eliminan x_2 y x_3 y se llega al triángulo izquierdo; otras dependencias pueden conducir a otra mezcla válida.
El procedimiento de Caratheodory es mecánico: dependencia entre las diferencias, cociente mínimo, restar, y comprobar en cada vuelta que los coeficientes suman uno y reproducen el

punto. Esa comprobación no es un adorno: es lo que detecta un μ mal calculado antes de arrastrarlo.
Dónde se falla. En μ_1: no sale de la dependencia entre las diferencias, sino de $\mu_1 = -\sum_{i\geq 2}\mu_i$, y sin él los nuevos coeficientes no suman uno. Y en tomar un cociente que no es el mínimo. En la primera vuelta, si se toma $\alpha = \frac{1}{4}$, que es el cociente de x_4, el coeficiente de x_2 queda $\frac{1}{12} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{6} < 0$, y el resultado ya no es una mezcla. El mínimo es lo que garantiza que el primer coeficiente en tocar el cero se quede exactamente en cero y ninguno lo cruce.

Ejercicio 2.4. *La envolvente convexa de la esfera*

Sea $E = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ la esfera unidad y $\bar{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ la bola cerrada. Prueba que $H(E) = \bar{B}$ y que, de hecho, todo punto de $\bar{B}$ es combinación convexa de *dos* puntos de E, sin que el número crezca con la dimensión. ¿Cuáles son los puntos extremos de $\bar{B}$?

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Una inclusión es gratis: $\bar{B}$ es convexo y contiene a E.*
2. *Para la otra, dado x con $0 < \|x\| < 1$, prolonga la recta que pasa por 0 y x hasta que corte a la esfera en dos puntos antipodales.*
3. *Para el origen, cualquier par de puntos antipodales sirve.*

Resolución. *La idea.* Una inclusión sale gratis de que la envolvente es el menor convexo que contiene al conjunto. Para la otra se usa una imagen: cada punto de la bola está en una cuerda que pasa por el centro, y esa cuerda une dos puntos antipodales de la esfera.
$H(E) \subseteq \bar{B}$. La bola cerrada es convexa (visto en el ejemplo de esta sección) y contiene a E; como $H(E)$ es el menor convexo que contiene a E, está dentro de $\bar{B}$.
$\bar{B} \subseteq H(E)$, *con dos puntos.* Sea $x \in \bar{B}$. Si $\|x\| = 1$, $x \in E$ y es combinación convexa de sí mismo. Si $x = 0$, entonces $0 = \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}(-e)$ para cualquier $e \in E$. Si $0 < \|x\| < 1$, sea $u = x/\|x\| \in E$ y considérense los puntos antipodales u y $-u$ de E. Buscamos $\lambda \in [0,1]$ con $x = \lambda u + (1-\lambda)(-u) = (2\lambda - 1)u$; como $x = \|x\|u$, basta $2\lambda - 1 = \|x\|$, es decir $\lambda = \frac{1+\|x\|}{2} \in (\frac{1}{2}, 1)$. Luego x es combinación convexa de dos puntos de la esfera.
Puntos extremos de $\bar{B}$. Son exactamente los de E. Que un punto con $\|x\| < 1$ no es extremo lo acabamos de ver: es combinación convexa estricta de u y $-u$, distintos de él. Que un punto x con $\|x\| = 1$ es extremo: si $x = \lambda u + (1-\lambda)v$ con $u, v \in \bar{B}$ y $\lambda \in (0,1)$, entonces $1 = \|x\| \leq \lambda\|u\| + (1-\lambda)\|v\| \leq \lambda + (1-\lambda) = 1$, luego todas las desigualdades son igualdades: $\|u\| = \|v\| = 1$ y la desigualdad triangular es una igualdad, lo que en una norma euclídea ocurre solo si u y v son proporcionales con coeficiente positivo; teniendo la misma norma, $u = v$, y entonces $x = u = v$.

Otra vía (barriendo la bola con cuerdas). Sin exhibir los dos puntos para cada x, se puede razonar de un golpe: $H(E)$ es convexo y contiene a E, luego contiene el segmento $[u, -u]$ para cada $u \in E$; y la unión de todos esos segmentos —las cuerdas de la esfera que pasan por el centro— es la bola entera. Por tanto $H(E) \supseteq \bar{B}$. Es más corto pero dice menos: no da los ingredientes de un punto concreto. Conviene fijarse en lo que este argumento *no* necesita: ni compacidad, ni que $H(E)$ sea cerrado. Aquí $H(E)$ resulta cerrado, y eso es un teorema

(la envolvente convexa de un compacto de $\mathbb{R}^n$ es compacta, como se cuenta en la caja de historia de esta sección), pero es un teorema que este razonamiento no usa: todo el peso lo lleva la convexidad.
Conviene retener que la cota $n+1$ de Caratheodory es una cota *para el peor caso*: para conjuntos concretos pueden bastar muchos menos ingredientes. Y queda una técnica: para probar que un punto del borde de una bola es extremo se usa la igualdad en la desigualdad triangular, que es la misma herramienta con la que se probará la unicidad en el teorema de la proyección.
Dónde se falla. En leer Caratheodory como si dijera que hacen falta $n+1$ puntos: es una cota superior, y aquí bastan dos en cualquier dimensión. Y en el caso de igualdad de la triangular: no basta con que u y v sean paralelos, tienen que ser múltiplos con coeficiente *positivo*. Dos vectores opuestos de norma uno, como u y $-u$, dan $\|u+(-u)\| = 0 < 2$, y son precisamente los que prueban que los puntos del interior de la bola no son extremos.

2.2 Separación de conjuntos convexos. Lema de Farkas

LA PREGUNTA

Un ingeniero afirma que cierto plan de producción es imposible: no hay manera de repartir las horas de las máquinas, sin usar horas negativas, de modo que se cumplan exactamente los encargos. Su jefe no quiere repetir sus cuentas; quiere una prueba corta que pueda comprobar en un minuto. ¿Existe siempre un *certificado* así de que un sistema de ecuaciones con incógnitas no negativas no tiene solución, y qué forma tiene?

LA IDEA: SEPARAR ES CERTIFICAR

Toda la sección gira alrededor de una imagen: un punto que está fuera de un convexo cerrado puede *separarse* de él con un hiperplano, una lámina plana que deja el convexo a un lado y el punto al otro. Eso parece geometría pura, pero es lo que produce los certificados de imposibilidad. El conjunto de los vectores b que sí se pueden escribir como Ax con $x \geqq 0$ es un cono convexo; si un b concreto no está en él, hay un hiperplano que lo separa del cono, y el vector normal u de ese hiperplano es el certificado: cumple $u^T A \leqq 0$ y $u^T b > 0$, dos condiciones que cualquiera comprueba en un minuto y que son incompatibles con la existencia de x. El lema de Farkas es exactamente esa afirmación, y el teorema de la proyección es la herramienta que construye el hiperplano.

2.2.1 Hiperplanos, semiespacios y separación

Definición. Un **hiperplano** en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de la forma

$$H = \{x : \ p^T x = \alpha\} \qquad \text{con } p \in \mathbb{R}^n,\ p \neq 0 \text{ y } \alpha \in \mathbb{R},$$

o, de forma equivalente, si $x_0 \in H$, $H = \{x : \ p^T(x - x_0) = 0\}$. A p se le llama **vector normal** al hiperplano.

Un hiperplano define dos **semiespacios cerrados**, $H^- = \{x : p^T x \leq \alpha\}$ y $H^+ = \{x : p^T x \geq \alpha\}$, y dos **semiespacios abiertos**, $H^{<-} = \{x : p^T x < \alpha\}$ y $H^{<+} = \{x : p^T x > \alpha\}$.

Las dos escrituras son la misma: si $x_0 \in H$ entonces $p^T x_0 = \alpha$, y $p^T x = \alpha$ equivale a $p^T x - p^T x_0 = 0$. La segunda dice qué es geométricamente un hiperplano: el conjunto de puntos x tales que el vector $x - x_0$ es *perpendicular* a p. En el plano es una recta, en el espacio un plano, y en $\mathbb{R}^n$ un subespacio afín de dimensión $n - 1$. El vector normal apunta hacia el lado H^+: moviéndose desde x_0 en la dirección de p, el valor de $p^T x$ crece.

Observación. Se ha probado ya (en el ejemplo de la sección anterior) que H, H^+, H^-, $H^{<+}$ y $H^{<-}$ son conjuntos convexos: en los cinco casos la condición es lineal en x y se conserva al mezclar. Los dos cerrados son, además, cerrados en el sentido topológico (preimagen de un intervalo cerrado por la aplicación continua $x \mapsto p^T x$), y los dos abiertos, abiertos.

Definición. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y $\bar{x} \in \partial X$ (la frontera de X). Diremos que $H = \{x : p^T(x - \bar{x}) = 0\}$ es un **hiperplano soporte** de X en $\bar{x}$ si $X \subseteq H^+$ o $X \subseteq H^-$.

Un hiperplano soporte «se apoya» en el conjunto: pasa por un punto de su frontera y deja todo el conjunto a un lado. En una esquina de un polígono hay infinitos hiperplanos soporte (todas las rectas que pasan por el vértice y no cortan el interior); en un punto de un lado, solo uno; en un punto de una circunferencia, la tangente. La figura 2.7 lo muestra.

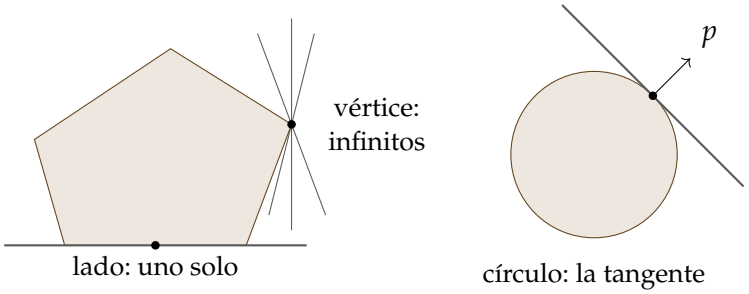


Figura 2.7: Hiperplanos soporte. El vector normal p apunta hacia fuera del conjunto cuando $X \subseteq H^-$.

CONEXIÓN: GEOMETRÍA LOCAL

El hiperplano soporte de un cuerpo convexo con borde suave es el plano tangente visto como una pared que deja *todo* el cuerpo a un lado. Para una superficie regular S de $\mathbb{R}^3$, el plano tangente afín en p es $p + T_p S$, donde $T_p S$ es el espacio de velocidades de las curvas que pasan por p.
Si la superficie es de clase C^2, en un punto elíptico ($K > 0$) queda *localmente* a un lado del plano tangente, mientras que en uno hiperbólico ($K < 0$) lo atraviesa. Cuando $K = 0$, el signo de K no decide: por ejemplo, $z = x^4 + y^4$ queda a un lado de $z = 0$ en el origen, pero $z = x^3$ lo cruza. Para el borde de un cuerpo convexo, la propiedad de soporte viene de la convexidad global; permite también puntos con curvaturas nulas. La definición no necesita derivadas y por eso

sigue valiendo en un vértice, donde hay varios planos soporte.

Definición. Sean $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacíos. Diremos que el hiperplano $H = \{x : p^T x = \alpha\}$
- **separa** X_1 y X_2 si $p^T x_1 \geq \alpha$ y $p^T x_2 \leq \alpha$ para todo $x_1 \in X_1$ y $x_2 \in X_2$;
- los **separa estrictamente** si $p^T x_1 > \alpha$ y $p^T x_2 < \alpha$ para todo $x_1 \in X_1$ y $x_2 \in X_2$;
- los **separa fuertemente** si existe $\epsilon > 0$ tal que $p^T x_1 \geq \alpha + \epsilon$ y $p^T x_2 \leq \alpha$ para todo $x_1 \in X_1$ y $x_2 \in X_2$;
- los **separa propiamente** si los separa y además $X_1 \cup X_2 \not\subseteq H$.

Los cuatro grados dicen cuánto «aire» queda entre los conjuntos y el hiperplano. Separar a secas admite que los dos conjuntos toquen el hiperplano, e incluso que estén los dos dentro de él (un hiperplano se separa a sí mismo de sí mismo, y por eso se añade la separación propia, que excluye ese caso degenerado). Separar estrictamente prohíbe tocar, pero permite acercarse indefinidamente: los conjuntos $\{x_2 < 0\}$ y $\{x_2 \geq e^{-x_1}\}$ del plano están estrictamente separados por $x_2 = 0$ y sin embargo su distancia es cero. Separar fuertemente exige una franja de anchura positiva $\epsilon / \|p\|$ entre ellos. Para un punto y un convexo cerrado, que es el caso que necesitamos, la separación será fuerte.

2.2.2 El teorema de la proyección

Teorema (de la proyección)**.** Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, cerrado y convexo, y sea $y \notin S$. Entonces existe un único $\bar{x} \in S$ que minimiza la distancia de y a S. Además, $\bar{x}$ es el punto que minimiza la distancia si y solo si

$$(y - \bar{x})^T (x - \bar{x}) \leq 0 \qquad \text{para todo } x \in S.$$

• CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA

Hay tres afirmaciones y tres imágenes.
Existe un punto más cercano. Si S fuera un conjunto finito, bastaría comparar. Como puede ser infinito, se usa que es cerrado: se traza una bola alrededor de y lo bastante grande para tocar a S; la parte de S dentro de esa bola es un compacto, y la distancia a y, que es continua, alcanza su mínimo en un compacto. Ese es el **teorema de Weierstrass**, y conviene tenerlo escrito porque es la única pieza de fuera que se usa aquí: *si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto — equivalentemente, por Heine-Borel, cerrado y acotado — y no vacío, y $f : K \to \mathbb{R}$ es continua, entonces existen puntos de K donde f alcanza su máximo y su mínimo*. El enunciado, con un ejemplo de cada una de las dos maneras de perderlo, está en el apéndice F, sección «Análisis». Sin «cerrado» falla: la distancia del origen al disco abierto $\{x : \|x - (2,0)\| < 1\}$ es 1 y no la alcanza nadie.
Es único. Si hubiera dos puntos $\bar{x}, \hat{x}$ de S a la misma distancia mínima, su punto medio estaría en S (convexidad) y estaría *más cerca* de y que ellos, porque el punto medio de la base de un triángulo isósceles está más cerca del vértice que los extremos. Sin «convexo» falla: el origen equidista de los dos puntos de la esfera unidad $\{(\pm 1, 0)\}$, que no es convexa.
La caracterización. La condición $(y - \bar{x})^T (x - \bar{x}) \leq 0$ dice que el ángulo entre el vector $y - \bar{x}$ (de la proyección al punto) y cualquier vector $x - \bar{x}$ (de la proyección a otro

punto de S) es obtuso o recto. En la figura 2.8 se ve por qué tiene que ser así: si hubiera un $x \in S$ formando ángulo agudo, moviéndose un poco desde $\bar{x}$ hacia x, sin salir de S por convexidad, se acercaría uno a y. Es la misma idea de «no se puede mejorar moviéndose en ninguna dirección factible» que reaparecerá como condición de optimalidad en el capítulo 6.

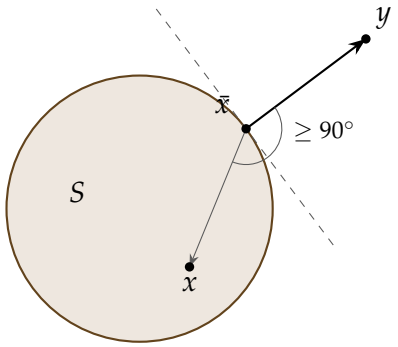


Figura 2.8: La proyección $\bar{x}$ de y sobre S: el hiperplano perpendicular a $y - \bar{x}$ por $\bar{x}$ (discontinuo) deja a S entero al otro lado.

Son tres afirmaciones y cada una se apoya en una sola cosa: la existencia, en que *un continuo alcanza su mínimo sobre un compacto*; la unicidad, en que *la desigualdad triangular solo es igualdad para vectores paralelos*; y la caracterización, en que *si desde $\bar{x}$ se pudiera avanzar hacia otro punto de S ganando distancia, $\bar{x}$ no sería el mínimo*. Lo único técnico es fabricar el compacto, y se fabrica recortando S con una bola centrada en y.
Paso 1: existencia, recortando S hasta hacerlo compacto. Como $S \neq \emptyset$, tomemos cualquier $\hat{x} \in S$ y sea $r = \|y - \hat{x}\|$. El conjunto $K = S \cap \bar{B}(y, r)$ es cerrado (intersección de dos cerrados), acotado (está dentro de una bola) y no vacío ($\hat{x} \in K$); luego es compacto. La función $f(x) = \|y - x\|$ es continua, y por el teorema de Weierstrass alcanza su mínimo en K en algún punto $\bar{x}$. Ese $\bar{x}$ minimiza la distancia en todo S: cualquier $x \in S$ que no esté en K cumple $\|y - x\| > r = \|y - \hat{x}\| \geq \|y - \bar{x}\|$.
Paso 2: unicidad, por el caso de igualdad en la triangular. Supongamos que $\bar{x}, \hat{x} \in S$ cumplen $\|y - \bar{x}\| = \|y - \hat{x}\| = \delta = \min_{x \in S} \|y - x\|$. El punto medio $\frac{\bar{x}+\hat{x}}{2}$ está en S porque S es convexo, y

$$\left\| y - \frac{\bar{x} + \hat{x}}{2} \right\| = \left\| \frac{y - \bar{x}}{2} + \frac{y - \hat{x}}{2} \right\| \leq \frac{1}{2}\|y - \bar{x}\| + \frac{1}{2}\|y - \hat{x}\| = \delta.$$

Como δ es el mínimo, la desigualdad es una igualdad: la norma de la suma de los dos vectores $\frac{y-\bar{x}}{2}$ y $\frac{y-\hat{x}}{2}$ es la suma de sus normas. En la norma euclídea eso solo ocurre si son proporcionales con factor no negativo: $y - \bar{x} = \lambda(y - \hat{x})$ con $\lambda \geq 0$. Tomando normas, $\delta = \lambda\delta$, y como $\delta > 0$ (porque $y \notin S$ y S es cerrado), $\lambda = 1$. Luego $y - \bar{x} = y - \hat{x}$, es decir, $\bar{x} = \hat{x}$.
Paso 3: la caracterización es suficiente ($\Leftarrow$), por Pitágoras. Supongamos que $(y - \bar{x})^T(x - \bar{x}) \leq 0$ para todo $x \in S$. Para cualquier $x \in S$ escribimos $y - x = (y - \bar{x}) + (\bar{x} - x)$ y

desarrollamos la norma al cuadrado:

$$\|y - x\|^2 = \|y - \bar{x}\|^2 + \|\bar{x} - x\|^2 + 2(y - \bar{x})^T(\bar{x} - x).$$

El último término es $-2(y - \bar{x})^T(x - \bar{x}) \geq 0$ por hipótesis, y el segundo es ≥ 0; luego $\|y - x\|^2 \geq \|y - \bar{x}\|^2$ para todo $x \in S$: $\bar{x}$ es el mínimo.
Paso 4: la caracterización es necesaria (⇒), derivando a lo largo del segmento (el núcleo de la prueba, y lo único que se usa después). Sea $\bar{x}$ el punto que minimiza la distancia y sea $x \in S$ cualquiera. Para $\lambda \in (0, 1]$, el punto $\bar{x} + \lambda(x - \bar{x})$ está en S por convexidad, luego su distancia a y no baja de la mínima:

$$\|y - \bar{x} - \lambda(x - \bar{x})\|^2 \geq \|y - \bar{x}\|^2.$$

Desarrollando el cuadrado de la izquierda, $\|y - \bar{x}\|^2 + \lambda^2\|x - \bar{x}\|^2 - 2\lambda(y - \bar{x})^T(x - \bar{x}) \geq \|y - \bar{x}\|^2$, es decir, $\lambda^2\|x - \bar{x}\|^2 \geq 2\lambda(y - \bar{x})^T(x - \bar{x})$. Dividiendo por $\lambda > 0$: $\lambda\|x - \bar{x}\|^2 \geq 2(y - \bar{x})^T(x - \bar{x})$. Esto vale para todo $\lambda \in (0, 1]$; haciendo $\lambda \to 0^+$ el miembro izquierdo tiende a cero, y queda $(y - \bar{x})^T(x - \bar{x}) \leq 0$.
Dónde entra cada hipótesis. «Cerrado» se usa solo en el paso 1, para que el recorte K sea compacto y Weierstrass valga: en el disco abierto el ínfimo existe y no se alcanza. «Convexo» se usa dos veces, y las dos son esenciales: en el paso 2, para que el punto medio siga en S, y en el paso 4, para que el segmento de $\bar{x}$ a x no se salga de S; sin convexidad no hay por dónde avanzar y la caracterización angular es falsa. Que $y \notin S$ solo garantiza $\delta > 0$, y con ello que $p = y - \bar{x}$ no sea el vector nulo cuando este teorema se use para separar. Y la norma tiene que ser *euclídea*: el paso 2 usa el caso de igualdad de la triangular, que en la norma del máximo no obliga a que los vectores sean paralelos, y de hecho en esa norma la proyección puede no ser única.
Para reconstruirla. Existencia: recortar S con una bola centrada en y, que lo vuelve compacto, y aplicar Weierstrass. Unicidad: el punto medio de dos mínimos está en S y la triangular sería igualdad, lo que fuerza que sean el mismo. Caracterización: caminar desde $\bar{x}$ hacia x un paso λ, imponer que la distancia no baje y hacer $\lambda \to 0$.

EXPLÍCATE. *En la unicidad se ha usado que $\delta > 0$. ¿Dónde exactamente, y qué hipótesis del teorema garantiza que $\delta > 0$?*

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: SEPARAR SIN PROYECTAR

La separación de un punto y un convexo cerrado puede probarse sin el teorema de la proyección, con el teorema de Hahn-Banach, que vale en cualquier espacio normado de dimensión infinita y es la herramienta estándar del análisis funcional. Tiene la ventaja de la generalidad. Lo que la descarta aquí es que no construye nada: dice que el hiperplano existe pero no dónde está. La proyección da el hiperplano explícitamente (normal $y - \bar{x}$, por el punto $\bar{x}$), y esa explicitud es la que permite leer después el certificado de Farkas como un vector concreto que se puede calcular. En dimensión finita, además, la proyección solo necesita Weierstrass.

2.2.3 Separación de un punto y un convexo

LA IDEA: LA PARED QUE SE DESLIZA HASTA TOCAR

Este es el teorema del que cuelga todo lo demás del capítulo, y la imagen con que se ve es mecánica.

Piense en S como un objeto sólido apoyado en el espacio y en y como un punto del aire, fuera de él. Fabrique una pared plana infinita, perpendicular al segmento que une y con el punto de S más cercano, y colóquela más allá de y, en el lado opuesto a S. Ahora empújela hacia S sin girarla, siempre paralela a sí misma. La pared avanza mientras no encuentra resistencia, y se detiene en el instante exacto en que *toca* S por primera vez. En ese instante la pared es un hiperplano soporte: pasa por un punto de la frontera de S y deja todo S a un lado. Y como y estaba fuera y en la dirección contraria, y ha quedado al otro lado. Eso es separar.

La imagen predice las dos hipótesis, y conviene ver cómo.

Por qué S tiene que ser convexo. Deje que S tenga forma de herradura y ponga y en el hueco de la herradura. Empuje la pared: se detiene contra las dos puntas, mucho antes de llegar al hueco, y y queda del mismo lado que S. No hay pared, en ninguna dirección, que deje la herradura entera a un lado y el punto del hueco al otro; para separarlos haría falta una superficie curva. La convexidad garantiza que cada punto exterior pueda quedar separado del conjunto entero por alguna de esas paredes.

Por qué S tiene que ser cerrado. Si a S se le quita su frontera, la pared no llega a tocar nada: se acerca indefinidamente sin apoyarse, y en el límite se apoya en un punto que ya no pertenece a S. Con y justo en esa frontera quitada, y no está en S y sin embargo no hay ninguna franja de aire entre los dos. La conclusión con desigualdad estricta para y se pierde. Por eso el corolario que viene después tiene que pedir $y \notin \mathrm{cl}(S)$ y no solo $y \notin S$.

Por qué la dirección de la pared no es libre. Una dirección que garantiza el resultado es la del segmento más corto de y a S, es decir, $p = y - \bar{x}$ con $\bar{x}$ la proyección. Si se empuja la pared en otra dirección, puede tocar S antes de haber dejado a y del lado correcto. Esta demostración empieza por el teorema de la proyección, que fabrica $\bar{x}$, y construye después la pared.

Lectura física. La pared que se detiene está en contacto con el objeto y no lo atraviesa. La fuerza con que el objeto la empuja va en la dirección de p, la normal, y ese mismo vector es el que en el lema de Farkas hará de certificado. Los certificados de imposibilidad de esta sección son, leídos así, reacciones de un apoyo.

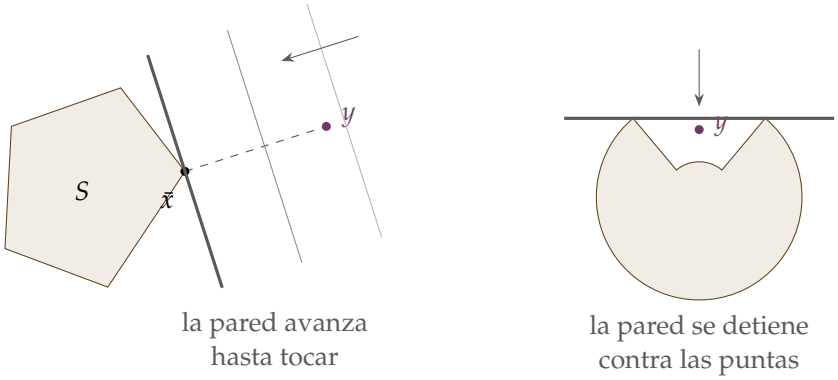


Figura 2.9: Izquierda: S convexo y cerrado. La pared perpendicular a $y - \bar{x}$ avanza hasta apoyarse en $\bar{x}$, y deja S a un lado e y al otro. Derecha: sin convexidad la pared se detiene contra las puntas y el punto del hueco queda del mismo lado que el conjunto.

Teorema. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, cerrado y convexo, y sea $y \notin S$. Entonces existe $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$, y existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$p^T y > \alpha \qquad \text{y} \qquad p^T x \leq \alpha \quad \text{para todo } x \in S.$$

• CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

No hay nada que inventar: *el hiperplano ya lo ha construido el teorema de la proyección*, y esta prueba solo lo escribe. La normal es el vector que va de la proyección al punto, y el nivel es la altura a la que ese vector deja a la proyección. La caracterización angular dice entonces, palabra por palabra, que S está de un lado, y el cálculo del producto escalar da $p^T y - \alpha = \|y - \bar{x}\|^2 > 0$. La distancia geométrica de y al hiperplano es este valor dividido por $\|p\|$, es decir, $\|y - \bar{x}\|$, sin elevar al cuadrado.
Por el teorema de la proyección existe $\bar{x} \in S$ con $(y - \bar{x})^T (x - \bar{x}) \leq 0$ para todo $x \in S$. Tomamos como normal $p = y - \bar{x}$, que no es cero porque $y \notin S$ y $\bar{x} \in S$, y como nivel $\alpha = p^T \bar{x}$. Entonces:

- Para todo $x \in S$: $p^T x - \alpha = p^T (x - \bar{x}) = (y - \bar{x})^T (x - \bar{x}) \leq 0$, es decir, $p^T x \leq \alpha$.
- Para y: $p^T y - \alpha = p^T (y - \bar{x}) = (y - \bar{x})^T (y - \bar{x}) = \|y - \bar{x}\|^2 > 0$, es decir, $p^T y > \alpha$.

El hiperplano separador es el perpendicular a $y - \bar{x}$ que pasa por la proyección $\bar{x}$, como en la figura 2.8.
Para reconstruirla. Normal $p = y - \bar{x}$, nivel $\alpha = p^T \bar{x}$. La caracterización angular da el lado de S; el cuadrado de la norma, $\|y - \bar{x}\|^2 > 0$, da el lado de y. No hay nada más.

Corolario. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, cerrado y convexo. Entonces S es igual a la intersección de todos los semiespacios cerrados que lo contienen.

La idea cabe en una frase: *cada punto de fuera necesita un semiespacio que lo excluya, y el teorema anterior se lo fabrica*. Que S está contenido en la intersección es la mitad gratuita: los semiespacios que se intersecan son, por definición, los que contienen a S, luego S está en todos ellos. Que la intersección está contenida en S: si $y \notin S$, el teorema da un semiespacio cerrado $\{x : p^T x \leq \alpha\}$ que contiene a S y no contiene a y; luego y no está en la intersección. Un convexo cerrado es, por tanto, «lo que queda» al cortar el

espacio con todos los semiespacios que lo contienen, y esa es la razón profunda de que los poliedros (sección 2.4), definidos con *finitos* semiespacios, sean los convexos cerrados más simples.

Corolario. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y convexo, e $y \notin \mathrm{cl}(S)$. Entonces existe un hiperplano que separa fuertemente S e y.

El movimiento es *cerrar primero y separar después*: se aplica el teorema no a S, que puede no ser cerrado, sino a $\mathrm{cl}(S)$, que sí lo es y sigue siendo convexo; y como y se ha supuesto fuera del cierre, queda hueco entre los dos, que es exactamente la anchura de la franja que hace *fuerte* a la separación. El conjunto $\mathrm{cl}(S)$ es convexo (corolario del teorema del interior, sección 2.1), cerrado y no vacío, e $y \notin \mathrm{cl}(S)$. El teorema anterior da $p \neq 0$ y α con $p^T y > \alpha \geq p^T x$ para todo $x \in \mathrm{cl}(S)$, en particular para todo $x \in S$. Sea $\epsilon = p^T y - \alpha > 0$. Entonces $p^T y = \alpha + \epsilon$ y $p^T x \leq \alpha$ para $x \in S$: el hiperplano $\{x : p^T x = \alpha\}$ separa fuertemente $\{y\}$ de S, con la franja de anchura $\epsilon / \|p\|$ entre ellos.

2.2.4 Los tres órdenes entre vectores

Para los teoremas que siguen hace falta una notación de orden en $\mathbb{R}^n$ que hay que leer con cuidado, porque tres símbolos parecidos dicen cosas distintas. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$:

- $x \leqq y$ si $x_i \leq y_i$ para $i = 1, \ldots, n$ (componente a componente, admitiendo la igualdad total);
- $x \leq y$ si $x_i \leq y_i$ para $i = 1, \ldots, n$ y $x \neq y$ (al menos una componente estricta);
- $x < y$ si $x_i < y_i$ para $i = 1, \ldots, n$ (todas estrictas).

Con números, en el plano: $(0,0) \leqq (1,0)$ y $(0,0) \leq (1,0)$, pero no $(0,0) < (1,0)$, porque la segunda componente no mejora; $(0,0) < (1,1)$, y entonces también valen las otras dos; y $(0,0) \leqq (0,0)$, pero no $(0,0) \leq (0,0)$. Cada símbolo implica los que tiene encima en la lista: $x < y$ da $x \leq y$, y $x \leq y$ da $x \leqq y$. Así, $y \geqq 0$ significa «ninguna componente negativa» (el cero incluido), $y \geq 0$ significa «ninguna negativa y alguna positiva» (el cero excluido) e $y > 0$ «todas positivas». La distinción entre $\geqq$ y $\geq$ importa en el teorema de Gordan y en el de Tucker. A partir del capítulo 3 el símbolo $\leq$ entre vectores vuelve a admitir la igualdad; el libro conserva en cada capítulo el convenio que allí se usa, y avisa donde cambia.

2.2.5 El lema de Farkas

Teorema (de Farkas)**.** Sean $A \in M_{m\times n}$ y $c \in \mathbb{R}^n$. Uno y solo uno de los siguientes sistemas tiene solución:
(1) $Ax \leqq 0$, $c^T x > 0$, para algún $x \in \mathbb{R}^n$; o
(2) $A^T y = c$, $y \geqq 0$, para algún $y \in \mathbb{R}^m$.

• CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA

Llamemos $a_1, \ldots, a_m$ a las filas de A, vistas como vectores de $\mathbb{R}^n$. El sistema (2) dice que c es combinación lineal *positiva* de las filas: $c = \sum_i y_i a_i$ con $y_i \geq 0$. Es decir, que c está

en el *cono* generado por las filas, la región sombreada de la figura 2.10. El sistema (1) dice que hay un vector x que forma ángulo obtuso o recto con todas las filas ($a_i^T x \leq 0$) y ángulo agudo con c ($c^T x > 0$).
Las dos cosas no pueden pasar a la vez: si $c = \sum y_i a_i$ con $y_i \geq 0$ y $a_i^T x \leq 0$ para todo i, entonces $c^T x = \sum y_i\, a_i^T x \leq 0$. Esa es la mitad fácil.
La mitad difícil es que *alguna* de las dos pasa siempre, y es exactamente la separación: si c no está en el cono, hay un hiperplano por el origen que deja el cono a un lado y a c al otro. Su normal x cumple $a_i^T x \leq 0$ (las filas están en el cono) y $c^T x > 0$. En el dibujo, el hiperplano separador es la recta discontinua y x es su normal.
Lo que hace útil al lema es la asimetría de las dos alternativas: (2) es un problema de *encontrar* (hay que exhibir y), pero (1) es un *certificado* de que (2) es imposible, y comprobar un certificado cuesta un producto matriz por vector: se calcula Ax, se mira que ninguna componente sea positiva, y se calcula $c^T x$. La pregunta del ingeniero del principio tiene respuesta: sí, siempre existe, y es un vector x con $Ax \leqq 0$ y $c^T x > 0$.

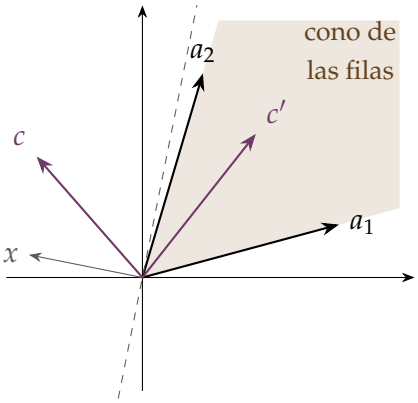


Figura 2.10: Farkas en el plano. El vector c' está en el cono de las filas de A: es el sistema (2). El vector c no está: existe x (normal a la recta discontinua) con $a_1^T x \leq 0$, $a_2^T x \leq 0$ y $c^T x > 0$, que es el sistema (1).

La idea: el cono de las cargas que los apoyos pueden equilibrar

El lema de Farkas nació en mecánica, y leído en mecánica dice algo que se ve. Merece la pena, porque la lectura mecánica *predice* el enunciado, incluido el detalle que parece arbitrario: por qué $y \geqq 0$ y no y libre.
Imagine un punto material en contacto con varios apoyos rígidos y sin rozamiento. En cada contacto elegimos la normal a_i dirigida *hacia el obstáculo*: los movimientos virtuales que no penetran en él satisfacen $a_i^T x \leq 0$. La reacción del apoyo va en sentido contrario, $-y_i a_i$, con $y_i \geq 0$: puede empujar, pero no tirar. Una mesa empuja hacia arriba al objeto que sostiene; no lo atrae hacia abajo.
Si c es la fuerza exterior, el equilibrio de fuerzas pide

$$c - \sum_i y_i a_i = 0, \qquad y_i \geq 0.$$

Por tanto, el conjunto de las cargas que los apoyos pueden equilibrar es exactamente

$\{\sum_i y_i a_i : y_i \geq 0\}$, el cono generado por las filas. El signo menos en la *reacción* es lo que hace compatibles los signos de las dos alternativas.
Sistema (2): equilibrio. Que exista $y \geqq 0$ con $A^T y = c$ significa que las reacciones $-A^T y$ compensan la fuerza exterior. En este modelo hay equilibrio si y solo si c pertenece al cono.
Sistema (1): un trabajo virtual positivo. El vector x respeta las restricciones de contacto linealizadas si $Ax \leqq 0$. Si además $c^T x > 0$, la fuerza exterior realiza trabajo positivo en ese desplazamiento virtual. No puede estar equilibrada por las reacciones permitidas: si $c = A^T y$, resultaría $c^T x = y^T A x \leq 0$.
Farkas afirma que, si las reacciones no pueden equilibrar la carga, existe uno de esos vectores x. Esta es la lectura mediante trabajos virtuales: decide la compatibilidad del equilibrio con los contactos, sin calcular una trayectoria ni una velocidad del cuerpo.
Por qué el signo lo es todo. Si a los y_i se les permitiera ser negativos, el sistema (2) sería «c pertenece al subespacio generado por las filas», y eso ya lo contesta Rouché-Frobenius — un sistema lineal tiene solución si y solo si el rango de la matriz de coeficientes coincide con el de la ampliada; enunciado entero en la sección 2.4 y en el apéndice F — sin necesidad de ningún teorema nuevo. Todo el contenido del lema está en la restricción $y \geqq 0$, es decir, en que los apoyos empujan pero no tiran. Geométricamente, se pasa del subespacio generado por las filas al cono de sus combinaciones no negativas. Los dos pueden tener puntos fuera; la diferencia es que el cono no permite invertir libremente el sentido de cada generador.
Y la lectura económica. Los mismos y_i admiten otra interpretación que será la del capítulo 4: precios. Cada fila es una restricción, cada y_i es lo que se paga por relajarla una unidad, y el certificado es un sistema de precios que explica el coste c como suma de lo que cuesta cada restricción. En el problema lineal de maximizar con restricciones $Ax \leqq b$, disponer de más recurso no empeora el mejor valor: de ahí el signo no negativo de estos multiplicadores. La holgura complementaria explica cuándo un recurso que sobra tiene precio sombra cero. Esas interpretaciones y sus condiciones se desarrollan al estudiar la dualidad.

La demostración necesita que el cono generado por las filas sea cerrado, y eso no es gratis: un cono generado por infinitos vectores puede no serlo. Para finitos vectores sí lo es, y esa es la pieza que falta.

Lema (el cono generado por finitos vectores es cerrado)**.** Sean $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$. El cono $C = \{\sum_{i=1}^m y_i a_i : \ y_i \geq 0\}$ es un conjunto convexo y cerrado.

Lo delicado es «cerrado», y la idea es esta: *un cono generado por muchos vectores es, en realidad, la unión de unos pocos conos «buenos»*. Los buenos son los generados por subconjuntos linealmente independientes, y esos son cerrados porque son la imagen de un ortante por una aplicación lineal inyectiva, que no deforma la topología. Como subconjuntos hay un número finito, la unión también es cerrada. Y para poder escribir el cono así hace falta una versión cónica de Caratheodory, que se prueba con el mismo movimiento de peso.
Paso 1: convexidad. Si $u = \sum y_i a_i$ y $v = \sum z_i a_i$ con $y, z \geqq 0$, entonces $\lambda u + (1-\lambda) v =$

$\sum(\lambda y_i + (1-\lambda)z_i)a_i$ con coeficientes no negativos.
Paso 2: Caratheodory cónico (el núcleo de la prueba). Una versión cónica del teorema de Caratheodory: *todo $b \in C$ es combinación positiva de un subconjunto linealmente independiente de $\{a_1, \ldots, a_m\}$*. En efecto, sea $b = \sum_{i\in I} y_i a_i$ con $y_i > 0$ e I lo más pequeño posible. Si los a_i, $i \in I$, fueran dependientes, habría μ_i no todos nulos con $\sum_{i\in I} \mu_i a_i = 0$; cambiando el signo de todos si hace falta, algún $\mu_i > 0$. Con $\alpha = \min\{y_i/\mu_i : \mu_i > 0\}$ se tiene $b = \sum_{i\in I}(y_i - \alpha\mu_i)a_i$ con coeficientes no negativos y al menos uno nulo: una expresión con menos índices, contra la minimalidad de I. Es el mismo movimiento de peso de la prueba de Caratheodory.
Paso 3: cada trozo bueno es cerrado, y hay finitos. Para cada subconjunto $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ con $\{a_i\}_{i\in I}$ linealmente independiente, sea $C_I = \{\sum_{i\in I} y_i a_i : \ y_i \geq 0\}$. La aplicación lineal $T_I : \mathbb{R}^{|I|} \to \mathbb{R}^n$, $y \mapsto \sum_{i\in I} y_i a_i$, es inyectiva (independencia lineal), luego es un homeomorfismo sobre su imagen, que es un subespacio cerrado; y $C_I = T_I(\mathbb{R}^{|I|}_{\geqq 0})$ es la imagen del ortante cerrado por ese homeomorfismo: cerrado. Por lo anterior, $C = \bigcup_I C_I$, unión de *finitos* cerrados, que es cerrada.
Dónde entra cada hipótesis. La finitud del sistema generador es todo: con infinitos vectores hay infinitos subconjuntos, la unión deja de ser finita y el resultado es falso. Por ejemplo, el cono generado por $(1, t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, contiene $n^{-2}(1, n, n^2) = (n^{-2}, n^{-1}, 1)$ para cada $n \geq 1$. Su límite $(0, 0, 1)$ no pertenece al cono: una combinación no negativa con primera coordenada cero tiene todos los pesos nulos y solo produce el origen. Por eso el lema de Farkas es un teorema sobre *matrices*, con un número finito de filas, y no un teorema sobre sistemas cualesquiera.

Simplificado al máximo: *el sistema (2) dice que c está en el cono de las filas, y el sistema (1) es el hiperplano que lo deja fuera*. Con eso, el teorema es la traducción literal de un hecho geométrico que ya está probado: o un punto está en un convexo cerrado, o hay un plano que lo separa de él. Todo el trabajo lo han hecho antes la proyección (que construye el plano) y el lema anterior (que garantiza que el cono es cerrado, sin lo cual no habría plano). Lo único propio de aquí es leer las dos consecuencias de la separación — que $\alpha \geq 0$ porque el cono contiene al origen, y que $Ap \leqq 0$ porque el cono contiene semirrectas enteras — y ver que son exactamente las dos condiciones del sistema (1).
La otra escritura que circula es (I) $Ax = b$, $x \geqq 0$; (II) $u^T A \leqq 0$, $u^T b > 0$, que es la del teorema con A traspuesta y $b = c$; aquí se escribe con la notación del enunciado. Llamemos $a_1, \ldots, a_m$ a las filas de A, de modo que $A^T y = \sum_i y_i a_i$.
Paso 1: los dos a la vez, imposible (una línea de álgebra). Supongamos que y resuelve (2) y x resuelve (1). Entonces $c^T x = (A^T y)^T x = y^T(Ax)$. El vector Ax tiene todas sus componentes ≤ 0 y el vector y todas ≥ 0, luego el producto escalar $y^T(Ax) = \sum_i y_i (Ax)_i \leq 0$. Pero (1) dice $c^T x > 0$: contradicción.
Paso 2: si (2) falla, (1) se cumple; separar el punto del cono (el núcleo de la prueba). Supongamos que (2) no tiene solución y probemos que (1) sí. Que (2) no tenga solución significa que $c \notin C = \{A^T y : \ y \geqq 0\}$, el cono generado por las filas. Por el lema anterior, C es convexo y cerrado, y no es vacío ($0 \in C$). El teorema de separación de un punto y un

convexo cerrado da $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$, y $\alpha \in \mathbb{R}$ con

$$p^T c > \alpha \qquad \text{y} \qquad p^T v \leq \alpha \text{ para todo } v \in C.$$

Vamos a ver que $x = p$ resuelve (1). Dos observaciones:

- Como $0 \in C$ (tomar $y = 0$), $p^T 0 = 0 \leq \alpha$, luego $\alpha \geq 0$ y por tanto $c^T p = p^T c > \alpha \geq 0$. Ya tenemos $c^T x > 0$.
- Supongamos que alguna componente de Ap fuera positiva: $(Ap)_i = a_i^T p > 0$ para algún i. El vector $v(\lambda) = \lambda a_i$ está en C para todo $\lambda \geq 0$ (tomar $y = \lambda e_i$), luego $p^T v(\lambda) = \lambda\, a_i^T p \leq \alpha$ para todo $\lambda \geq 0$. Pero el miembro izquierdo tiende a $+\infty$ cuando $\lambda \to \infty$, y α es un número fijo: contradicción. Luego $a_i^T p \leq 0$ para todo i, es decir, $Ap \leqq 0$.

Por tanto $x = p$ cumple $Ax \leqq 0$ y $c^T x > 0$: es solución de (1).

Dónde entra cada hipótesis, y qué propiedad del cono usa cada cosa. El paso 1 usa únicamente los signos: $y \geqq 0$ y $Ax \leqq 0$. En el paso 2, la separación necesita que C sea convexo y *cerrado*, y de ahí que hiciera falta el lema anterior; que C contenga al *origen* da $\alpha \geq 0$, sin lo cual no se concluiría $c^T p > 0$; y que C contenga la *semirrecta* λa_i entera es lo que hace estallar la desigualdad y fuerza $a_i^T p \leq 0$. Las dos últimas son propiedades de los conos y no de los convexos en general: con un convexo cerrado cualquiera en lugar de C, la prueba se detiene.

Para reconstruirla. Los dos a la vez, imposible: $c^T x = y^T(Ax) \leq 0$. Alguno, sí: si c no está en el cono de las filas, que es convexo y cerrado, sepárelo; el vector normal p es la solución de (1), y sus dos propiedades salen de que el cono contiene el origen ($\alpha \geq 0$, luego $c^T p > 0$) y las semirrectas ($\lambda a_i^T p$ acotado, luego $Ap \leqq 0$).

EXPLÍCATE. *La prueba usa que el cono contiene al origen y que contiene a cada semirrecta λa_i. ¿Qué propiedad de los conos es esa, en general? ¿Sería válida la demostración si C fuera un convexo cerrado cualquiera en vez de un cono?*

Farkas con números: el certificado del ingeniero. Conviene ver el lema funcionando en el caso más pequeño que conserva la pregunta con que se abrió la sección. Dos máquinas fabrican dos productos, P y Q. Una hora de la máquina 1 da una unidad de P y ninguna de Q; una hora de la máquina 2 da una unidad de cada uno. Si z_1, z_2 son las horas de cada máquina, cumplir exactamente un encargo b es resolver

$$Mz = b, \qquad z \geqq 0, \qquad \text{con} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde cada columna de M es lo que produce una hora de una máquina. Es la otra escritura del lema, la citada al empezar la demostración: (I) $Mz = b$, $z \geqq 0$; (II) $u^T M \leqq 0$, $u^T b > 0$. Lo que las dos máquinas pueden producir juntas es el cono generado por las columnas $(1,0)$ y $(1,1)$, que es la región sombreada de la figura 2.11: las producciones con *al menos tanto P como Q*, porque cada unidad de Q sale de la máquina 2 y viene acompañada de una de P.

Un encargo posible. Para $b' = (3,1)$, la segunda ecuación da $z_2 = 1$ y la primera $z_1 + 1 = 3$, es decir, $z_1 = 2$: dos horas de la primera máquina y una de la segunda. El punto b' está dentro del cono.

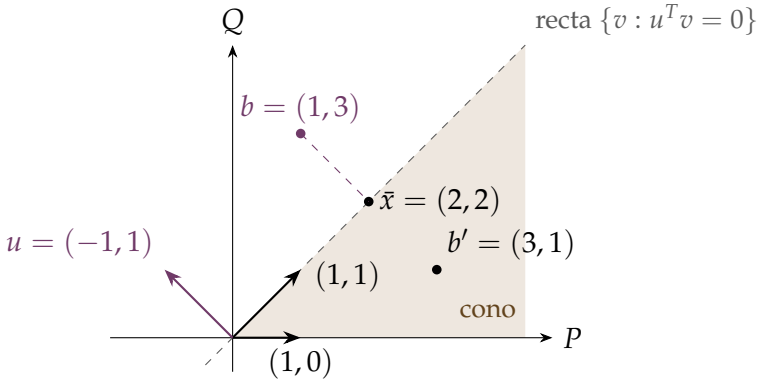


Figura 2.11: Farkas con números. El cono de las columnas de M (sombreado) son las producciones con al menos tanto P como Q. El encargo b' está dentro. El encargo b está fuera; su proyección sobre el cono es $\bar{x} = (2,2)$, y $u = b - \bar{x} = (-1,1)$ es el certificado: la recta discontinua, perpendicular a u, deja el cono a un lado y b al otro.

Un encargo imposible, y su certificado. Para $b = (1,3)$, la matriz M es invertible y el sistema tiene una sola solución, $z_2 = 3$ y $z_1 = 1 - 3 = -2$: pide horas negativas, luego (I) no tiene solución. El lema dice que entonces existe un certificado, y aquí se encuentra mirando la figura: $u = (-1,1)$. Comprobarlo cuesta dos productos escalares,

$$u^T M = \big(-1,\ -1+1\big) = (-1,\ 0) \leqq 0, \qquad u^T b = -1 + 3 = 2 > 0.$$

Se lee como un sistema de precios. Se valora cada unidad de P en -1 y cada unidad de Q en $+1$. Con esos precios una hora de la máquina 1 vale -1 y una de la máquina 2 vale 0: ninguna hora vale más de cero, así que ninguna combinación de horas no negativas puede valer más de cero. El encargo vale 2. No hace falta repetir ninguna cuenta del ingeniero: esa es la prueba corta que pedía su jefe. En palabras del taller, tres unidades de Q arrastran al menos tres de P, y el encargo solo admite una.

De dónde sale u: la demostración, con números. La prueba del lema no adivina el certificado: lo construye separando b del cono, y separa proyectando. El punto del cono más cercano a $b = (1,3)$ está en el borde de dirección $(1,1)$: proyectar sobre esa semirrecta da $\frac{1+3}{2}(1,1) = (2,2)$, a distancia $\sqrt{2}$, mientras que el borde de dirección $(1,0)$ queda a distancia 3. Así que $\bar{x} = (2,2)$ y la normal es $p = b - \bar{x} = (-1,1)$, con nivel $\alpha = p^T\bar{x} = -2 + 2 = 0$. La caracterización del teorema de la proyección se comprueba en todo el cono de una vez: un punto del cono es $v = s(1,0) + t(1,1)$ con $s, t \geq 0$, y $p^T(v - \bar{x}) = p^T v - 0 = -(s+t) + t = -s \leq 0$. Y $p^T b = 2 > \alpha = 0$. La normal p es exactamente el u de antes: la demostración es un procedimiento, y con números se puede seguir a mano.

Y en la escritura del enunciado. Con $A = M^T$, cuyas filas $a_1 = (1,0)$ y $a_2 = (1,1)$ son lo que produce una hora de cada máquina, $c = b$ y $x = u$, el certificado cumple $Ax = (-1,0) \leqq 0$ y $c^T x = 2 > 0$: es el sistema (1). Para el encargo posible, $c' = (3,1)$, el sistema (2) tiene la solución $y = (2,1)$, y la mitad fácil del lema se ve con esos pesos: para cualquier x,

$$c'^T x = 3x_1 + x_2 = 2\,(a_1^T x) + 1 \cdot (a_2^T x),$$

que es ≤ 0 en cuanto $a_1^T x \leq 0$ y $a_2^T x \leq 0$. Ningún x puede certificar la imposibilidad de un encargo que sí se puede cumplir.

DE DÓNDE VIENE: FARKAS, LA MECÁNICA Y LOS TEOREMAS DE ALTERNATIVA

Gyula Farkas publicó el lema en 1902, en un trabajo sobre el principio de las velocidades virtuales de la mecánica analítica (la condición de equilibrio de un sistema con ligaduras dadas por desigualdades, como un cuerpo apoyado sobre una mesa). No estaba pensando en optimización: la programación lineal tardaría cuarenta y cinco años en existir. Cuando Dantzig y von Neumann formularon la dualidad en 1947, se encontraron con que el resultado que necesitaban ya estaba demostrado. Resultados con la estructura «uno y solo uno de los dos sistemas tiene solución» se llaman *teoremas de alternativa*, y hay una familia entera (Gordan 1873, Stiemke 1915, Motzkin 1936, Tucker 1956); todos se deducen de Farkas o se demuestran como él, por separación.

2.2.6 Consecuencias: Gordan, el corolario y el enunciado de Tucker

Teorema (de Gordan)**.** Sea $A \in M_{m\times n}$. Uno y solo uno de los siguientes sistemas tiene solución:
(1) $Ax < 0$ para algún $x \in \mathbb{R}^n$; o
(2) $A^T y = 0$, $y \geq 0$ para algún $y \in \mathbb{R}^m$ (es decir, $y \geqq 0$, $y \neq 0$).

• CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

Geométricamente: o bien existe un vector x que forma ángulo estrictamente obtuso con *todas* las filas de A, o bien el origen está en la envolvente convexa de las filas (normalizando y para que sume uno). Un dibujo en el plano: si las filas apuntan todas a un mismo semiplano abierto, hay un x opuesto a todas; si no, «rodean» al origen y una combinación convexa suya lo alcanza.

Gordan no es un teorema nuevo: es Farkas mirado con una variable de más. El obstáculo es que Farkas solo entiende desigualdades *no estrictas* y Gordan pide una estricta; el remedio es *comprar la estrictez con una variable que mida cuánto de estricta es*. Si $Ax < 0$, hay un margen $s > 0$ por debajo de cero en todas las componentes, y decir «$Ax < 0$» es decir «existe un margen positivo s con $Ax + s\mathbf{1} \leqq 0$». Escrito así, ya es un sistema del tipo que Farkas sabe leer, y su alternativa resulta ser, palabra por palabra, la de Gordan.

Queremos ver $Ax < 0$ como un sistema del tipo (1) de Farkas, que es $A'x' \leqq 0$, ${c'}^T x' > 0$. La dificultad es que la desigualdad estricta de Gordan no cabe en $\leqq$. El truco es introducir una variable s que mida «cuánto de estricta»: $Ax < 0$ tiene solución si y solo si existen x y $s > 0$ con $Ax + s\mathbf{1} \leqq 0$, donde $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$. (Si $Ax < 0$, tomar $s = \min_i(-(Ax)_i) > 0$; si $Ax + s\mathbf{1} \leqq 0$ con $s > 0$, entonces $(Ax)_i \leq -s < 0$.)

El núcleo: aplicar Farkas a la matriz ampliada. Consideremos la matriz $A' = [A \mid \mathbf{1}] \in M_{m\times(n+1)}$, la variable $x' = (x, s) \in \mathbb{R}^{n+1}$ y el vector $c' = (0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$. El lema de Farkas para A' y c' dice que uno y solo uno tiene solución:

(1′) $A'x' \leqq 0$ y ${c'}^T x' > 0$; es decir, $Ax + s\mathbf{1} \leqq 0$ y $s > 0$; que, por lo dicho, equivale a $Ax < 0$: el sistema (1) de Gordan.

(2′) ${A'}^T y = c'$ e $y \geqq 0$; escribiendo ${A'}^T = \begin{bmatrix} A^T \\ \mathbf{1}^T \end{bmatrix}$, es $A^T y = 0$ y $\mathbf{1}^T y = \sum_i y_i = 1$, con $y \geqq 0$. Un y así cumple $y \geq 0$ (no es cero porque suma uno): es solución del sistema (2) de Gordan. Recíprocamente, si y resuelve (2) de Gordan, $y / \sum_i y_i$ resuelve (2′) (la

suma es positiva porque $y \geq 0$).
Luego (1) de Gordan tiene solución si y solo si (1′) la tiene, y (2) si y solo si (2′); y como exactamente uno de (1′), (2′) tiene solución, exactamente uno de (1), (2) la tiene.
Dónde entra cada hipótesis. La columna añadida es $\mathbf{1}$, y tiene que ser ella: es la que, al pasar al sistema traspuesto, produce la ecuación $\sum_i y_i = 1$ y con ella la normalización que impide $y = 0$. Ahí está la razón de que el enunciado de Gordan pida $y \geq 0$ (alguna componente positiva) y no $y \geqq 0$: sin la exclusión del cero, el sistema (2) lo resolvería siempre $y = 0$ y el teorema no diría nada.
Para reconstruirla. $Ax < 0$ equivale a $Ax + s\mathbf{1} \leqq 0$ con $s > 0$. Amplíese la matriz con la columna $\mathbf{1}$ y tómese $c' = (0, \ldots, 0, 1)$: Farkas para $[A \mid \mathbf{1}]$ y c' da, en un lado, el sistema (1) de Gordan y, en el otro, $A^T y = 0$ con $\mathbf{1}^T y = 1$, que es el (2) normalizado.

Corolario. Sean $A \in M_{m\times n}$ y $c \in \mathbb{R}^n$. Uno y solo uno de los siguientes sistemas tiene solución:
(1) $Ax \geqq 0$, $x \geqq 0$, $c^T x < 0$ para algún $x \in \mathbb{R}^n$; o
(2) $A^T y \leqq c$, $y \geqq 0$ para algún $y \in \mathbb{R}^m$.

• CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

Segundo truco de la familia, y tan mecánico como el primero: *una desigualdad se convierte en igualdad pagando una variable de holgura*. Con esa holgura, el sistema (2) del corolario se escribe como el sistema (2) del lema para una matriz ampliada con la identidad debajo; y al traducir el otro lado del lema aparece, tras un cambio de signo, el sistema (1) del corolario. No hay geometría nueva: es Farkas escrito en otras coordenadas.
El sistema (2) pide $A^T y \leqq c$ con $y \geqq 0$. Eso equivale a que exista $s \in \mathbb{R}^n$ con $A^T y + s = c$, $y \geqq 0$, $s \geqq 0$ (la holgura $s = c - A^T y$ recoge la diferencia). En forma matricial: $[A^T \mid I_n] \begin{pmatrix} y \\ s \end{pmatrix} = c$ con $(y, s) \geqq 0$. Esto es el sistema (2) del lema de Farkas para la matriz $M = \begin{bmatrix} A \\ I_n \end{bmatrix} \in M_{(m+n)\times n}$ (cuya traspuesta es $[A^T \mid I_n]$) y el vector c.
El núcleo: leer el otro sistema y cambiar el signo. El sistema (1) del lema de Farkas para M y c es: $Mz \leqq 0$, $c^T z > 0$, es decir, $Az \leqq 0$, $z \leqq 0$, $c^T z > 0$. Poniendo $x = -z$: $Ax \geqq 0$, $x \geqq 0$, $c^T x < 0$, que es exactamente el sistema (1) del corolario.
Por el lema de Farkas aplicado a M y c, exactamente uno de los dos tiene solución.
Para reconstruirla. Añádase una holgura $s \geqq 0$ para convertir $A^T y \leqq c$ en $A^T y + s = c$, apílese $M = \left(\begin{smallmatrix} A \\ I \end{smallmatrix}\right)$ y aplíquese Farkas a M y c; el otro sistema, con $x = -z$, es el (1) del corolario.

Observación. Hay otra escritura del corolario que circula con frecuencia: uno y solo uno tiene solución, (I) $Ax \leqq b$, $x \geqq 0$; (II) $u^T A \geqq 0$, $u \geqq 0$, $u^T b < 0$. Es el mismo enunciado con los papeles de A y A^T intercambiados y b en el lugar de c: (II) es el sistema (1) del corolario para A^T y (I) es su sistema (2). Conviene saber reconocer las dos escrituras, porque las dos circulan y el enunciado que se encuentre puede ser cualquiera de ellas.

Cómo se deduce una alternativa nueva a partir de Farkas. Gordan, el corolario y el ejercicio de las variables libres del final de la sección son tres teoremas de alternativa distintos demostrados con el mismo método. Conviene tenerlo destilado, porque con él se obtiene cualquier otro miembro de la familia. Toda demostración de «uno y solo uno» tiene dos mitades, y cada mitad tiene su herramienta.

Primera mitad: no pueden tener solución los dos. Una cuenta de signos. Se supone que los dos sistemas tienen solución, se multiplica una relación del primero por la solución del segundo, y los signos conocidos chocan. En el corolario, por ejemplo: si $Ax \geqq 0$, $x \geqq 0$ y $A^T y \leqq c$, $y \geqq 0$, multiplicar $A^T y \leqq c$ por $x^T \geqq 0$ da $y^T Ax \leq c^T x$, y $y^T(Ax) \geq 0$ porque los dos vectores son no negativos; luego $c^T x \geq 0$, y el sistema (1) pedía $c^T x < 0$. Es una línea y no usa ningún teorema.

Segunda mitad: alguno tiene solución. Llevar un sistema a la forma de Farkas. Se toma el sistema que se parece a «encontrar un vector no negativo que cumpla unas ecuaciones», se lleva a la forma exacta de uno de los dos sistemas del lema con los movimientos de la tabla, se escribe el otro sistema que da Farkas y se traduce de vuelta, bloque a bloque. No hay que separar nada: la separación ya la hizo la demostración del lema.

Lo que tiene el sistema	**Qué se hace, y qué columnas entran en la matriz**	**Qué aparece en el otro sistema**	**Dónde se ha usado**
una desigualdad $\leq$ donde Farkas quiere $=$	se suma una holgura $s \geqq 0$; entran las columnas de la identidad	una condición de signo sobre la otra incógnita	corolario
una variable libre	se parte, $y = y^+ - y^-$; entran las columnas B y $-B$	una igualdad, $u^T B = 0$	variables libres
una desigualdad estricta, o un «no nulo»	se añade una variable $s > 0$ que mide el margen; entra una columna de unos	la normalización $\sum_i y_i = 1$	Gordan
una desigualdad en el sentido contrario	se cambia de signo la variable, $x = -z$; su columna cambia de signo	el signo contrario	corolario

Leída por columnas, la tabla dice una regla que merece retenerse, porque es la que servirá para escribir el problema dual en el capítulo 4: *una incógnita no negativa en un sistema produce una desigualdad en el otro; una incógnita libre produce una igualdad; y al revés, una ecuación produce una incógnita libre y una desigualdad, una incógnita con signo.*

Un ejemplo del método, entero. Se quiere probar que, dados $A \in M_{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, uno y solo uno de estos sistemas tiene solución: (I) $Ax \leqq b$, con $x \in \mathbb{R}^n$ libre; (II) $v \geqq 0$, $v^T A = 0$, $v^T b < 0$.

No los dos. Si $Ax \leqq b$ y $v \geqq 0$, multiplicar por v^T conserva el sentido: $v^T Ax \leq v^T b < 0$. Pero $v^T A = 0$ da $v^T Ax = 0$, y sería $0 < 0$.

Alguno. El sistema (I) tiene una incógnita libre y desigualdades. Dos movimientos de la tabla lo llevan a la forma de Farkas: se parte $x = x^+ - x^-$ y se suma una holgura $s \geqq 0$,

$$Ax \leqq b \text{ con } x \text{ libre} \iff [A \mid -A \mid I] \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ s \end{pmatrix} = b, \qquad (x^+, x^-, s) \geqq 0.$$

Es el sistema $Mz = b$, $z \geqq 0$ de la escritura (I)–(II) del lema, con $M = [A \mid -A \mid I]$. Si no tiene solución, Farkas da u con $u^T M \leqq 0$ y $u^T b > 0$. Traducido bloque a bloque: $u^T A \leqq 0$ y $-u^T A \leqq 0$, que juntas son $u^T A = 0$ (la variable libre ha producido una igualdad); $u^T I = u^T \leqq 0$ (la holgura ha producido un signo); y $u^T b > 0$. Con el tercer movimiento, $v = -u$, queda $v \geqq 0$, $v^T A = 0$ y $v^T b < 0$: el sistema (II).

El certificado tiene una lectura que se entiende sin ningún teorema: v dice con qué pesos no negativos hay que sumar las desigualdades de (I) para que desaparezca x ($v^T A = 0$) y quede $0 \leq v^T b < 0$, una contradicción. Con $x \leq 1$ y $-x \leq -2$, por ejemplo, $v = (1, 1)$: sumar las dos desigualdades da $0 \leq -1$.

Dónde se falla al deducir una alternativa.

- En confundir A con A^T. Antes de nada se escriben las dimensiones: la incógnita de un sistema y la del otro viven en espacios distintos ($\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$), y si un producto no encaja, la traspuesta está mal puesta.
- En dar por probada la segunda mitad con la cuenta de signos. Esa cuenta solo dice que los dos sistemas no pueden tener solución a la vez; que siempre tenga solución uno de ellos es lo que necesita a Farkas.
- En olvidar la normalización. Cuando un sistema pide un vector no nulo, la columna de unos es la que impide que el vector cero lo resuelva; sin ella la alternativa es falsa.
- En confundir $\geqq$, $\geq$ y $<$. Cambiar una desigualdad estricta por una que no lo es cambia el teorema, como separa a Gordan de Farkas.
- En perder un signo al deshacer $x = -z$ o al multiplicar una fila por -1 para darle la vuelta a una desigualdad. Se comprueba al final sustituyendo en la cuenta de signos de la primera mitad.
- En citar el teorema que se quiere deducir. Probar Gordan citando a Gordan es circular: el método cita solo a Farkas.

Con los teoremas de alternativa en la mano ya se puede enunciar, al cerrar este apartado, el resultado que el capítulo de dualidad necesitará y cuya demostración ocupa el anexo:

Teorema (de Tucker)**.** Si $A \in M_{n\times n}$ es antisimétrica ($A^T = -A$), entonces existe $w \in \mathbb{R}^n$, $w \geqq 0$, tal que $Aw \geqq 0$ y además $Aw + w > 0$.

La sección siguiente está dedicada a él.

Qué se ha ganado. La pregunta del ingeniero tiene respuesta completa. Cuando un sistema de ecuaciones con incógnitas no negativas no tiene solución, existe siempre un certificado corto, un vector u con $u^T M \leqq 0$ y $u^T b > 0$, que se comprueba con dos productos. Farkas garantiza que existe, la proyección lo construye, y el método de las dos mitades fabrica la alternativa de cualquier otro sistema lineal. De paso ha quedado probado algo más general: un convexo cerrado es la intersección de los semiespacios que lo contienen. Quedan dos cosas abiertas. La primera es qué ocurre cuando esos semiespacios son finitos, que es el caso de los poliedros de la sección 2.4. La segunda es qué significan los vectores u cuando el sistema no es imposible sino un problema de optimización: serán las variables duales del capítulo 4, y el teorema de Tucker es la pieza que allí hará falta.

Ejercicios

Ejercicio 2.5. *El cono de las columnas es convexo y cerrado* 24-25

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $n \geq m$ y rango$(A) = m$. Probar que el conjunto $S = \{y \in \mathbb{R}^m : \ y = Ax, \ x \geqq 0\}$ es un cono convexo. Probar también que es cerrado, y discutir para qué sirve la hipótesis sobre el rango.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Un cono es un conjunto K tal que $\lambda y \in K$ para todo $y \in K$ y $\lambda \geq 0$. Comprueba las dos cosas, cono y convexo, directamente con la definición de S.*
2. *Para «cerrado», S es exactamente el cono generado por las columnas de A: aplica el lema añadido de esta sección.*

Resolución. *La idea.* Las dos primeras propiedades se heredan del ortante $\{x \geqq 0\}$ a través de la aplicación lineal $x \mapsto Ax$: lo que se quiere hacer con los y se hace antes con los x, dentro del ortante, y después se aplica A. La tercera, «cerrado», no se hereda así, y es la que necesita el lema del cono finitamente generado.
Cono. Sea $y \in S$, es decir, $y = Ax$ con $x \geqq 0$, y sea $\lambda \geq 0$. Entonces $\lambda y = A(\lambda x)$ y $\lambda x \geqq 0$ (producto de un escalar no negativo por un vector de componentes no negativas). Luego $\lambda y \in S$.
Convexo. Sean $y_1 = Ax_1$ e $y_2 = Ax_2$ con $x_1, x_2 \geqq 0$, y $\lambda \in [0,1]$. Entonces $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 = A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$, y el vector $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ tiene componentes no negativas porque es combinación convexa de dos vectores con componentes no negativas. Luego la mezcla está en S.
Cerrado. Si $a_1, \ldots, a_n$ son las columnas de A, entonces $Ax = \sum_j x_j a_j$, y $S = \{\sum_j x_j a_j : \ x_j \geq 0\}$ es el cono generado por las columnas. El lema añadido dice que es cerrado.
Sobre el rango. Ninguno de los tres argumentos ha usado que rango$(A) = m$. Esa hipótesis dice que las columnas generan todo $\mathbb{R}^m$ como espacio vectorial, y por tanto que el cono S tiene interior no vacío en $\mathbb{R}^m$ (contiene una combinación positiva de m columnas independientes, y alrededor de ella hay una bola); también es la hipótesis estándar de la programación lineal (capítulo 3), donde S es el conjunto de los vectores de recursos b para los que el problema $Ax = b$, $x \geqq 0$ es factible. Es decir, S es justamente el conjunto de los b para los que *no* existe el certificado de Farkas.

Otra vía (con el lema de las operaciones). S es la imagen del ortante $\{x \geqq 0\}$, que es convexo, por la aplicación lineal $x \mapsto Ax$; en el lema sobre operaciones con convexos se vio que la imagen lineal de un convexo es convexa. Y $\lambda S = S$ para $\lambda > 0$ porque $\lambda \cdot \{x \geqq 0\} = \{x \geqq 0\}$.
Que un cono sea convexo se comprueba con dos cálculos de una línea. Lo que no es de una línea es que sea cerrado, y es justamente lo que Farkas necesita. Y queda la lectura que importa: S es el conjunto de recursos b para los que hay un plan factible, y su complementario es donde vive el certificado de imposibilidad.
Dónde se falla. En tres sitios. Primero, en usar la hipótesis del rango donde no hace falta, o en creer que sin ella S no sería convexo: S es un cono convexo para cualquier matriz, incluida la nula. Segundo, en probar solo una de las dos propiedades: «cono» y «convexo» son independientes, porque la unión de dos semirrectas es un cono no convexo y un segmento

es un convexo que no es cono. Tercero, en despachar «cerrado» con que S es la imagen de un cerrado por una aplicación lineal. La imagen lineal de un cerrado puede no serlo: el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \geq 1,\ x_1 > 0\}$ del primer ejercicio de la sección anterior es cerrado, y su proyección sobre el primer eje es la semirrecta abierta $(0, +\infty)$, porque el punto $(1/k, k)$ está en él para cada $k \geq 1$. El ortante se salva porque tiene finitos generadores.

Ejercicio 2.6. *El teorema de Gordan como aplicación de Farkas* TERCERA DE 2018 Y MAY 2015

Sea $A \in M_{n\times m}$. Demostrar que uno y solo uno de los siguientes sistemas tiene solución:
(a) $A^T y < 0$, $y \in \mathbb{R}^n$;
(b) $Ap = 0$, $p \geqq 0$, $p \neq 0$, $p \in \mathbb{R}^m$.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Compara con el enunciado del teorema de Gordan de esta sección: es el mismo con A y A^T intercambiadas. Reescribe uno en términos del otro antes de nada.*
2. *Lo que se pide es la* demostración *a partir de Farkas, no la cita del teorema de Gordan: reproduce el truco de la variable s con la matriz adecuada.*

Resolución. *La idea.* Es el teorema de Gordan con A^T en el lugar de A, y se deduce con el método de las dos mitades. La mitad de «no los dos» es una cuenta de signos. En la otra, el sistema (a) tiene una desigualdad estricta, que Farkas no entiende; se compra con una variable $s > 0$ y una columna de unos, el tercer movimiento de la tabla de la sección, y la ecuación $\sum_i p_i = 1$ que aparece al otro lado es la que impide que $p = 0$ resuelva (b).
Sea $B = A^T \in M_{m\times n}$. El sistema (a) es $By < 0$ con $y \in \mathbb{R}^n$; el sistema (b) es $B^T p = 0$, $p \geq 0$ con $p \in \mathbb{R}^m$. Son exactamente los sistemas (1) y (2) del teorema de Gordan para la matriz B. Como lo que se pide es demostrarlo, lo hacemos con Farkas, sin citar a Gordan.
No los dos. Si y resuelve (a) y p resuelve (b), entonces $p^T(A^T y) = (Ap)^T y = 0$. Pero $A^T y < 0$ (todas las componentes negativas) y $p \geq 0$ (no negativo y no nulo) dan $p^T(A^T y) = \sum_i p_i (A^T y)_i < 0$: al menos un $p_i > 0$ multiplica a una componente estrictamente negativa y los demás sumandos son ≤ 0. Contradicción.
Alguno sí. Supongamos que (b) no tiene solución y encontremos una de (a). Definimos $B' = [A^T \mid \mathbf{1}] \in M_{m\times(n+1)}$ y $c' = (0, \ldots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$, con $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^m$ el vector de unos. Por el lema de Farkas, uno y solo uno tiene solución:
(1′) $B'(y, s) \leqq 0$ y ${c'}^T(y, s) > 0$, es decir, $A^T y + s\mathbf{1} \leqq 0$ y $s > 0$;
(2′) ${B'}^T p = c'$ y $p \geqq 0$, es decir, $Ap = 0$, $\mathbf{1}^T p = 1$ y $p \geqq 0$.
Si (2′) tuviera solución p, ese p cumpliría $Ap = 0$, $p \geqq 0$ y $p \neq 0$ (suma uno): sería solución de (b), que hemos supuesto sin solución. Luego (2′) no tiene solución y (1′) sí: existen y y $s > 0$ con $A^T y \leqq -s\mathbf{1}$, es decir, $(A^T y)_i \leq -s < 0$ para todo i: $A^T y < 0$. Ese y resuelve (a).

Otra vía (geométrica, para entender qué se ha probado). Las columnas $a_1, \ldots, a_m$ de A son vectores de $\mathbb{R}^n$. El sistema (b) dice que el origen es combinación convexa de ellas (normalizando p): $0 \in H(\{a_1, \ldots, a_m\})$. El sistema (a) dice que hay un hiperplano por el origen, $\{z : y^T z = 0\}$, que deja *todas* las columnas en su lado abierto negativo. Gordan es entonces: o el origen está en la envolvente convexa de las columnas, o se puede separar estrictamente de ella. Es la separación de un punto (el origen) y un convexo compacto (la envolvente de finitos puntos), en la que la separación estricta se obtiene gratis porque el

convexo es compacto.
Los teoremas de alternativa se deducen de Farkas cambiando la matriz: se añade una columna de unos y una variable s para convertir «< 0» en «$\leqq -s,\ s > 0$». Y hay que leer bien quién es A y quién A^T en cada enunciado, porque un texto y otro los intercambian.
Dónde se falla. En las dimensiones: aquí $A \in M_{n\times m}$, y vive en $\mathbb{R}^n$ y p en $\mathbb{R}^m$, y la matriz que hace el papel de la de Gordan es A^T, no A; con A los productos no encajan salvo que A sea cuadrada, y aun entonces el teorema sería otro. En la cuenta de signos, en concluir solo $p^T(A^T y) \leq 0$: la contradicción necesita la desigualdad estricta, y esa sale de que p tiene alguna componente positiva y $A^T y$ las tiene todas negativas. Y en olvidar $p \neq 0$ en (b): sin esa condición, $p = 0$ resolvería siempre (b) y los dos sistemas podrían tener solución a la vez.

Ejercicio 2.7. *Farkas con variables libres y no negativas a la vez* 2018, GRUPO A

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times l}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Probar que uno y solo uno de los siguientes sistemas tiene solución:
(1) $Ax + By = b$, $x \geqq 0$, con $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^l$ (libre);
(2) $u^T A \leqq 0$, $u^T B = 0$, $u^T b > 0$, con $u \in \mathbb{R}^m$.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Una variable libre y se escribe como diferencia de dos no negativas, $y = y^+ - y^-$. Con eso el sistema (1) es un «$Mz = b$, $z \geqq 0$».*
2. *Aplica Farkas en la otra escritura, (I) $Mz = b$, $z \geqq 0$; (II) $u^T M \leqq 0$, $u^T b > 0$, y traduce (II) columna a columna.*

Resolución. *La idea.* El sistema (1) casi tiene la forma $Mz = b$, $z \geqq 0$ del lema; solo le estorba la variable libre y. Se parte en dos no negativas, que es el segundo movimiento de la tabla de la sección, y entonces Farkas da el certificado; lo único que queda es leer $u^T M \leqq 0$ bloque a bloque.
Reescritura de (1). Todo $y \in \mathbb{R}^l$ se escribe como $y = y^+ - y^-$ con $y^+, y^- \geqq 0$ (por ejemplo $y_i^+ = \max(y_i, 0)$, $y_i^- = \max(-y_i, 0)$), y recíprocamente cualquier diferencia de dos vectores no negativos es un y libre. Luego (1) tiene solución si y solo si tiene solución

$$\text{(I)} \qquad Mz = b,\ z \geqq 0, \qquad \text{con } M = [A \mid B \mid -B] \in M_{m\times(n+2l)},\ z = (x, y^+, y^-).$$

Farkas para M. En esa otra escritura (que es el lema de esta sección con la matriz traspuesta), uno y solo uno tiene solución: (I) $Mz = b$, $z \geqq 0$; (II) $u^T M \leqq 0$, $u^T b > 0$. Desarrollamos (II) por bloques: $u^T M = [u^T A \mid u^T B \mid -u^T B] \leqq 0$ dice tres cosas: $u^T A \leqq 0$, $u^T B \leqq 0$ y $-u^T B \leqq 0$. Las dos últimas juntas son $u^T B = 0$. Luego (II) es exactamente el sistema (2) del enunciado. Como (1) equivale a (I) y (2) es (II), uno y solo uno de (1), (2) tiene solución.
Comprobación directa de que no pueden darse los dos, que conviene escribir aunque ya esté contenida en Farkas: si $Ax + By = b$ con $x \geqq 0$ y u cumple (2), entonces $u^T b = u^T Ax + u^T By = (u^T A)x + (u^T B)y \leq 0 + 0 = 0$, porque $u^T A \leqq 0$ y $x \geqq 0$ dan un producto ≤ 0, y $u^T B = 0$. Pero (2) exige $u^T b > 0$.
Dónde se falla. En quedarse con $u^T B \leqq 0$ por olvidar el bloque $-B$: con esa desigualdad el certificado no anula el término $(u^T B)y$, porque y puede tener cualquier signo, y la cuenta de «no los dos» deja de cerrar. En partir también la x, que ya es no negativa: no es un error, pero

añade columnas que no aportan nada. Y en darle la vuelta a la desigualdad del certificado: en esta escritura el certificado cumple $u^T b > 0$, y la escritura del corolario lo pide con < 0; se decide mirando cuál de las dos se ha aplicado.

QUÉ DEJA. Las variables libres se parten en dos no negativas, y en el certificado eso se traduce en una *igualdad* ($u^T B = 0$) donde las no negativas dan una desigualdad ($u^T A \leqq 0$). Esta correspondencia (variable libre $\leftrightarrow$ restricción de igualdad, variable no negativa $\leftrightarrow$ desigualdad) es la regla de formación del problema dual del capítulo 4, vista aquí por primera vez.

Ejercicio 2.8. *Calcular una proyección y un hiperplano separador*

Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 + 2x_2 \leq 2, \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0\}$ y sea $y = (2, 2)$. Calcula la proyección $\bar{x}$ de y sobre S, comprueba la caracterización del teorema de la proyección en los tres vértices de S, y escribe un hiperplano que separe fuertemente y de S.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Dibuja S (un triángulo) e y. La proyección está en el lado más cercano; proyecta primero sobre la recta que lo contiene y comprueba que el resultado cae dentro del lado.*
2. *El hiperplano separador de la demostración es el perpendicular a $y - \bar{x}$ por $\bar{x}$.*

Resolución. *La idea.* El punto más cercano está en la frontera, y el dibujo dice en qué lado. Se proyecta sobre la recta de ese lado con la fórmula del pie de la perpendicular y se comprueba que el pie cae dentro del lado; la caracterización del teorema, comprobada en los vértices, certifica que el punto encontrado es el bueno.
El triángulo S tiene vértices $(0,0)$, $(2,0)$ y $(0,1)$, y el punto $y = (2,2)$ queda por encima del lado $x_1 + 2x_2 = 2$. Proyectamos y sobre la recta $x_1 + 2x_2 = 2$, de normal $p = (1,2)$: el punto de la recta más cercano es $y - tp$ con t tal que $p^T(y - tp) = 2$, es decir, $6 - 5t = 2$, $t = \frac{4}{5}$, y sale $\bar{x} = (2,2) - \frac{4}{5}(1,2) = (\frac{6}{5}, \frac{2}{5})$. Está dentro del lado (ambas coordenadas positivas y $\frac{6}{5} + \frac{4}{5} = 2$), luego es un punto de S, y es la proyección sobre S: cualquier otro punto de S está en el semiplano $x_1 + 2x_2 \leq 2$, y la distancia de y a ese semiplano se alcanza solo en $\bar{x}$.
Caracterización. $y - \bar{x} = (\frac{4}{5}, \frac{8}{5}) = \frac{4}{5}(1,2)$. Para los vértices: con $x = (0,0)$, $(y - \bar{x})^T(x - \bar{x}) = \frac{4}{5}(1,2)^T(-\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}) = \frac{4}{5}(-\frac{6}{5} - \frac{4}{5}) = -\frac{8}{5} \leq 0$; con $x = (2,0)$: $\frac{4}{5}(1,2)^T(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}) = \frac{4}{5} \cdot 0 = 0 \leq 0$; con $x = (0,1)$: $\frac{4}{5}(1,2)^T(-\frac{6}{5}, \frac{3}{5}) = \frac{4}{5} \cdot 0 = 0 \leq 0$. Los dos ceros no son casualidad: $(2,0)$ y $(0,1)$ están sobre la recta perpendicular a $y - \bar{x}$ por $\bar{x}$, que es el propio lado. Como la condición es lineal en x y se cumple en los tres vértices, se cumple en todo el triángulo (combinaciones convexas de los vértices).
Hiperplano separador. Normal $p = y - \bar{x}$, o proporcionalmente $p = (1,2)$, y nivel $\alpha = p^T\bar{x} = \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = 2$: el hiperplano es $x_1 + 2x_2 = 2$, el propio lado. Se tiene $p^T x \leq 2$ en S y $p^T y = 6 = 2 + 4$: separación fuerte con $\epsilon = 4$.
En este triángulo, la proyección sobre la recta del lado cae dentro de él, y por eso sirve la fórmula $\bar{x} = y - \frac{p^T y - \alpha}{\|p\|^2} p$. En otro caso, el punto más cercano podría ser un vértice. La comprobación en los tres vértices basta porque todo el triángulo es su envolvente convexa: un anticipo del papel de los vértices en lo que sigue.
Dónde se falla. En quedarse con el pie de la perpendicular sin mirar si cae dentro del lado. Con $y = (3, -1)$, la misma fórmula sobre la recta $x_1 + 2x_2 = 2$ da $t = -\frac{1}{5}$ y el pie $(\frac{16}{5}, -\frac{3}{5})$, que

tiene $x_2 < 0$ y no está en S. La proyección es entonces el vértice $(2,0)$, y la caracterización lo confirma: con $y - \bar{x} = (1,-1)$, los productos con $x - \bar{x}$ en los vértices $(0,0)$, $(2,0)$ y $(0,1)$ valen -2, 0 y -3, todos ≤ 0. El otro fallo es comprobar la condición angular en un solo vértice: tiene que valer en todos.

2.3 Anexo: el teorema de Tucker

LA PREGUNTA

En «piedra, papel o tijera» los dos jugadores tienen las mismas opciones y lo que gana uno lo pierde el otro: el juego es simétrico y de suma cero. Parece claro que nadie puede tener ventaja, pero eso no dice cómo jugar. ¿Existe siempre, en cualquier juego simétrico de suma cero, una forma de repartir las apuestas entre las opciones que garantice no perder por término medio contra cualquier rival, y que además no deje ninguna opción «muerta», es decir, que toda opción o bien se use o bien se castigue?

Este teorema se enuncia al cerrar el apartado de separación y se demuestra aparte, en un anexo propio, porque es la pieza técnica de la que cuelga el teorema fundamental de dualidad del capítulo 4. Conviene aprender aquí su demostración con calma, porque allí se usará como una caja negra.

Teorema (de Tucker, 1956)**.** Si $A \in M_{n\times n}$ es antisimétrica ($A^T = -A$), entonces existe $w \in \mathbb{R}^n$, $w \geqq 0$, tal que $Aw \geqq 0$ y además $Aw + w > 0$. • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA

Lo que pide el teorema son tres cosas de un mismo vector w: que no tenga componentes negativas, que Aw tampoco las tenga, y que en cada posición k *al menos uno* de los dos números $(Aw)_k$ y w_k sea estrictamente positivo. Esta última condición se llama *complementariedad estricta*. La antisimetría da además $w^T Aw = 0$; como $w_k(Aw)_k \geq 0$ para cada k y su suma es cero, todos esos productos son cero. Por tanto, en cada posición *exactamente uno* de los dos números es positivo y el otro es cero.
El plan de la demostración es resolver el problema *índice a índice* y luego sumar. Para cada k se busca un vector no negativo que cumpla $A(\cdot) \geqq 0$ y que consiga la positividad estricta en la posición k: o bien un x^k con $(Ax^k)_k > 0$, o bien un z^k con $z^k_k > 0$. Que uno de los dos existe siempre es exactamente un teorema de alternativa, el corolario del lema de Farkas con c igual a menos la fila k; y la antisimetría es lo que permite pasar de «$A^T z \leqq \ldots$», que es lo que da Farkas, a «$Az \geqq \ldots$», que es lo que queremos.
Después se suma: $w = \sum_k (\text{lo que haya salido para } k)$. Todo lo que se suma es no negativo y tiene $A(\cdot) \geqq 0$, luego $w \geqq 0$ y $Aw \geqq 0$ se conservan al sumar. Y en la posición k, el sumando k-ésimo aporta algo estrictamente positivo a $(Aw)_k$ o a w_k, y ningún otro sumando puede restar porque todos son $\geqq 0$. Por eso $Aw + w > 0$. La imagen es la de n linternas: cada una ilumina su propia posición, y al encenderlas todas no queda ninguna a oscuras.

Si A no fuera antisimétrica el teorema es falso: con $A = -I$ (simétrica), $Aw \geqq 0$ obliga a $w \leqq 0$, luego $w = 0$ y $Aw + w = 0$, no > 0.

La prueba se entiende sola si se ve qué está haciendo: *arregla el problema una coordenada cada vez y después suma todos los arreglos*. Para cada índice k se pide poco, solo que *esa* coordenada quede iluminada (que sea positiva o en w o en Aw), y el corolario de Farkas garantiza que siempre se consigue una de las dos cosas. Como los vectores que se obtienen son todos no negativos y A los manda a vectores no negativos, sumarlos no estropea nada: cada sumando aporta su coordenada iluminada y ninguno apaga las de los demás. Esa monotonía — sumar solo puede añadir positividad, nunca quitarla — es el mecanismo entero.

Escribimos a_{kj} para las entradas de A y e_k para el k-ésimo vector de la base canónica.

Paso 1: un teorema de alternativa para cada índice. Para $k = 1, \ldots, n$ sea $c^k = -(a_{k1}, \ldots, a_{kn})^T$, es decir, *menos la fila k de A*. El corolario del lema de Farkas (sección 2.2) aplicado a A y c^k dice que uno y solo uno de los siguientes sistemas tiene solución:

(1) $Ax \geqq 0$, $x \geqq 0$, $(c^k)^T x < 0$ para algún $x \in \mathbb{R}^n$; o

(2) $A^T y \leqq c^k$, $y \geqq 0$ para algún $y \in \mathbb{R}^n$.

Paso 2: leer el sistema (1). La condición $(c^k)^T x < 0$ es $-\sum_j a_{kj} x_j < 0$, es decir, $\sum_j a_{kj} x_j > 0$, que es $(Ax)_k > 0$. Luego (1) tiene solución si y solo si existe $x^k \geqq 0$ con $Ax^k \geqq 0$ y $(Ax^k)_k > 0$: un vector no negativo que no estropea ninguna fila y hace estrictamente positiva la fila k.

Paso 3: leer el sistema (2), y aquí entra la antisimetría. La condición $A^T y \leqq c^k$ es, componente a componente ($j = 1, \ldots, n$), $\sum_i a_{ij} y_i \leq -a_{kj}$, o sea

$$\sum_{i \neq k} a_{ij} y_i + a_{kj}(y_k + 1) \leq 0 \qquad \text{para } j = 1, \ldots, n.$$

Definimos $z^k \in \mathbb{R}^n$ por $z^k_i = y_i$ si $i \neq k$ y $z^k_k = y_k + 1$. Con esta notación la desigualdad anterior es $\sum_i a_{ij} z^k_i \leq 0$ para todo j, es decir, $A^T z^k \leqq 0$. Además $z^k \geqq 0$ (porque $y \geqq 0$) y $z^k_k = y_k + 1 > 0$, de modo que $z^k \geq 0$. Como A es antisimétrica, $A^T = -A$, y $A^T z^k \leqq 0$ es lo mismo que $-Az^k \leqq 0$, es decir, $Az^k \geqq 0$. En resumen: (2) tiene solución si y solo si existe $z^k \geq 0$ con $Az^k \geqq 0$ y $z^k_k > 0$.

Para la implicación recíproca, se multiplica ese z^k por un escalar positivo hasta que $z^k_k \geq 1$. Entonces $y = z^k - e_k \geqq 0$ y $A^T y = A^T z^k - A^T e_k \leqq -A^T e_k = c^k$, como exige (2).

Paso 4: lo que tenemos para cada k. Para cada $k = 1, \ldots, n$ se cumple una de estas dos cosas:

(a) existe $x^k \geqq 0$ con $Ax^k \geqq 0$ y $(Ax^k)_k > 0$; o

(b) existe $z^k \geqq 0$ con $Az^k \geqq 0$ y $z^k_k > 0$.

Paso 5: sumar los arreglos parciales (el núcleo de la prueba). Aquí se distinguen tres casos según qué alternativa se dé; los recorremos los tres, que es como suele presentarse la prueba, y después se ve que son uno solo.

Caso 1: para todo k se da (a). Tomamos $w = \sum_{k=1}^{n} x^k$. Entonces $w \geqq 0$ (suma de no negativos) y, para cada k,

$$(Aw)_k = (Ax^1)_k + \cdots + (Ax^k)_k + \cdots + (Ax^n)_k > 0,$$

porque todos los sumandos son ≥ 0 y el k-ésimo es > 0. Luego $Aw > 0$, en particular $Aw \geqq 0$, y $Aw + w > 0$ (suma de algo > 0 con algo $\geqq 0$). Además $w \neq 0$, porque si no $Aw = 0$.
Caso 2: para todo k se da (b). Tomamos $w = \sum_{k=1}^{n} z^k$. Entonces $Aw = \sum_k Az^k \geqq 0$, y cada componente $w_k = z_k^1 + \cdots + z_k^k + \cdots + z_k^n > 0$ por el mismo argumento (todos ≥ 0, el k-ésimo > 0). Luego $w > 0$ y $Aw + w > 0$.
Caso 3: para algunos k se da (a) y para los restantes (b). Sea $x = \sum x^k$ sobre los k del primer grupo y $z = \sum z^k$ sobre los del segundo, y $w = x + z \geqq 0$. Se tiene $Ax = \sum Ax^k \geqq 0$ y $Az = \sum Az^k \geqq 0$, luego $Aw \geqq 0$. Y para cada k: si k es del primer grupo, $(Ax)_k \geq (Ax^k)_k > 0$; si es del segundo, $z_k \geq z_k^k > 0$. En cualquier caso $(Ax + z)_k > 0$, es decir, $Ax + z > 0$. Finalmente, sumando el vector no negativo $Az + x$,

$$Aw + w = (Ax + z) + (Az + x) > 0.$$

En los tres casos se ha encontrado $w \geqq 0$ con $Aw \geqq 0$ y $Aw + w > 0$, que es la tesis.
Dónde entra la antisimetría. En un solo sitio, el paso 3, y ahí es indispensable: convierte $A^T z^k \leqq 0$ en $Az^k \geqq 0$, de modo que los vectores del segundo sistema cumplen la misma desigualdad que los del primero y se pueden sumar. La equivalencia del paso 2, $-(Ax)_k < 0 \iff (Ax)_k > 0$, vale para cualquier matriz. El contraejemplo del principio lo confirma: con $A = -I$, simétrica, la tesis es falsa.
Para reconstruirla. Para cada índice k, aplíquese el corolario de Farkas a A y a menos la fila k; sale un vector no negativo que ilumina la coordenada k, o bien en Aw o bien en w. Sumando los n vectores obtenidos, cada coordenada conserva su positividad porque todos los sumandos son $\geqq 0$. La antisimetría permite convertir la desigualdad con A^T del segundo sistema en la desigualdad con A que necesitamos.

Observación. Los tres casos son el mismo argumento: en el caso 3, si el primer grupo es todo $\{1, \ldots, n\}$ se tiene $z = 0$ y es el caso 1; si es vacío, $x = 0$ y es el caso 2. Se separan para que se vea en cada uno de dónde sale la positividad estricta: de Aw en el caso 1, de w en el caso 2, y de una mezcla en el 3.

EXPLÍCATE. *Señala el único lugar de la demostración donde se usa que A es antisimétrica. Si en vez de $A^T = -A$ se tuviera $A^T = A$, ¿qué sistema saldría en el paso 3 y por qué no sirve?*

CONEXIÓN: JUEGOS SIMÉTRICOS Y LA PREGUNTA DEL PRINCIPIO

Un juego de suma cero entre dos jugadores con las mismas n opciones se describe por una matriz A en la que a_{ij} es lo que gana el jugador 1 si elige i y el jugador 2 elige j; que el juego sea simétrico (intercambiar los papeles cambia el signo de la ganancia) es exactamente $A^T = -A$. Piedra, papel o tijera es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(filas y columnas en el orden piedra, papel, tijera; 1 es ganar). Un reparto de apuestas es un vector $p \geqq 0$ cuyas componentes suman uno: p_i es la probabilidad de elegir i. Contra la opción pura k del rival, la ganancia media del jugador 1 es $p^T A e_k = -(Ap)_k$. Este signo menos es importante: Ap calcula las ganancias de las filas puras contra alguien que juega p en columna. Aplicamos Tucker a la matriz $-A$, también antisimétrica. Obtenemos $w \geqq 0$, $Aw \leqq 0$ y $w -$

$Aw > 0$. Como $w \neq 0$, podemos normalizarlo: $p = w/(\sum_i w_i)$. Entonces $Ap \leqq 0$ y $p - Ap > 0$. La ganancia $-(Ap)_k$ es no negativa contra cualquier opción pura k, y por combinación convexa también contra cualquier reparto del rival. Además, si una opción no se usa ($p_k = 0$), se la castiga estrictamente: $-(Ap)_k > 0$. Así se responde a la pregunta inicial.
En piedra, papel o tijera sirve $w = (1,1,1)$, que se normaliza a $p = (1/3, 1/3, 1/3)$: $Ap = 0$, se usan las tres opciones y la ganancia media es cero contra cualquier rival. Esta lectura es una interpretación añadida para fijar ideas; el capítulo 4 usará la versión matricial tal cual.

DE DÓNDE VIENE: POR QUÉ UN TEOREMA DE 1956 SOSTIENE UNA TEORÍA DE 1947

La dualidad en programación lineal la formuló von Neumann en 1947 y la demostraron Gale, Kuhn y Tucker en 1951. El lema de Tucker sobre matrices antisimétricas es de 1956 y es posterior a todo eso: no fue el camino histórico, sino una reorganización. Su virtud es que concentra en un solo enunciado, sobre una matriz cuadrada, toda la parte difícil de la dualidad (la existencia simultánea de soluciones primal y dual con complementariedad estricta), de modo que el teorema fundamental de dualidad se deduce después en media página aplicando Tucker a la matriz antisimétrica $\begin{pmatrix} 0 & A & -b \\ -A^T & 0 & c \\ b^T & -c^T & 0 \end{pmatrix}$. Es la presentación que sigue este libro.

Ejercicios

Ejercicio 2.9. *Seguir la demostración de Tucker con números*

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Comprueba que es antisimétrica, encuentra a ojo un w que cumpla la tesis del teorema, y después reconstruye ese w siguiendo los pasos de la demostración: para $k = 1$ y $k = 2$, decide cuál de los dos sistemas del corolario de Farkas tiene solución y calcula x^k o z^k.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *$Aw = (w_2, -w_1)$. La condición $Aw \geqq 0$ ya decide una de las componentes de w.*
2. *Para $k = 1$, $c^1 = -(0,1) = (0,-1)$; para $k = 2$, $c^2 = -(-1,0) = (1,0)$. Escribe los dos sistemas del corolario en cada caso con estas c^k.*

Resolución. *La idea.* Primero a ojo, porque en dimensión dos la condición $Aw \geqq 0$ ya fija casi todo. Después, los pasos de la demostración tal cual: para cada índice k, el corolario de Farkas con c^k igual a menos la fila k, que da un vector que ilumina esa coordenada; y al final, la suma de lo que haya salido.
$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -A$: antisimétrica.
A ojo. $Aw = (w_2, -w_1) \geqq 0$ obliga a $w_1 = 0$ (porque $w_1 \geq 0$ y $-w_1 \geq 0$) y $w_2 \geq 0$. Entonces $Aw + w = (w_2, 0) + (0, w_2) = (w_2, w_2)$, que es > 0 si y solo si $w_2 > 0$. Vale $w = (0,1)$: $Aw = (1,0) \geqq 0$ y $Aw + w = (1,1) > 0$.
Siguiendo la demostración, $k = 1$. $c^1 = (0,-1)^T$. Sistema (1): $Ax \geqq 0$, $x \geqq 0$, $(c^1)^T x < 0$, es decir, $x_2 \geq 0$, $-x_1 \geq 0$, $x_1, x_2 \geq 0$, $-x_2 < 0$. Se resuelve con $x_1 = 0$, $x_2 > 0$: por ejemplo $x^1 = (0,1)$. Comprobación: $Ax^1 = (1,0) \geqq 0$ y $(Ax^1)_1 = 1 > 0$. Se da la alternativa (a).
$k = 2$. $c^2 = (1,0)^T$. Sistema (1): $Ax \geqq 0$, $x \geqq 0$, $x_1 < 0$: imposible (pide $x_1 \geq 0$ y $x_1 < 0$).

Luego tiene solución el sistema (2): $A^T y \leqq c^2$, $y \geqq 0$, es decir, $(-y_2, y_1) \leqq (1,0)$: $y_2 \geq -1$ e $y_1 \leq 0$; con $y \geqq 0$ queda $y_1 = 0$, $y_2 \geq 0$. Tomamos $y = (0,0)$ y formamos $z^2 = y + e_2 = (0,1)$. Comprobación: $Az^2 = (1,0) \geqq 0$ y $z_2^2 = 1 > 0$. Se da la alternativa (b).
Sumar (caso 3 de la demostración). $x = x^1 = (0,1)$, $z = z^2 = (0,1)$, $w = x + z = (0,2)$. Entonces $Aw = (2,0) \geqq 0$ y $Aw + w = (2,2) > 0$. Es un múltiplo del w encontrado a ojo, como debe ser: el conjunto de los w válidos es aquí la semirrecta $\{(0,t) : t > 0\}$.
El teorema de Tucker no dice cómo encontrar w de forma eficiente, pero su demostración es constructiva índice a índice: cada k se resuelve con un teorema de alternativa y luego se suma. En dimensión dos se puede hacer a mano y se ve con claridad de dónde sale cada positividad estricta.
Dónde se falla. En el signo de c^k. Es menos la fila k; con la fila tal cual, la condición $(c^k)^T x < 0$ del sistema (1) pediría $(Ax)_k < 0$, justo lo contrario de lo que se busca. Y en olvidar el $+e_k$ al pasar de y a z^k: en el caso $k = 2$ la solución es $y = (0,0)$, que no ilumina nada, y es $z^2 = y + e_2 = (0,1)$ el vector con $z_2^2 > 0$.

2.4 Conjuntos poliédricos. Representación de conjuntos poliédricos

LA PREGUNTA

Una fábrica describe lo que puede producir con un centenar de desigualdades: horas de máquina, materia prima, contratos mínimos. Un comercial no quiere las desigualdades; quiere una lista corta de «planes tipo» de modo que cualquier plan posible sea una mezcla de planes de la lista, y saber si la producción puede crecer sin límite en alguna dirección. ¿Existe siempre esa lista finita, cómo se calcula a partir de las desigualdades, y qué añade el caso en que la región no es acotada?

LA IDEA: DOS DESCRIPCIONES DEL MISMO OBJETO

Un poliedro en forma estándar, $S = \{x : Ax = b,\ x \geqq 0\} \neq \emptyset$, se puede describir *desde fuera*, mediante sus restricciones, o *desde dentro*, como mezclas de sus vértices más sumas no negativas de sus direcciones extremas. La segunda descripción permite optimizar una función lineal: se comparan sus valores en los vértices y se comprueba si algún rumbo permite mejorar sin límite. La forma estándar importa: un semiplano, por ejemplo, no tiene vértices y no admite esta representación mediante puntos extremos.
Esta sección hace tres cosas: dice cómo reconocer un vértice en la lista de desigualdades (una submatriz invertible), cómo reconocer un rumbo extremo (una columna con $B^{-1}a_j \leqq 0$), y demuestra que con esos dos ingredientes se reconstruye todo el poliedro. Es el teorema de representación, y el capítulo 3 entero se apoya en él.

2.4.1 Poliedros y forma estándar

Definición. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremos que S es un **poliedro** si es la intersección de un número finito de semiespacios cerrados, es decir,

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \ p_i^T x \leq \alpha_i,\ i = 1, \ldots, m\}, \qquad p_i \in \mathbb{R}^n,\ p_i \neq 0,\ \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Observación. Un poliedro es un conjunto convexo y cerrado: intersección finita de semiespacios cerrados, que son convexos y cerrados, y las dos propiedades se conservan por intersección.

Observación. De forma equivalente, los poliedros pueden escribirse como $\{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leqq b\}$ con $A \in M_{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$ (las filas de A son los p_i^T y las componentes de b los α_i). Mediante variables auxiliares se obtiene una formulación equivalente en forma estándar, $\{z : \ \widetilde{A}z = \widetilde{b},\ z \geqq 0\}$; el conjunto original se recupera de ella mediante una aplicación lineal.

Esta equivalencia para formular problemas se desarrolla en el capítulo 3. Conviene distinguirla de una identidad geométrica en el mismo espacio: una desigualdad $p_i^T x \leq \alpha_i$ se convierte en la igualdad $p_i^T x + h_i = \alpha_i$ añadiendo una *variable de holgura* $h_i \geq 0$ que mide cuánto sobra; y una variable x_j sin signo se sustituye por la diferencia $x_j^+ - x_j^-$ de dos variables no negativas. Las holguras quedan determinadas por x y conservan la geometría afín. Partir variables libres, en cambio, puede introducir nuevas representaciones de un mismo punto: $x_j = 0$ se escribe como $0 - 0$, como $1 - 1$, etc. Por eso no hay una correspondencia general entre los vértices y las direcciones extremas de ambos conjuntos. Sí se conserva el problema de optimización al sustituir también la función objetivo. A partir de ahora estudiaremos el poliedro que ya está en forma $Ax = b$, $x \geqq 0$, cuyos vértices se leen con álgebra lineal.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: TRABAJAR CON $Ax \leqq b$ DIRECTAMENTE

Se podría desarrollar toda la teoría en la forma $\{Ax \leqq b\}$, sin holguras. Un vértice sería un punto con n restricciones *activas* (cumplidas con igualdad) linealmente independientes. Esta descripción, usada también en optimización no lineal, no cambia de espacio. Para presentar el simplex usaremos la forma estándar porque permite expresar el intercambio de variables con una matriz cuadrada B. Si A tiene rango m, una base factible selecciona n restricciones independientes: las m ecuaciones $Ax = b$ y las $n - m$ igualdades $x_j = 0$ de las variables no básicas. En un vértice degenerado se anulan además variables básicas: hay más restricciones activas.

2.4.2 Rouché-Frobenius y la partición $A = [B \mid N]$

Consideremos el poliedro $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = b,\ x \geqq 0\}$ con $A \in M_{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, y el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$. Todo lo que sigue se apoya en un teorema de Álgebra lineal que conviene tener enunciado delante; el apéndice F, sección «Álgebra lineal», lo repite con un ejemplo de sistema incompatible y otro de ecuación redundante, y dice dónde ir a mirarlo.

CONEXIÓN: ÁLGEBRA LINEAL, EL TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS

Sea $A \in M_{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, y sea $(A \mid b)$ la matriz ampliada. El sistema $Ax = b$ es *compatible* (tiene alguna solución) si y solo si $\text{rango}(A \mid b) = \text{rango}(A)$. Si es compatible y $\text{rango}(A) = n$ (número de incógnitas), la solución es única; si $\text{rango}(A) = r < n$, hay infinitas soluciones, que

> dependen de $n - r$ parámetros libres. Además, si $\text{rango}(A) = r < m$, hay $m - r$ ecuaciones que son combinación lineal de las demás (*redundantes*) y se pueden suprimir sin cambiar el conjunto de soluciones.

Si el sistema es compatible y tiene más ecuaciones que incógnitas, $m > n$, se eliminan primero filas redundantes hasta dejar $m \leq n$. Con el teorema en la mano se distinguen entonces cuatro casos:

1. Si $\text{rango}(A \mid b) > \text{rango}(A)$, el sistema es incompatible y $S = \emptyset$.
2. Si $\text{rango}(A \mid b) = \text{rango}(A) = n = m$, existe una única solución del sistema, y S es como mucho ese punto (si además es $\geqq 0$).
3. Si $\text{rango}(A \mid b) = \text{rango}(A) < m \leq n$, existen ecuaciones redundantes: se eliminan.
4. Si $\text{rango}(A \mid b) = \text{rango}(A) = m < n$, podemos reordenar las columnas de A de modo que $A = [B \mid N]$ (la reordenación no tiene por qué ser única), donde $B \in M_{m\times m}$ es una matriz cuadrada invertible y $N \in M_{m\times(n-m)}$. Reordenando igual las componentes de x, $x = (x_B, x_N)$ con $x_B \in \mathbb{R}^m$ y $x_N \in \mathbb{R}^{n-m}$, y entonces

$$Ax = b \iff [B \mid N] \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b \iff Bx_B + Nx_N = b.$$

El caso 4 es el que interesa, y a partir de ahora se supone siempre $\text{rango}(A) = m < n$ (el caso 1 no deja nada que estudiar, porque S es vacío; el 2 deja a lo sumo un punto; y el 3, una vez quitadas las ecuaciones redundantes, se convierte en el 2 o en el 4). Multiplicando por B^{-1},

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

Esta fórmula es la más importante del capítulo, y merece leerse en palabras: *elegidas m columnas independientes de A (la base B), las m variables correspondientes (las básicas) quedan determinadas por las otras n − m (las no básicas)*. En particular, si se ponen a cero todas las no básicas, $x_N = 0$, sale $x_B = B^{-1}b$. El punto $x = (B^{-1}b, 0)$ es una *solución básica*, y si además $B^{-1}b \geqq 0$ está en S y es una *solución básica factible*. El teorema siguiente dice que esos puntos son exactamente los vértices.

2.4.3 Caracterización de los puntos extremos

Teorema (de caracterización de puntos extremos)**.** Sea $S = \{x : \ Ax = b, \ x \geqq 0\}$ con $A \in M_{m\times n}$, $\text{rango}(A) = m$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Un punto x es punto extremo de S si y solo si A puede ser descompuesta en dos submatrices, $A = [B \mid N]$, tales que

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{con } B \in M_{m\times m} \text{ invertible y } B^{-1}b \geqq 0.$$

• CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA

Un vértice es un punto que no se puede mover «en dos sentidos opuestos» sin salir del poliedro. En S, moverse sin salir de $Ax = b$ significa sumar un vector Λ con $A\Lambda = 0$, es decir, un vector del **núcleo** de A: el subespacio $\ker A = \{d \in \mathbb{R}^n : \ Ad = 0\}$, de dimensión $n - \text{rango}(A)$, que recoge exactamente las direcciones en las que uno se

puede mover sin cambiar el valor de Ax (apéndice F, sección «Álgebra lineal»). Y no salir de $x \geqq 0$ exige que Λ solo tenga componentes no nulas donde x ya es positivo (las componentes nulas de x no admiten ir hacia abajo). Luego x se puede mover en dos sentidos exactamente cuando existe un $\Lambda \neq 0$ apoyado en las componentes positivas de x con $A\Lambda = 0$, es decir, cuando *las columnas de A correspondientes a las componentes positivas de x son linealmente dependientes*. Un vértice es un punto cuyas columnas «positivas» son independientes; y como en $\mathbb{R}^m$ no caben más de m columnas independientes, un vértice tiene a lo sumo m componentes positivas, que se completan hasta una base B de m columnas. Recíprocamente, si $x = (B^{-1}b, 0)$, al mezclar dos puntos de S para producir x las componentes no básicas de ambos tienen que ser cero (mezcla de no negativos que da cero), y entonces B invertible obliga a que sus partes básicas sean $B^{-1}b$: los dos puntos son x.

Simplificado al máximo, se está traduciendo una propiedad geométrica — «no me puedo mover en dos sentidos opuestos sin salirme» — a una propiedad de álgebra lineal — «las columnas que puedo usar son independientes». La traducción funciona porque moverse dentro de $\{Ax = b\}$ es sumar un vector del núcleo de A, y no salirse de $x \geqq 0$ obliga a que ese vector viva en las componentes donde x ya es positivo. Un vector así, no nulo, existe exactamente cuando esas columnas son dependientes.

Paso 1 ($\Leftarrow$): con base invertible no hay dos sentidos. Supongamos que $x = (B^{-1}b, 0)$ con B invertible y $B^{-1}b \geqq 0$; en particular $x \in S$ porque $Ax = BB^{-1}b + N \cdot 0 = b$ y $x \geqq 0$. Sean $x_1, x_2 \in S$ y $\lambda \in (0,1)$ con $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Partimos $x_1 = (x_{1B}, x_{1N})$ y $x_2 = (x_{2B}, x_{2N})$ con la misma partición de índices. Mirando las componentes no básicas,

$$0 = \lambda x_{1N} + (1-\lambda)x_{2N},$$

con $\lambda > 0$, $1-\lambda > 0$, $x_{1N} \geqq 0$ y $x_{2N} \geqq 0$: una suma de dos vectores no negativos es cero solo si ambos son cero, luego $x_{1N} = x_{2N} = 0$. Ahora $Ax_1 = b$ se reduce a $Bx_{1B} = b$, es decir, $x_{1B} = B^{-1}b$; igualmente $x_{2B} = B^{-1}b$. Por tanto $x_1 = x_2 = x$, y x es punto extremo.

Paso 2 ($\Rightarrow$): preparativo. Supongamos que x es punto extremo de S. Reordenando las variables, podemos suponer que $x = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ con $x_i > 0$ para $i = 1, \ldots, k$.

Paso 3: las columnas $a_1, \ldots, a_k$ son linealmente independientes (el núcleo de la prueba). Por reducción al absurdo: si fueran dependientes, existirían $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ no todos nulos con $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = 0$. Sea $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$; entonces $A\Lambda = \sum_{i \leq k} \lambda_i a_i = 0$. Consideremos $x^1 = x + \varepsilon\Lambda$ y $x^2 = x - \varepsilon\Lambda$ con $\varepsilon > 0$. Ambos cumplen $Ax^1 = Ax \pm \varepsilon A\Lambda = b$. Sus componentes $k+1, \ldots, n$ son cero, y sus componentes $i \leq k$ son $x_i \pm \varepsilon\lambda_i$, que son positivas si ε es lo bastante pequeño (porque $x_i > 0$). Luego, para ese ε, $x^1, x^2 \in S$, son distintos ($\Lambda \neq 0$) y $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$: x sería combinación convexa estricta de dos puntos distintos de S, contra la hipótesis de que es extremo.

Paso 4: completar la base. Como $a_1, \ldots, a_k$ son independientes, $k \leq m$. Como $\operatorname{rango}(A) = m$, entre las columnas de A hay m independientes, y se pueden elegir $a'_{k+1}, \ldots, a'_m$ (columnas de A distintas de las anteriores) tales que $B = [a_1 \mid \cdots \mid a_k \mid a'_{k+1} \mid \cdots \mid a'_m]$

es invertible. Con esa base, $x_B = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$ y $x_N = 0$, y

$$b = Ax = \sum_{i=1}^{k} x_i a_i = Bx_B \implies x_B = B^{-1}b,$$

que es $\geqq 0$ porque $x \geqq 0$. Es la descomposición buscada.
Dónde entra cada hipótesis. La forma estándar se usa entera y en las dos direcciones: la igualdad $Ax = b$ es la que hace que moverse sea sumar un elemento del núcleo, y la desigualdad $x \geqq 0$ impide moverse en ambos sentidos en las componentes nulas. Sin esa desigualdad, un subespacio afín de dimensión positiva no tendría vértices; un subespacio afín de dimensión cero sí es un único punto. Que $\text{rango}(A) = m$ se usa solo en el paso 4, para poder completar la base: si el rango fuera menor, habría filas redundantes y ninguna submatriz $m \times m$ invertible, y el enunciado habría que escribirlo con un rango menor. Y que ε pueda tomarse pequeño depende de que las k primeras componentes sean *estrictamente* positivas: en un vértice degenerado, con menos de m componentes positivas, el argumento sigue valiendo porque solo mira las positivas.
Para reconstruirla. Moverse dentro de S es sumar un vector del núcleo de A apoyado en las componentes positivas. Si las columnas positivas son dependientes, ese vector existe y el punto se parte en dos: no es extremo. Si son independientes, la parte no básica de cualquier descomposición es cero y B invertible fuerza la básica: es extremo. Y $\text{rango}(A) = m$ es lo que permite completar hasta una base de m columnas.

EXPLÍCATE. *En el paso 2 puede haber varias maneras de completar la base cuando $k < m$. ¿Qué significa geométricamente que un mismo vértice tenga varias bases? El ejemplo del vértice degenerado, más adelante en esta sección, lo muestra.*

Ejemplo (todos los vértices, base a base)**.** Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ 2x_1 - x_2 \leq 4,\ x_1 + x_2 \leq 6,\ x_1, x_2 \geq 0\}$. Con holguras x_3, x_4,

$$S = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ Ax = b,\ x \geqq 0\}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Aquí $m = 2$, $n = 4$, y las posibles bases son las $\binom{4}{2} = 6$ parejas de columnas. Se recorren todas, calculando $B^{-1}b$ y mirando su signo.

(a) $B = [a_1 \mid a_2] = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\det B = 3$, $B^{-1} = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $B^{-1}b = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 4+6 \\ -4+12 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 10/3 \\ 8/3 \end{smallmatrix}\right) \geqq 0 \Rightarrow$ $\hat{x}^1 = (\frac{10}{3}, \frac{8}{3}, 0, 0)$ es punto extremo.
(b) $B = [a_1 \mid a_3] = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\det B = -1$, $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$, $B^{-1}b = \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ -8 \end{smallmatrix}\right) \not\geqq 0$: no es factible.
(c) $B = [a_1 \mid a_4] = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\det B = 2$, $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B^{-1}b = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) \geqq 0 \Rightarrow \hat{x}^2 = (2, 0, 0, 4)$ es punto extremo.
(d) $B = [a_2 \mid a_3] = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\det B = -1$, $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B^{-1}b = \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 10 \end{smallmatrix}\right) \geqq 0 \Rightarrow \hat{x}^3 = (0, 6, 10, 0)$ es punto extremo.
(e) $B = [a_2 \mid a_4] = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\det B = -1$, $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B^{-1}b = \left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 10 \end{smallmatrix}\right) \not\geqq 0$: no es factible.
(f) $B = [a_3 \mid a_4] = I$, $B^{-1}b = b = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 6 \end{smallmatrix}\right) \geqq 0 \Rightarrow \hat{x}^4 = (0, 0, 4, 6)$ es punto extremo.

Cuatro puntos extremos, que en el plano (x_1, x_2) son $(\frac{10}{3}, \frac{8}{3})$, $(2, 0)$, $(0, 6)$ y $(0, 0)$: los cuatro vértices del cuadrilátero de la figura 2.12. Las dos bases no factibles corresponden a los

cortes $(6,0)$ y $(0,-4)$ en el plano original. En la base $[a_1 \mid a_3]$, el -8 es la holgura x_3, no la coordenada x_2; en $[a_2 \mid a_4]$, las coordenadas básicas $(-4,10)$ son (x_2, x_4). Distinguir coordenadas originales y holguras evita interpretar mal el dibujo.

Para que haya direcciones extremas tiene que haber direcciones: $d \in \mathbb{R}^4$, $d \geq 0$, con $Ad = 0$. La segunda ecuación, $d_1 + d_2 + d_4 = 0$ con todo ≥ 0, obliga a $d_1 = d_2 = d_4 = 0$, y entonces la primera da $d_3 = -2d_1 + d_2 = 0$. Luego $d = 0$: no hay direcciones, S es acotado, y no puede haber direcciones extremas.

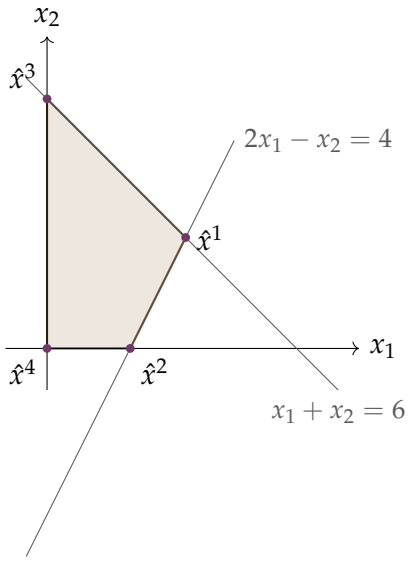


Figura 2.12: El poliedro del ejemplo «todos los vértices, base a base» en el plano (x_1, x_2) y sus cuatro puntos extremos, uno por cada base factible.

Ejemplo (un poliedro con una sola dirección extrema)**.** Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ Ax = b, \ x \geqq 0\}$ con $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ y $b = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$. Sea d una dirección de S; entonces $Ad = 0$ y $d \geq 0$:

$$Ad = 0 \iff \begin{cases} -d_1 + d_2 + d_3 = 0, \\ d_2 + d_4 = 0. \end{cases}$$

La segunda, con $d_2, d_4 \geq 0$, da $d_2 = d_4 = 0$; la primera queda $-d_1 + d_3 = 0$. Luego $d^T = (a, 0, a, 0)$ con $a > 0$: hay una sola dirección salvo múltiplos, que es por tanto extrema. En el plano (x_1, x_2) el conjunto es $\{-x_1 + x_2 \leq 2, \ x_2 \leq 5, \ x \geq 0\}$, una región que se extiende sin límite hacia la derecha, y la dirección es $(1, 0)$ (la holgura x_3 crece con x_1 para mantener $-x_1 + x_2 + x_3 = 2$).

Corolario. Sea $x \in S$; sin pérdida de generalidad $x = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ con $x_i > 0$ para $i = 1, \ldots, k \leq n$. Entonces x es un punto extremo de S si y solo si las columnas $a_1, \ldots, a_k$ de A son linealmente independientes.

Es lo probado en los pasos 3 y 4: las columnas positivas de un extremo son independientes; y si son independientes, se completan a una base que representa x como solución básica factible. Si $k > m$, esas columnas son necesariamente dependientes y x no puede ser extremo. Es la forma más rápida de comprobar si un punto dado es un vértice: mirar solo las columnas de sus componentes positivas.

Con los números del ejemplo «todos los vértices, base a base», donde $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ y $b = (4, 6)$, la prueba se hace de un vistazo sobre tres puntos de S (los tres cumplen $Ax = b$, como se ve sustituyendo):

- $x = (2, 0, 0, 4)$. Sus componentes positivas son la primera y la cuarta, y las columnas $a_1 = (2, 1)$ y $a_4 = (0, 1)$ tienen determinante $2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 2 \neq 0$: son independientes, y x es un vértice. En el plano es el punto $(2, 0)$.
- $x = (1, 0, 2, 5)$. Tiene tres componentes positivas, y tres vectores de $\mathbb{R}^2$ siempre son dependientes: no es un vértice. En el plano es $(1, 0)$, el punto medio del lado que va de $(0, 0)$ a $(2, 0)$, y en efecto $x = \frac{1}{2}(0, 0, 4, 6) + \frac{1}{2}(2, 0, 0, 4)$.
- $x = (1, 1, 3, 4)$. Cuatro componentes positivas: tampoco. En el plano es $(1, 1)$, un punto interior del cuadrilátero.

Queda una regla que se aplica sin hacer cuentas: un vértice de S tiene a lo sumo m componentes positivas, y un punto de S con más de m nunca es vértice.

Corolario. El número de puntos extremos de S es finito y menor o igual que $\binom{n}{m}$.

Cada punto extremo está determinado por una base B (su parte básica es $B^{-1}b$ y el resto cero), y hay a lo sumo $\binom{n}{m}$ maneras de elegir m columnas entre n. Puede haber menos vértices que bases por dos motivos: bases no invertibles o no factibles (como en el ejemplo «todos los vértices, base a base»), y varias bases que dan el mismo vértice (como en el ejemplo del vértice degenerado).

Teorema (de existencia de puntos extremos)**.** Sea $S = \{x : \ Ax = b, \ x \geqq 0\} \neq \emptyset$ con $A \in M_{m \times n}$, rango$(A) = m$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Entonces S tiene al menos un punto extremo. • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA

Se toma un punto cualquiera de S y se «empuja» hacia la frontera: si sus columnas positivas son dependientes, hay una dirección Λ en la que moverse sin salir de $Ax = b$; se avanza en el sentido en que alguna componente positiva decrece, hasta que la primera de ellas llega a cero. El nuevo punto sigue en S y tiene una componente positiva menos. Como no se puede repetir indefinidamente (hay n componentes), en algún momento las columnas positivas son independientes, y ese punto es un vértice. Un poliedro de la forma $\{Ax = b, x \geqq 0\}$ no puede contener rectas enteras (la condición $x \geqq 0$ lo impide), y esa es la razón profunda de que tenga vértices; un semiplano, que sí contiene rectas, no los tiene.

La idea es la de la caja anterior, y cabe en una línea: *se elige el punto de S con el menor número posible de componentes positivas, y ese ya no se puede empujar más*. El mecanismo del empuje es el mismo de siempre (una dependencia entre columnas da una dirección en la que caminar sin salirse de $Ax = b$, y se camina hasta que una componente toca cero), y lo único que hay que añadir es que ese descenso no puede repetirse indefinidamente porque el número de componentes positivas es un entero no negativo.

Paso 1: elegir el candidato. Entre todos los puntos de S (que no es vacío), elijamos uno, x, con el *menor número posible* de componentes positivas; sea k ese número y, reordenando, $x = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ con $x_i > 0$. Si $k = 0$, $x = 0$ y su familia de columnas positivas

es la familia vacía, que es linealmente independiente por convenio (no hay ninguna combinación no trivial que anular): x es extremo por el corolario. Si $k \geq 1$, veamos que $a_1, \ldots, a_k$ son independientes, lo que por el corolario hace a x extremo.
Paso 2: caminar hasta anular una componente más, y contradecir la elección (el núcleo de la prueba). Si no lo fueran, habría $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k, 0, \ldots, 0) \neq 0$ con $A\Lambda = 0$. Alguna λ_i es no nula; cambiando Λ por $-\Lambda$ si hace falta, podemos suponer que alguna $\lambda_i > 0$. Consideremos $x(t) = x - t\Lambda$ para $t \geq 0$: cumple $Ax(t) = b$ para todo t, sus componentes $k+1, \ldots, n$ son cero, y sus componentes $i \leq k$ valen $x_i - t\lambda_i$. Las que tienen $\lambda_i \leq 0$ no decrecen; las que tienen $\lambda_i > 0$ decrecen y se anulan en $t = x_i/\lambda_i$. Sea $t^* = \min\{x_i/\lambda_i : \lambda_i > 0\} > 0$, alcanzado en $i = r$. Entonces $x(t^*) \geqq 0$ (ninguna componente ha pasado de cero), luego $x(t^*) \in S$; y tiene la componente r igual a cero, de modo que tiene a lo sumo $k-1$ componentes positivas. Eso contradice la elección de x con el menor número de componentes positivas.
Dónde entra cada hipótesis. $S \neq \emptyset$ da el punto de partida. La condición $x \geqq 0$ hace dos cosas a la vez: garantiza que el mínimo t^* existe (alguna componente decrece hasta cero) y que el punto de llegada sigue en S. Sin ella, la recta $x - t\Lambda$ se podría recorrer entera sin encontrar frontera, y en efecto un subespacio afín de dimensión positiva no tiene vértices: *un poliedro en forma estándar tiene vértices porque no contiene ninguna recta*, y esa es la razón de fondo.
Para reconstruirla. Tómese el punto de S con *menos* componentes positivas. Si sus columnas fueran dependientes, se podría caminar por la dependencia hasta anular una componente más sin salirse de S, contra la elección. Luego son independientes y el punto es extremo.

2.4.4 Caracterización de las direcciones extremas

Lema. Sea $S = \{x : \ Ax = b, \ x \geqq 0\} \neq \emptyset$. Entonces d es una dirección de S si y solo si $Ad = 0$ y $d \geq 0$. • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

Una dirección es un rumbo por el que se puede caminar eternamente sin salirse. Las dos condiciones dicen justo eso, una por cada mitad de la descripción de S: $Ad = 0$ *para no abandonar el plano* $Ax = b$, porque avanzar debe dejar Ax intacto, y $d \geqq 0$ *para no perforar el suelo* $x \geqq 0$, porque una componente negativa acabaría por hacerse negativa si se camina bastante.
Paso 1 ($\Rightarrow$). Sea d una dirección: $d \neq 0$ y $x + \lambda d \in S$ para todo $x \in S$ y $\lambda \geq 0$. Si alguna componente d_j fuera negativa, tomando $x \in S$ se tendría $(x + \lambda d)_j = x_j + \lambda d_j < 0$ para λ grande, contra $x + \lambda d \in S$; luego $d \geqq 0$, y con $d \neq 0$, $d \geq 0$. Además $A(x + \lambda d) = b$ y $Ax = b$ dan $\lambda Ad = 0$, y tomando $\lambda = 1$, $Ad = 0$.
Paso 2 ($\Leftarrow$). Sea $d \geq 0$ con $Ad = 0$. Para $x \in S$ y $\lambda \geq 0$: $A(x + \lambda d) = Ax + \lambda Ad = b$, y $x + \lambda d \geqq 0$ por ser suma de no negativos. Luego $x + \lambda d \in S$, y como $d \neq 0$, es una dirección.
Para reconstruirla. Una condición por cada mitad de S: $Ad = 0$ para no abandonar el plano $Ax = b$, y $d \geqq 0$ para no perforar el suelo $x \geqq 0$ al caminar lo bastante.

Las direcciones de S forman, por tanto, el cono $\{d : \ Ad = 0, \ d \geqq 0\}$ menos el origen. Es

un cono *poliédrico*. Su único vértice es el origen; las direcciones extremas son sus semirrectas extremas, no sus puntos extremos. Al cortar el cono por $\sum_i d_i = 1$, esas semirrectas sí se convierten en vértices. El teorema siguiente las reconoce mediante las bases.

Teorema (de caracterización de direcciones extremas)**.** Sea $S = \{x : \ Ax = b,\ x \geqq 0\} \neq \emptyset$ con $A \in M_{m\times n}$, rango$(A) = m$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Un vector $\bar{d}$ es una dirección extrema de S si y solo si A puede ser descompuesta como $[B \mid N]$ de modo que $B^{-1}a_j \leqq 0$ para alguna columna a_j de N, y $\bar{d}$ es un múltiplo positivo de

$$d = \begin{pmatrix} -B^{-1}a_j \\ 0 \end{pmatrix} + e_j, \qquad \text{donde } e_j \in \mathbb{R}^n \text{ tiene un 1 en la posición } j \text{ y ceros en las demás.}$$

En palabras: se elige una base B, se pone a 1 una variable no básica x_j y a 0 las demás no básicas, y se despejan las básicas con la fórmula $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$ «sin el término $B^{-1}b$», porque una dirección resuelve el sistema homogéneo: $d_B = -B^{-1}a_j$. Si eso sale $\geqq 0$, el vector d es una dirección, y el teorema dice que es extrema y que no hay otras.

LA IDEA: LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA

Miremos solo las k componentes positivas de d. Sus columnas son dependientes, pues $Ad = 0$ es una relación no trivial entre ellas. Para que la dirección sea extrema, debe haber exactamente una dependencia independiente: las k columnas tienen rango $k-1$. Si hubiera otra, podríamos perturbar d en dos sentidos y partirlo en dos direcciones distintas.
Por tanto, $k - 1 \leq m$, es decir, $k \leq m + 1$. Se colocan $k - 1$ de esas columnas en una base B (completándola si hace falta) y se deja la restante, a_j, fuera. Al normalizar $d_j = 1$, la ecuación $Ad = 0$ da $d_B = -B^{-1}a_j$. El signo $d_B \geqq 0$ es lo que mantiene la dirección en el ortante. Es el mismo argumento de independencia usado para los vértices, con una relación lineal permitida en lugar de ninguna.

La prueba es la gemela de la de los puntos extremos, con una diferencia que conviene tener delante: las columnas de las componentes positivas de un vértice son independientes; las de una dirección extrema tienen *exactamente una* dependencia independiente. La dependencia es lo que permite moverse; que sea única es lo que impide moverse de dos maneras distintas, y por eso la dirección no se puede partir en dos.
Paso 1 ($\Leftarrow$): el vector propuesto es dirección, y es extrema. Sea $d = (-B^{-1}a_j,\, 0) + e_j$ con $B^{-1}a_j \leqq 0$. Entonces $d \geqq 0$ (su parte básica es $-B^{-1}a_j \geqq 0$, su componente j es 1 y el resto son cero), $d \neq 0$ y

$$Ad = B(-B^{-1}a_j) + Ne_j^N = -a_j + a_j = 0,$$

donde e_j^N es la parte no básica de e_j, que selecciona la columna a_j de N. Por el lema, d es una dirección. Veamos que es extrema. Supongamos $d = \lambda_1 d^1 + \lambda_2 d^2$ con $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ y d^1, d^2 direcciones de S. Las componentes no básicas de d distintas de j son cero, y $d^1, d^2 \geqq 0$, luego esas componentes son cero también en d^1 y d^2. Entonces $Ad^i = 0$ se escribe $Bd^i_B + d^i_j a_j = 0$, es decir, $d^i_B = -d^i_j B^{-1}a_j$. Si fuera $d^i_j = 0$ se tendría $d^i = 0$, que no es una dirección; luego $d^i_j > 0$ y $d^i = d^i_j\, d$. Los dos vectores d^1, d^2 son múltiplos

positivos de d, luego no son distintos: d es extrema. Y cualquier múltiplo positivo de una dirección extrema es extrema.
Paso 2 (⇒): preparativo. Sea $\bar{d}$ una dirección extrema; por el lema, $A\bar{d} = 0$ y $\bar{d} \geq 0$. Reordenando, $\bar{d} = (\bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_k, 0, \ldots, 0)$ con $\bar{d}_i > 0$ para $i \leq k$, y $k \geq 1$.
Paso 3: cualesquiera $k-1$ de esas columnas son linealmente independientes (el núcleo de la prueba: aquí es donde se usa que $\bar{d}$ es extrema). Supongamos que no: por ejemplo, que $a_1, \ldots, a_{k-1}$ son dependientes (el mismo argumento vale para cualquier otro subconjunto de $k-1$). Hay $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ no todos nulos con $\sum_{i<k} \lambda_i a_i = 0$; sea $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, con un cero en la posición k. Para $\varepsilon > 0$ pequeño, los vectores $d^1 = \bar{d} + \varepsilon\Lambda$ y $d^2 = \bar{d} - \varepsilon\Lambda$ cumplen $Ad^i = 0$, son $\geqq 0$ (las componentes positivas de $\bar{d}$ siguen positivas, las demás siguen nulas) y no son cero (su componente k es $\bar{d}_k > 0$). Luego son direcciones. Son distintas: si $d^1 = \alpha d^2$ con $\alpha > 0$, la componente k da $\bar{d}_k = \alpha \bar{d}_k$, luego $\alpha = 1$ y $\varepsilon\Lambda = 0$, imposible. Y $\bar{d} = \frac{1}{2}d^1 + \frac{1}{2}d^2$ es combinación positiva de dos direcciones distintas: $\bar{d}$ no sería extrema. Contradicción.
Paso 4: la base. Por el paso anterior, $a_1, \ldots, a_{k-1}$ son independientes, luego $k-1 \leq m$, y se completan con columnas de A hasta una base B invertible. La columna a_k no puede estar en B: de $A\bar{d} = 0$ se despeja $a_k = -\frac{1}{\bar{d}_k} \sum_{i<k} \bar{d}_i a_i$, que es combinación lineal de $a_1, \ldots, a_{k-1}$, y una base no contiene una columna que sea combinación de otras suyas. Luego a_k es una columna de N; llámese a_j (con $j = k$ en la numeración actual).
Paso 5: la fórmula. Las componentes no básicas de $\bar{d}$ distintas de j son cero (todas las componentes positivas están en $\{1, \ldots, k-1\} \cup \{j\}$, y las primeras son básicas). Entonces $A\bar{d} = 0$ es $B\bar{d}_B + \bar{d}_j a_j = 0$, o sea $\bar{d}_B = -\bar{d}_j B^{-1} a_j$. Como $\bar{d}_B \geqq 0$ y $\bar{d}_j > 0$, resulta $B^{-1}a_j \leqq 0$, y

$$\bar{d} = \bar{d}_j \left[\begin{pmatrix} -B^{-1}a_j \\ 0 \end{pmatrix} + e_j \right] = \bar{d}_j \, d,$$

un múltiplo positivo de d.
Dónde entra cada hipótesis. La condición $B^{-1}a_j \leqq 0$ es la que hace que d apunte hacia dentro del ortante, y por tanto la que distingue una dirección de un simple vector del núcleo; es también el test que, junto con una base factible y una mejora estricta de la función objetivo en esa dirección, permite al simplex del capítulo 3 detectar un problema ilimitado. Que $\bar{d}$ sea *extrema* solo se usa en el paso 3: sin ella habría más de una dependencia y el vector se podría escribir como suma de dos direcciones distintas. Y la normalización por $\bar{d}_j$ recuerda que una dirección extrema no es un vector, sino una semirrecta: sus múltiplos positivos son la misma dirección.
Para reconstruirla. Un vértice pide columnas independientes; una dirección extrema pide columnas con *exactamente una* dependencia. De ahí sale la fórmula $d = (-B^{-1}a_j, 0) + e_j$, y la condición $B^{-1}a_j \leqq 0$ es la que hace que apunte hacia dentro del ortante.

Corolario. El número de direcciones extremas de S es finito y menor o igual que $(n-m)\binom{n}{m}$.

Hay a lo sumo $\binom{n}{m}$ bases y, para cada una, $n-m$ columnas no básicas candidatas.

Ejemplo (la dirección extrema de antes, con el teorema)**.** En el ejemplo del poliedro con una sola dirección extrema, tomemos $B = [a_1 \mid a_2] = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (se comprueba que $BB^{-1} = I$). Para las columnas no básicas: $B^{-1}a_3 = B^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \leqq 0$, luego $d =$

$(-B^{-1}a_3,\, 0) + e_3 = (1,0,0,0) + (0,0,1,0) = (1,0,1,0)$ es dirección extrema: la que se había encontrado a mano. Y $B^{-1}a_4 = \binom{1}{1} \not\leqq 0$: a_4 no produce dirección. Es un $\bar{b} = B^{-1}b = (3,5) \geqq 0$, así que esta base da además el punto extremo $(3,5,0,0)$.

2.4.5 El teorema de representación

Teorema (de representación de conjuntos poliédricos)**.** Sea $S = \{x :\ Ax = b,\ x \geqq 0\} \neq \emptyset$ con $A \in M_{m\times n}$, rango$(A) = m$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Sean $\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^p$ los puntos extremos de S y $d^1, \ldots, d^l$ las direcciones extremas de S. Entonces $x \in S$ si y solo si x puede escribirse como

$$x = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \hat{x}^j + \sum_{i=1}^{l} \mu_i d^i, \qquad \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0\ (j = 1, \ldots, p), \qquad \mu_i \geq 0\ (i = 1, \ldots, l).$$

• CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: LA IDEA, EN VERSIÓN INTUITIVA

Es la respuesta al comercial de la pregunta inicial: los «planes tipo» son los puntos extremos, y los «rumbos de crecimiento» las direcciones extremas; ambos son finitos (los corolarios), y todo plan factible es una mezcla de planes tipo más una suma de rumbos. En el plano, un polígono convexo es la envolvente de sus vértices. Una región poliédrica no acotada que no contiene rectas añade sus rumbos extremos; puede tener uno o dos. La figura 2.13 muestra el caso de dos.

Por qué es verdad, en una frase: si un punto z del poliedro no estuviera en la parte generada, un hiperplano lo separaría de ella, y caminando desde el mejor vértice en la dirección que mejora el valor del hiperplano (que es lo que hace el simplex) se llegaría o bien a un vértice mejor (imposible: era el mejor) o bien a un rumbo por el que el valor crece sin límite (imposible: el hiperplano acota la parte generada). Esa es la prueba canónica cuando ese avance tiene longitud positiva. Si el vértice es degenerado, puede salir un paso de longitud cero y ese argumento queda incompleto. La segunda demostración cubre todos los casos: tomar z y, mientras sus columnas positivas sean dependientes, moverse en la dirección de la dependencia en los dos sentidos hasta tocar una pared; z queda escrito como mezcla de dos puntos con menos componentes positivas (o como un punto con menos más un rumbo), y por inducción todo se reduce a vértices y direcciones extremas. Se dan las dos.

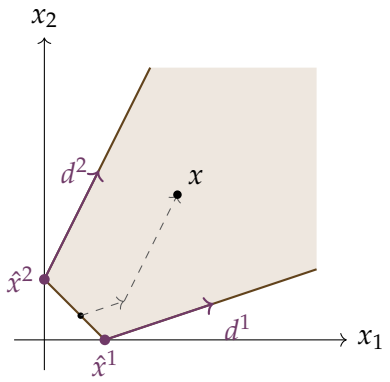


Figura 2.13: El poliedro del ejercicio de representación del final del capítulo: dos puntos extremos, dos direcciones extremas. La línea discontinua parte de un punto del segmento $[\hat{x}^1, \hat{x}^2]$ y suma, uno tras otro, múltiplos positivos de d^1 y d^2 hasta llegar a x. El sombreado continúa fuera del recuadro.

Reducida a lo esencial, la prueba dice esto: *si hubiera un punto de S que no se pudiera escribir con vértices y direcciones, habría un hiperplano que lo dejara fuera de todos ellos; y ese hiperplano, usado como función objetivo, permitiría subir desde el mejor vértice a otro todavía mejor, que es imposible porque el mejor ya era el mejor*. La contradicción no está en la separación, sino en la maximalidad. Y la manera de subir es justo el paso del simplex del capítulo siguiente: se elige una columna que mejora y se avanza hasta el primer tope.

Llamemos T al conjunto de los puntos de la forma del enunciado.

Paso 1 ($\Leftarrow$, $T \subseteq S$): la inclusión fácil. Si $x = \sum_j \lambda_j \hat{x}^j + \sum_i \mu_i d^i$ con los coeficientes del enunciado, entonces $x \geqq 0$ (suma de vectores no negativos con coeficientes no negativos) y

$$Ax = \sum_j \lambda_j A\hat{x}^j + \sum_i \mu_i A d^i = \sum_j \lambda_j b + \sum_i \mu_i \cdot 0 = b \sum_j \lambda_j = b.$$

Luego $x \in S$.

Paso 2 ($\Rightarrow$, $S \subseteq T$): planteamiento del absurdo. Supongamos que existe $z \in S$ con $z \notin T$.

Paso 3: T es convexo y cerrado, y por tanto separable. Convexo: mezcla de dos expresiones del tipo del enunciado es otra expresión del mismo tipo (los λ mezclados siguen sumando uno y los μ mezclados siguen siendo ≥ 0). Cerrado: $T = H(\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^p) + C$, donde la envolvente de finitos puntos es compacta (imagen continua del símplice de los λ) y $C = \{\sum \mu_i d^i : \mu \geqq 0\}$ es cerrado por el lema añadido de la sección 2.2; y la suma de un compacto K y un cerrado C es cerrada: si $k_n + c_n \to y$ con $k_n \in K$, $c_n \in C$, una subsucesión $k_n \to k \in K$ — aquí se usa la lectura sucesional de la compacidad, es decir, que toda sucesión contenida en un compacto de $\mathbb{R}^n$ tiene una subsucesión convergente a un punto del propio compacto (Bolzano-Weierstrass; apéndice F, sección «Análisis») —, luego $c_n \to y - k$, que está en C por ser cerrado, e $y = k + (y - k) \in K + C$. Es un paso que casi siempre se da por hecho, y por eso va escrito.

Paso 4: separar. Como T es convexo, cerrado y no vacío y $z \notin T$, el teorema de separación da $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$, y α con $p^T x \leq \alpha$ para todo $x \in T$ y $p^T z > \alpha$.

Paso 5: dos lecturas del hiperplano. (i) $p^T d^i \leq 0$ para todo i: si fuera $p^T d^i > 0$, tomando

cualquier $\bar{x} \in T$ se tendría $\bar{x} + \lambda d^i \in T$ para todo $\lambda \geq 0$ y $p^T(\bar{x} + \lambda d^i) = p^T\bar{x} + \lambda p^T d^i \to +\infty$, contra el hecho de que p^T está acotado por α en T. (ii) $p^T z > p^T \hat{x}^j$ para todo punto extremo, porque $\hat{x}^j \in T$ y $p^T z > \alpha \geq p^T \hat{x}^j$.
Paso 6: el mejor vértice y su base. Sea $\bar{x}$ el punto extremo que maximiza $p^T \hat{x}^j$ (hay finitos). Por el teorema de caracterización existe una base B con $\bar{x} = (B^{-1}b,\, 0) = (\bar{b},\, 0)$, $\bar{b} \geqq 0$. Partimos $z = (z_B, z_N)$ con la misma partición; como $z \in S$, $Az = b$ da $Bz_B + Nz_N = b$, es decir, $z_B = B^{-1}b - B^{-1}Nz_N = \bar{b} - B^{-1}Nz_N$, y $z_N \geqq 0$.
Paso 7: una columna que mejora (el núcleo de la prueba). Por (ii), $0 < p^T z - p^T\bar{x} = p^T(z - \bar{x})$. Escribiendo $p = (p_B, p_N)$ y usando $z - \bar{x} = (z_B - \bar{b},\, z_N) = (-B^{-1}Nz_N,\, z_N)$:

$$0 < p^T(z - \bar{x}) = -p_B^T B^{-1} N z_N + p_N^T z_N = \big(p_N^T - p_B^T B^{-1} N\big) z_N = \sum_{j \in NB} \big(p_j - p_B^T B^{-1} a_j\big) z_j.$$

Una suma de términos que es positiva tiene algún término positivo; como $z_j \geq 0$, existe $j \in NB$ con $z_j > 0$ y $p_j - p_B^T B^{-1} a_j > 0$. Fijamos ese j y llamamos $y_j = B^{-1}a_j$ y $d = (-y_j,\, 0) + e_j$, de modo que $Ad = 0$ y $p^T d = -p_B^T y_j + p_j > 0$.
La cantidad $p_j - p_B^T B^{-1} a_j$ se lee así: si la variable no básica x_j sube una unidad y las básicas se reajustan para seguir cumpliendo $Ax = b$, que es bajar en $B^{-1}a_j$, la función $p^T x$ gana p_j por la subida y pierde $p_B^T B^{-1} a_j$ por el reajuste. Es el efecto neto de mover x_j y dejar que el resto se acomode. El capítulo 3 la llamará *costo reducido* de x_j, la diferencia $c_j - z_j$ con $c = p$; aquí interesa que sea positiva porque se quiere subir $p^T x$, y el simplex elegirá la columna que entra precisamente por su signo.
Paso 8, caso A: $y_j \leqq 0$. Entonces d es una dirección extrema por el teorema de caracterización, y $p^T d > 0$ contradice (i).
Paso 8, caso B: y_j tiene alguna componente positiva. Sea $\lambda = \min\{\bar{b}_i / y_{ij} :\ y_{ij} > 0\} \geq 0$, alcanzado en la fila r, y $\hat{x} = \bar{x} + \lambda d$. Comprobamos que $\hat{x} \in S$: $A\hat{x} = A\bar{x} + \lambda Ad = b$; sus componentes no básicas son $\hat{x}_j = \lambda \geq 0$ y cero las demás; sus componentes básicas son $\hat{x}_i = \bar{b}_i - \lambda y_{ij}$, que es $\geq \bar{b}_i \geq 0$ si $y_{ij} \leq 0$ y es ≥ 0 si $y_{ij} > 0$ porque $\lambda \leq \bar{b}_i / y_{ij}$; y en la fila r vale exactamente 0. Además $\hat{x}$ es un punto extremo: sus componentes positivas están entre las básicas distintas de r y la j, y las columnas $\{a_i :\ i \in B,\ i \neq r\} \cup \{a_j\}$ son independientes, porque $a_j = \sum_{i \in B} y_{ij} a_i$ con $y_{rj} > 0$, de modo que a_j sustituye a a_r en la base (es la operación de *pivotar* del capítulo 3). Por el corolario de las columnas independientes, $\hat{x}$ es extremo, con base $B' = (B \setminus \{a_r\}) \cup \{a_j\}$. Finalmente,

$$p^T\hat{x} = p^T\bar{x} + \lambda\, p^T d = p^T\bar{x} + \lambda\big(p_j - p_B^T B^{-1} a_j\big).$$

Si $\lambda > 0$, esto es $> p^T\bar{x}$: un punto extremo con valor mayor que el máximo, contradicción, y la demostración canónica termina aquí.
El caso degenerado. Si $\lambda = 0$ (es decir, si $\bar{b}_r = 0$: el vértice $\bar{x}$ es *degenerado*, tiene menos de m componentes positivas), entonces $\hat{x} = \bar{x}$ y no se ha encontrado un vértice mejor, sino el mismo con otra base. La demostración canónica no trata este caso; para cerrarlo con rigor se da a continuación una segunda, que no lo necesita. Se conserva la prueba del material de origen para poder reconocer sus pasos. Para una demostración completa, el caso degenerado no debe omitirse: lo cubre la prueba siguiente.

Segunda demostración, por inducción, válida también en el caso degenerado. La anterior deja sin tratar $\lambda = 0$; esta lo cubre. Su idea, dicha en una línea, es *descender por el número de componentes positivas hasta tropezar con vértices*: si un punto no es vértice, sus columnas positivas son dependientes, la dependencia da un rumbo, y recorriendo ese rumbo en los dos sentidos se llega a dos puntos con menos componentes positivas entre los cuales el punto de partida está atrapado. Es exactamente el movimiento del teorema de existencia, ahora usado como paso de inducción. La única novedad es qué hacer cuando el rumbo no se puede recorrer en los dos sentidos: entonces ese rumbo es una dirección, y va al segundo sumando de la representación en lugar de al primero.
Paso 1, lema A (caso acotado). Si S no tiene direcciones, todo $z \in S$ es combinación convexa de puntos extremos. Inducción sobre el número k de componentes positivas de z. Si las columnas de esas componentes son independientes, z es extremo (corolario) y $z = 1 \cdot z$. Si son dependientes, hay $\Lambda \neq 0$ apoyado en ellas con $A\Lambda = 0$. El vector Λ tiene componentes positivas y negativas: si fuera $\Lambda \geqq 0$, sería una dirección ($A\Lambda = 0$, $\Lambda \geq 0$), que no hay; si $\Lambda \leqq 0$, lo sería $-\Lambda$. Entonces, en $z(t) = z + t\Lambda$, al crecer $t > 0$ alguna componente positiva de z decrece y la primera se anula en $t_+ = \min\{z_i/(-\lambda_i) : \lambda_i < 0\} > 0$; al decrecer $t < 0$, la primera se anula en $t_- = -\min\{z_i/\lambda_i : \lambda_i > 0\} < 0$. Los puntos $z^+ = z(t_+)$ y $z^- = z(t_-)$ están en S y tienen menos de k componentes positivas; por inducción, cada uno es combinación convexa de puntos extremos. Y z está en el segmento $[z^-, z^+]$ (es $z(0)$ con $t_- < 0 < t_+$), luego es combinación convexa de z^- y z^+, y por tanto de puntos extremos (las combinaciones convexas de combinaciones convexas lo son).
Paso 2, lema B (direcciones). Toda dirección de S es combinación positiva de direcciones extremas. Sea $D = \{d : \ Ad = 0,\ \mathbf{1}^T d = 1,\ d \geqq 0\}$, el conjunto de direcciones normalizadas: es un poliedro en forma estándar, con matriz $\binom{A}{\mathbf{1}^T}$, acotado (está dentro de $\{d \geqq 0,\ \sum d_i = 1\}$). Sus puntos extremos son exactamente las direcciones extremas normalizadas de S: si $d \in D$ no es extremo de D, $d = \frac{1}{2}(d^1 + d^2)$ con $d^1 \neq d^2$ en D, que son direcciones de S distintas (suman uno y son diferentes, luego no son proporcionales), y d no es dirección extrema; recíprocamente, si $d \in D$ no es dirección extrema, $d = \lambda_1 d^1 + \lambda_2 d^2$ con direcciones distintas, y normalizando $s_i = \mathbf{1}^T d^i$, $d = (\lambda_1 s_1)\frac{d^1}{s_1} + (\lambda_2 s_2)\frac{d^2}{s_2}$ es una combinación convexa (los coeficientes suman $\mathbf{1}^T d = 1$) de dos puntos distintos de D: d no es extremo de D. Por el lema A aplicado a D (si $D \neq \emptyset$ y la matriz tiene rango $m + 1$; si el rango fuera m, la fila $\mathbf{1}^T$ sería combinación de las de A y D sería vacío, sin nada que probar), toda dirección normalizada es combinación convexa de direcciones extremas normalizadas; deshaciendo la normalización, toda dirección es combinación positiva de direcciones extremas.
Paso 3, el teorema (el núcleo: aquí se separan los dos sumandos de la representación). Inducción sobre las componentes positivas de $z \in S$, como en el lema A. Si las columnas positivas son independientes, z es extremo. Si no, sea $\Lambda \neq 0$ con $A\Lambda = 0$ apoyado en ellas. Si Λ tiene signos de los dos, se procede como en el lema A y z es mezcla de dos puntos con menos componentes positivas, que por inducción tienen representación; la mezcla de dos representaciones es una representación. Si $\Lambda \geqq 0$ (o $\leqq 0$, y se cambia de signo), Λ es una dirección; el punto $z^- = z(t_-)$ existe (alguna componente decrece) y $z = z^- + |t_-|\Lambda$; por inducción z^- tiene representación, y por el lema B, $|t_-|\Lambda$ es combinación positiva de direcciones extremas; sumando, z tiene representación.

Dónde entra cada hipótesis. La finitud del número de vértices y de direcciones extremas, probada antes, es lo que hace que T sea cerrado (suma de un compacto y de un cono finitamente generado) y, con ello, separable; con infinitos generadores el argumento se cae por el mismo sitio por el que se caía el lema del cono. La condición $x \geqq 0$ es la que garantiza que S tiene algún vértice, sin el cual el conjunto T sería vacío y no habría nada que separar; el teorema es falso para poliedros que contienen rectas, y un poliedro en forma estándar no las contiene.
Para reconstruirla. Primero, si no hay direcciones, una dependencia entre columnas permite escribir el punto como mezcla de dos puntos con menos componentes positivas: por inducción se llega a vértices. Después se aplica este resultado al corte acotado $D = \{d : Ad = 0,\ \mathbf{1}^T d = 1,\ d \geqq 0\}$ para representar todas las direcciones con las extremas. Finalmente se repite la inducción en S: cada dependencia produce o bien una mezcla de dos puntos más sencillos, o bien un punto más sencillo más una dirección. Así aparecen los dos sumandos de la representación, también si hay degeneración.

EXPLÍCATE. *En la primera demostración, señala dónde se usa cada una de las tres hipótesis: $S \neq \emptyset$, $\operatorname{rango}(A) = m$, y que la lista de puntos extremos es completa (se usan* todos*). ¿Qué fallaría si se olvidara un punto extremo de la lista?*

Ejemplo (un vértice degenerado)**.** Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 + x_2 \leq 6,\ x_2 \leq 3,\ x_1 + 2x_2 \leq 9,\ x_1, x_2 \geq 0\}$. Con holguras x_3, x_4, x_5,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Sea $B = [a_1 \mid a_2 \mid a_3] = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Su inversa es $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ (se comprueba multiplicando: por ejemplo, la primera fila de B por la primera columna de B^{-1} es $0 + 0 + 1 = 1$, y por la segunda, $-2 + 1 + 1 = 0$). Entonces

$$\bar{b} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 \cdot 6 - 2 \cdot 3 + 9 \\ 3 \\ 6 + 3 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \geqq 0.$$

Luego $\bar{x}^T = (3, 3, 0, 0, 0)$ es un punto extremo, con $\bar{b}_3 = 0$: la variable básica x_3 vale cero. Se puede comprobar que $\bar{x}$ es también el punto extremo asociado a las bases $[a_1 \mid a_2 \mid a_4]$ y $[a_1 \mid a_2 \mid a_5]$: tres bases para el mismo vértice. Es lo que se llama un vértice *degenerado*, y la figura 2.14 muestra la causa: por el punto $(3, 3)$ pasan las tres rectas $x_1 + x_2 = 6$, $x_2 = 3$ y $x_1 + 2x_2 = 9$, cuando en el plano bastan dos para definir un vértice. Como puede verse, la tercera desigualdad es redundante: quitarla no cambia S.

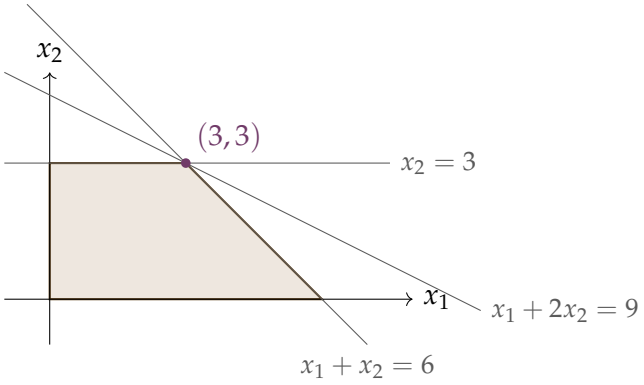


Figura 2.14: El vértice degenerado del ejemplo: tres rectas por un mismo punto. La restricción $x_1 + 2x_2 \leq 9$ es redundante.

Observación. La degeneración no es una curiosidad: es la causa de que el simplex pueda «pivotar sin moverse» (cambiar de base sin cambiar de vértice) y, en casos raros, ciclar. El capítulo 3 vuelve sobre ello al hablar de convergencia.

DE DÓNDE VIENE: MINKOWSKI, WEYL Y LAS DOS DESCRIPCIONES

La equivalencia entre descripciones mediante desigualdades y mediante generadores se conoce como teorema de Minkowski-Weyl. Hermann Weyl presentó en 1935 una demostración mediante métodos finitos en *Elementare Theorie der konvexen Polyeder*: formuló primero el problema homogéneo, con conos, para estudiar después los poliedros. El teorema de representación de esta sección es la mitad de Minkowski-Weyl que la programación lineal necesita: pasar de las desigualdades a los vértices. La otra mitad, pasar de los vértices a las desigualdades, es la que usan los métodos de planos de corte del capítulo 5, donde el poliedro se conoce por sus puntos enteros y hay que descubrir sus desigualdades.

Qué se ha ganado. La pregunta del comercial tiene respuesta: la lista de «planes tipo» existe, es finita y se calcula con álgebra lineal. Los planes tipo son los vértices, es decir, las soluciones básicas factibles $(B^{-1}b, 0)$, que son a lo sumo $\binom{n}{m}$. Los rumbos de crecimiento son las direcciones extremas, que salen de las columnas con $B^{-1}a_j \leqq 0$. Y el teorema de representación dice que con esas dos listas se reconstruye el poliedro entero. Lo que queda abierto es cómo usar esto para optimizar sin recorrer todas las bases, que pueden ser muchísimas: con $n = 40$ variables y $m = 20$ ecuaciones hay $\binom{40}{20} = 137\,846\,528\,820$ maneras de elegir la base. El capítulo 3 contesta con dos cosas: el teorema fundamental, que dice que basta mirar vértices, y el simplex, que camina de vértice en vértice mejorando con los mismos pivotes que han aparecido en las demostraciones de esta sección.

Ejercicios

Ejercicio 2.10. *Puntos extremos, direcciones extremas y representación de un poliedro no acotado*
R4.4

Se considera el conjunto factible del problema

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{Minimizar} & c_1x_1 & + & c_2x_2 & & \\ \text{sujeto a:} & x_1 & + & x_2 & \geq & 1 \\ & -x_1 & + & 3x_2 & \geq & -1 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 1. \end{array}$$

(a) Determina los puntos extremos y las direcciones extremas.
(b) Usando el teorema de representación de conjuntos poliédricos, escribe una formulación equivalente del problema en formato estándar.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Dibuja las tres rectas. La región es no acotada: dos vértices y dos «lados infinitos».*
2. *Las direcciones extremas son los vectores directores de los lados infinitos, orientados hacia el infinito; compruébalas con las tres desigualdades homogéneas ($d_1 + d_2 \geq 0$, $-d_1 + 3d_2 \geq 0$, $-2d_1 + d_2 \leq 0$).*
3. *Para (b), pon holguras (con signo) y después sustituye x por su representación.*

Resolución. *La idea.* En el plano, todo sale del dibujo. Los vértices son los cortes de dos rectas que cumplen la tercera desigualdad; las direcciones extremas son los rumbos de los dos lados infinitos, orientados hacia fuera, y se confirman con las desigualdades homogéneas. Después, el teorema de representación cambia las variables x por los pesos λ, μ, y el problema pasa a ser uno en el que se lee a simple vista si hay óptimo.
(a) Dibujo. La primera recta, $x_1 + x_2 = 1$, corta los ejes en $(1,0)$ y $(0,1)$. La segunda, $-x_1 + 3x_2 = -1$, pasa por $(1,0)$ y tiene pendiente $\frac{1}{3}$ (para $x_1 = 4$, $x_2 = 1$). La tercera, $-2x_1 + x_2 = 1$, pasa por $(0,1)$ con pendiente 2. La región factible es la de la figura 2.13: por encima de $x_1 + x_2 = 1$, por encima de $-x_1 + 3x_2 = -1$ y por debajo de $-2x_1 + x_2 = 1$. No hay restricción $x \geq 0$, pero la región queda en el primer cuadrante de todos modos.
Puntos extremos. Son los cortes de rectas que caen en la región: $(1,0)$ (corte de la primera con la segunda) y $(0,1)$ (corte de la primera con la tercera). El corte de la segunda con la tercera, $-x_1 + 3x_2 = -1$ y $-2x_1 + x_2 = 1$, da $x_2 = 1 + 2x_1$, $-x_1 + 3 + 6x_1 = -1$, $x_1 = -\frac{4}{5}$, $x_2 = -\frac{3}{5}$, que no cumple $x_1 + x_2 \geq 1$: no es vértice. Luego $\hat{x}^1 = (1,0)$, $\hat{x}^2 = (0,1)$.
Direcciones extremas. Un vector d es dirección si $x + \lambda d$ cumple las tres desigualdades para todo $\lambda \geq 0$, lo que al hacer $\lambda \to \infty$ equivale a las versiones homogéneas: $d_1 + d_2 \geq 0$, $-d_1 + 3d_2 \geq 0$, $-2d_1 + d_2 \leq 0$. Las dos últimas dicen $d_2 \geq d_1/3$ y $d_2 \leq 2d_1$; con $d_1 > 0$ (si $d_1 \leq 0$, $d_2 \geq d_1/3$ y $d_2 \leq 2d_1$ fuerzan $d_2 \leq 0$ y entonces $d_1 + d_2 \geq 0$ solo con $d = 0$), el cono de direcciones es $\{d_1 > 0,\ d_1/3 \leq d_2 \leq 2d_1\}$, y sus dos rumbos extremos son los bordes: $d^1 = (1, \frac{1}{3})$ (a lo largo de la segunda recta) y $d^2 = (\frac{1}{2}, 1)$ (a lo largo de la tercera). Cualquier otra dirección es combinación positiva de estas dos, luego no es extrema; y que las dos del borde sí lo son se prueba con la desigualdad que cada una satura. Por ejemplo d^1 cumple $-d^1_1 + 3d^1_2 = 0$: si $d^1 = \lambda_1 e + \lambda_2 f$ con $\lambda_i > 0$ y e, f en el cono, entonces $0 = \lambda_1(-e_1 + 3e_2) + \lambda_2(-f_1 + 3f_2)$ con los dos sumandos ≥ 0, luego los dos son cero, e y f están sobre esa misma semirrecta del borde y son múltiplos positivos de d^1: no son distintos. Con d^2 y la tercera desigualdad, igual. Es el mismo mecanismo que en el ortante, donde la desigualdad saturada era $d_2 \geq 0$.
(b) Forma estándar. Con una variable de exceso $x_3 \geq 0$ en la primera desigualdad, otra $x_4 \geq 0$ en la segunda y una holgura $x_5 \geq 0$ en la tercera (y observando que $x_1, x_2 \geq 0$ en toda la

región, de modo que se puede añadir sin cambiarla):

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \text{Minimizar} & c_1x_1 & + & c_2x_2 & & & & & & \\ \text{sujeto a:} & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ & -x_1 & + & 3x_2 & & - & x_4 & & = & -1 \\ & -2x_1 & + & x_2 & & & & + \; x_5 & = & 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. & & & & & & & & \end{array}$$

Con el teorema de representación, todo punto factible es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ \lambda, \mu \geq 0,$$

y el problema equivale a minimizar $c_1x_1 + c_2x_2$ sobre esas expresiones, es decir,

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \mu_1\big(c_1 + \frac{1}{3}c_2\big) + \mu_2\big(\frac{1}{2}c_1 + c_2\big) \\ \text{sujeto a:} & \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \geq 0. \end{array}$$

Esta reescritura es la que hace evidente, en el capítulo 3, cuándo el problema tiene óptimo finito: si algún coeficiente de μ_i es negativo, se puede bajar sin límite; si los dos son ≥ 0, el mínimo se alcanza en un vértice. Los apartados (c) y (d) del enunciado original, que preguntan por vectores de coste concretos, se resuelven allí con el teorema fundamental.
Los puntos extremos son cortes de restricciones que caen dentro; las direcciones extremas son los rumbos de los lados infinitos y se obtienen de las desigualdades *homogéneas*. Y el teorema de representación convierte un problema con restricciones en un problema sobre los coeficientes λ, μ, donde se lee de un vistazo si hay óptimo.
Dónde se falla. En tomar como vértice el corte de la segunda y la tercera recta, $(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$, sin comprobar la primera desigualdad, que no cumple: un corte de dos rectas es un vértice solo si cumple todas las demás. En orientar al revés una dirección: $(-1, -\frac{1}{3})$ va a lo largo de la segunda recta pero hacia dentro, y no cumple $d_1 + d_2 \geq 0$. En dar signo equivocado a las variables de exceso de (b): una desigualdad «$\geq$» se convierte en igualdad *restando* una variable no negativa. Y en olvidar $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, sin la cual la representación describe un cono y no el poliedro.

Ejercicio 2.11. *Representar un poliedro dado por desigualdades* MAY 2015

Hallar la representación del conjunto

$$P = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 - x_2 \geq 1,\ x_1 - x_2 \leq 1,\ 2x_1 - x_2 \geq -1,\ x_1, x_2 \geq 0\}.$$

Resolución. *La idea.* Antes de buscar vértices conviene mirar las desigualdades una a una, porque aquí dos de ellas son la misma recta con los dos sentidos: juntas dicen que el conjunto está sobre una recta, y un trozo de recta tiene como mucho dos extremos y un rumbo. Basta ver dónde empieza.
Las desigualdades $x_1 - x_2 \geq 1$ y $x_1 - x_2 \leq 1$ juntas son $x_1 - x_2 = 1$, es decir, $x_2 = x_1 - 1$. Sustituyendo en la tercera: $2x_1 - (x_1 - 1) = x_1 + 1 \geq -1$, que se cumple siempre que

$x_1 \geq -2$, y en particular siempre que $x_1 \geq 0$: es redundante. Quedan $x_2 = x_1 - 1 \geq 0$, o sea $x_1 \geq 1$. Luego

$$P = \{(t,\, t-1) :\ t \geq 1\},$$

una semirrecta que arranca en $(1,0)$ con rumbo $(1,1)$. Su único punto extremo es $(1,0)$ (un punto de una semirrecta que no sea el origen de la misma es punto medio de otros dos) y su única dirección es $(1,1)$ (salvo múltiplos), que es por tanto extrema. La representación:

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} :\ \mu \geq 0 \right\},$$

con $\lambda_1 = 1$ obligatoriamente (un solo punto extremo).

Otra vía (en forma estándar, por bases). Con $x_1 - x_2 = 1$ como igualdad y una holgura $x_3 \geq 0$ en $-2x_1 + x_2 \leq 1$: $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $b = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $m = 2$, $n = 3$. Bases: $[a_1 \mid a_2] = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\det = -1$, $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $B^{-1}b = (-2,-3)$: no factible. $[a_1 \mid a_3] = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B^{-1}b = (1,3) \geqq 0$: punto extremo $(1,0,3)$, es decir, $(1,0)$ en el plano. $[a_2 \mid a_3] = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B^{-1}b = (-1,2)$: no factible. Direcciones: $Ad = 0$, $d \geq 0$: $d_1 = d_2$ y $d_3 = 2d_1 - d_2 = d_1$, luego $d = (1,1,1)$ salvo múltiplos: una dirección extrema, $(1,1)$ en el plano. Coincide.

Antes de calcular conviene simplificar: dos desigualdades opuestas son una igualdad, y una restricción puede ser redundante. Y un poliedro puede ser tan delgado como una semirrecta, en cuyo caso un punto extremo y una dirección extrema bastan para representarlo.

Dónde se falla. En tratar $x_1 - x_2 \geq 1$ y $x_1 - x_2 \leq 1$ como dos restricciones independientes y ponerles dos holguras: las dos valen cero en todo punto del conjunto, así que cada vértice sale degenerado y hay más bases que revisar sin ganar nada. Y en olvidar $x_2 \geq 0$, que es la restricción que fija dónde empieza la semirrecta: sin ella mandaría $x_1 \geq 0$, y el punto extremo saldría $(0,-1)$ en lugar de $(1,0)$.

Ejercicio 2.12. *Un poliedro que es un solo punto* 24-25

Sea $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Encontrar un punto extremo del poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^3_+ :\ Ax = (1,1,1)^T\}$.

Resolución. *La idea.* Antes de buscar bases se mira el rango. Si A es cuadrada e invertible, el sistema $Ax = b$ tiene una sola solución, y el poliedro es ese punto (si es no negativo) o el vacío (si no lo es). No hay nada que elegir.

$\det A = 1 \cdot (0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) - 1 \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) + 0 = -1 - 1 = -2 \neq 0$, luego $\text{rango}(A) = 3 = n = m$: estamos en el caso 2 de la discusión de Rouché-Frobenius. El sistema $Ax = (1,1,1)^T$ tiene solución única; sumando las tres ecuaciones, $2(x_1 + x_2 + x_3) = 3$, de donde $x_1 + x_2 + x_3 = 3/2$. Restando de esta última igualdad cada ecuación original se obtiene $x_3 = x_2 = x_1 = \frac{1}{2}$. Comprobación: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ en las tres filas. Como $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \geqq 0$, $P = \{x\}$ es un solo punto, y ese punto es su punto extremo: con $B = A$ (invertible), $x = B^{-1}b \geqq 0$ y no hay variables no básicas.

Cabe preguntarse a continuación si A es totalmente unimodular, y este cálculo ya contesta que no puede serlo: el vértice tiene coordenadas no enteras, y en el capítulo 5 se verá que una matriz totalmente unimodular solo produce vértices enteros cuando b es entero.

Antes de buscar bases conviene mirar el rango: si $\operatorname{rango}(A) = n$, el poliedro tiene a lo sumo un punto. Si además b es entero, un vértice con coordenadas fraccionarias prueba que A no es totalmente unimodular.
Dónde se falla. En buscar varias bases o direcciones en un poliedro que es un punto: con $B = A$ no quedan columnas no básicas, y no hay nada más que calcular. En no comprobar el signo de la solución: si alguna componente hubiera salido negativa, P sería vacío y no tendría ningún punto extremo. Y, para la pregunta de la unimodularidad, en ir a buscar un argumento largo cuando ya está hecho: una matriz totalmente unimodular tiene el determinante de toda submatriz cuadrada en $\{0, 1, -1\}$, y la propia A es una submatriz cuadrada de sí misma con determinante -2.

Ejercicio 2.13. *Todos los vértices y todas las direcciones extremas por bases*

Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 - x_2 \leq 2, \ x_1 + x_2 \geq 1, \ x_1, x_2 \geq 0\}$. Pasa a forma estándar, recorre las seis bases posibles para encontrar los puntos extremos, y usa el teorema de caracterización de direcciones extremas para encontrar todas las direcciones extremas. Escribe la representación de S y comprueba, con la desigualdad homogénea, que no falta ninguna dirección.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *La segunda desigualdad es «$\geq$»: su variable de exceso entra con signo menos.*
2. *Para cada base invertible, calcula $B^{-1}a_j$ para las dos columnas no básicas; solo las que salgan $\leqq 0$ dan direcciones. La factibilidad de la base depende de b; las direcciones dependen de A.*

Resolución. *La idea.* Es el procedimiento de la sección aplicado sin atajos. Con $m = 2$ y $n = 4$ hay $\binom{4}{2} = 6$ parejas de columnas; en cada una, $B^{-1}b$ decide si hay vértice (factible si sale $\geqq 0$) y cada $B^{-1}a_j$ de una columna no básica decide si hay dirección extrema (si sale $\leqq 0$). Al final, las desigualdades homogéneas del plano comprueban que no se ha perdido ninguna.
Forma estándar. Holgura $x_3 \geq 0$ en la primera y exceso $x_4 \geq 0$ en la segunda:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad m = 2, \ n = 4.$$

Las seis bases.

- $[a_1 \mid a_2] = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\det = 2$, $B^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B^{-1}b = \frac{1}{2}(3, -1)$: no factible.
- $[a_1 \mid a_3] = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\det = -1$, $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $B^{-1}b = (1, 1) \geqq 0$: vértice $(1, 0, 1, 0)$, es decir, $(1, 0)$.
- $[a_1 \mid a_4] = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\det = -1$, $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $B^{-1}b = (2, 1) \geqq 0$: vértice $(2, 0, 0, 1)$, es decir, $(2, 0)$.
- $[a_2 \mid a_3] = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\det = -1$, $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B^{-1}b = (1, 3) \geqq 0$: vértice $(0, 1, 3, 0)$, es decir, $(0, 1)$.
- $[a_2 \mid a_4] = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\det = 1$, $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $B^{-1}b = (-2, -3)$: no factible.
- $[a_3 \mid a_4] = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $B^{-1}b = (2, -1)$: no factible.

Tres puntos extremos: $(1, 0)$, $(2, 0)$ y $(0, 1)$. (En el dibujo: la región está por encima de $x_1 + x_2 = 1$ y por encima de $x_1 - x_2 = 2$, en el primer cuadrante; sus vértices son los cortes de $x_1 + x_2 = 1$ con los ejes y el de $x_1 - x_2 = 2$ con el eje x_1.)

Direcciones extremas, base a base. Empezamos por las tres bases factibles:

- Base $[a_1 \mid a_3]$, $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$: $B^{-1}a_2 = B^{-1}(-1,1)^T = (1,-2)^T$ y $B^{-1}a_4 = B^{-1}(0,-1)^T = (-1,1)^T$; ninguno es $\leqq 0$: esta base no da direcciones.
- Base $[a_1 \mid a_4]$, $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$: $B^{-1}a_2 = (-1,-2)^T \leqq 0$: dirección d con $d_1 = 1$, $d_4 = 2$ (la parte básica es $-B^{-1}a_2 = (1,2)$, en el orden (x_1, x_4)), $d_2 = 1$, $d_3 = 0$: $d = (1,1,0,2)$, que en el plano es $(1,1)$. $B^{-1}a_3 = (1,1)^T \not\leqq 0$.
- Base $[a_2 \mid a_3]$, $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$: $B^{-1}a_1 = (1,2)^T \not\leqq 0$; $B^{-1}a_4 = (-1,-1)^T \leqq 0$: dirección con parte básica $(1,1)$ en (x_2, x_3), $d_4 = 1$, $d_1 = 0$: $d = (0,1,1,1)$, en el plano $(0,1)$.

Hemos encontrado dos direcciones extremas: $(1,1)$ y $(0,1)$. Las otras bases invertibles no aportan nuevas: $[a_1 \mid a_2]$ da $(1/2, 1/2, 0, 1)$, proporcional a la primera; $[a_2 \mid a_4]$ da las dos direcciones ya obtenidas; y $[a_3 \mid a_4]$ da $(0,1,1,1)$.

Comprobación con las desigualdades homogéneas. d es dirección si $d_1 - d_2 \leq 0$, $d_1 + d_2 \geq 0$, $d_1, d_2 \geq 0$, es decir, $d_2 \geq d_1 \geq 0$, $d \neq 0$. Ese cono lo generan $(1,1)$ y $(0,1)$: cualquier (d_1, d_2) con $d_2 \geq d_1 \geq 0$ es $d_1(1,1) + (d_2 - d_1)(0,1)$ con coeficientes no negativos. No falta ninguna.

Representación.

$$S = \left\{ \lambda_1 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \lambda_2 \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \lambda_3 \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \mu_1 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \mu_2 \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) : \ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \ \lambda, \mu \geq 0 \right\}.$$

El procedimiento completo es este: forma estándar, todas las bases para los vértices, y, para las direcciones, los $B^{-1}a_j$ de todas las bases invertibles. El simplex usará esas mismas operaciones, eligiendo los pasos según una función objetivo; para encontrar un óptimo no necesita enumerar todos los vértices y direcciones.

Dónde se falla. En el signo de la columna del exceso: es $(0,-1)$, no $(0,1)$, y con el signo cambiado sale otro conjunto. En leer $B^{-1}b$ en el orden equivocado: sus componentes son las variables de la base en el orden en que se han puesto las columnas; en $[a_1 \mid a_4]$, el vector $(2,1)$ dice $x_1 = 2$ y $x_4 = 1$, no $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$. Y en descartar una base para las direcciones por no ser factible: la condición $B^{-1}a_j \leqq 0$ depende solo de A, no de b, y el teorema de caracterización de las direcciones extremas no pide que la base sea factible.

REPASO INTERCALADO

Primera ronda: recordar. Al día siguiente de terminar el capítulo, a libro cerrado.

1. Define combinación convexa, punto extremo, dirección y dirección extrema. Da un convexo con infinitos puntos extremos y otro sin ninguno.
2. Enuncia el teorema de Caratheodory y di en una frase de dónde sale el $n+1$.
3. Enuncia el lema de Farkas en sus dos escrituras ($Ax = b$, $x \geqq 0$ frente a $u^T A \leqq 0$, $u^T b > 0$). ¿Cuál de las dos alternativas es un «certificado» y por qué?
4. ¿Qué dice el teorema de Tucker? ¿Dónde se usa que la matriz es antisimétrica?
5. Escribe la fórmula $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$ y explica en palabras qué es un punto extremo según el teorema de caracterización.
6. (Capítulo 1.) Formula el problema de cobertura: n candidatos con costes c_j, m puntos que cubrir, $N(i)$ los candidatos que cubren el punto i.
7. (Capítulo 1.) ¿Cuáles son los cinco aspectos que incluye la Programación Matemática? ¿A cuál pertenece este capítulo?

Segunda ronda: aplicar. Dos o tres días después.

1. Escribe el punto $(1,1)$ como combinación convexa de $(0,0)$, $(3,0)$, $(0,3)$ y $(3,3)$ con los cuatro coeficientes positivos, y reduce a tres con el procedimiento de Caratheodory.
2. Decide, usando Farkas, si el sistema $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 - x_2 = 3$, $x \geqq 0$ tiene solución; si no la tiene, da el certificado u.
3. Con las dos máquinas del ejemplo numérico de Farkas, ¿se puede cumplir exactamente el encargo $(2,5)$? Si no, da un certificado y léelo como un sistema de precios.
4. Encuentra todos los puntos extremos de $\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 + 2x_2 \leq 4,\ x_1 \leq 3,\ x \geq 0\}$ recorriendo las bases de su forma estándar. ¿Cuántas bases hay y cuántas son factibles?
5. (Capítulo 1.) Un cliente debe ser servido íntegramente por una sola planta, y una planta cerrada no sirve a nadie. Escribe las dos restricciones con binarias.
6. Da un poliedro en $\mathbb{R}^2$ con exactamente un punto extremo y dos direcciones extremas, y escribe su representación.

Tercera ronda: subir el nivel. Al terminar el capítulo de programación lineal.

1. Explica por qué el «cociente mínimo» de la prueba de Caratheodory, el de la prueba de existencia de puntos extremos y el del teorema de representación son la misma operación, y qué nombre recibe en el simplex.
2. Un problema de programación lineal en forma estándar tiene solución óptima finita. Usando solo el teorema de representación, explica por qué algún punto extremo es óptimo.
3. ¿Qué relación hay entre el vector u del certificado de Farkas para «$Ax = b$, $x \geqq 0$ es infactible» y la fase I del simplex, que termina con valor positivo cuando el problema es infactible?
4. El teorema de Tucker aplicado a la matriz antisimétrica $\begin{pmatrix} 0 & A & -b \\ -A^T & 0 & c \\ b^T & -c^T & 0 \end{pmatrix}$ produce un vector $w = (u, x, t)$. Antes de leer el capítulo de dualidad, intenta adivinar qué significan u, x y t, y qué dice el producto de esa matriz por w componente a componente.

CAPÍTULO 3

Programación lineal

ANTES DE LEER

Cuatro preguntas antes de leer. No hace falta acertarlas; hace falta intentarlas.

1. Una fábrica puede elaborar cuatro productos con tres máquinas y quiere el máximo beneficio. ¿Esperarías que la decisión óptima fabrique un poco de los cuatro, o mucho de unos pocos y nada del resto? ¿De qué depende cuántos productos sobreviven?
2. Dibuja un polígono convexo en el plano y, encima, una familia de rectas paralelas: son las líneas de nivel del beneficio. Deslízalas en el sentido en que el beneficio crece. ¿Dónde se queda la última recta que aún toca el polígono?
3. Un problema puede no tener solución óptima por dos motivos muy distintos: porque ningún punto cumpla las restricciones, o porque el objetivo pueda mejorar sin límite. ¿Qué hay que comprobar sobre la región factible y sobre la función objetivo en cada caso?
4. Si el óptimo está en un vértice y los vértices son un número finito, el problema parece resuelto: se prueban todos. Con 50 variables y 30 igualdades independientes, ¿cuántas selecciones de 30 columnas serían candidatas a formar una base?

Las respuestas están, por este orden, en las secciones 3.1 (soluciones básicas), 3.2 (teorema fundamental), 3.2 (ilimitado frente a infactible) y 3.3 (por qué hace falta el simplex).

Mapa del capítulo. Cuatro bloques, en este orden. El primero fija el problema y su vocabulario: las dos formas de escribirlo, la partición $A = [B \mid N]$ y las soluciones básicas, que son la traducción algebraica de la palabra «vértice». El segundo enuncia y demuestra el teorema fundamental de la programación lineal, que dice exactamente cuándo hay óptimo finito y dónde está: es el teorema que convierte un problema con infinitos candidatos en uno con un número finito de ellos. El tercero es el método del simplex, en sus cinco piezas: la forma matricial, el formato tabla, la búsqueda de una

solución básica factible inicial, el algoritmo completo y su convergencia. El cuarto son los ejemplos.
Todo el capítulo se apoya en el anterior. El teorema de caracterización de puntos extremos, el de direcciones extremas y el de representación de poliedros, que allí eran resultados de geometría convexa, aquí son, respectivamente, la definición de vértice que sabe usar un ordenador, el test de problema ilimitado y la demostración del teorema fundamental. Cuando haga falta uno de ellos se reenuncia entero, sin obligar a volver atrás.

3.1 Definiciones básicas. Planteamiento del problema

LA PREGUNTA

Una fundición compra chatarra de dieciocho procedencias distintas, con composición y precio conocidos. El modelo fija la masa total y las cantidades de ocho componentes: nueve balances lineales independientes. Si existe una mezcla de coste mínimo, ¿por qué se puede elegir una que use a lo sumo nueve procedencias, aunque se disponga de dieciocho? ¿Qué relación hay entre ese límite y el número de balances?

LA IDEA: QUÉ VA A PASAR EN ESTE CAPÍTULO

La respuesta a esa pregunta es el capítulo entero, y conviene tenerla delante desde el principio aunque todavía no se pueda demostrar. Si uno se coloca en un punto de la región factible y camina en línea recta, el valor de $c^T x$ cambia de manera monótona: o crece siempre, o decrece siempre, o se queda quieto. Nunca hace un valle. Si un punto óptimo está en una cara con otros puntos de igual coste, se puede buscar en una cara menor sin empeorar. El resultado preciso será este: en forma estándar, si existe un óptimo, existe uno que es un vértice. Puede haber otros óptimos, incluso en el interior relativo cuando el objetivo es constante. En un vértice hay a lo sumo m variables positivas, donde m es el número de igualdades independientes; sus columnas de A deben ser linealmente independientes. Por eso bastan a lo sumo nueve chatarras en el modelo propuesto, aunque el óptimo podría usar menos. El capítulo convierte esta geometría en un algoritmo.

3.1.1 Las dos formas del problema

El problema de **programación lineal** (que abreviaremos PPL) puede presentarse en dos formulaciones equivalentes:

FORMA CANÓNICA		FORMA ESTÁNDAR	
Minimizar	$c^T x$	Minimizar	$c^T x$
sujeto a:	$Ax \geq\ (\leq)\ b$	sujeto a:	$Ax = b$
	$x \geq 0$		$x \geq 0$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in M_{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$; en la forma estándar se supone además, cuando conviene, que $b \geq 0$.

Definición. En cualquiera de las dos formas llamamos
- **función objetivo** a $c^T x$;
- **vector de costos** a $c^T = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$;
- **variables de decisión** a $x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
- **matriz de restricciones** a A, y **coeficientes tecnológicos** a sus entradas a_{ij}, con $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$;
- **vector de recursos** a $b^T = (b_1, \ldots, b_m)$.

En la forma canónica, a las restricciones que en un punto se dan con igualdad se les llama **restricciones activas** en ese punto.

Los nombres no son decorativos y conviene leerlos una vez con el problema de la fundición delante. Las variables de decisión son las toneladas de cada chatarra: lo que se decide. Los costos son los precios por tonelada: lo que se paga. Las filas de A expresan los balances de masa y composición; en una fila de composición, a_{ij} es la cantidad del componente correspondiente que aporta una tonelada de la chatarra j. El vector de recursos recoge las cantidades exigidas. Si una especificación se expresa mediante una desigualdad, será activa en un punto cuando allí se cumpla con igualdad: si la especificación de cromo pide al menos un 18 % y la colada tiene exactamente un 18 %, esa restricción está activa, y cualquier movimiento que baje el cromo está prohibido. Las restricciones no activas, en cambio, tienen holgura y no estorban a los movimientos pequeños. Esa distinción entre lo que aprieta y lo que sobra es la que va a organizar todo el capítulo.

Observación (sobre los símbolos $\leq$ y $\geq$)**.** En el capítulo 2 se distinguían tres órdenes entre vectores: $x \leqq y$ (componente a componente, admitiendo la igualdad), $x \leq y$ (además $x \neq y$) y $x < y$ (todas las componentes estrictas). A partir de este capítulo, y para mantener la notación de la bibliografía habitual, **$\leq$ y $\geq$ entre vectores admiten la igualdad mientras no se indique lo contrario**. Así que cuando aquí se escriba $x \geq 0$ hay que entender lo que en el capítulo 2 se escribía $x \geqq 0$. Es un cambio de notación, no un cambio de significado de los teoremas; cuando haga falta la desigualdad estricta se dirá con palabras.

3.1.1.1 Por qué las dos formas son la misma

Las dos formulaciones son equivalentes, y pasar de una a otra no supone ninguna pérdida de generalidad. Merece la pena ver por qué, porque las cuatro transformaciones que lo consiguen aparecen en casi todos los ejercicios, y porque una de ellas tiene una lectura geométrica que se usará constantemente.

1. De maximizar a minimizar. Maximizar $c^T x$ y minimizar $-c^T x$ tienen exactamente las mismas soluciones óptimas, y los valores óptimos son opuestos:

$$\mathrm{Max}_{x \in S}\, c^T x = -\,\mathrm{Min}_{x \in S}\,(-c^T x).$$

Lo único que hay que recordar es cambiar el signo al valor final: el argumento del mínimo y el del máximo son el mismo punto, pero los dos valores óptimos son opuestos.

2. De desigualdad a igualdad: holguras y excesos. Una restricción $a_i^T x \leq b_i$ equivale a

$$a_i^T x + h_i = b_i, \qquad h_i \geq 0,$$

donde h_i es una **variable de holgura**: mide cuánto le sobra a esa restricción. Una restricción $a_i^T x \geq b_i$ equivale a

$$a_i^T x - h_i = b_i, \qquad h_i \geq 0,$$

y ahí h_i es una **variable de exceso**: mide cuánto se pasa. Obsérvese la asimetría de los signos, que es la fuente de la mitad de los errores de cálculo del tema: la holgura entra sumando y el exceso restando. Y obsérvese también la consecuencia, que importará en la sección 3.3: al fijar a cero las variables originales, una holgura vale b_i y un exceso vale $-b_i$. Por tanto, con $b \geq 0$, las holguras dan una base factible inmediata; un exceso con $b_i > 0$ daría un valor negativo. Si $b_i = 0$, el exceso también vale cero y no plantea ese problema.

3. Recursos negativos. Si alguna componente b_i es negativa y se quiere $b \geq 0$, se multiplica esa fila entera por -1; eso invierte el sentido de la desigualdad si la había, y no cambia nada si ya era una igualdad.

4. Variables libres. La forma estándar se escribe siempre con $x \geq 0$, pero una variable sin restricción de signo aparece con frecuencia y conviene saber qué hacer con ella: una variable libre $x_j \in \mathbb{R}$ se sustituye por la diferencia de dos no negativas,

$$x_j = x_j^+ - x_j^-, \qquad x_j^+ \geq 0,\ x_j^- \geq 0,$$

y se reemplaza su columna a_j por el par de columnas a_j y $-a_j$. Todo punto factible del problema original tiene al menos una imagen en el nuevo, y recíprocamente; el coste también se conserva, porque $c_j x_j = c_j x_j^+ - c_j x_j^-$.

Y en el otro sentido, para volver de estándar a canónica, basta escribir cada igualdad $a_i^T x = b_i$ como las dos desigualdades $a_i^T x \leq b_i$ y $a_i^T x \geq b_i$. El problema crece —m restricciones pasan a ser $2m$—, pero el conjunto factible es el mismo, porque un número es igual a b_i exactamente cuando ni lo supera ni se queda por debajo.

LA IDEA: AÑADIR UNA HOLGURA CONSERVA LA ESTRUCTURA AFÍN

La transformación 2 parece un truco de contabilidad y es en realidad una operación geométrica muy limpia que conviene ver una vez. Sea el polígono del plano $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 + x_2 \leq 4, \ x \geq 0\}$, un triángulo. Al añadir la holgura queda $\widehat{S} = \{(x_1, x_2, h) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 + h = 4, \ x \geq 0, \ h \geq 0\}$, que vive en $\mathbb{R}^3$ pero está contenido en el plano $x_1 + x_2 + h = 4$: sigue siendo un objeto de dimensión dos, un triángulo inclinado dentro de ese plano. La aplicación que a cada x del triángulo original le asigna $(x, 4 - x_1 - x_2)$ es una biyección afín entre los dos, con inversa la proyección que olvida h. Se ha *levantado* a un espacio con más coordenadas: se conservan vértices, aristas y direcciones de recesión, aunque no necesariamente longitudes o ángulos. Las desigualdades quedan reducidas a la no negatividad; las igualdades $Ax = b$ siguen presentes. La ventaja para el simplex es que puede buscar los vértices imponiendo que ciertas coordenadas sean cero, junto con esas igualdades.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: ELIMINAR VARIABLES, COMO EN EL MÉTODO DE GAUSS

Ante un sistema de desigualdades lineales, lo primero que se le ocurre a cualquiera que haya resuelto sistemas de ecuaciones es imitar a Gauss: despejar una variable y eliminarla, quedarse con un sistema en una variable menos, repetir hasta que no queden variables y leer la respuesta. Con desigualdades se puede hacer, y no es una ocurrencia: es el método que Fourier describió en 1827 y que Motzkin sistematizó en su tesis, publicada en 1936; de ahí su nombre actual, *eliminación de Fourier-Motzkin*. Escribiendo todas las desigualdades con $\leq$, para eliminar x_n se separan las desigualdades en las que x_n aparece con coeficiente positivo (que dan cotas superiores para x_n) de aquellas en que aparece con coeficiente negativo (que dan cotas inferiores), y se sustituyen por todas las combinaciones «cota inferior $\leq$ cota superior», que ya no contienen x_n. También se conservan las desigualdades donde el coeficiente de x_n ya era cero. El sistema resultante tiene solución si y solo si el original la tenía.
Su ventaja es enorme: es elemental, es exacto y decide la factibilidad sin ninguna teoría previa. Su dificultad es el recuento. Si de las m desigualdades la mitad tiene coeficiente positivo en x_n y la otra mitad negativo, el nuevo sistema tiene $m^2/4$ desigualdades; al eliminar otra variable, el mismo crecimiento puede repetirse. Es un comportamiento de peor caso: muchas desigualdades pueden ser redundantes y eliminarse, pero la explosión de tamaño limita el método. El simplex sigue otra estrategia: recorrer bases. Fourier–Motzkin sigue siendo útil para *proyectar* un poliedro sobre un subespacio de coordenadas, cuando se necesita una descripción de esa proyección.

3.1.2 El conjunto factible

A partir de aquí el problema se considera escrito en forma estándar.

Definición. Diremos que x es **factible** si $Ax = b$ y $x \geq 0$. Si existe algún punto factible se dice que el problema es **factible**, y se dice que es **infactible** si no existe ningún x que verifique todas las restricciones.

El conjunto factible de un problema de programación lineal es, por tanto, el poliedro en forma estándar

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = b, \ x \geq 0\},$$

que es exactamente el objeto estudiado en la sección 2.4. Conviene leer esa fórmula despacio, porque describe la intersección de dos cosas de naturaleza muy distinta. La condición $Ax = b$

recorta un **subespacio afín** de $\mathbb{R}^n$: si A tiene rango m, tiene dimensión $n - m$. Si esa dimensión es positiva, se extiende infinitamente en sus direcciones; si es cero, es un único punto. La condición $x \geq 0$ recorta el **ortante no negativo**, que es una esquina infinita con n caras. Un poliedro en forma estándar es el resultado de cortar el primero con la segunda, y toda la geometría del capítulo sale de ahí. Cuando $n > m$, el subespacio afín por sí solo no tiene vértices: estos aparecen al cortarlo con las caras del ortante, donde ciertas coordenadas valen cero. Todos esos puntos siguen cumpliendo $Ax = b$.

Del capítulo 2 se hereda todo lo demás sin volver a probarlo: S es un conjunto convexo y cerrado, tiene un número finito de puntos extremos, un número finito de direcciones extremas si no está acotado, y todo punto suyo se escribe como combinación convexa de los primeros más combinación lineal positiva de las segundas. Ese teorema de representación es el que convierte «recorrer un conjunto infinito» en «recorrer una lista finita», y es la razón de que exista un algoritmo.

Conviene ahora escribir el problema de tres maneras equivalentes. Son la misma cosa escrita con distintos paréntesis, pero cada una hace visible algo que las otras esconden, y el libro las usa las tres: una para demostrar, otra para modelar y otra para calcular.

La primera es la *matricial*, que es la de las demostraciones, porque en ella A, b y c actúan como objetos únicos y las cuentas se hacen con álgebra de bloques:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & c^T x \\ \text{sujeto a:} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

La segunda es la escritura *por filas*, que es la de los modelos, porque cada fila es una restricción con su significado y se puede leer en voz alta — la fila i dice que el consumo total del recurso i, sumado sobre todas las actividades, ha de valer exactamente b_i —:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{sujeto a:} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Y la tercera es la escritura *por columnas*, que es la del simplex:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{sujeto a:} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b \\ & x_j \geq 0, \end{aligned}$$

donde $a_j \in \mathbb{R}^m$ es la j-ésima columna de A.

Esta última es la que hay que interiorizar, porque es la que el algoritmo manipula: dice que el vector de recursos b ha de escribirse como combinación lineal *con coeficientes no negativos* de las columnas de A, y que x_j es precisamente el coeficiente de la columna a_j. Resolver el problema es elegir con qué columnas se paga b y en qué proporciones, y hacerlo lo más barato posible. La columna a_j es «lo que aporta» una unidad de la actividad j, y c_j es lo que cuesta.

Merece la pena quedarse con esa lectura, porque explica de antemano las tres cosas que puede contestar el método. Si b no es combinación no negativa de las columnas, no hay manera de pagarlo y el problema es infactible. Si lo es de muchas maneras, hay que elegir la más barata, y el algoritmo consistirá en cambiar de una elección a otra mejorando. Y si el problema es factible y entre las columnas hay una combinación que no altera b pero abarata — un vector $d \geq 0$ no nulo con $Ad = 0$ y $c^T d < 0$ —, entonces no hay elección más barata que todas y el problema es ilimitado. Las tres respuestas del capítulo están ya en esta manera de mirar el sistema.

EXPLÍCATE. *Vuelve a la fundición de la pregunta inicial con la tercera escritura delante. ¿Qué es la columna a_j? ¿Qué es b? ¿Qué significaría que b no sea combinación no negativa de las columnas?*

3.1.3 La partición $A = [B \mid N]$ y las soluciones básicas

Supondremos que

$$\text{rango}(A) = m < n.$$

Las dos condiciones dicen cosas distintas y conviene separarlas.

Que el rango sea m significa que las m ecuaciones son independientes: ninguna sobra. Si el rango fuera menor que m, el teorema de Rouché-Frobenius — el sistema $Ax = b$ tiene solución si y solo si $\text{rango}(A \mid b) = \text{rango}(A)$; si la tiene y $\text{rango}(A) = r < m$, hay $m - r$ ecuaciones que son combinación de las demás — deja dos posibilidades. Está reenunciado entero en la sección 2.4, y también en el apéndice F, con un ejemplo de cada caso. Si el rango de la matriz ampliada $[A \mid b]$ es mayor que el de A, el sistema $Ax = b$ no tiene solución y el problema es infactible antes de mirar el signo de nada. Y si los dos rangos coinciden, alguna ecuación es combinación lineal de las otras, es redundante y puede eliminarse sin cambiar S; hecho eso, se vuelve a estar en el caso $\text{rango}(A) = m$. Así que la hipótesis no pierde generalidad: se eliminan antes las ecuaciones redundantes. (En la fase I del simplex, en la sección 3.3, reaparecerá esta discusión: una variable artificial que se queda en la base a nivel cero y con toda su fila nula es exactamente el síntoma de una restricción redundante.)

Que $m < n$ significa que hay estrictamente más incógnitas que ecuaciones, es decir, que quedan grados de libertad. Si fuera $m = n$ con rango m, el sistema $Ax = b$ tendría una única solución y no habría nada que optimizar: o esa solución es no negativa y es la respuesta, o no lo es y el problema es infactible.

Reordenando las columnas, A admite una representación

$$A = [B \mid N], \qquad \begin{cases} B \in M_{m\times m}, & \text{la } \textbf{matriz básica}\text{, no singular,} \\ N \in M_{m\times(n-m)}, & \text{la } \textbf{matriz no básica}\text{,} \end{cases}$$

que no tiene por qué ser única: hay tantas candidatas como maneras de elegir m columnas independientes entre las n. Reordenando de la misma forma las componentes de x, se escribe $x^T = (x_B^T, x_N^T)$ con $x_B \in \mathbb{R}^m$ y $x_N \in \mathbb{R}^{n-m}$, y entonces

$$Ax = b \iff [B \mid N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \iff Bx_B + Nx_N = b \iff \boxed{x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N}$$

La última fórmula es, con diferencia, la más usada del capítulo, y merece leerse en palabras: *fijados los valores de las $n - m$ variables no básicas, las m básicas quedan determinadas*. Es una parametrización del conjunto afín $\{x : Ax = b\}$ por $x_N \in \mathbb{R}^{n-m}$; los grados de libertad

son exactamente $n - m$, como tenía que ser. Asignando valores $x_N \geq 0$ y quedándose con aquellos para los que además $x_B \geq 0$, se recorre todo el conjunto factible S.

La cadena de equivalencias de arriba es álgebra de matrices por bloques: se opera con B y N como si fueran números, con el único cuidado de no cambiar el orden de los productos, porque $[B \mid N](x_B, x_N) = Bx_B + Nx_N$ por la propia definición del producto por columnas. Quien no la tenga fresca la encontrará rehecha, con esta misma matriz y con dos bases distintas de un ejemplo pequeño, en el apéndice F, sección «Álgebra lineal».

Definición. Dada una partición $A = [B \mid N]$ con B no singular:

- si $x_N = 0$, entonces $x_B = B^{-1}b$ y el punto $x = (x_B, 0)$ se llama **solución básica**;
- si además $x_B = B^{-1}b \geq 0$, se llama **solución básica factible**;
- a las componentes de x_B se les llama **variables básicas** y a las de x_N, **variables no básicas**;
- si alguna variable básica es cero, la solución básica factible se llama **degenerada**.

LA IDEA: QUÉ ES, GEOMÉTRICAMENTE, UNA SOLUCIÓN BÁSICA

Un punto del espacio $\mathbb{R}^n$ queda determinado por n ecuaciones independientes. De ellas ya tenemos m, las del sistema $Ax = b$. Faltan $n - m$, y las únicas ecuaciones que hay disponibles gratis son las que dicen que una variable se anula: $x_j = 0$. Una solución básica es, exactamente, lo que sale de escoger $n - m$ de esas ecuaciones y añadírselas al sistema. Geométricamente, cada $x_j = 0$ es un hiperplano coordenado, una de las «paredes» del ortante positivo; una solución básica es un punto donde se cortan $n - m$ paredes y el plano afín $Ax = b$. Que B sea no singular es la condición de que ese corte sea un punto y no quede indeterminado; que $B^{-1}b \geq 0$ es la condición de que el punto caiga dentro del ortante y no fuera. Y la degeneración es lo que ocurre cuando en ese punto se anulan *más* de $n - m$ variables: por el punto pasan más paredes de las estrictamente necesarias, como en el vértice de una pirámide de base cuadrada, donde concurren cuatro caras y con tres bastaba. Ese exceso puede permitir que varias bases representen el mismo punto. En el simplex habrá que distinguir entonces cambiar de base y avanzar a otro vértice (sección 3.3).

CONEXIÓN: EL PUENTE CON EL CAPÍTULO 2

La palabra «vértice» no aparece en la definición anterior, y sin embargo es de lo que se está hablando. El puente es el teorema de caracterización de puntos extremos de la sección 2.4, que conviene tener escrito aquí mismo:

Sea $S = \{x : Ax = b,\ x \geq 0\}$ con $A \in M_{m\times n}$, $\operatorname{rango}(A) = m$. Un punto x es punto extremo de S si y solo si A admite una descomposición $A = [B \mid N]$ con B invertible tal que $x = (B^{-1}b, 0)$ y $B^{-1}b \geq 0$.

Es decir: **solución básica factible y punto extremo son la misma cosa**, una dicha en lenguaje de álgebra lineal y la otra en lenguaje de geometría. Esa identificación es la que hace posible la programación lineal computacional: un ordenador no sabe qué es una esquina, pero sabe invertir una matriz.

3.1.4 Un ejemplo completo, con todas sus bases

La partición se ve mejor sobre un ejemplo pequeño, y conviene hacerlo entero: con su primera base y con una segunda, porque es la segunda la que esconde la lección más importante del apartado.

Ejemplo. Sea

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 + x_2 \geq 2,\ 2x_1 + x_2 \leq 4,\ x_1, x_2 \geq 0\}.$$

Con una variable de exceso x_3 en la primera restricción y una de holgura x_4 en la segunda, S se escribe en forma estándar como $\{x \in \mathbb{R}^4 :\ Ax = b,\ x \geq 0\}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aquí $m = 2$, $n = 4$ y $\operatorname{rango}(A) = 2$: las dos primeras columnas ya son independientes.

Primera base. Tomemos $B = (a_1 \mid a_4)$ y por tanto $N = (a_2 \mid a_3)$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

con $x_B = (x_1, x_4)$ y $x_N = (x_2, x_3)$. La fórmula $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$ da

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

y por tanto

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - x_2 + x_3 \\ x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Tomando $s = x_2$ y $t = x_3$, esta es la descripción de S que sale de ahí:

$$S = \{(2 - s + t, s, t, s - 2t) :\ s, t \geq 0,\ 2 - s + t \geq 0,\ s - 2t \geq 0\}.$$

Haciendo $x_N = 0$ se obtiene la solución básica $x = (2, 0, 0, 0)$, que es factible porque $B^{-1}b = (2, 0) \geq 0$. Pero obsérvese que la segunda variable básica, x_4, vale cero: **la solución básica factible es degenerada**.

Segunda base: la que esconde la lección. Tomemos ahora $B = (a_1 \mid a_3)$, con lo que $N = (a_2 \mid a_4)$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det B = 2 \neq 0, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

con $x_B = (x_1, x_3)$ y $x_N = (x_2, x_4)$. Ahora

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

de modo que $x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4$ y $x_3 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4$, y la solución básica asociada es, otra vez, $x = (2, 0, 0, 0)$.

Y esa es la lección. Dos bases distintas, $\{a_1, a_4\}$ y $\{a_1, a_3\}$, han producido *el mismo punto*. No es casualidad ni error: es la degeneración. El punto $(2, 0)$ del plano es el corte de las

dos rectas $x_1 + x_2 = 2$ y $2x_1 + x_2 = 4$, pero además está sobre el eje $x_2 = 0$; en él hay tres restricciones activas donde con dos bastaba, y cada elección de dos de ellas da una base. En forma estándar eso se ve así: el punto $(2, 0, 0, 0)$ solo tiene una componente positiva, y como toda base tiene dos columnas, la segunda variable básica está condenada a valer cero, sea cual sea la columna con que se complete.

Todas las bases, de una vez. Como $n = 4$ y $m = 2$, hay $\binom{4}{2} = 6$ elecciones posibles de dos columnas. La tabla las recorre todas; en cada fila se resuelve $Bx_B = b$ y se mira el signo.

Base	Solución básica $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$	¿Factible?	Punto de $\mathbb{R}^2$
$\{a_1, a_2\}$	$(2, 0, 0, 0)$	sí, degenerada	$(2, 0)$
$\{a_1, a_3\}$	$(2, 0, 0, 0)$	sí, degenerada	$(2, 0)$
$\{a_1, a_4\}$	$(2, 0, 0, 0)$	sí, degenerada	$(2, 0)$
$\{a_2, a_3\}$	$(0, 4, 2, 0)$	sí	$(0, 4)$
$\{a_2, a_4\}$	$(0, 2, 0, 2)$	sí	$(0, 2)$
$\{a_3, a_4\}$	$(0, 0, -2, 4)$	no ($x_3 < 0$)	$(0, 0)$

Las seis matrices son no singulares: hay seis bases, cinco factibles y una infactible. Representan cuatro soluciones básicas distintas, de las cuales tres son factibles: esos son los **tres puntos extremos distintos**. El vértice degenerado $(2, 0)$ tiene tres bases él solo. La figura 3.1 lo muestra: S es el triángulo de vértices $(2, 0)$, $(0, 2)$ y $(0, 4)$, y en $(2, 0)$ concurren tres rectas.

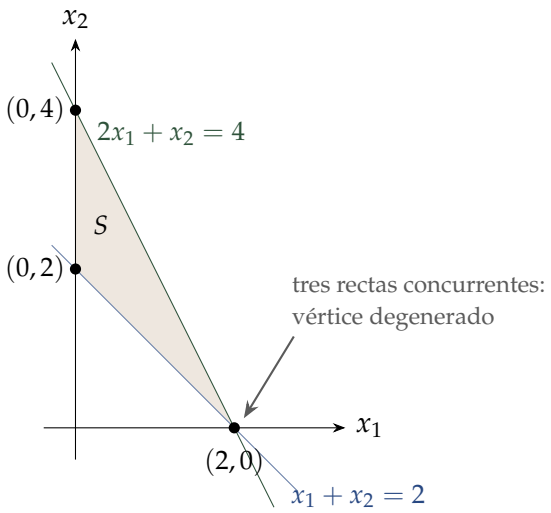


Figura 3.1: El conjunto factible del ejemplo. Los tres puntos extremos son $(2, 0)$, $(0, 2)$ y $(0, 4)$; en $(2, 0)$ concurren las dos restricciones y el eje $x_2 = 0$, y por eso ese vértice admite tres bases distintas.

Observación. La cuenta $\binom{n}{m}$ es una cota superior del número de puntos extremos, no el número exacto, por tres motivos, dos de los cuales el ejemplo enseña a la vez: hay elecciones de m columnas que no forman base (aquí no ha ocurrido, pero ocurre en cuanto haya columnas dependientes), hay bases que dan soluciones no factibles (la última fila) y hay varias bases que dan el mismo punto extremo (las tres primeras). En el ejemplo, $\binom{4}{2} = 6$ frente a 3 vértices reales. Esa cota, aun siendo mala, es la que gobierna el coste de cualquier método que pretenda enumerar, y en la sección 3.2 se verá lo enorme que es.

EXPLÍCATE. *Sin hacer cuentas: ¿por qué la base $\{a_3, a_4\}$ tenía que salir infactible? Piensa qué punto del plano representa y qué restricción incumple.*

Qué se ha ganado. La mitad de la respuesta a la fundición ya está. Una solución básica tiene a lo sumo m componentes distintas de cero, porque las no básicas valen cero y las básicas son m; con nueve balances independientes, $m = 9$, y una mezcla que sea solución básica usa a lo sumo nueve chatarras. Además, solución básica factible y vértice son la misma cosa, y un ordenador las encuentra resolviendo sistemas $m \times m$. Falta la otra mitad: por qué, si hay una mezcla de coste mínimo, hay una que es vértice. Es el teorema fundamental de la sección siguiente.

Ejercicios

Ejercicio 3.1. *Bases, soluciones básicas y vértices en un cuadrilátero*

Se considera

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 + 2x_2 \leq 4, \ x_1 \leq 3, \ x_1, x_2 \geq 0\}.$$

(a) Escribe S en forma estándar e identifica A, b, m y n.
(b) Recorre todas las elecciones posibles de base, calcula la solución básica asociada a cada una y di cuáles son factibles.
(c) Dibuja S y comprueba que los puntos extremos del dibujo son exactamente las soluciones básicas factibles. ¿Hay alguna degenerada?

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Dos desigualdades $\leq$ dan dos holguras, así que $n = 4$ y $m = 2$: hay $\binom{4}{2} = 6$ candidatas a base.*
2. *Para cada elección de dos columnas, resolver $Bx_B = b$ es resolver un sistema 2×2; no hace falta invertir nada.*
3. *Una solución básica factible es degenerada cuando alguna de las variables básicas sale cero. Mira si en el dibujo hay algún vértice donde concurran tres rectas.*

Resolución. *La idea.* Cada variable de la forma estándar tiene su recta en el dibujo: $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ son los ejes, $x_3 = 0$ es la recta $x_1 + 2x_2 = 4$ y $x_4 = 0$ es la recta $x_1 = 3$. Elegir una base es elegir las dos variables no básicas, es decir, dos de esas cuatro rectas, y la solución básica es su punto de corte. Será factible si el corte cae dentro de S. La tabla de bases y el dibujo cuentan la misma historia.
(a) Con holguras x_3 y x_4:

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & c^T x \quad \text{(el costo es irrelevante en este ejercicio)} \\ \text{sujeto a:} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \end{array}$$

es decir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad m = 2, \ n = 4, \ \text{rango}(A) = 2.$$

(b) Las columnas son $a_1 = (1,1)$, $a_2 = (2,0)$, $a_3 = (1,0)$ y $a_4 = (0,1)$. Se recorren las seis parejas:

Base	Sistema $Bx_B = b$	Solución básica	¿Factible?
$\{a_1, a_2\}$	$x_1 + 2x_2 = 4,\ x_1 = 3$	$(3, \frac{1}{2}, 0, 0)$	sí
$\{a_1, a_3\}$	$x_1 + x_3 = 4,\ x_1 = 3$	$(3, 0, 1, 0)$	sí
$\{a_1, a_4\}$	$x_1 = 4,\ x_1 + x_4 = 3$	$(4, 0, 0, -1)$	no ($x_4 < 0$)
$\{a_2, a_3\}$	$2x_2 + x_3 = 4,\ 0 = 3$	no hay	B singular
$\{a_2, a_4\}$	$2x_2 = 4,\ x_4 = 3$	$(0, 2, 0, 3)$	sí
$\{a_3, a_4\}$	$x_3 = 4,\ x_4 = 3$	$(0, 0, 4, 3)$	sí

Obsérvese la cuarta fila: $a_2 = (2, 0)$ y $a_3 = (1, 0)$ son proporcionales, la matriz $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ es singular y esa elección ni siquiera es una base. De las cinco bases genuinas, cuatro dan solución factible.

(c) S es el cuadrilátero de vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, \frac{1}{2})$ y $(0, 2)$, que son exactamente los cuatro puntos del plano correspondientes a las cuatro soluciones básicas factibles de la tabla, en el orden $\{a_3, a_4\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_1, a_2\}$, $\{a_2, a_4\}$. Ninguna es degenerada: en cada una de las cuatro, las dos variables básicas son estrictamente positivas, y en el dibujo no hay ningún vértice donde concurran tres rectas.

Con la idea del principio, las dos filas raras de la tabla se leen en el dibujo. La elección $\{a_2, a_3\}$ deja como no básicas x_1 y x_4, es decir, las rectas $x_1 = 0$ y $x_1 = 3$, que son paralelas y no se cortan: por eso B es singular. Y $\{a_1, a_4\}$ corta el eje $x_2 = 0$ con $x_1 + 2x_2 = 4$ en $(4, 0)$, que está a la derecha de $x_1 = 3$: por eso $x_4 = -1$.

Dónde se falla. En confundir las dos maneras de fallar: una elección de columnas que no es base, como $\{a_2, a_3\}$, no da ningún punto; una base infactible, como $\{a_1, a_4\}$, da un punto, pero fuera de S. Y en contar $\binom{4}{2} = 6$ vértices: aquí hay cuatro.

QUÉ DEJA. Que «vértice» y «solución básica factible» son la misma palabra en dos idiomas, y que el camino de ida y vuelta entre el dibujo y la tabla de bases se recorre sin pensar. También que $\binom{n}{m}$ cuenta *elecciones de columnas*, no vértices: puede sobrar por singularidad, por infactibilidad y por degeneración.

Ejercicio 3.2. *Pasar a forma estándar un problema con de todo*

Escribe en forma estándar, con $b \geq 0$, el problema

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \text{sujeto a:} \quad & x_1 + x_2 - x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 - x_2 \geq -3 \\ & x_1 + x_3 = 4 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \text{ libre.} \end{aligned}$$

Di cuántas variables y cuántas restricciones tiene el problema resultante.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Cuatro transformaciones, en cualquier orden: objetivo, desigualdades, signo de b y variable libre.*
2. *Cuidado con el signo del exceso frente al de la holgura.*
3. *La variable libre se desdobla y su columna aparece dos veces, cambiada de signo.*

Resolución. *La idea.* El enunciado tiene cuatro defectos respecto de la forma estándar: se maximiza, hay desigualdades, un recurso es negativo y una variable es libre. Cada defecto se arregla con una de las cuatro transformaciones, y cada una se puede hacer por separado. Primero, maximizar $3x_1 - x_2 + 2x_3$ es minimizar $-3x_1 + x_2 - 2x_3$, cambiando el signo al valor óptimo final.
Segundo, la variable libre: $x_3 = x_3^+ - x_3^-$ con $x_3^+, x_3^- \geq 0$.
Tercero, las desigualdades. La primera lleva holgura: $x_1 + x_2 - x_3^+ + x_3^- + x_4 = 5$ con $x_4 \geq 0$. La segunda lleva exceso: $2x_1 - x_2 - x_5 = -3$ con $x_5 \geq 0$; como el recurso -3 es negativo, se multiplica toda la fila por -1: $-2x_1 + x_2 + x_5 = 3$. La tercera ya es una igualdad con recurso positivo.
El problema queda

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcl}
\text{Minimizar} & -3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3^+ & + & 2x_3^- & & & & & \\
\text{sujeto a:} & x_1 & + & x_2 & - & x_3^+ & + & x_3^- & + & x_4 & & = & 5 \\
& -2x_1 & + & x_2 & & & & & & & + & x_5 & = & 3 \\
& x_1 & & & + & x_3^+ & - & x_3^- & & & & = & 4 \\
& x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5 \geq 0. & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Hay $n = 6$ variables y $m = 3$ restricciones.

Otra vía (sin desdoblar la variable libre). Cuando una variable es libre y aparece en alguna igualdad, se puede despejar de ella y sustituirla en todo lo demás, quitando de paso esa ecuación. Aquí, de $x_1 + x_3 = 4$ sale $x_3 = 4 - x_1$; sustituyendo, el objetivo pasa a ser Max $3x_1 - x_2 + 2(4 - x_1) = x_1 - x_2 + 8$ y la primera restricción, $x_1 + x_2 - (4 - x_1) \leq 5$, es decir, $2x_1 + x_2 \leq 9$. Queda un problema con dos variables y dos restricciones, mucho más pequeño. La contrapartida es que hay que acordarse de la constante 8 y de recuperar $x_3 = 4 - x_1$ al final, y que este atajo solo existe si la variable libre aparece en alguna igualdad. El desdoblamiento es mecánico y siempre funciona; la sustitución es más barata cuando se puede.
Qué hemos aprendido, mirando ya a la sección 3.3. La forma estándar dice cuántas variables artificiales harán falta para arrancar el simplex. Al cambiar de signo la segunda fila, el exceso x_5 ha pasado a entrar con $+1$. Así, x_4 y x_5 dan columnas de la identidad en las dos primeras filas y sirven de variables básicas iniciales. Solo la igualdad de la tercera fila se queda sin ninguna, y bastará una artificial.
Dónde se falla. En el signo del exceso, que resta. En cambiar el signo de una fila y olvidar el término independiente o alguno de sus coeficientes. En desdoblar x_3 en unas filas y no en otras: su columna aparece dos veces, con signos opuestos, en todas las filas y también en el objetivo. Y al final, en dar como valor del problema el del mínimo sin cambiarle el signo.

QUÉ DEJA. Las cuatro transformaciones, y el aviso de que el tamaño del problema en forma estándar no es el del enunciado: cada desigualdad añade una variable y cada variable libre duplica una columna.

3.2 Teorema fundamental de la Programación lineal

LA PREGUNTA

Una empresa de transporte quiere abaratar sus rutas y contrata a un analista. Al cabo de una semana el analista vuelve con una respuesta incómoda: no es que no haya encontrado el plan más barato, es que ha demostrado que *no existe* ninguno, porque cualquier plan admite otro todavía más barato, y así indefinidamente. Eso no significa que la empresa vaya a ganar dinero infinito: describe lo que permiten las restricciones y los costes del modelo. ¿Qué condición sobre ambos permite detectar que el objetivo mejora sin límite?

Esta sección contiene el resultado más importante del capítulo. Dice dos cosas a la vez: cuándo existe solución óptima finita, con una condición que se puede comprobar, y dónde está cuando existe. La segunda mitad es la que hace posible todo lo demás: reduce una búsqueda sobre un conjunto infinito a una búsqueda sobre un conjunto finito.

3.2.1 Lo que ya está demostrado

Todo lo que sigue se apoya en tres resultados del capítulo 2. Se reenuncian aquí enteros, con la notación de este capítulo, para no tener que volver atrás.

Teorema (de caracterización de puntos extremos, sección 2.4)**.** Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = b,\ x \geq 0\}$ con $A \in M_{m\times n}$, rango$(A) = m$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Un punto x es punto extremo de S si y solo si A admite una descomposición $A = [B \mid N]$, con $B \in M_{m\times m}$ invertible, tal que

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad B^{-1}b \geq 0.$$

Teorema (de caracterización de direcciones extremas, sección 2.4)**.** Con las mismas hipótesis y $S \neq \emptyset$, $\bar{d}$ es una dirección extrema de S si y solo si existe una descomposición $A = [B \mid N]$ y una columna a_j de N con $B^{-1}a_j \leq 0$ tales que $\bar{d}$ es un múltiplo positivo de

$$d = \begin{pmatrix} -B^{-1}a_j \\ 0 \end{pmatrix} + e_j.$$

En particular, d es una dirección de S si y solo si $Ad = 0$ y $d \geq 0$, $d \neq 0$.

Teorema (de representación de conjuntos poliédricos, sección 2.4)**.** Sea $S \neq \emptyset$ como antes, con puntos extremos $\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^q$ y direcciones extremas $d^1, \ldots, d^l$. Entonces $x \in S$ si y solo si

$$x = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \hat{x}^j + \sum_{i=1}^{l} \mu_i d^i, \qquad \sum_{j=1}^{q} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \mu_i \geq 0.$$

Además, los puntos extremos y las direcciones extremas de S son en número finito, y S tiene al menos un punto extremo.

De ahí sale, sin trabajo, el primer teorema de esta sección, que es el que se enuncia antes del fundamental:

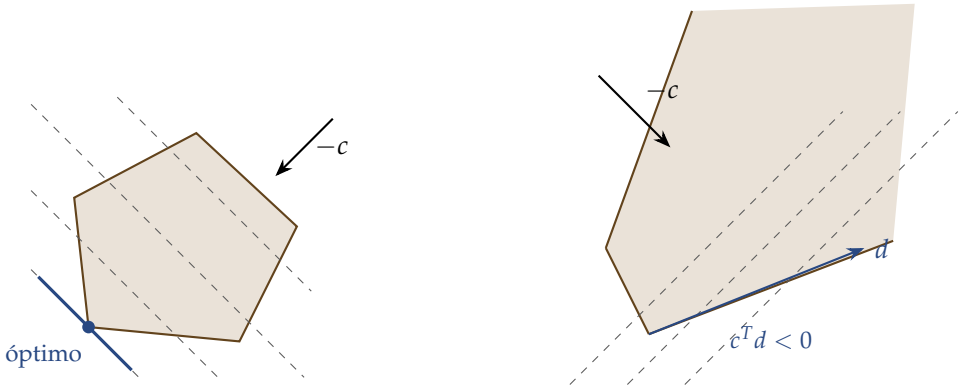
Teorema. Dado un (PPL) factible se tiene que:
1. un punto es solución básica factible si y solo si es un punto extremo del conjunto factible;
2. existe al menos una solución básica factible.

El apartado 1 es literalmente el teorema de caracterización de puntos extremos: la descomposición $x = (B^{-1}b, 0)$ con $B^{-1}b \geq 0$ es la definición de solución básica factible dada en la sección 3.1. El apartado 2 es el teorema de existencia de puntos extremos de la sección 2.4, cuya idea conviene recordar en una línea: se toma un punto factible con el menor número posible de componentes positivas y se comprueba que las columnas correspondientes son independientes, porque si fueran dependientes se podría caminar en la dirección de la dependencia hasta anular una componente más, contra la minimalidad.

LA IDEA: POR QUÉ SE PUEDE ELEGIR UN ÓPTIMO EN UNA ESQUINA

Antes del enunciado conviene tener la imagen, porque la imagen es el teorema.
Imagínese la región factible como una placa metálica plana, y la función objetivo $c^T x$ como la altura de un plano inclinado apoyado sobre ella. Buscar el mínimo es buscar el punto más bajo de la placa bajo esa inclinación. En dos variables, con $c \neq 0$, las *líneas de nivel* de $c^T x$ son rectas paralelas entre sí, todas perpendiculares al vector c; moverse en la dirección $-c$ es bajar, moverse perpendicularmente a c es quedarse a la misma altura.
Ahora la observación decisiva, y es lo único que hay que creerse: **una función lineal, restringida a una recta, es una función afín de un parámetro**. Si uno se coloca en un punto x de la región y camina en línea recta, $x + t\,v$, el valor que ve es $c^T x + t\,(c^T v)$: una función afín de t. O baja siempre, o sube siempre, o es constante. Si un óptimo está en el interior relativo de una cara, el coste debe ser constante en esa cara: de lo contrario se podría dar un pequeño paso dentro de ella que lo redujese. Se puede entonces elegir un vértice de esa cara sin empeorar. Las caras de un poliedro en forma estándar tienen vértices, por el resultado anterior. Esta es la idea geométrica de *dónde* se alcanza un óptimo cuando existe (figura 3.2, izquierda); no afirma que los vértices sean los únicos puntos óptimos.
Falta la otra mitad, que es la que responde a la pregunta del transportista. El razonamiento anterior suponía que existía un óptimo. Partamos ahora de una región factible no vacía. Si no está acotada, puede haber una vía de mejora ilimitada. Si existe una dirección d del poliedro (una por la que se puede caminar eternamente sin salir) a lo largo de la cual el valor baja, es decir con $c^T d < 0$, entonces desde cualquier punto factible se puede bajar sin límite y el problema no tiene óptimo finito: el ínfimo es $-\infty$ y no se alcanza en ningún sitio (figura 3.2, derecha). Y al revés, si por *ninguna* dirección del poliedro se baja, es decir si $c^T d \geq 0$ para toda dirección d, la fuga es imposible y el óptimo existe. Como toda dirección es combinación positiva de las direcciones *extremas* (teorema de representación), basta comprobar la condición en esas, que son un número finito. Eso es exactamente lo que dice el teorema.
Quedan separados los tres casos. Si no hay puntos que cumplan todas las restricciones, el problema es infactible. Si los hay y existe una dirección de mejora sin límite, es ilimitado. Si es factible y ninguna dirección mejora sin límite, tiene un óptimo finito.

La infactibilidad puede ser una conclusión útil: por ejemplo, que unas exigencias no pueden satisfacerse con los recursos disponibles.



la última recta de nivel
que toca lo hace en un vértice

ninguna recta es la última:
el valor baja sin parar

Figura 3.2: Las dos mitades del teorema fundamental. A la izquierda, un poliedro acotado: las rectas de nivel de $c^T x$ se deslizan en el sentido de $-c$ y la última que toca al poliedro lo hace en un vértice. A la derecha, un poliedro con una dirección d que verifica $c^T d < 0$: desde cualquier punto se puede avanzar por d eternamente bajando el valor, y no hay óptimo finito.

3.2.2 El teorema

Teorema (Teorema fundamental de la Programación lineal)**.** Consideremos (PPL) factible. Sean $\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^q$ los puntos extremos y $d^1, \ldots, d^l$ un representante de cada dirección extrema del conjunto factible. Entonces:

1. una condición necesaria y suficiente para que (PPL) tenga solución óptima finita es que $c^T d^i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, l$;
2. si esta condición es cierta, existe un punto extremo $\hat{x}^j$ que es óptimo. Además, toda combinación convexa de puntos extremos óptimos es óptima.

• CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

Simplificada al máximo, la prueba es esta: *el teorema de representación parte cualquier punto factible en dos trozos, una mezcla de vértices y un empuje por direcciones; la hipótesis dice que el empuje nunca ayuda, así que se tira; y lo que queda es una media ponderada de un número finito de valores, que nunca baja del más pequeño*. Las direcciones recogen la posible no acotación del poliedro; las mezclas de vértices también pueden dar infinitos puntos, pero sus valores quedan acotados por el menor valor en los vértices.
La otra mitad es el recíproco, y es una línea: si alguna dirección mejorase, se avanza por ella para siempre y el valor cae sin tope.
Paso 1: suficiencia, y con ella el apartado 2. Supongamos $c^T d^i \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, l$. Sea x un punto factible cualquiera. Como el problema es factible, $S \neq \emptyset$ y el teorema

de representación se aplica: existen $\lambda_j \geq 0$ con $\sum_j \lambda_j = 1$ y $\mu_i \geq 0$ tales que

$$x = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \hat{x}^j + \sum_{i=1}^{l} \mu_i d^i.$$

Multiplicando por c^T, que es lineal,

$$c^T x = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \, c^T \hat{x}^j + \sum_{i=1}^{l} \mu_i \, c^T d^i.$$

El segundo sumando es ≥ 0: cada μ_i es ≥ 0 por el teorema de representación y cada $c^T d^i$ es ≥ 0 por hipótesis, luego cada producto es ≥ 0 y la suma también. *Aquí, y solo aquí, se usa la hipótesis.* Por tanto

$$c^T x \;\geq\; \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \, c^T \hat{x}^j.$$

Ahora, el segundo miembro es una media ponderada de los q números $c^T\hat{x}^1, \ldots, c^T\hat{x}^q$ con pesos $\lambda_j \geq 0$ que suman 1, y una media ponderada nunca es menor que el más pequeño de los números promediados:

$$\sum_{j=1}^{q} \lambda_j \, c^T \hat{x}^j \;\geq\; \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \Big(\min_{r=1,\ldots,q} c^T \hat{x}^r \Big) = \min_{r=1,\ldots,q} c^T \hat{x}^r.$$

Encadenando, todo punto factible x cumple $c^T x \geq \min_r c^T \hat{x}^r$. Ese mínimo existe porque se toma sobre un conjunto *finito* de números (los puntos extremos son finitos), y se alcanza: el punto extremo $\hat{x}^r$ que lo realiza es él mismo factible. Luego el problema tiene solución óptima finita y se alcanza en un punto extremo, que es lo que afirman la suficiencia y el apartado 2.

Paso 2: los óptimos múltiples. Si el mínimo $\min_r c^T \hat{x}^r$ lo realizan varios puntos extremos, digamos $\hat{x}^{r_1}, \ldots, \hat{x}^{r_s}$ con valor común z^*, entonces cualquier combinación convexa suya $x = \sum_k \alpha_k \hat{x}^{r_k}$ (con $\alpha_k \geq 0$, $\sum_k \alpha_k = 1$) es factible, por ser S convexo, y tiene valor $c^T x = \sum_k \alpha_k z^* = z^*$: también es óptima. De ahí que la solución óptima pueda ser un conjunto entero de puntos, y no uno solo. También se puede añadir a un punto óptimo cualquier múltiplo no negativo de una dirección d con $c^T d = 0$: se conserva la factibilidad y el valor del objetivo. Por eso el conjunto de óptimos puede ser no acotado; no tiene por qué consistir solo en mezclas de vértices.

Paso 3: necesidad, avanzando por una dirección que mejora (el núcleo de la prueba, y lo que de verdad explica el enunciado). Supongamos ahora que (PPL) tiene solución óptima finita y veamos, por reducción al absurdo, que ninguna dirección extrema puede tener $c^T d^i < 0$. Supongamos que existiera j con $c^T d^j < 0$. Tomemos cualquier punto factible $\bar{x}$ (lo hay, el problema es factible) y consideremos

$$x(\lambda) = \bar{x} + \lambda d^j, \qquad \lambda \geq 0.$$

Por la definición de dirección, $x(\lambda) \in S$ para todo $\lambda \geq 0$. Su valor objetivo es

$$c^T x(\lambda) = c^T \bar{x} + \lambda \, c^T d^j \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} -\infty,$$

porque el coeficiente que multiplica a λ es negativo. Es decir, hay puntos factibles con valor objetivo tan bajo como se quiera, y el problema no puede tener solución óptima finita: contradicción. Luego $c^T d^i \geq 0$ para todo i.
Dónde entra cada hipótesis. La factibilidad se usa dos veces: para poder aplicar el teorema de representación (que exige $S \neq \emptyset$) y para tener un punto $\bar{x}$ desde el que salir en el paso 3. La *finitud* del número de puntos extremos es lo que permite escribir $\min_r c^T \hat{x}^r$ y afirmar que ese mínimo se alcanza: un conjunto infinito de valores puede tener ínfimo sin mínimo, y este argumento ya no bastaría. La hipótesis $c^T d^i \geq 0$ interviene en un único renglón del paso 1, el que descarta el segundo sumatorio; quitarla no estropea ninguna otra línea, y eso explica por qué su negación produce justamente el caso ilimitado. Y *la linealidad de* $c^T x$ es lo que hace que el valor de una mezcla sea la mezcla de los valores: con una función objetivo no lineal el óptimo puede estar en el interior, y el teorema deja de valer.
Para reconstruirla. Escríbase cualquier punto factible con el teorema de representación: mezcla de vértices más empuje por direcciones. La hipótesis dice que el empuje no baja el objetivo, luego se tira. Lo que queda es una media ponderada de q números, que no baja del menor de ellos, y ese menor se alcanza en un vértice. El recíproco es una línea: si alguna dirección tuviera $c^T d^j < 0$, avanzando por ella el objetivo caería sin tope.

Observación. Si el problema es de **maximizar**, la condición necesaria y suficiente para la existencia de solución óptima finita es $c^T d^i \leq 0$ para $i = 1, \ldots, l$. Es el mismo teorema aplicado a $-c$, y no hay que aprendérselo aparte: la condición siempre dice que *por ninguna dirección del poliedro se mejora*.

3.2.3 Lo que el teorema regala

Corolario. Si el conjunto factible es no vacío y **acotado**, todo (PPL) sobre él tiene solución óptima finita, alcanzada en un punto extremo.

Un poliedro acotado no tiene direcciones ($x + \lambda d$ se iría al infinito), luego $l = 0$ y la condición «$c^T d^i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, l$» se cumple de manera vacía: no hay ninguna d^i que comprobar. Basta aplicar el teorema.

Este corolario es el teorema de Weierstrass del caso lineal, pero obtenido sin topología. Weierstrass dice que una función continua sobre un compacto no vacío de $\mathbb{R}^n$ — es decir, sobre un cerrado y acotado — alcanza en él su máximo y su mínimo, y con él la conclusión sería inmediata, porque un poliedro no vacío y acotado es compacto y $c^T x$ es continua. Lo que dice el corolario es que en el caso lineal no hace falta nada de eso: no se ha usado ni la continuidad de $c^T x$ ni la compacidad de S, sino solo que S tiene finitos vértices y ninguna vía de escape. La versión topológica, con sus hipótesis y los dos ejemplos de cómo se pierde, está en el apéndice F; la que se usa de verdad en los capítulos no lineales es esa, y aparece en la sección 6.1.2.

Corolario. Todo (PPL) está exactamente en uno de estos tres casos:
1. **infactible**: $S = \emptyset$;

2. **ilimitado**: $S \neq \emptyset$ y existe una dirección extrema d^i con $c^T d^i < 0$; el ínfimo es $-\infty$ y no se alcanza;
3. **con óptimo finito**: $S \neq \emptyset$ y $c^T d^i \geq 0$ para todas las direcciones extremas; el óptimo se alcanza en un punto extremo, y es único o múltiple.

Este es el esquema con el que hay que leer cualquier salida del simplex, y el algoritmo de la sección 3.3 está diseñado para terminar diciendo en cuál de los tres casos está el problema.

Corolario. Si existe un óptimo finito, su búsqueda puede restringirse a las soluciones básicas factibles, que son a lo sumo $\binom{n}{m}$.

EXPLÍCATE. *Escribe con tus palabras dónde se usa, en la demostración de la suficiencia, que los puntos extremos son* finitos. *¿Qué paso se caería si fueran infinitos, como los de un disco?*

CONEXIÓN: LA CONDICIÓN DEL TEOREMA ES LA FACTIBILIDAD DEL DUAL

La condición «$c^T d \geq 0$ para toda dirección d del poliedro» se puede traducir con el lema de Farkas. Las direcciones de S son, según el lema de la sección 2.4, los vectores $d \geq 0$, $d \neq 0$, con $Ad = 0$. Pues bien:

$$\left[\, c^T d \geq 0 \ \text{ para todo } d \geq 0 \text{ con } Ad = 0 \,\right] \iff \left[\, \exists\, w \in \mathbb{R}^m \text{ con } A^T w \leq c \,\right].$$

La implicación de derecha a izquierda es la mitad barata: si $A^T w \leq c$ y $d \geq 0$ con $Ad = 0$, entonces $c^T d \geq (A^T w)^T d = w^T A d = 0$, donde la primera desigualdad es $A^T w \leq c$ multiplicada por d, y el sentido se conserva justamente porque $d \geq 0$. La de izquierda a derecha es el corolario del lema de Farkas de la sección 2.2 aplicado al sistema $A^T w + Is = c$ con $s \geq 0$ y w libre: si ese sistema no tiene solución, existe d con $d \leq 0$, $Ad = 0$ y $c^T d > 0$, y cambiando d por $-d$ se obtiene una dirección de S con $c^T d < 0$.
Ahora bien, $\{w : \ A^T w \leq c\}$ es exactamente el conjunto factible del *problema dual* que se estudiará en el capítulo 4. Es decir, el teorema fundamental dice: *si el primal es factible, tiene óptimo finito si y solo si el dual es factible*. Cuando en el capítulo siguiente aparezca el teorema de dualidad fuerte, conviene recordar que la mitad de su contenido ya estaba aquí.

DE DÓNDE VIENE: EL TEOREMA ANTES DEL ALGORITMO

El estudio de los problemas lineales precede al método del simplex. En 1939, el matemático soviético Leonid Kantórovich publicó un folleto sobre la organización de la producción en el que planteaba, para el problema de repartir trabajo entre máquinas de un consorcio de contrachapado, lo que hoy llamaríamos un programa lineal, y proponía resolverlo con unos «multiplicadores resolventes» que son, esencialmente, las variables duales del capítulo 4. La traducción inglesa apareció en *Management Science* en 1960. Kantórovich compartió en 1975 el premio Nobel de economía con Koopmans por esa línea de trabajo. La distinción útil al estudiar el tema es entre caracterizar un óptimo y construir un procedimiento para encontrarlo. El teorema fundamental permite lo primero; el simplex de Dantzig, desarrollado en 1947, proporciona un procedimiento general de cálculo.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: PROBAR TODOS LOS VÉRTICES

Si ya sabemos que existe un óptimo finito, el teorema permite calcular todos los vértices y elegir el mejor. Los empates revelan vértices óptimos distintos; para describir todos los óptimos hay que considerar también las direcciones de coste cero.
Lo que lo hunde es el recuento. Hay que recorrer las elecciones de m columnas entre n, es decir $\binom{n}{m}$, y para cada una invertir una matriz $m \times m$ y comprobar el signo. Con $n = 50$ variables y

$m = 30$ restricciones, que es un problema de juguete comparado con los que se resuelven a diario,

$$\binom{50}{30} = 47\,129\,212\,243\,960 \approx 4{,}7 \cdot 10^{13}.$$

A un millón de bases por segundo, eso es aproximadamente año y medio de cálculo, y muchas candidatas pueden resultar infactibles. El simplex empieza en una base factible y cambia de base sin aumentar el coste; cuando el paso es positivo, avanza por una arista a otro vértice. Puede terminar sin recorrer todas las bases, aunque su número de pasos también puede ser grande en el peor caso.

La enumeración, eso sí, no se abandonó del todo: cuando el poliedro es pequeño y lo que se quiere no es un óptimo sino la lista completa de sus vértices (por ejemplo, para estudiar la estructura de un poliedro combinatorio), se usan algoritmos de enumeración de vértices, que son la versión cuidadosa de esta idea.

Qué se ha ganado. El analista de la pregunta inicial tiene ya un criterio completo. Su modelo es factible y no tiene plan más barato que todos exactamente cuando existe una dirección del poliedro, una manera de modificar un plan sin salir nunca de lo permitido, por la que el coste baja: $c^T d < 0$. Si la región es acotada, eso no puede pasar. Y si no pasa, el mejor plan existe y está en un vértice, de modo que la búsqueda se reduce de infinitos puntos a una lista finita. Los dos ejercicios de abajo aplican el teorema con esa lista delante: con los vértices y las direcciones extremas a la vista, se decide todo con unos pocos productos escalares.

Queda una última observación antes de pasar al algoritmo, y es la que motiva la sección siguiente. El teorema fundamental da un criterio *teórico*: para aplicarlo tal cual habría que conocer de antemano todas las direcciones extremas, y calcularlas es tan caro como enumerar los vértices. El simplex resuelve ese problema con un cambio de punto de vista muy productivo: en lugar de comprobar la condición $c^T d \geq 0$ en todas las direcciones extremas del poliedro a la vez, calcula los $n - m$ costes reducidos de una base. Si todos son no negativos, se ha terminado; si alguno es negativo, se intenta avanzar en la dirección correspondiente. En un punto degenerado ese avance puede ser cero y solo cambiar la base. Los números que miden la variación del objetivo son los costos reducidos, y ese es el asunto de la sección 3.3.

Ejercicios

Ejercicio 3.3. *Existencia y unicidad del óptimo a partir de la representación* R4.4, (C) Y (D)

Se retoma el poliedro del ejercicio del capítulo 2 sobre puntos extremos, direcciones extremas y representación de un poliedro no acotado, conjunto factible del problema

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{Minimizar} & c_1 x_1 & + & c_2 x_2 & & \\ \text{sujeto a:} & x_1 & + & x_2 & \geq & 1 \\ & -x_1 & + & 3x_2 & \geq & -1 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 1, \end{array}$$

del que allí se obtuvieron los puntos extremos $\hat{x}^1 = (1, 0)$ y $\hat{x}^2 = (0, 1)$ y las direcciones extremas $d^1 = (1, \frac{1}{3})$ y $d^2 = (\frac{1}{2}, 1)$.

(a) Determina para qué valores de c_1 y c_2 el problema tiene solución óptima finita.

(b) En ese caso, di cuándo la solución óptima es única y cuándo hay soluciones óptimas

múltiples.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *El apartado (a) es una aplicación directa del teorema fundamental: dos productos escalares y dos desigualdades.*
2. *Para (b), recuerda que el óptimo se alcanza en un punto extremo: compara primero los dos valores $c^T\hat{x}^1$ y $c^T\hat{x}^2$.*
3. *Un empate entre vértices no es la única fuente de multiplicidad. ¿Qué ocurre si $c^T d^i = 0$ para una dirección que sale del vértice óptimo?*

Resolución. *La idea.* El teorema fundamental convierte cada pregunta en unos pocos productos escalares, en un orden fijo. Primero las direcciones extremas: ¿hay alguna vía de escape por la que el objetivo baje? Después los vértices: ¿cuál es el más barato? Y al final la multiplicidad, que puede venir de dos sitios distintos, un empate entre vértices o una dirección por la que el objetivo no cambia.
(a) Por el teorema fundamental, hay solución óptima finita si y solo si $c^T d \geq 0$ para las dos direcciones extremas:

$$c^T d^1 = c_1 + \tfrac{1}{3}c_2 \geq 0 \qquad \text{y} \qquad c^T d^2 = \tfrac{1}{2}c_1 + c_2 \geq 0.$$

Multiplicando por 3 y por 2, la condición se escribe más cómodamente como

$$3c_1 + c_2 \geq 0 \qquad \text{y} \qquad c_1 + 2c_2 \geq 0.$$

Geométricamente, es la región del plano de costos limitada por dos rectas que pasan por el origen: el cono de los vectores c que no «apuntan» hacia ninguna de las dos vías de escape del poliedro. Hay costes con componentes negativas que sí cumplen ambas condiciones: $c = (2, -1)$ da $6 - 1 = 5 \geq 0$ y $2 - 2 = 0 \geq 0$. Que un coste sea negativo no basta para que el problema sea ilimitado, porque la dirección en que esa variable crece puede no ser una dirección del poliedro.
(b) Supongamos que se cumple (a). El óptimo se alcanza en un punto extremo, y solo hay dos, con valores

$$c^T\hat{x}^1 = c_1, \qquad c^T\hat{x}^2 = c_2.$$

Hay que distinguir de dónde puede venir la multiplicidad, y son dos sitios distintos.
Primera fuente: empate entre los dos vértices. Si $c_1 = c_2$, ambos puntos extremos son óptimos y, por el teorema, todo el segmento que los une lo es. (Con las condiciones de (a), $c_1 = c_2 = c$ obliga a $4c \geq 0$, es decir, $c \geq 0$.)
Segunda fuente: una dirección extrema plana. Recuérdese del ejercicio del capítulo 2 que d^1 es el rumbo del lado infinito que arranca de $\hat{x}^1 = (1, 0)$ (a lo largo de $-x_1 + 3x_2 = -1$) y d^2 el del lado infinito que arranca de $\hat{x}^2 = (0, 1)$ (a lo largo de $-2x_1 + x_2 = 1$). Si el vértice óptimo es $\hat{x}^1$ y además $c^T d^1 = 0$, todos los puntos $\hat{x}^1 + \mu d^1$ con $\mu \geq 0$ tienen el mismo valor c_1 y también son óptimos: hay infinitas soluciones óptimas a lo largo de una semirrecta. Lo mismo con $\hat{x}^2$ y d^2. Más generalmente, toda dirección de recesión puede trasladarse a cualquier punto factible: si x^* es óptimo y $c^T d = 0$, entonces $x^* + \mu d$ es óptimo para todo $\mu \geq 0$. En este ejemplo, las condiciones de (a) fuerzan que $c^T d^1 = 0$ implique $c_1 \leq c_2$, y que $c^T d^2 = 0$ implique $c_2 \leq c_1$; por eso las semirrectas de la frontera corresponden al vértice adecuado.

Reuniendo los dos casos, y suponiendo (a):

- si $c_1 < c_2$, el óptimo está en $\hat{x}^1 = (1,0)$ y es *único* si $3c_1 + c_2 > 0$; si $3c_1 + c_2 = 0$, hay infinitos óptimos, los de la semirrecta $(1,0) + \mu(1, \frac{1}{3})$;
- si $c_2 < c_1$, el óptimo está en $\hat{x}^2 = (0,1)$ y es *único* si $c_1 + 2c_2 > 0$; si $c_1 + 2c_2 = 0$, hay infinitos óptimos sobre $(0,1) + \mu(\frac{1}{2}, 1)$;
- si $c_1 = c_2$ (≥ 0), hay óptimos múltiples: al menos todo el segmento $[\hat{x}^1, \hat{x}^2]$, y si además $c_1 = c_2 = 0$ el objetivo es constante y *todo* el poliedro es óptimo.

Dónde se falla. En creer que una componente negativa del costo hace el problema ilimitado: $c = (2,-1)$ tiene óptimo finito. En olvidar la segunda fuente de multiplicidad, la dirección de valor nulo que sale del vértice óptimo. Y en el caso de empate, en no comprobar antes la condición de (a): si $c_1 = c_2 < 0$, entonces $c^T d^1 = \frac{4}{3}c_1 < 0$ y el problema es ilimitado, no de óptimos múltiples.

QUÉ DEJA. Que el teorema fundamental se aplica sin resolver nada: basta con los puntos y las direcciones extremas, que es justo lo que da el teorema de representación. Y la distinción fina entre las dos fuentes de multiplicidad, empate entre vértices y dirección de valor nulo, que en la tabla del simplex corresponden a un coste reducido nulo con cociente mínimo finito y positivo, o a un coste reducido nulo con columna ≤ 0. Un cociente cero puede cambiar la base sin dar otro punto.

Ejercicio 3.4. *Decidir sin tablas* MAY 2017, GRUPO B

Sea $P \subset \mathbb{R}^2$ un poliedro cuyos puntos extremos son $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ y cuyas direcciones extremas son $(1,1)$ y $(1,2)$.

(a) Decide, sin construir ninguna tabla, si el problema Min $-2x_1 + x_2$ sobre P tiene solución óptima finita, y calcúlala si la tiene.

(b) Haz lo mismo para Min $x_1 + x_2$ y para Max $x_1 + x_2$ sobre el mismo P.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *El enunciado da exactamente lo que pide el teorema fundamental. No hace falta ni siquiera saber qué desigualdades definen P.*
2. *Primero la condición sobre las direcciones; solo si se cumple tiene sentido comparar vértices.*
3. *En un problema de maximizar, la condición cambia de sentido.*

Resolución. *La idea.* El enunciado da justo lo que usa el teorema fundamental, los vértices y las direcciones extremas, y nada más: no hace falta saber qué desigualdades definen P. El orden es siempre el mismo. Primero se mira si alguna dirección mejora el objetivo; solo si ninguna lo hace tiene sentido comparar los vértices.

(a) Con $c = (-2,1)$:

$$c^T d^1 = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -1 < 0.$$

Basta con esta: existe una dirección extrema por la que el objetivo baja, luego **el problema no tiene solución óptima finita**, es ilimitado y su ínfimo es $-\infty$. La vía de escape es explícita: partiendo de cualquier punto factible, por ejemplo el vértice $(0,0)$, los puntos $(0,0) + \lambda(1,1) = (\lambda, \lambda)$ son factibles para todo $\lambda \geq 0$ y su valor objetivo es $-2\lambda + \lambda = -\lambda \to -\infty$. La segunda dirección tiene $c^T d^2 = -2 + 2 = 0$, de modo que conserva el valor. Basta la primera para probar que el objetivo no está acotado inferiormente.

(b) Minimizar $x_1 + x_2$. Con $c = (1, 1)$:

$$c^T d^1 = 2 > 0, \qquad c^T d^2 = 3 > 0,$$

luego hay óptimo finito y se alcanza en un punto extremo. Los tres valores son $c^T(0,0) = 0$, $c^T(1,0) = 1$ y $c^T(0,1) = 1$, así que el óptimo es $x^* = (0,0)$ con $z^* = 0$, y es único: no hay empate entre vértices y las dos direcciones tienen producto estrictamente positivo.
Maximizar $x_1 + x_2$. Ahora la condición es $c^T d^i \leq 0$, y falla ya en la primera ($c^T d^1 = 2 > 0$): el problema de maximizar es **ilimitado**. Es el mismo poliedro y el mismo objetivo; lo único que ha cambiado es el sentido en que se busca, y con él el resultado. Conviene quedarse con esta pareja: un poliedro no acotado no hace ilimitado a un problema, lo hace ilimitado *en la dirección en que se busca*.
Dónde se falla. En empezar por los vértices. En (a), el mejor de los tres es $(1,0)$, con valor -2, y parecería el óptimo; pero el problema no tiene óptimo, porque la dirección $(1,1)$ baja sin límite. En quedarse con la segunda dirección, que da $c^T d^2 = 0$ y no decide nada: basta una dirección que baje. Y al maximizar, en aplicar la condición de minimizar sin cambiarle el sentido.

3.3 El método del simplex

LA PREGUNTA

Un problema de planificación con decenas de variables y restricciones puede tener billones de bases candidatas. ¿Cómo se puede buscar lo mejor en un conjunto enorme sin mirarlo entero, y además terminar sabiendo con certeza que lo encontrado es lo mejor y no solo lo mejor de lo mirado?

El teorema anterior asegura que para buscar el óptimo de un (PPL) basta buscar entre las soluciones básicas factibles, cuando existe un óptimo finito. La idea del método del simplex es **cambiar de base factible sin empeorar el objetivo**; los pasos positivos avanzan a otro vértice y los degenerados pueden conservar el punto. Con la búsqueda de factibilidad inicial y una regla que evite ciclos, termina en uno de tres estados: encontrando la solución óptima, detectando la infactibilidad o detectando la no acotación de la función objetivo.

LA IDEA: EL SIMPLEX ES UN PASEO POR LAS ARISTAS

Antes de una sola fórmula conviene tener la imagen completa, porque todo lo que viene después es contabilidad de este paseo.
Empecemos por el caso sin degeneración. Se está en un vértice del poliedro. De él salen aristas, y por cada arista se puede empezar a caminar sin salirse de la región factible. Como la función objetivo es lineal, a lo largo de cada arista el valor cambia a ritmo constante: cada arista tiene asociado un *número*, la variación del objetivo por unidad de avance. Si todos esos números son no negativos (para un problema de minimizar), salir del vértice no mejora el objetivo, y como el poliedro es convexo eso basta para asegurar que no hay nada mejor en ninguna parte: se ha terminado. Si

alguno es negativo, se avanza por esa arista. Al avanzar, tarde o temprano alguna de las variables que eran positivas se hace cero: se ha llegado al otro extremo de la arista, que es otro vértice, mejor que el anterior. Y se vuelve a empezar. Como los vértices son finitos y el valor mejora en cada paso, el paseo no puede durar para siempre.
Solo hay un caso en que el paseo no acaba en un vértice: cuando al avanzar por una arista *ninguna* variable llega a hacerse cero. Entonces la arista no es un segmento sino una semirrecta, es decir, una dirección extrema del poliedro, y si por ella el objetivo baja, el problema es ilimitado. Ahí se reconoce, traducido a algoritmo, el teorema fundamental de la sección 3.2.
Falta traducir tres cosas al álgebra, y son las tres piezas del método. Primera: ¿quiénes son las aristas que salen de un vértice? Segunda: ¿cuál es el número asociado a cada una? Tercera: ¿hasta dónde se avanza? Las respuestas son, respectivamente, las $n - m$ direcciones que se obtienen al dar valor positivo a una variable no básica dejando las demás en cero; los *costos reducidos*; y el *cociente mínimo*. La figura 3.3 enseña el paseo, y el resto de la sección lo escribe con fórmulas. Con degeneración, algunas de esas direcciones no permiten un paso positivo desde la base actual: se puede cambiar de base sin cambiar de punto. La sección de convergencia explica cómo evitar que esos cambios formen un ciclo.

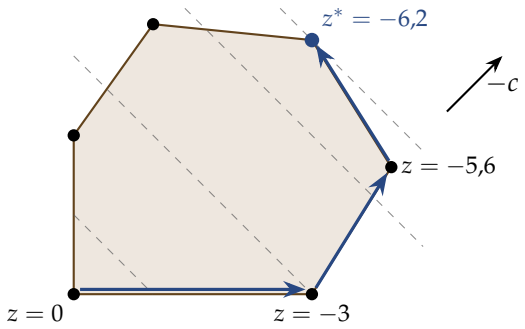


Figura 3.3: El paseo del simplex para Min $(-x_1 - x_2)$. Se parte de un vértice y se avanza por una arista de mejora, hasta que ninguna arista mejora. Las rectas discontinuas son las líneas de nivel del objetivo: cada salto las cruza en el sentido bueno. El método ha visitado cuatro de los seis vértices.

3.3.1 El simplex en forma matricial

Sea $\bar{x}$ un punto extremo del conjunto factible. Por el teorema de caracterización de puntos extremos existe una partición $A = [B \mid N]$ con

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \bar{b} = B^{-1}b \geq 0,$$

y su valor objetivo es

$$\bar{z} = c^T \bar{x} = c_B^T B^{-1} b.$$

3.3.1.1 *Primero, comprobar si $\bar{x}$ es óptimo*

Se toma otro punto factible cualquiera $x = (x_B, x_N) \geq 0$. De $Ax = b$ sale, como en la sección 3.1, $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$, y sustituyendo en la función objetivo:

$$\begin{aligned} z = c^T x &= c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ &= c_B^T\left(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N\right) + c_N^T x_N \\ &= c_B^T B^{-1}b + \left(c_N^T - c_B^T B^{-1}N\right)x_N \\ &= \bar{z} + \left(c_N^T - c_B^T B^{-1}N\right)x_N. \end{aligned}$$

Escrito componente a componente, y llamando

$$z_j = c_B^T B^{-1} a_j,$$

queda la fórmula que gobierna todo el método:

$$z = \bar{z} + \sum_{j \in NB} (c_j - z_j)\, x_j, \tag{3.1}$$

donde NB es el conjunto de índices de las variables no básicas. Al vector de $\mathbb{R}^{n-m}$

$$\left(c_N^T - c_B^T B^{-1}N\right) = \left(c_j - z_j\right)_{j \in NB}$$

se le llama **vector de costos reducidos**.

LA IDEA: QUÉ ES UN COSTO REDUCIDO, Y POR QUÉ SE LLAMA ASÍ

La fórmula (3.1) dice algo muy concreto: partiendo del vértice $\bar{x}$, si se decide dar a la variable no básica x_j el valor x_j (manteniendo las demás no básicas en cero), el objetivo pasa de $\bar{z}$ a $\bar{z} + (c_j - z_j)x_j$. Es decir, $c_j - z_j$ **es lo que cuesta, en neto, cada unidad de la actividad** j, contando no solo lo que se paga por ella sino lo que hay que dejar de hacer para acomodarla.
Esa contabilidad se ve mejor con un nombre para el vector fila $c_B^T B^{-1}$, que aparecerá sin parar en el capítulo 4:

$$w^T = c_B^T B^{-1}, \qquad \text{de modo que} \qquad z_j = w^T a_j.$$

Imagínese un taller que fabrica productos consumiendo m recursos. La columna a_j dice cuánto consume de cada recurso una unidad del producto j, y c_j lo que cuesta producirla. El número w_i es el coste imputado a una unidad del recurso i por la base actual. Con esos valores, $z_j = w^T a_j$ es el coste asociado a los recursos que consumiría una unidad del producto j, y

$$c_j - z_j = c_j - w^T a_j$$

es el coste directo menos el coste que se ahorra al reajustar las actividades básicas. Si es negativo, introducir la actividad abarataría el plan, siempre que pueda hacerse un avance positivo manteniendo la factibilidad. Si todos los costes reducidos son no negativos, ningún cambio de actividades puede abaratarlo: se está en el óptimo.
Estos valores anticipan las variables del problema dual. Durante las iteraciones, w no tiene por qué ser factible para ese problema. Cuando se alcanza una base factible con

> costes reducidos no negativos, w es una solución dual óptima. El capítulo 4 desarrolla entonces su interpretación como **precios sombra**, con las condiciones bajo las que miden una variación marginal.

De (3.1) sale de inmediato un **criterio suficiente de optimalidad**: si

$$c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0 \iff c_j - z_j \geq 0 \quad \forall j \in NB,$$

entonces todo punto factible x tiene $z \geq \bar{z}$, porque en (3.1) todos los sumandos son productos de un $c_j - z_j \geq 0$ por un $x_j \geq 0$; luego $\bar{x}$ es solución óptima. Si existe una componente $c_k - z_k < 0$, aumentar x_k reduciría el coste, pero falta comprobar que se pueda aumentar manteniendo las variables básicas no negativas. En una base no degenerada se puede dar un paso positivo suficientemente pequeño, así que el criterio también es necesario. En una base degenerada, no tiene por qué serlo.

La condición suficiente, enunciada y justificada. Merece escribirse aparte, porque es un resultado con entidad propia y no solo un paso del algoritmo: *sea* $\bar{x} = (B^{-1}b, 0)$ *una solución básica factible de* $\operatorname{Min}\{c^T x : \ Ax = b, \ x \geq 0\}$. *Si* $c_j - z_j = c_j - c_B^T B^{-1} a_j \geq 0$ *para todo* $j \in NB$, *entonces* $\bar{x}$ *es óptima.* • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

La idea. En $\bar{x}$ todas las variables no básicas están en cero, que es lo más bajo que pueden estar. Cualquier otro punto factible se alcanza, por tanto, *subiendo* algunas de ellas, nunca bajándolas; las básicas se reajustan solas para seguir cumpliendo $Ax = b$. La fórmula (3.1) es la factura de ese cambio: cada unidad que sube x_j añade $c_j - z_j$ al objetivo. Si todos los precios de esa factura son ≥ 0, subir lo que sea no puede abaratar, y el vértice es el mejor punto. No hace falta mirar ningún otro vértice.

Paso 1: escribir cualquier punto con sus no básicas. Sea x un punto con $Ax = b$. Como B es invertible, $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$, y al sustituir en $c^T x$ sale (3.1): $c^T x = \bar{z} + \sum_{j \in NB}(c_j - z_j)x_j$. Es una identidad: vale para toda solución de $Ax = b$, sea factible o no, y el valor depende solo de x_N.

Paso 2: el signo, sumando a sumando (el núcleo). Si además $x \geq 0$, cada x_j con $j \in NB$ es ≥ 0. Por hipótesis cada $c_j - z_j$ es ≥ 0. Cada producto $(c_j - z_j)x_j$ es entonces ≥ 0, la suma también, y $c^T x \geq \bar{z}$.

Paso 3: la cota se alcanza. $\bar{x}$ es factible, porque $B^{-1}b \geq 0$, y vale $c^T \bar{x} = \bar{z}$. Una cota inferior que un punto factible alcanza es el mínimo.

Dónde entra cada hipótesis. La invertibilidad de B, en el paso 1: sin ella no se pueden despejar las básicas. La no negatividad del otro punto, en el paso 2, y conviene fijarse en que solo se usa la de sus componentes *no básicas*: la de x_B no aparece. La factibilidad de $\bar{x}$, en el paso 3. Sin ella, los costes reducidos no negativos siguen dando la cota $c^T x \geq \bar{z}$ para todo punto factible, pero el valor $\bar{z}$ lo tiene un punto de fuera, y la cota no se alcanza en él. Esa es la situación de partida del simplex dual del capítulo 4. Y la condición es suficiente, no necesaria: la observación siguiente da un óptimo con un coste reducido negativo.

Para reconstruirla. Se despejan las básicas y se escribe el objetivo como $\bar{z} + \sum(c_j - z_j)x_j$. En un punto factible las no básicas son ≥ 0 y los costes reducidos también, luego la suma no baja de $\bar{z}$. Y $\bar{z}$ lo alcanza $\bar{x}$, que es factible.

Observación (: un coste reducido negativo no siempre permite avanzar)**.** En $\operatorname{Min} -x_2$ sujeto a $x_1 + x_2 = 0$, $x_1, x_2 \geq 0$, el único punto factible es $(0, 0)$ y por tanto es óptimo. Con base

$B = (a_1) = (1)$, el coste reducido de x_2 es -1, pero aumentarla exigiría $x_1 = -x_2 < 0$. El cociente mínimo será cero. Si se cambia el objetivo por cero, ese coste reducido también es cero y el punto sigue siendo el único factible: un coste reducido nulo tampoco basta, por sí solo, para asegurar óptimos distintos.

3.3.1.2 Segundo, mejorar: la casuística completa

Se distinguen tres casos, y conviene recorrerlos despacio porque entre los tres cubren todos los finales posibles del algoritmo.

Caso 1: $c_j - z_j > 0$ **para todo** $j \in NB$**.** Entonces, por (3.1), $z > \bar{z}$ para todo $x \in S$ distinto de $\bar{x}$ (algún x_j con $j \in NB$ ha de ser positivo, pues si todas las no básicas fueran cero el punto sería $\bar{x}$). Luego $\bar{x}$ es **solución óptima única**.

Caso 2: existe $c_k - z_k < 0$ **con** $k \in NB$**.** Se intenta mejorar aumentando x_k. Se considera el punto

$$\hat{x} = \bar{x} + \lambda d_k, \qquad d_k = \begin{pmatrix} -B^{-1}a_k \\ e_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_k \\ e_k \end{pmatrix}, \qquad y_k = B^{-1}a_k.$$

En palabras: se sube la variable no básica x_k desde cero hasta λ, y se corrigen las básicas como obliga $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$, es decir, restando λy_k. Las demás no básicas siguen en cero. Aquí e_k designa la coordenada de x_k dentro del bloque no básico, de modo que $Ne_k = a_k$. El vector d_k es la dirección asociada a la variable entrante; si admite un paso positivo, recorre una arista. El valor objetivo es

$$\hat{z} = c^T\hat{x} = \bar{z} + \lambda\left(-c_B^T B^{-1}a_k + c_k\right) = \bar{z} + \lambda\,(c_k - z_k),$$

y como $c_k - z_k < 0$, para $\lambda > 0$ se tiene $c^T\hat{x} < \bar{z}$: se ha mejorado. Falta asegurar que $\hat{x}$ es factible, y ahí se abren dos ramas según el signo de y_k.

(a) Si $y_k \leq 0$ *(todas las componentes de* y_k *son* ≤ 0*).* Entonces, por el teorema de caracterización de direcciones extremas del capítulo 2, d_k es una dirección extrema de S; además

$$c^T d_k = -c_B^T B^{-1}a_k + c_k = c_k - z_k < 0.$$

Por el teorema fundamental de la sección 3.2, el problema **no tiene solución óptima finita**: $z^* = -\infty$. De hecho se ha exhibido la vía de escape,

$$\hat{z} = c^T\hat{x} = \bar{z} + \lambda(c_k - z_k) < \bar{z} \quad \forall \lambda > 0,$$

así que el problema tiene **solución ilimitada en la dirección** d_k. Obsérvese lo barato que ha salido el certificado: no hay que conocer todas las direcciones extremas del poliedro, basta con que aparezca una columna cuyo y_k sea ≤ 0.

(b) Si $y_k \not\leq 0$, es decir, si existe alguna componente $y_{ik} > 0$ con $i \in B$. Entonces subir x_k hace bajar las variables básicas cuya componente y_{ik} es positiva, y no se puede subir indefinidamente sin volverlas negativas. El límite es el **cociente mínimo**:

$$\lambda = \min_{i \in B}\left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : \; y_{ik} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \; \geq 0. \tag{3.2}$$

Con ese λ, el punto $\hat{x}$ es un punto extremo de S. En efecto:

$$A\hat{x} = A\bar{x} + \lambda A d_k = b + \lambda\left(-BB^{-1}a_k + Ne_k\right) = b + \lambda(-a_k + a_k) = b,$$

y sus componentes son

$$\hat{x}_i = \bar{b}_i - \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}\, y_{ik} \;\geq 0 \quad \text{para } i \in B, \qquad \text{y en particular} \quad \hat{x}_r = 0;$$

$$\hat{x}_k = \lambda = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \geq 0; \qquad \hat{x}_j = 0 \quad (j \in NB,\ j \neq k).$$

La desigualdad $\hat{x}_i \geq 0$ es justo lo que garantiza la elección del mínimo: si $y_{ik} \leq 0$, el término que se resta es ≤ 0 y $\hat{x}_i$ no disminuye; y si $y_{ik} > 0$, entonces $\bar{b}_r/y_{rk} \leq \bar{b}_i/y_{ik}$ por ser r el que realiza el mínimo, y multiplicando por $y_{ik} > 0$ queda $\bar{b}_i - \lambda y_{ik} \geq 0$. Luego $\hat{x} \geq 0$ y $\hat{x}$ es factible.

Además $\hat{x}$ tiene a lo más m componentes positivas, las correspondientes a las columnas $\{a_i :\ i \in B,\ i \neq r\} \cup \{a_k\}$, que son linealmente independientes precisamente porque $y_{rk} \neq 0$. Por el corolario de las columnas independientes del capítulo 2, $\hat{x}$ es un punto extremo: se dice que **la variable básica x_r deja la base** y que **la variable no básica x_k entra en la base**. Y si $\bar{x}$ era no degenerada, entonces $\bar{b}_r > 0$, luego $\lambda > 0$ y $\hat{z} = c^T\hat{x} < \bar{z}$ *estrictamente*.

LA IDEA: POR QUÉ EL COCIENTE MÍNIMO ES EL MÍNIMO, Y NO OTRA COSA

Vale la pena decirlo sin álgebra. Al subir x_k desde cero, cada variable básica x_i vale $\bar{b}_i - \lambda y_{ik}$: una recta en λ. Las que tienen $y_{ik} \leq 0$ suben o se quedan igual y nunca dan problema. Las que tienen $y_{ik} > 0$ bajan, y cada una tiene su propio momento de llegar a cero, que es $\lambda = \bar{b}_i/y_{ik}$. Como hay que respetarlas a todas a la vez, manda la primera que se agota, o sea, el menor de esos cocientes. Ese es literalmente el significado de la regla: *la primera variable básica que llega a cero limita el avance*. Una variable básica puede representar una actividad o una holgura; no es necesariamente la cantidad disponible de un recurso. El valor de λ mide cuánto puede aumentar la variable entrante.
Y por eso, también, la regla del cociente mínimo ignora las filas con $y_{ik} \leq 0$: esas variables no disminuyen. Si *ninguna* fila tiene $y_{ik} > 0$, no se agota nada y se puede fabricar sin límite: es exactamente el caso (a), el problema ilimitado.

Caso 3: $c_j - z_j \geq 0$ para todo $j \in NB$ y existe algún $c_k - z_k = 0$. El punto $\bar{x}$ es óptimo (caso 1 con desigualdad no estricta), pero puede no ser el único, y esta es la situación que hay que saber reconocer en una tabla.

(a) Si $y_k \leq 0$, ya se ha visto que d_k es una dirección extrema, pero ahora $c^T d_k = 0$: sigue verificándose la condición suficiente de solución óptima finita. De hecho $\hat{x} = \bar{x} + \lambda d_k$ es factible para todo $\lambda \geq 0$ y $c^T\hat{x} = \bar{z}$. El problema tiene solución óptima finita de valor $\bar{z}$ **a lo largo de todo el rayo** $\bar{x} + \lambda d_k$, $\lambda \geq 0$.

(b) Si $y_k \not\leq 0$, sea λ el cociente mínimo (3.2). Ya se ha probado que $\hat{x}$ es un punto extremo, y ahora con el mismo valor:

$$c^T\hat{x} = \bar{z} + \lambda(c_k - z_k) = \bar{z}.$$

Y además, para todo $\alpha \in [0,1]$,

$$c^T\big(\alpha\bar{x} + (1-\alpha)\hat{x}\big) = \alpha\bar{z} + (1-\alpha)\bar{z} = \bar{z},$$

de modo que todas las combinaciones convexas de $\bar{x}$ y $\hat{x}$ son óptimas. Si $\lambda > 0$, los puntos son distintos y el problema tiene **solución óptima finita múltiple**, incluido el segmento que los une. Si $\lambda = 0$, el cambio de base conserva el punto y no prueba multiplicidad.

Observación. Si el (PPL) es de **maximizar**, el razonamiento es análogo y solo cambian los sentidos: existe posibilidad de mejora si hay algún $c_k - z_k > 0$, y se está en el óptimo si $c_j - z_j \leq 0$ para todo $j \in NB$, único si la desigualdad es estricta para todos. Un coste reducido nulo da óptimos distintos cuando permite un paso positivo o un rayo, con la misma salvedad sobre degeneración. La construcción de $\hat{x}$ es idéntica.

Observación (el convenio de signos: cuatro combinaciones y solo una es la de aquí)**.** En algunos libros se llama costos reducidos a las diferencias $z_j - c_j$ en lugar de $c_j - z_j$. Con ese convenio, y para un problema de minimizar, el razonamiento anterior queda del revés: hay posibilidad de mejora si existe $z_k - c_k > 0$, y se está en el óptimo si $z_j - c_j \leq 0$ para todo $j \in NB$. **Este libro usa siempre** $c_j - z_j$. Al leer una tabla ajena, lo primero que hay que averiguar es cuál de los dos convenios usa y si el problema es de mínimo o de máximo; son cuatro combinaciones y solo una es la de aquí.

Observación. También se encuentra en la literatura el vector $c^T - c_B^T B^{-1} A \in \mathbb{R}^n$, con una componente por cada variable y no solo por las no básicas. No hay contradicción: para $j \notin NB$, es decir, para una variable básica, $B^{-1}a_j$ es un vector de la base canónica y $z_j = c_B^T B^{-1} a_j = c_j$, luego $c_j - z_j = 0$. **Los costos reducidos de las variables básicas son nulos**, siempre, y por eso pueden escribirse o no. En la tabla del simplex aparecen escritos, y sirven de comprobación: si en la fila de costos reducidos alguna columna básica no da cero, hay un error de cálculo.

EXPLÍCATE. *Justifica la afirmación anterior con detalle: ¿por qué $B^{-1}a_j$ es un vector de la base canónica cuando a_j es una columna de B? ¿Y por qué eso hace $z_j = c_j$?*

3.3.1.3 El primer ejemplo, iteración a iteración

Ejemplo. Sea el (PPL)

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl} \text{Minimizar} & x_1 & - & 3x_2 & & & & & & \\ \text{sujeto a:} & -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 6 \\ & x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 5 \\ & x_i \geq 0 & \forall i, & & & & & & & \end{array}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Paso 0. Se parte de la solución básica factible asociada a la base $B = [a_3 \mid a_4] = I$, es decir, $\bar{x} = (0, 0, 6, 5)$ con $\bar{z} = 0$. Esa base está disponible gratis porque x_3 y x_4 son variables de holgura y sus columnas forman la identidad.

Primera iteración. Con $c_B = (0, 0)$ y $c_N = (1, -3)$:

$$c_N^T - c_B^T B^{-1} N = \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} - (0,0) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \not\geq 0,$$

luego $\bar{x}$ no es óptimo. El menor costo reducido es $c_2 - z_2 = -3$, así que x_2 **entra en la base**. Se calcula

$$y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \not\leq 0 \implies \hat{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 6 - 2\lambda \\ 5 - \lambda \end{pmatrix},$$

y el cociente mínimo es $\lambda = \min\{6/2,\ 5/1\} = 3$, alcanzado en la primera fila: x_3 **sale de la base**. El nuevo punto es $\hat{x} = (0, 3, 0, 2)$.

Segunda iteración. Ahora $B = [a_2 \mid a_4] = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, con $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $c_B = (-3, 0)$ y $c_N = (1, 0)$ (las no básicas son ahora x_1 y x_3). Los costos reducidos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} - (-3,0) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} - (-3,0) \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \not\geq 0,$$

luego no se está en el óptimo. Como $c_1 - z_1 = -\frac{1}{2} < 0$, x_1 **entra en la base**. Se calcula

$$y_1 = B^{-1} a_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \not\leq 0,$$

de modo que la dirección de avance es $d_1 = (1,\ \frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{3}{2})$ (la componente de x_1 es 1; las de las básicas x_2 y x_4 son $-y_1$) y

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 3 + \lambda/2 \\ 0 \\ 2 - \frac{3}{2}\lambda \end{pmatrix}.$$

Solo la segunda componente de y_1 es positiva, así que el cociente mínimo tiene un único candidato: $\lambda = \dfrac{2}{3/2} = \dfrac{4}{3}$, y x_4 **sale de la base**. El nuevo punto es $\hat{x} = \left(\frac{4}{3},\ \frac{11}{3},\ 0,\ 0\right)$.

Tercera iteración. Ahora $B = [a_2 \mid a_1] = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, con $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{smallmatrix}\right)$, $c_B = (-3, 1)$ y $c_N = (0, 0)$ (las no básicas son x_3 y x_4, cuyas columnas forman la identidad). Los costos reducidos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - (-3,1) \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 \end{pmatrix} > 0.$$

Todos son estrictamente positivos: se está en el óptimo y, por el caso 1, es único:

$$x^* = \left(\tfrac{4}{3},\ \tfrac{11}{3},\ 0,\ 0\right), \qquad z^* = \tfrac{4}{3} - 3 \cdot \tfrac{11}{3} = -\tfrac{29}{3}.$$

La condición suficiente, con números. Lo que la última tabla certifica se puede escribir sin abreviaturas. Con la base final, la fórmula (3.1) dice que, en todo punto con $Ax = b$,

$$x_1 - 3x_2 = -\tfrac{29}{3} + \tfrac{4}{3}\, x_3 + \tfrac{1}{3}\, x_4.$$

Se comprueba sustituyendo las holguras por su definición, $x_3 = 6 + x_1 - 2x_2$ y $x_4 = 5 - x_1 - x_2$: el segundo miembro vale $-\frac{29}{3} + 8 + \frac{4}{3}x_1 - \frac{8}{3}x_2 + \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 = x_1 - 3x_2$. Leída en palabras, la igualdad dice que el coste de cualquier plan es $-29/3$ más $4/3$ por cada unidad que le sobre a la primera restricción y $1/3$ por cada unidad que le sobre a la segunda. Como las holguras de un punto factible son ≥ 0, ningún plan baja de $-29/3$. Y solo lo alcanza el

que no deja sobrar nada en ninguna de las dos, que es el punto $(4/3, 11/3)$: por eso el óptimo es único, como decía el caso 1.

EXPLÍCATE. *En la tercera iteración los costos reducidos han salido* $(4/3,\ 1/3)$ *para* x_3 *y* x_4*, que son las holguras de las dos restricciones. Con la lectura de precios sombra de la caja de intuición, ¿qué significa que la holgura de la primera restricción tenga costo reducido* $4/3$*? Compruébalo calculando* $w^T = c_B^T B^{-1}$ *y comparando.*

3.3.2 El simplex en formato tabla

La manera más natural de llevar a cabo el algoritmo es usando **tablas**, que contienen toda la información necesaria en cada iteración. Antes de escribir una conviene decir de dónde sale, porque presentada sin explicación parece un ritual y es justo lo contrario: es la contabilidad del paseo por las aristas, con una casilla para cada cosa que hay que saber.

LA IDEA: QUÉ HAY ESCRITO EN UNA TABLA DEL SIMPLEX

Supóngase, sin pérdida de generalidad, que las variables básicas son las m primeras. La tabla es esto:

$$\left[\ I \ \middle|\ B^{-1}N \ \middle|\ B^{-1}b\ \right], \qquad \text{más una fila con} \qquad \left(\ 0 \ \middle|\ c_N^T - c_B^T B^{-1} N \ \middle|\ \bar{z}\ \right).$$

Es decir: **la tabla es el sistema** $Ax = b$ **multiplicado por** B^{-1}, con la función objetivo pegada debajo. Y cada bloque responde a una pregunta del paseo:

- La última columna, $\bar{b} = B^{-1}b$, dice *dónde se está*: son los valores de las variables básicas en el vértice actual.
- La esquina inferior derecha es $\bar{z}$, *cuánto vale* el objetivo ahí.
- Cada columna interior, $y_j = B^{-1}a_j$, dice *qué pasa si se avanza* por la arista de la variable x_j: cuánto baja cada variable básica por cada unidad de x_j. Dicho de otro modo, es la descomposición que expresa la columna a_j como combinación de las de la base: $a_j = B\,y_j = \sum_i y_{ij} a_i$.
- La fila de abajo, los costos reducidos, dice *cuánto mejora o empeora* el objetivo por cada unidad de avance en cada arista.

Con eso, las tres decisiones del algoritmo se leen sin calcular nada más: se mira la fila de abajo para elegir por dónde salir, se dividen la última columna entre la columna elegida para saber hasta dónde llegar, y se pivota para volver a tener la tabla escrita en la base nueva. La identidad I de la izquierda no es adorno: es la señal de que la tabla está expresada en la base actual, y recuperarla después de cada pivotaje es todo el trabajo mecánico del método.

La tabla general de un (PPL) de minimizar, con las variables básicas $x_1, \ldots, x_m$ en las filas y todas las variables en las columnas, es la siguiente. En la primera fila se escriben los costos c_j, y en la columna de la izquierda, junto al nombre de cada variable básica, su costo c_i:

		c_1	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\ldots$	c_j	$\ldots$	c_n	
		x_1	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\ldots$	x_j	$\ldots$	x_n	$\bar{b}$
x_1	c_1				$y_{1,m+1}$	$\ldots$	y_{1j}	$\ldots$	y_{1n}	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$		I		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_r	c_r				$y_{r,m+1}$	$\ldots$	y_{rj}	$\ldots$	y_{rn}	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	c_m				$y_{m,m+1}$	$\ldots$	y_{mj}	$\ldots$	y_{mn}	$\bar{b}_m$
		0	$\ldots$	0	$c_{m+1} - z_{m+1}$	$\ldots$	$c_j - z_j$	$\ldots$	$c_n - z_n$	$\bar{z}$

donde, escrito con las entradas de la propia tabla,

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \, y_{ij}.$$

Esta última fórmula es la que se usa en la práctica: para calcular el costo reducido de una columna no hace falta invertir nada, basta multiplicar la columna de la tabla por los costos de las variables básicas escritos a la izquierda, y restar el resultado del costo de arriba.

3.3.2.1 El proceso de mejora, escrito sobre la tabla

1. Selección de las variables de entrada y de salida. Se selecciona como variable de entrada una no básica con el menor costo reducido, siempre que este sea negativo, y se la designa por x_k; si todos son no negativos, la tabla ya es óptima. Su columna k es la **columna pivote**. Si no tiene ninguna entrada positiva, el problema es ilimitado. En otro caso, se selecciona como variable de salida aquella que haga mínima la razón $\bar{b}_i / y_{ik}$ entre las filas con $y_{ik} > 0$:

$$\min_{1 \le i \le m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : \; y_{ik} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}.$$

La fila r es la **fila pivote** y el elemento y_{rk} es el **pivote**.

2. Cálculo de la nueva tabla. Se construye una tabla nueva en la que la variable básica de salida x_r ha sido sustituida por la de entrada x_k (y, en la columna de costos de la izquierda, c_r por c_k). La fila r de la nueva tabla se obtiene dividiendo la fila r de la precedente por el pivote y_{rk}; y la columna k de la nueva tabla debe quedar, mediante operaciones elementales por filas, con todos los elementos cero salvo un 1 en el lugar (r, k). Con ello se recupera la matriz identidad en las columnas de las variables básicas.

En fórmula, las entradas nuevas son

$$y'_{ij} = \begin{cases} \dfrac{y_{rj}}{y_{rk}}, & i = r, \\ y_{ij} - \dfrac{y_{ik}}{y_{rk}} \, y_{rj}, & i \neq r, \end{cases} \tag{3.3}$$

La misma regla se aplica a la columna $\bar{b}$ y a los coeficientes de la fila de costos reducidos. Hay una salvedad de signo: la esquina inferior derecha guarda $\bar{z}$, no $-\bar{z}$, y se actualiza mediante

$$\bar{z}' = \bar{z} + (c_k - z_k) \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}.$$

Por ejemplo, el primer paso anterior da $0 + (-3) \cdot 3 = -9$. Si se guardara $-\bar{z}$ en esa casilla, entonces toda la fila inferior seguiría exactamente la misma eliminación por filas. Mantendremos el convenio $\bar{z}$ en las tablas del libro.

Observación (qué es pivotar, de verdad)**.** El cálculo de la nueva tabla puede entenderse como el proceso de encontrar la representación de las columnas no básicas a partir de las básicas cuando se cambia un elemento de la base. Se tiene $a_k = B\,y_k$ para $k \in NB$. Cuando se cambia de base,

$$A = [B \mid N] \xrightarrow[\text{entra } a_k,\ k \in NB]{\text{sale } a_r,\ r \in B} A = [B' \mid N'],$$

y el proceso de pivotaje equivale a multiplicar el sistema $Ax = b$ por la inversa de la nueva matriz básica:

$$I\ B^{-1}N \longrightarrow I\ (B')^{-1}N'.$$

Se puede comprobar directamente. Suponiendo sin pérdida de generalidad $B = \{a_1, \ldots, a_m\}$, si $y_{rk} \neq 0$ entonces las columnas $\{a_1, \ldots, a_{r-1}, a_k, a_{r+1}, \ldots, a_m\}$ son linealmente independientes y forman base. La razón es el *intercambio*: de $a_k = \sum_i y_{ik} a_i$ con $y_{rk} \neq 0$ se despeja a_r en función de a_k y de las otras $m-1$ columnas viejas, luego el subespacio generado por el conjunto nuevo contiene a a_r y con él a todo $\mathbb{R}^m$; y m vectores que generan $\mathbb{R}^m$ son necesariamente independientes, porque una base tiene exactamente m elementos (apéndice F, sección «Álgebra lineal»). Si fuera $y_{rk} = 0$, en cambio, a_k estaría en el subespacio generado por las otras $m-1$ y el conjunto nuevo no generaría $\mathbb{R}^m$: por eso el pivote no puede ser cero. Pivotar sobre y_{rk} es encontrar los coeficientes que expresan las columnas no básicas en la nueva base. De

$$a_k = B\,y_k = \sum_{i=1}^{m} y_{ik} a_i = \sum_{i \neq r} y_{ik} a_i + y_{rk} a_r \quad \Longrightarrow \quad a_r = \frac{1}{y_{rk}}\, a_k - \sum_{i \neq r} \frac{y_{ik}}{y_{rk}}\, a_i,$$

que es la vieja columna básica escrita en la base nueva. Y sustituyendo eso en la expresión de cualquier otra columna a_j,

$$a_j = \sum_{i \neq r} y_{ij} a_i + y_{rj} a_r = \sum_{i \neq r} y_{ij} a_i + y_{rj}\Big(\frac{1}{y_{rk}} a_k - \sum_{i \neq r} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} a_i\Big) = \sum_{i \neq r}\Big(y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj}\Big) a_i + \frac{y_{rj}}{y_{rk}}\, a_k,$$

que son exactamente las fórmulas (3.3). Dicho en una frase: **pivotar no cambia el problema, cambia el sistema de coordenadas en que está escrito**, y lo cambia a aquel en que el vértice nuevo tiene coordenadas fáciles.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: CALCULAR SOLO LAS COLUMNAS NECESARIAS

La tabla $[\, I \mid B^{-1}N \mid B^{-1}b \,]$ se puede reconstruir a partir de la base B y los datos originales A, b, c. En el *simplex revisado* se conserva una factorización de B, que permite resolver sistemas con esa matriz sin formar explícitamente su inversa. Cuando hace falta una columna y_j, se resuelve $By_j = a_j$.

Esto resulta útil en problemas grandes y dispersos: evita almacenar toda la tabla, que puede ser mucho más densa que A. La tabla completa tiene una ventaja didáctica: muestra a la vez las columnas y permite leer las relaciones de sensibilidad que se estudian en el capítulo 4. Con las mismas reglas de elección y aritmética exacta, ambas versiones recorren las mismas bases; cambia cómo se hacen y guardan las cuentas.

EXPLÍCATE. *En la tabla general, las columnas de las variables básicas forman la identidad. Usando la fórmula $z_j = \sum_i c_i y_{ij}$, comprueba que los costos reducidos de esas columnas salen* 0*, y explica por qué esa comprobación detecta errores de pivotaje.*

3.3.3 Solución básica factible inicial

El método del simplex debe partir de una solución básica factible, o punto extremo, inicial. Ello supone encontrar una descomposición $A = [B \mid N]$ con $B^{-1}b \geq 0$, y eso no siempre está a la vista. Cuando todas las restricciones son del tipo $\leq$ con $b \geq 0$, las columnas de las variables de holgura forman la identidad y la base inicial está servida, como en el ejemplo anterior. Con igualdades o restricciones de tipo $\geq$ esa receta ya no garantiza una base factible, aunque puede haber otra que se reconozca a simple vista. Necesitamos un procedimiento que funcione también cuando no la encontramos.

Una posibilidad es modificar las restricciones del problema introduciendo **variables artificiales**, tales que un punto extremo del nuevo conjunto factible se obtenga de forma inmediata:

$$\begin{array}{c} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} Ax + y = b \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{array}$$

El nuevo sistema es siempre factible si $b \geq 0$, sea o no factible el original: el punto $x = 0$, $y = b$ (que corresponde a la base $B = I_m$) es un punto extremo del nuevo conjunto factible. Aquí es donde se cobra la normalización $b \geq 0$ de la sección 3.1: si alguna componente de b fuera negativa, el punto $y = b$ no sería factible y el truco no serviría de nada.

LA IDEA: PARA QUÉ SIRVE UNA VARIABLE ARTIFICIAL

El problema original pide $Ax = b$. Al introducir $Ax + y = b$, con $y \geq 0$, permitimos que cada componente de Ax se quede por debajo de la correspondiente de b; $y_i = b_i - (Ax)_i$ mide esa diferencia. Así aparece un punto inicial inmediato: $x = 0$, $y = b$.
Los puntos del problema original son exactamente los que tienen $y = 0$.
Buscar uno de ellos equivale a minimizar $e^T y = y_1 + \cdots + y_m$ en el conjunto auxiliar. Si el mínimo es cero, las igualdades originales se cumplen todas. Si es positivo, no existe ningún $x \geq 0$ que las cumpla a la vez. Esta suma cuantifica las diferencias en las unidades elegidas para las filas; su valor cambia si se escalan las ecuaciones, aunque ser cero o positivo no cambia. **Se usa el simplex para encontrar el punto de partida del simplex.**

Observación (holguras y artificiales no son lo mismo)**.** Una holgura positiva indica que una desigualdad original no es activa: eso está permitido por el modelo. Una artificial positiva indica que la correspondiente igualdad original no se cumple. Las holguras forman parte de la representación del problema; las artificiales se introducen para iniciar el algoritmo y deben quedar a cero para recuperar la factibilidad original.

Como $Ax = b$ si y solo si $y = 0$, hay que utilizar algún método para hacer cero las variables artificiales y así volver al conjunto factible del problema original. Se exponen los dos habituales.

3.3.3.1 *Método de la M grande*

Se considera el problema en el que la función objetivo «penaliza» a las variables artificiales, con $M \gg 0$, para que sus valores se hagan cero:

$$(P(M)) \qquad \begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & c^T x + M\, e^T y \\ \text{sujeto a:} \quad & Ax + y = b \\ & x \geq 0,\ y \geq 0. \end{aligned}$$

La idea es dar prioridad a eliminar las artificiales y, una vez eliminadas, minimizar el costo original. A mano se suele conservar M como símbolo: al comparar $M\alpha + \beta$, se compara primero α y, solo si empata, β. Es el *orden lexicográfico* de (α, β).

Si M es un número, «grande» significa suficientemente grande *para los datos concretos*. No basta escoger, por ejemplo, $M = 1000$ sin más. Las justificaciones siguientes explican dónde interviene esa condición.

Observación (por qué puede darse un significado preciso a «suficientemente grande»)**.** El poliedro auxiliar $Q = \{(x, y) : Ax + y = b,\ x, y \geq 0\}$ tiene un número finito de vértices y de direcciones extremas. Escribamos $a(x, y) = e^T y$ y $f(x, y) = c^T x$. Podemos elegir $M > 0$ de modo que, para todos los pares de vértices v, w con $a(v) > a(w)$,

$$M\big(a(v) - a(w)\big) > |f(v) - f(w)|,$$

y, para cada dirección extrema $d = (d_x, d_y)$ con $e^T d_y > 0$,

$$M\, e^T d_y > |c^T d_x|.$$

Solo se exige superar una lista finita de cocientes con denominador positivo. Con esta elección, entre los vértices siempre gana primero el que tiene menor suma de artificiales; además, ningún rayo que aumente esa suma puede abaratar. Esto justifica la prioridad simbólica, aunque enumerar todos esos vértices y rayos para calcular una cota de M sería poco práctico.

Caso 1: un óptimo básico de $(P(M))$ con $y^* \neq 0$ certifica infactibilidad del (PPL), para M suficientemente grande. Si existiera un punto original factible, el mínimo de $a = e^T y$ en Q sería cero. Como $a \geq 0$, el teorema fundamental garantiza un vértice w de Q con $a(w) = 0$. El óptimo básico $v = (x^*, y^*)$ tendría $a(v) > 0$, y la elección de M daría

$$\big[Ma(v) + f(v)\big] - \big[Ma(w) + f(w)\big] = M\big(a(v) - a(w)\big) + f(v) - f(w) > 0,$$

contra la optimalidad de v. La comparación se hace con un mismo M, ya elegido; el óptimo de un problema con un M fijo no tiene por qué seguir siendo óptimo al cambiar M.

Caso 2: si $(x^*, 0)$ es solución óptima de $(P(M))$, entonces x^* es solución óptima del (PPL). Esto vale para cualquier $M > 0$. Para todo x factible para el (PPL), el punto $(x, 0)$ es factible para $(P(M))$ y

$$c^T x^* + M\, e^T 0 \leq c^T x + M\, e^T 0.$$

Por tanto $c^T x^* \leq c^T x$, que prueba lo afirmado.

Caso 3: si el (PPL) es factible y $(P(M))$ es ilimitado para M suficientemente grande, el (PPL) es ilimitado. La ilimitación de $(P(M))$ proporciona una dirección extrema $d = (d_x, d_y) \geq 0$ con

$$Ad_x + d_y = 0, \qquad c^T d_x + M\, e^T d_y < 0.$$

Por la elección de M, esta última desigualdad obliga a $e^T d_y = 0$, luego $d_y = 0$. Así, $Ad_x = 0$ y $c^T d_x < 0$. Desde cualquier punto original factible x^0, los puntos $x^0 + \lambda d_x$ son factibles para $\lambda \geq 0$ y su costo tiende a $-\infty$.

La hipótesis de factibilidad de este caso es necesaria. Por ejemplo, mín $-x_2$ sujeto a $-x_1 = 1$, $x_1, x_2 \geq 0$, es infactible. Su auxiliar tiene $y = 1 + x_1$ y costo $-x_2 + My$, que es ilimitado para todo M. Por eso, si el auxiliar resulta ilimitado antes de disponer de un punto original factible, hay que comprobar la factibilidad por separado; la fase I que sigue permite hacerlo directamente.

3.3.3.2 Método de las dos fases

Fase I. Se resuelve el problema lineal

$$(P_I) \qquad \begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & e^T y \\ \text{sujeto a:} \quad & Ax + y = b \\ & x \geq 0,\ y \geq 0, \end{aligned}$$

cuyo óptimo se busca partiendo de la base que se ve a simple vista, $B = I_m$. Si $y^* \neq 0$, el (PPL) es infactible, y el argumento cabe en dos líneas: si el (PPL) fuera factible, con x factible el punto $(x, 0)$ sería factible para (P_I) con valor objetivo 0, y como $e^T y \geq 0$ siempre, ese valor sería el óptimo; luego el óptimo de (P_I) sería 0 y no positivo. Obsérvese, de paso, que (P_I) nunca es ilimitado ni infactible: su objetivo está acotado inferiormente por cero y su conjunto factible contiene a $(0, b)$. Tiene un óptimo finito y alcanzado; el simplex lo encuentra en un número finito de pasos si se evita el ciclado, como se explica en el apartado de convergencia.

Sea $(x^*, 0)$ una solución básica óptima de (P_I). Sus columnas con valores positivos son independientes; al ser $y = 0$, pertenecen a A. Por el criterio del capítulo anterior, x^* es un punto extremo del conjunto original. Puede quedar pendiente extraer una base formada solo por columnas originales: el caso degenerado se explica a continuación.

Fase II. Partiendo de x^*, se resuelve el problema original

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & c^T x \\ \text{sujeto a:} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Una vez retiradas las artificiales básicas, las columnas artificiales se pueden eliminar de la tabla o conservar como columnas auxiliares de lectura, siempre excluidas de las candidatas a entrar. Conservan escrita la matriz B^{-1} (recuérdese que la columna de la artificial i-ésima es e_i en el sistema original, luego en la tabla aparece como la columna i-ésima de B^{-1}; eso es lo que permite reconstruir B^{-1} leyendo esas columnas, y se hace con detalle al final de este apartado). Se sustituyen los costos de la fila superior por los verdaderos, c, y se recalculan los costos reducidos $c_j - z_j$ para $j \in NB$.

El caso incómodo: artificiales en la base a nivel cero. Puede ocurrir que al final de la fase I existan variables artificiales en la base con valor cero, es decir, que la solución óptima de la fase I sea degenerada. El valor óptimo es cero, así que el punto es factible para el problema original, pero la base contiene columnas que no son de A. Hay dos maneras de proceder.

Alternativa 1: conservarlas a nivel cero durante la fase II. La condición $y = 0$ debe mantenerse explícitamente; no basta aplicar el simplex ordinario al auxiliar con los costos nuevos. Para

una artificial básica $y_i = 0$ y una candidata original x_j, el coeficiente y_{ij} de su fila permite estas operaciones:

- si es > 0, el cociente de esa fila es cero. Se puede elegir esa fila para que entre x_j a nivel cero y salga la artificial; si hay otras filas con cociente cero, el desempate ordinario podría escoger una distinta;
- si esa componente es < 0, se pivota también sobre ese elemento para forzar la salida de la artificial (de hecho, si no se fuerza, al ser $y_{ij} < 0$ el término $\bar{b}_i$ de la artificial se haría positivo, y eso es exactamente lo prohibido);
- si es 0, esa artificial no cambia al aumentar x_j. Se sigue vigilando el resto de las artificiales básicas y se elige la salida que mantenga factible el sistema completo.

Alternativa 2: eliminarlas primero y después pasar a la fase II. Es la preparación más directa. En cada fila de una artificial básica a cero se busca un coeficiente no nulo de una variable original no básica y se pivota sobre él, de cualquier signo. El término independiente de esa fila es cero: al dividirla y restarla de las demás, todos los términos independientes conservan su valor y la factibilidad se mantiene. La artificial sale de la base y se descarta su columna.

Si todos los coeficientes originales de esa fila son cero, al imponer $y = 0$ queda $0 = 0$. Hay una ecuación redundante: se eliminan esa fila y su artificial básica. Pueden quedar coeficientes no nulos en otras columnas artificiales conservadas; lo decisivo es que no quede ninguno en las columnas originales. Se repite hasta obtener una base sin artificiales para el sistema independiente restante.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: M SIMBÓLICA O DOS FASES

Ambos métodos dan prioridad a la factibilidad. La M simbólica permite conservar un solo objetivo en las tablas, comparando primero el coeficiente de M y después la parte constante. Las dos fases hacen visible esa prioridad: primero se resuelve la factibilidad y, solo si se consigue, se optimiza el costo original.

Con una M numérica demasiado pequeña, una artificial positiva puede resultar más barata que cumplir las ecuaciones, sin que ello certifique infactibilidad. Una M excesiva puede provocar pérdida de precisión al combinar magnitudes muy distintas. Las dos fases evitan tener que fijar esa penalización. En cálculos a mano, conservar M como símbolo evita sustituirla por un número arbitrario.

3.3.3.3 *Un ejemplo con restricción redundante*

Ejemplo. Sea el problema

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\
\text{sujeto a:} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\
& -x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\
& 2x_2 + 3x_3 = 10 \\
& x_3 \leq 2 \\
& x_i \geq 0 \quad \forall i.
\end{aligned}$$

Para iniciar la fase I añadimos artificiales y_1, y_2, y_3 a las tres primeras igualdades; la cuarta es del tipo $\leq$ y aporta su propia holgura x_4, que sirve de columna básica. La tabla inicial de la fase I, con costos 1 para las artificiales y 0 para las demás, es:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	$\bar{b}$
y_1	1	1	1	0	1	0	0	6
y_2	-1	1	2	0	0	1	0	4
y_3	0	2	3	0	0	0	1	10
x_4	0	0	1	1	0	0	0	2
$c_j - z_j$	0	-4	-6	0	0	0	0	20

Los costos reducidos de la fase I se leen sin esfuerzo: como todas las básicas artificiales tienen costo 1 y la holgura x_4 costo 0, z_j es la suma de las tres primeras entradas de la columna j, y $c_j - z_j = 0 - z_j$. Por ejemplo, para x_2: $1 + 1 + 2 = 4$, luego $c_2 - z_2 = -4$. El valor inicial, 20, es $6 + 4 + 10$: el incumplimiento total de partida.

Las iteraciones de la fase I son tres, y conviene verlas, porque dos de ellas tienen empate en el cociente mínimo y una es degenerada.

Primera iteración. El costo reducido más negativo es el de x_3, -6: entra x_3. Los cocientes son $6/1 = 6$, $4/2 = 2$, $10/3$ y $2/1 = 2$, con empate entre la fila de y_2 y la de x_4. Se hace salir a la artificial y_2: una artificial que sale de la base ya no hace falta, mientras que x_4 es una variable del problema. Tras pivotar sobre el 2 de la segunda fila:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	$\bar{b}$
y_1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	4
x_3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	2
y_3	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	1	4
x_4	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	0
$c_j - z_j$	-3	-1	0	0	0	3	0	8

El empate ha dejado su huella: x_4 sigue en la base, pero vale 0. El vértice nuevo es degenerado.

Segunda iteración: un pivotaje degenerado. Entra x_1, con costo reducido -3. Sus cocientes son $4/\frac{3}{2} = \frac{8}{3}$ en la fila de y_1, $\frac{8}{3}$ en la de y_3 y $0/\frac{1}{2} = 0$ en la de x_4. Sale x_4 con cociente cero: x_1 entra en la base con valor 0, el punto no se mueve y el valor de la fase I se queda en 8. Lo único que ha cambiado es la base:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	$\bar{b}$
y_1	0	2	0	-3	1	1	0	4
x_3	0	0	1	1	0	0	0	2
y_3	0	2	0	-3	0	0	1	4
x_1	1	-1	0	2	0	-1	0	0
$c_j - z_j$	0	-4	0	6	0	0	0	8

Obsérvese que las filas de y_1 y de y_3 coinciden en las cuatro columnas originales. Es el primer aviso de lo que va a pasar.

Tercera iteración. Entra x_2, con costo reducido -4. Los dos cocientes son $4/2 = 2$, otra vez empatados, en las filas de y_1 y de y_3. Sale y_1, la primera. Como las dos filas eran iguales en las columnas originales, al anular el 2 de la fila de y_3 esa fila se queda sin nada en ellas. La tabla final de la fase I es:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	$\bar{b}$
x_2	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
x_3	0	0	1	1	0	0	0	2
y_3	0	0	0	0	-1	-1	1	0
x_1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	2
$c_j - z_j$	0	0	0	0	2	2	0	0

El valor óptimo de la fase I es 0, luego $y_1^* = y_2^* = y_3^* = 0$ y el problema original es factible. Pero y_3 **sigue en la base**, a nivel cero: la solución óptima de la fase I es degenerada. Para pasar a la fase II se eliminan las columnas de y_1 e y_2, que ya han salido de la base y no volverán, y queda:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_3	$\bar{b}$
x_2	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	0	2
x_3	0	0	1	1	0	2
y_3	0	0	0	0	1	0
x_1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	2

Obsérvese que la fila de y_3 tiene todos sus elementos cero salvo el 1 de su propia columna: no se puede pivotar sobre ninguno para forzar la salida de y_3 de la base. Se puede comprobar que y_3 es la variable artificial de una restricción redundante, y de hecho lo es: sumando las dos primeras restricciones del enunciado se obtiene

$$(x_1 + x_2 + x_3) + (-x_1 + x_2 + 2x_3) = 2x_2 + 3x_3 = 6 + 4 = 10,$$

que es exactamente la tercera. La tercera restricción no dice nada nuevo, y el algoritmo lo ha descubierto solo.

Que la artificial atrapada sea precisamente y_3 lo ha decidido el último desempate. Si en la tercera iteración hubiera salido y_3 en lugar de y_1, la que quedaría en la base a nivel cero sería y_1, con su fila nula en las columnas originales, y la ecuación declarada sobrante sería la primera. No es una contradicción: la redundancia es del *sistema*. Cualquiera de las tres igualdades se deduce de las otras dos, y el algoritmo solo elige cuál de ellas tacha.

Fase II. El ejemplo suele pararse al acabar la fase I; aquí se completa, porque el final es breve y la conclusión es instructiva. Con los costos verdaderos $c = (-1, 2, -3, 0)$, las variables básicas son, en el orden de las filas, x_2, x_3, y_3 y x_1, con costos $c_B = (2, -3, 0, -1)$. La fila $y_3 = 0$ puede eliminarse; aquí se conserva solo para seguir leyendo la misma tabla, con y_3 fijada a cero. La única variable no básica legítima es x_4, y su costo reducido es

$$c_4 - z_4 = 0 - \left[2 \cdot \left(-\tfrac{3}{2}\right) + (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot \tfrac{1}{2}\right] = 0 - \left(-3 - 3 - \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{13}{2} > 0,$$

y el valor objetivo actual es

$$\bar{z} = c_B^T \bar{b} = 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 2 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 = 4 - 6 - 2 = -4.$$

Todos los costos reducidos son positivos, luego **la fase II termina en la primera comprobación, sin pivotar**: la solución de la fase I ya era óptima. La solución es

$$x^* = (2, 2, 2, 0), \qquad z^* = -4,$$

y es única, porque el único costo reducido no básico es estrictamente positivo. Sustituyendo se ve que ese punto cumple las cuatro restricciones: $2+2+2=6$, $-2+2+4=4$, $4+6=10$ y $x_3=2\le 2$ con holgura nula.

EXPLÍCATE. *La restricción $x_3\le 2$ resulta activa en el óptimo ($x_4=0$). Con la lectura de precios sombra, ¿esperarías que relajarla a $x_3\le 3$ mejorase el objetivo? El costo reducido $c_4-z_4=13/2$ indica la variación marginal; comprueba además que la base sigue siendo factible al aumentar el límite en una unidad. El capítulo 4 sistematiza ambas comprobaciones.*

De la tabla final de la fase I a la fase II: leer B^{-1} y rellenar huecos. Hasta aquí la fase I se ha hecho entera. Muchas veces se parte de otro sitio: la tabla final de la fase I ya está hecha, quizá con alguna casilla sin rellenar, y hay que seguir desde ella. No hace falta repetir ningún pivotaje. Toda tabla es el sistema original multiplicado por B^{-1} (observación «qué es pivotar»): la columna j es $y_j=B^{-1}a_j$ y la última es $\bar b=B^{-1}b$. Con B^{-1} en la mano se reconstruye todo, y B^{-1} está escrita en la propia tabla. El método tiene cinco pasos.

1. *Leer la base en el orden de las filas.* La fila i de la tabla corresponde a la variable básica escrita a su izquierda, y B tiene por columna i la columna original de esa variable. El orden de las filas manda, no el de los índices.
2. *Leer B^{-1} en las columnas que empezaron siendo la identidad.* La columna de la artificial o de la holgura de la restricción i es e_i en el sistema original. En la tabla aparece, por tanto, como $B^{-1}e_i$, que es la columna i de B^{-1}. La columna de un exceso es $-e_i$, y da la columna i de B^{-1} cambiada de signo: sirve de comprobación.
3. *Rellenar los huecos.* La casilla de la fila i y la columna j es la fila i de B^{-1} multiplicada por a_j. La casilla i de $\bar b$ es la fila i de B^{-1} multiplicada por b.
4. *Cambiar los costos.* Se escribe c_B con los costos verdaderos, en el orden de las filas. Se calcula $w^T=c_B^TB^{-1}$, y con él $c_j-z_j=c_j-w^Ta_j$ y $\bar z=c_B^T\bar b$. Las columnas artificiales se pueden conservar para leer B^{-1}, pero ya no son candidatas a entrar.
5. *Seguir con el simplex* desde el paso 1 del algoritmo.

Ejemplo. Sea el problema

$$\begin{aligned} \text{Minimizar}\quad & 2x_1+x_2+x_3\\ \text{sujeto a:}\quad & x_1+x_2+x_3\ge 3\\ & x_1-x_2+x_3=1\\ & 2x_1+x_2\le 6\\ & x_1,x_2,x_3\ge 0. \end{aligned}$$

En forma estándar, x_4 es el exceso de la primera restricción, x_5 la holgura de la tercera, y x_6 y x_7 las artificiales de la primera y de la segunda:

$$x_1+x_2+x_3-x_4+x_6=3,\qquad x_1-x_2+x_3+x_7=1,\qquad 2x_1+x_2+x_5=6.$$

La fase I termina con valor 0 en la tabla siguiente, en la que faltan tres casillas. Se llaman α, β y γ para no confundirlas con los vectores b y c.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar b$
x_2	0	1	0	β	0	$\frac12$	$-\frac12$	1
x_1	1	0	1	$-\frac12$	0	$\frac12$	$\frac12$	2
x_5	0	0	α	$\frac32$	1	$-\frac32$	$-\frac12$	γ

Se pide rellenar los huecos y resolver el problema.

Paso 1: la base. Las filas son las de x_2, x_1 y x_5, en ese orden, así que

$$B = [a_2 \mid a_1 \mid a_5] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Paso 2: la inversa. Las columnas de x_6 y x_7 son la primera y la segunda de B^{-1}. La tercera sale de la holgura x_5, que es de la tercera restricción. Como x_5 es básica, su columna en la tabla es un vector unitario, pero sigue siendo la tercera columna de B^{-1}: no hay que saltársela. Queda

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Dos comprobaciones rápidas. La columna del exceso x_4 tiene que ser la primera de B^{-1} cambiada de signo, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, y las dos casillas visibles coinciden. Y la tercera fila de B^{-1} por B da $\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+1,\ -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+2,\ 1\right) = (0,0,1)$, como debe.

Paso 3: los huecos. Con $a_3 = (1,1,0)$, $a_4 = (-1,0,0)$ y $b = (3,1,6)$:

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(-\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1\right)\cdot(1,1,0) = -\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}+0 = -2 && \text{(fila de } x_5 \text{ por } a_3\text{)}, \\ \beta &= \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0\right)\cdot(-1,0,0) = -\tfrac{1}{2} && \text{(fila de } x_2 \text{ por } a_4\text{)}, \\ \gamma &= \left(-\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1\right)\cdot(3,1,6) = -\tfrac{9}{2}-\tfrac{1}{2}+6 = 1 && \text{(fila de } x_5 \text{ por } b\text{)}. \end{aligned}$$

El punto de la tabla es $(x_1, x_2, x_3) = (2,1,0)$, con exceso $x_4 = 0$ y holgura $x_5 = \gamma = 1$. En el enunciado: $2+1+0 = 3$, $2-1+0 = 1$ y $4+1 = 5$, que deja una unidad libre bajo el 6.

Paso 4: los costos verdaderos. Con $c = (2,1,1,0,0)$ y las filas en el orden (x_2, x_1, x_5), se tiene $c_B = (1,2,0)$ y

$$w^T = c_B^T B^{-1} = \left(\tfrac{1}{2}+1,\ -\tfrac{1}{2}+1,\ 0\right) = \left(\tfrac{3}{2},\ \tfrac{1}{2},\ 0\right).$$

Las no básicas originales son x_3 y x_4:

$$c_3 - z_3 = 1 - w^T a_3 = 1 - \left(\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}\right) = -1, \qquad c_4 - z_4 = 0 - w^T a_4 = 0 - \left(-\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{3}{2},$$

y el valor actual es $\bar{z} = c_B^T \bar{b} = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 0\cdot 1 = 5$. Por la otra vía, columna por costos de la izquierda, $z_3 = 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 0\cdot(-2) = 2$: el mismo -1.

Paso 5: seguir. Entra x_3. En su columna, $(0,1,-2)$, solo la fila de x_1 es positiva: el cociente es $2/1 = 2$ y sale x_1. Tras pivotar sobre ese 1:

		2	1	1	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_2	1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	1
x_3	1	1	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	2
x_5	0	2	0	0	$\frac{1}{2}$	1	5
		1	0	0	1	0	3

Los dos costos reducidos no básicos valen $1 > 0$: el óptimo es *único*, $x^* = (0,1,2)$ con $z^* = 3$. En el enunciado, la primera restricción queda justa ($0+1+2 = 3$), la segunda se cumple ($0-1+2 = 1$) y la tercera deja cinco unidades de holgura.

Qué hemos aprendido. Una tabla del simplex no es un dibujo que haya que rehacer: es B^{-1} aplicada a los datos. Todo lo que falta se recupera multiplicando una fila de B^{-1} por una columna de A o por b. Y la misma B^{-1} da w, que el capítulo 4 identificará como la solución del problema dual.

Dónde se falla. Hay cinco tropiezos, siempre los mismos:

- Ordenar B por índices, $[a_1 \mid a_2 \mid a_5]$, en lugar de por filas. Las filas de B^{-1} salen permutadas y cada casilla se rellena en la fila equivocada.
- Leer B^{-1} en la columna de un exceso sin cambiar el signo.
- Olvidar la columna de una holgura básica porque «es la identidad». Aquí es la tercera columna de B^{-1}, y sin ella γ no sale.
- Dejar entrar una artificial en la fase II. Con los costos nuevos, la columna de x_6 tiene $c_6 - z_6 = 0 - w_1 = -\frac{3}{2} < 0$ y parece candidata. No lo es: las artificiales ya están fuera del problema.
- Calcular los costos reducidos con los costos de la fase I, o conservar su valor 0 como si fuera $\bar{z}$.

3.3.4 El algoritmo del simplex

Reunido todo, el algoritmo es el siguiente. Se escribe para minimizar, y entre paréntesis lo que cambia al maximizar.

EL ALGORITMO DEL SIMPLEX

Paso 0. Partir de una solución básica factible del problema original, $x^T = (x_B^T, x_N^T) = (\bar{b}^T, 0)$, con $\bar{b} \geq 0$. Si hace falta, se obtiene mediante la fase I anterior: un mínimo positivo certifica infactibilidad; si el mínimo es cero, se retiran las artificiales básicas, se excluyen las columnas artificiales de las candidatas a entrar y se restablece el objetivo original. La misma mecánica de los pasos siguientes se usa para resolver esa fase I con su objetivo auxiliar.

Paso 1. Comprobar si es óptima. Se mira la fila de costos reducidos:

$$\text{minimizar: } c_j - z_j \geq 0 \ \ \forall j \qquad \big(\text{maximizar: } c_j - z_j \leq 0 \ \ \forall j\big).$$

Si se cumple, ir al paso 2. Si no se cumple, ir al paso 3.

Paso 2. Leer el tipo de óptimo. Se tiene $(c_j - z_j)_{j \in NB} \geq 0$ (≤ 0):

- Si $(c_j - z_j)_{j \in NB} > 0$ (< 0), x es la **solución óptima** y $c_B^T \bar{b}$ es el valor óptimo de la función objetivo; el punto óptimo es único.
- Si algún costo reducido no básico es cero, el punto es óptimo, pero la multiplicidad requiere una comprobación adicional. Para esa columna se estudia el paso factible: un paso positivo da otro óptimo y todo el segmento que los une; si $y_j \leq 0$, da un rayo entero de óptimos. Un paso cero solo cambia la base y no demuestra multiplicidad. En un punto degenerado puede hacer falta cambiar de base antes de encontrar una dirección óptima que permita avanzar. Los segmentos o rayos obtenidos no tienen por qué describir todos los óptimos.

Paso 3. Mejorar. Sea k tal que

$$c_k - z_k = \min_{j \in NB}\{c_j - z_j\} \qquad \big(\text{maximizar: } c_k - z_k = \max_{j \in NB}\{c_j - z_j\}\big),$$

y sea $y_k = (y_{1k}, \ldots, y_{mk})^T = B^{-1}a_k$.

(a) Si $y_k \leq 0$, el problema es **ilimitado**: la dirección $d_k = \left(-B^{-1}a_k,\ e_k\right)$ permite mejorar sin límite. No existe un punto óptimo finito.

(b) Si $y_k \not\leq 0$: sea $\lambda = \text{mín}_{1\leq i\leq m}\{\bar{b}_i/y_{ik} :\ y_{ik} > 0\} = \bar{b}_r/y_{rk}$, y se pasa al punto extremo de componentes

$$x_i = \bar{b}_i - \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}\, y_{ik} \ \ (i \in B,\ i \neq r), \qquad x_r = 0 \text{ (deja la base)},$$

$$x_k = \lambda \text{ (entra en la base)},$$

y $x_j = 0$ para $j \in NB$, $j \neq k$. Pivotar para actualizar la tabla y los costos reducidos, e ir al paso 1. Si $\lambda = 0$, cambia la base y el punto permanece igual.

Observación (sobre la elección de la variable de entrada)**.** La regla del paso 3, elegir el costo reducido más negativo, se llama *regla de Dantzig* y es una elección sencilla para los ejemplos. Mide cuánto mejora el objetivo *por unidad* de la variable que entra, y no cuánto mejorará en total, que depende además del cociente mínimo. Puede ocurrir, y ocurre, que una columna con costo reducido -100 solo admita avanzar 0,01 unidades (mejora total: 1) mientras otra con costo reducido -2 admita avanzar 10 (mejora total: 20). Nada impide usar otras reglas, y de hecho la del paso 3 se sustituye en la sección siguiente cuando aparece el problema del ciclado. Lo que el esquema de minimización no elige nunca es una columna con costo reducido positivo: un paso positivo por ella empeoraría el objetivo. En caso de empate entre los costos mínimos elegimos la variable de menor índice; esto por sí solo no es la regla anticiclado de Bland que se explica a continuación.

3.3.5 Convergencia

La terminación depende de las reglas de pivotaje. Sin degeneración, cada paso de mejora avanza a otro vértice; con degeneración, hace falta evitar que se repitan bases.

Si en cada iteración $\bar{b} = B^{-1}b > 0$, y por tanto $\lambda > 0$, el valor de la función objetivo va siendo estrictamente menor en cada paso. Eso implica que en cada iteración el punto extremo es distinto de todos los anteriores: si se repitiera uno, su valor objetivo se repetiría, y el valor solo baja. Como el número de puntos extremos es finito (a lo sumo $\binom{n}{m}$), el algoritmo debe pararse en un número finito de iteraciones.

El problema aparece con la **degeneración**. Si algún $\bar{b}_i = 0$ en la fila que realiza el cociente mínimo, entonces $\lambda = 0$: la variable entrante entra a nivel cero, la saliente sale, y el punto *no se mueve*. Se ha cambiado de base pero no de vértice, y el valor objetivo tampoco ha cambiado. Eso puede ocurrir un número indefinido de veces, y si la sucesión de bases vuelve a una base ya visitada, el algoritmo repetirá el mismo ciclo para siempre: es lo que se llama **ciclado**.

LA IDEA: CAMBIAR DE BASE SIN CAMBIAR DE PUNTO

La imagen del capítulo 2 explica el fenómeno entero. Un vértice degenerado es un punto donde concurren más restricciones de las necesarias, como el vértice $(2, 0)$ del ejemplo de la sección 3.1, en el que se cortaban tres rectas. Ese vértice puede tener varias bases que lo representan, y el simplex, al pivotar, puede limitarse a cambiar

de descripción del mismo punto sin avanzar nada: es como girar sobre uno mismo mirando sucesivamente por distintas aristas que resultan tener longitud cero.
Un paso degenerado no implica un ciclo: tras cambiar de base puede aparecer un paso positivo y continuar la mejora. El ciclo exige volver a una base anterior con las mismas reglas de elección. Distinguir ambos fenómenos evita atribuir a cualquier empate un fallo del algoritmo. Las reglas anticiclado dan una garantía que no depende de lo frecuente o infrecuente que sea cada situación.

Observación (cómo se evita el ciclado, y qué cuesta evitarlo)**.** El ciclado suele quedarse en el nombre. Merece la pena decir cómo se elimina, porque es lo que hace que el simplex sea un algoritmo *demostrablemente* finito.

La **regla de Bland** (1977) sustituye las dos elecciones del algoritmo por otras dos, muy simples:

1. entra la variable *de menor índice* entre las que tienen costo reducido negativo (no la de costo reducido más negativo);
2. si hay empate en el cociente mínimo, sale la variable *de menor índice* entre las empatadas.

Con esas dos reglas se demuestra que ninguna base puede repetirse, y por tanto el simplex termina en aritmética exacta. La garantía de finitud no dice que la regla de Bland minimice el número de iteraciones. Existen otras reglas de selección que buscan un mejor rendimiento, y también la *regla lexicográfica*, que rompe los empates del cociente mínimo comparando filas enteras en orden lexicográfico, y que es equivalente a perturbar b por cantidades infinitesimales.

DE DÓNDE VIENE: CUÁNTAS ITERACIONES HACE DE VERDAD EL SIMPLEX

La cota general que sale de contar bases es $\binom{n}{m}$, un número que puede ser enorme. El simplex resuelve muchos problemas con un recorrido mucho menor; esa eficacia práctica no constituye una cota para todos los datos.
En 1972, Victor Klee y George Minty construyeron una familia de «cubos deformados» en dimensión m, con $2m$ desigualdades contando la no negatividad, en la que la regla de Dantzig, desde el vértice inicial adecuado, visita los 2^m vértices: son $2^m - 1$ pivotajes. Por tanto, esa regla tiene un peor caso exponencial. Se han construido ejemplos difíciles para muchas otras reglas, pero esto no prueba que toda regla posible deba ser exponencial. La existencia de una regla de pivotaje con garantía polinómica general sigue siendo una pregunta abierta.
La programación lineal sí admite algoritmos polinómicos por otras vías: el método del elipsoide de Khachiyan y los métodos de punto interior, entre ellos el de Karmarkar, mencionados en el capítulo 1. Esa garantía se refiere al tamaño de la entrada, incluida la longitud de los datos numéricos; no convierte a todos los algoritmos lineales en variantes del simplex.

3.4 Ejemplos

LA PREGUNTA

Un algoritmo que se enseña con una notación general acaba sabiéndose de memoria y no entendiéndose: se sigue la regla, salen números, y no queda claro qué se ha demostrado al llegar al final. Un método de optimización tiene, además, la obligación de decir tres cosas distintas según el caso: *este es el óptimo*, *no hay óptimo porque se puede mejorar sin fin*, o *estos puntos distintos son óptimos*. ¿Cómo se reconoce cuál de las tres está diciendo, mirando solo la última tabla?

Esta sección recorre los cuatro ejemplos con los que se cierra el capítulo. No son cuatro ejercicios cualesquiera: muestran tres tipos de resultado y una forma de preparar la base inicial, relacionando las tablas con su interpretación geométrica. El primero termina en un óptimo único; el segundo, en un problema ilimitado; el tercero, en un conjunto de óptimos que es un segmento entero; y el cuarto arranca sin solución básica factible a la vista y hay que fabricarla con la M grande.

Todas las tablas están recalculadas paso a paso. Conviene rehacerlas con papel: permiten comprobar cómo el cociente mínimo mantiene la factibilidad en cada paso.

3.4.1 Solución óptima finita y única

El problema, y su paso a forma estándar:

$$\begin{array}{lll} \text{Maximizar} & z = 2x_1 + x_2 & \\ \text{sujeto a:} & 2x_1 + 3x_2 \le 18 & \\ & 3x_1 + \ x_2 \le 12 & \\ & x_i \ge 0 & \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{lll} \text{Minimizar} & z = -2x_1 - x_2 & \\ \text{sujeto a:} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 & \\ & 3x_1 + \ x_2 + \ x_4 = 12 & \\ & x_i \ge 0 & \end{array}$$

Las dos primeras transformaciones de la sección 3.1 en una línea: se cambia el signo del objetivo y se añaden dos holguras. Y con ellas viene regalada la solución básica factible inicial: las columnas a_3 y a_4 forman la identidad, luego $B = [a_3 \mid a_4] = I$ es base, $\bar{b} = B^{-1}b = b = (18, 12) \geqq 0$, y $x = (0, 0, 18, 12)$ es factible. Geométricamente se está en el origen, con las dos restricciones flojas y las dos holguras midiendo cuánto sobra en cada una.

TABLA 1

		-2	-1	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_3	0	2	3	1	0	18
x_4	0	$\mathbf{3}$	1	0	1	12
		-2	-1	0	0	0

Observación (la primera fila lleva los costos, no los nombres)**.** Hay un convenio que merece la pena adoptar: escribir en la fila de cabecera el vector de costos en lugar del nombre de las variables. El cálculo que hay que repetir en cada columna es $c_j - z_j$ con $z_j = \sum_i c_i y_{ij}$, es decir, «lo de arriba menos el producto de la columna por lo de la izquierda». Teniendo los c_j arriba y los c_i de las básicas a la izquierda, la cuenta se hace sin mirar a ningún otro sitio. En este

libro se escriben las dos filas de cabecera, costos y nombres, porque al leer conviene saber de qué variable es cada columna.

Como $c_B = 0$, todos los z_j son cero y los costos reducidos coinciden con los costos. No se cumple la condición de optimalidad $c_j - z_j \geq 0$ para todo j, luego se puede mejorar.

Entra x_1, que tiene el costo reducido más pequeño (-2). **Sale** la variable que dé el cociente mínimo entre las filas con $y_{i1} > 0$:

$$\text{mín}\Big\{\frac{18}{2},\ \frac{12}{3}\Big\} = \text{mín}\{9, 4\} = 4,$$

que corresponde a x_4. Se pivota sobre el 3 marcado en negrita.

TABLA 2

		-2	-1	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_3	0	0	$\mathbf{7/3}$	1	$-2/3$	10
x_1	-2	1	$1/3$	0	$1/3$	4
		0	$-1/3$	0	$2/3$	-8

Se está en $(x_1, x_2) = (4, 0)$, con $z = -8$. La única columna que incumple la optimalidad es la de x_2, con $c_2 - z_2 = -1 - (-2/3) = -1/3$. **Entra** x_2, y el cociente mínimo

$$\text{mín}\Big\{\frac{10}{7/3},\ \frac{4}{1/3}\Big\} = \text{mín}\Big\{\frac{30}{7},\ 12\Big\} = \frac{30}{7}$$

hace **salir a** x_3.

TABLA 3

		-2	-1	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_2	-1	0	1	$3/7$	$-2/7$	$30/7$
x_1	-2	1	0	$-1/7$	$3/7$	$18/7$
		0	0	$1/7$	$4/7$	$-66/7$

Ahora $c_j - z_j > 0$ para las dos variables no básicas. Por el criterio de la sección 3.3, eso no solo dice que se ha llegado al óptimo: dice que es **el único**, porque cualquier movimiento por una arista empeora estrictamente. La solución es

$$(x_1, x_2)^* = \Big(\frac{18}{7}, \frac{30}{7}\Big), \qquad z^* = -\frac{66}{7},$$

y el valor del problema original de maximizar es $+66/7$, con el signo cambiado.

Observación (la tabla final es A multiplicada por B^{-1}, y se puede comprobar)**.** La base óptima está formada por las columnas $B^* = [a_2 \mid a_1]$, en ese orden: hay que respetar el orden en que las variables básicas aparecen en las filas de la tabla, no el orden natural de los índices. Así,

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \det B = 7, \qquad B^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 & -2/7 \\ -1/7 & 3/7 \end{pmatrix},$$

y ahí está, literalmente, el bloque central de la tabla 3: las columnas de x_3 y x_4 — que en la tabla 1 eran la identidad — se han convertido en B^{-1}. No es una casualidad de este ejemplo. Vale para todas las tablas de todos los problemas, y es la razón de que B^{-1} se pueda recuperar de una tabla dada sin conocer B: basta leer las columnas que empezaron siendo la identidad. Y comprobarlo aquí es multiplicar ese bloque por b:

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3/7 & -2/7 \\ -1/7 & 3/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (54-24)/7 \\ (-18+36)/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30/7 \\ 18/7 \end{pmatrix},$$

que es la última columna, con $x_2 = 30/7$ en la primera fila y $x_1 = 18/7$ en la segunda.

3.4.2 Un problema ilimitado

Este ejemplo conserva la forma de maximizar, de modo que la condición de optimalidad se invierte: se para cuando $c_j - z_j \leq 0$ para todo j, y entra la variable con el $c_j - z_j$ *mayor*. Conviene acostumbrarse a las dos versiones, porque las dos aparecen.

$$\begin{array}{lll} \text{Maximizar} & z = 2x_1 + 3x_2 & \\ \text{sujeto a:} & -x_1 + x_2 \leq 2 & \\ & x_2 \leq 5 & \\ & x_i \geq 0 & \end{array} \iff \begin{array}{lll} \text{Maximizar} & z = 2x_1 + 3x_2 & \\ \text{sujeto a:} & -x_1 + x_2 + x_3 = 2 & \\ & x_2 + x_4 = 5 & \\ & x_i \geq 0 & \end{array}$$

TABLA 1

		2	3	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_3	0	-1	**1**	1	0	2
x_4	0	0	1	0	1	5
		2	3	0	0	0

TABLA 2

		2	3	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_2	3	-1	1	1	0	2
x_4	0	**1**	0	-1	1	3
		5	0	-3	0	6

TABLA 3

		2	3	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_2	3	0	1	0	1	5
x_1	2	1	0	-1	1	3
		0	0	2	-5	21

En la tabla 1 entra x_2 ($c_2 - z_2 = 3$ es el mayor) y sale x_3 por el cociente mín$\{2/1, 5/1\} = 2$. En la tabla 2 entra x_1 ($c_1 - z_1 = 5$) y sale x_4: la columna de x_1 tiene una sola entrada positiva, la segunda, y el cociente es $3/1 = 3$.

En la tabla 3 la condición de parada no se cumple: $c_3 - z_3 = 2 > 0$, luego x_3 debería entrar. Pero su columna es

$$y_3 = B^{-1}a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \leq 0,$$

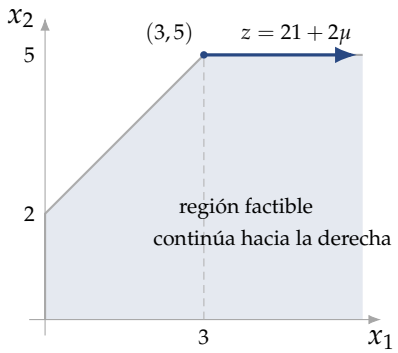
sin ninguna entrada positiva. No hay ningún cociente que calcular, porque no hay ninguna variable básica que se agote: se puede aumentar x_3 indefinidamente sin que ninguna otra llegue a cero. El problema es **ilimitado**, y el algoritmo no solo lo detecta: entrega el certificado. La dirección de crecimiento es

$$(d_3)_B = -y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (d_3)_3 = 1, \quad (d_3)_4 = 0.$$

Las componentes del primer bloque ocupan los lugares de las variables básicas x_2, x_1; las otras dos corresponden a las no básicas x_3, x_4. Con las básicas ordenadas como en la tabla (x_2 arriba, x_1 abajo), el punto actual en las cuatro coordenadas es $\bar{x} = (3, 5, 0, 0)$ y la dirección es $(1, 0, 1, 0)$, de modo que

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mu \geq 0,$$

es una semirrecta que parte del vértice actual, se mantiene dentro del conjunto factible y a lo largo de la cual la función objetivo crece sin límite.



El certificado en el plano. El rayo $(3,5) + \mu(1,0)$, $\mu \geq 0$, permanece en la región factible y aumenta el objetivo sin límite.

LA IDEA: POR QUÉ ESE VECTOR ES UNA DIRECCIÓN DEL POLIEDRO

Que sea una dirección hay que comprobarlo, y la comprobación es la definición del capítulo 2: un vector $d \geq 0$, $d \neq 0$, con $Ad = 0$. Aquí

$$A\,d = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0+1+0 \\ 0+0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y todas las componentes de d son no negativas. Por eso avanzar en esa dirección no rompe ninguna igualdad ni ninguna no negatividad.

Y la lectura en el plano: moverse en d significa aumentar x_1 dejando $x_2 = 5$ fija, y la holgura x_3 crece con x_1 para compensar. En el dibujo, la restricción $-x_1 + x_2 \leq 2$ se hace cada vez menos apretada al avanzar hacia la derecha, y la única que quedaba, $x_2 \leq 5$, ya no impide nada. El objetivo $2x_1 + 3x_2$ vale $21 + 2\mu$: crece a razón de 2 por unidad de avance, que no es otra cosa que $c^T d$. Un problema lineal factible en forma estándar es ilimitado exactamente cuando existe una dirección con $c^T d < 0$ al minimizar, o > 0 al maximizar, y el simplex la encuentra sin buscarla: es la columna que quería entrar.

3.4.3 Solución óptima finita múltiple

$$\begin{array}{lll} \text{Maximizar} & z = x_1 + x_2 & \\ \text{sujeto a:} & x_1 + x_2 \leq 4 & \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 & \\ & x_i \geq 0 & \end{array} \iff \begin{array}{lll} \text{Maximizar} & z = x_1 + x_2 & \\ \text{sujeto a:} & x_1 + x_2 + x_3 = 4 & \\ & -x_1 + x_2 \quad + x_4 = 1 & \\ & x_i \geq 0 & \end{array}$$

TABLA 1

		1	1	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_3	0	**1**	1	1	0	4
x_4	0	-1	1	0	1	1
		1	1	0	0	0

TABLA 2

		1	1	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_1	1	1	1	1	0	4
x_4	0	0	**2**	1	1	5
		0	0	-1	0	4

TABLA 3

		1	1	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_1	1	1	0	$1/2$	$-1/2$	$3/2$
x_2	1	0	1	$1/2$	$1/2$	$5/2$
		0	0	-1	0	4

En la tabla 1 hay **empate**: $c_1 - z_1 = c_2 - z_2 = 1$. Cualquiera de las dos puede entrar, y se elige x_1, la de menor índice, siguiendo el convenio de los ejemplos. Este desempate por sí solo no es una regla de anticiclado; la regla completa de Bland se explica en la sección 3.3. Sale x_3, porque la columna de x_1 tiene una sola entrada positiva.

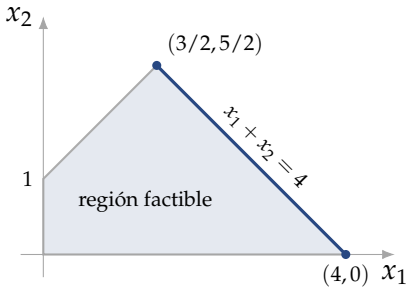
En la tabla 2 ya se cumple la condición de parada de maximizar: todos los $c_j - z_j \leq 0$. El óptimo es $(4, 0)$ con $z = 4$. Pero hay un detalle que no se puede pasar por alto:

$$c_2 - z_2 = 0 \quad \text{con } x_2 \textbf{ no básica}.$$

Eso significa que aumentar x_2 conserva el valor del objetivo, mientras el punto siga siendo factible. El cociente mínimo es mín$\{4/1,\ 5/2\} = 5/2 > 0$: se puede avanzar una cantidad positiva, por lo que se llega a otro punto extremo óptimo. Sale x_4.

La tabla 3 da el segundo vértice óptimo, $(3/2, 5/2)$, con el mismo valor $z = 4$. Y como el conjunto factible es convexo y el objetivo es lineal, todo el segmento que une los dos vértices es óptimo:

$$\lambda(4,0) + (1-\lambda)\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}\right), \qquad \lambda \in [0,1].$$



Todos los puntos del lado destacado son óptimos. Los dos extremos son los vértices encontrados en las tablas; entre ellos el valor sigue siendo 4.

LA IDEA: QUÉ ESTÁ DICIENDO UN COSTO REDUCIDO NULO

Un costo reducido $c_j - z_j$ mide cuánto cambia el objetivo por cada unidad que se avanza por la dirección asociada a x_j. Si hay un paso factible positivo, como aquí, el costo cero significa que la arista es **horizontal** para el objetivo: se puede recorrer entera sin ganar ni perder nada. Y una arista de un poliedro con los dos extremos óptimos obliga, por linealidad, a que todos sus puntos lo sean.

En el dibujo se ve al instante. La recta de nivel $x_1 + x_2 = 4$ es *paralela* a la restricción $x_1 + x_2 \leq 4$; al desplazarla hacia arriba, en vez de tocar el poliedro en un vértice, se apoya sobre un lado entero. Esa es la situación geométrica que el costo reducido nulo detecta algebraicamente. La tabla ya certifica el valor óptimo; el paso positivo permite además encontrar otros puntos que lo alcanzan.

La condición sobre el paso importa: un costo reducido nulo en una variable no básica *no garantiza* que exista un segundo vértice óptimo distinto. Si la solución es degenerada, meter esa variable en la base puede devolver el mismo punto con otra base, con $\lambda = 0$ en el cociente mínimo. Por eso se ha calculado el cociente antes de afirmar que el segundo punto es distinto.

3.4.4 La M grande, con la trayectoria dibujada

El cuarto ejemplo es el único de los cuatro que no trae regalada una solución básica factible inicial, y sirve para ver funcionando la maquinaria de la sección 3.3: dos variables artificiales, un costo M arbitrariamente grande, y un recorrido que empieza fuera del conjunto factible del problema original.

$$
\begin{array}{lll}
(PPL) & \text{Minimizar} & x_1 - 2x_2 \\
\text{sujeto a:} & & x_1 + x_2 \geq 2 \\
& & -x_1 + x_2 \geq 1 \\
& & x_2 \leq 3 \\
& & x_i \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(P(M)) & \text{Minimizar} & x_1 - 2x_2 + Mx_6 + Mx_7 \\
\text{sujeto a:} & & x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 2 \\
& & -x_1 + x_2 - x_4 + x_7 = 1 \\
& & x_2 + x_5 = 3 \\
& & x_i \geq 0
\end{array}
$$

Las dos primeras restricciones son de tipo $\geq$: se les resta un exceso (x_3, x_4) y con eso la igualdad queda bien, pero las columnas de los excesos entran con signo -1 y no sirven para formar la identidad. Para construir esa base inicial se añaden dos artificiales, x_6 y x_7, penalizadas en el objetivo con un costo M grande. La tercera restricción es $\leq$ y su holgura x_5 ya vale como columna de la identidad, sin artificial.

TABLA 1 $\quad w = 3M$

		1	−2	0	0	0	M	M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_6	M	1	1	−1	0	0	1	0	2
x_7	M	−1	**1**	0	−1	0	0	1	1
x_5	0	0	1	0	0	1	0	0	3
		1	$-2-2M$	M	M	0	0	0	$3M$

La fila de abajo se calcula como siempre, «lo de arriba menos la columna por los costos de la izquierda», solo que ahora dos de esos costos valen M. Para x_2, por ejemplo, $z_2 = M \cdot 1 + M \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2M$ y $c_2 - z_2 = -2 - 2M$; y la esquina es $M \cdot 2 + M \cdot 1 + 0 \cdot 3 = 3M$. Entra x_2, que tiene el costo reducido $-2 - 2M$, negativo y del orden de M: con M grande es sin comparación el menor. Sale x_7, por mín$\{2, 1, 3\} = 1$.

TABLA 2 $\quad w = -2 + M$

		1	−2	0	0	0	M	M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_6	M	**2**	0	−1	1	0	1	−1	1
x_2	−2	−1	1	0	−1	0	0	1	1
x_5	0	1	0	0	1	1	0	−1	2
		$-1-2M$	0	M	$-2-M$	0	0	$2+2M$	$-2+M$

Hay dos costos reducidos negativos, $-1 - 2M$ y $-2 - M$. Con M grande manda el coeficiente de M: la diferencia entre los dos es $(-1 - 2M) - (-2 - M) = 1 - M$, negativa en cuanto $M > 1$, y entra x_1. Sale x_6, por mín$\{1/2, 2\} = 1/2$.

TABLA 3 $\quad w = -5/2$

		1	−2	0	0	0	M	M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_1	1	1	0	−1/2	**1/2**	0	1/2	−1/2	1/2
x_2	−2	0	1	−1/2	−1/2	0	1/2	1/2	3/2
x_5	0	0	0	1/2	1/2	1	−1/2	−1/2	3/2
		0	0	−1/2	−3/2	0	$1/2+M$	$3/2+M$	−5/2

Aquí ha pasado algo que conviene señalar: las dos artificiales han salido de la base y sus costos reducidos son $1/2 + M$ y $3/2 + M$, positivos. En las tablas siguientes se mantienen positivos para $M > 0$, así que no vuelven a entrar en este recorrido. En las columnas originales ya no aparece M: lo que queda es el simplex ordinario sobre el problema original. Y el punto en el que se está, $(1/2, 3/2)$, es el primer punto factible del (PPL) que aparece en todo el recorrido.

Entra x_4 ($-3/2$, el más negativo) y sale x_1, por mín$\{1, 3\} = 1$.

TABLA 4 $\quad w = -4$

		1	−2	0	0	0	M	M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_4	0	2	0	−1	1	0	1	−1	1
x_2	−2	1	1	−1	0	0	1	0	2
x_5	0	−1	0	**1**	0	1	−1	0	1
		3	0	−2	0	0	$2+M$	M	−4

Entra x_3 (-2) y sale x_5, única fila con entrada positiva en esa columna.

TABLA 5 $\quad w = -6$

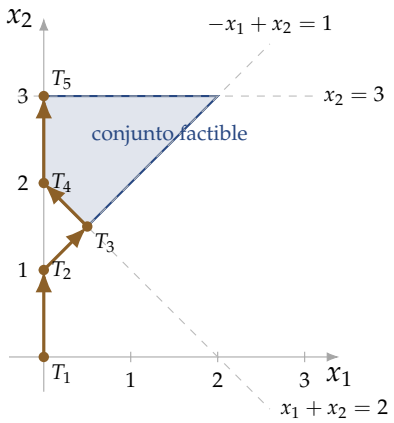
		1	−2	0	0	0	M	M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_4	0	1	0	0	1	1	0	−1	2
x_2	−2	0	1	0	0	1	0	0	3
x_3	0	−1	0	1	0	1	−1	0	1
		1	0	0	0	2	M	M	−6

Todos los costos reducidos son ahora no negativos y las dos artificiales valen cero: la solución óptima es

$$x^* = (0, 3), \qquad z^* = -6.$$

La comprobación en el enunciado es directa: $x_1 + x_2 = 3 \geq 2$ con exceso $x_3 = 1$, que es lo que dice la tabla; $-x_1 + x_2 = 3 \geq 1$ con exceso $x_4 = 2$, también; y $x_2 = 3 \leq 3$ con holgura $x_5 = 0$, que es por lo que x_5 ha tenido que salir de la base.

La trayectoria, proyectada en el plano. Cada tabla es un punto extremo del problema ampliado $(P(M))$, que vive en $\mathbb{R}^7$. Proyectando sobre las dos coordenadas que importan, (x_1, x_2), se obtiene el recorrido que hace el método, y es lo más instructivo del ejemplo:



Los cinco puntos son, en orden, $(0,0)$, $(0,1)$, $(1/2,3/2)$, $(0,2)$ y $(0,3)$, con valores del objetivo $3M$, $M-2$, $-5/2$, -4 y -6. Y lo que hay que mirar es esto: **los dos primeros no están en el conjunto factible**. El origen incumple las dos restricciones de tipo $\geq$ y el punto $(0,1)$ incumple la primera. No son puntos del problema: son puntos del problema ampliado, donde las artificiales todavía valen algo y hacen de muleta.

LA IDEA: QUÉ ESTÁ HACIENDO DE VERDAD LA M GRANDE

El método resuelve un problema ampliado en siete variables. Su punto inicial es $(0,0,0,0,3,2,1)$, un vértice de $(P(M))$ cuya proyección sobre (x_1,x_2) es el origen. Las artificiales permiten esa proyección fuera del conjunto factible original: $x_6 = 2$ mide cuánto falta para cumplir la primera restricción y $x_7 = 1$, la segunda.
Con M simbólica se comparan primero los coeficientes de M y después las partes constantes: reducir la suma de las artificiales tiene prioridad sobre mejorar el objetivo original. Si se usa un número, debe ser suficientemente grande para los datos, como se explicó en la sección 3.3; no basta con elegir uno grande a ojo. En esta trayectoria los dos primeros pasos reducen las artificiales hasta cero. Desde T_3, la comparación entre las columnas originales ya es la del simplex ordinario: se recorren las aristas del conjunto factible original hasta $(0,3)$. Las columnas de las artificiales siguen teniendo costos con M, pero ya no intervienen en esos pasos.
La M simbólica y las dos fases expresan así la misma prioridad. Las dos fases separan las tareas: primero se minimiza la suma de las artificiales y, si vale cero, se minimiza el objetivo original. La M simbólica reúne ambas comparaciones en una sola tabla. Comparten ese criterio, aunque sus reglas de elección pueden producir recorridos distintos.

Observación (qué representan los segmentos del dibujo)**.** Cada flecha es la proyección de una arista recorrida en el poliedro ampliado de $\mathbb{R}^7$. El simplex calcula los vértices sucesivos; el segmento que los une describe cómo varían las coordenadas durante el paso. Hasta T_3 esas proyecciones no son factibles para el problema original. Por ejemplo, en $T_2 \to T_3$ se va reduciendo x_6 hasta anularla: el segmento llega a la recta $x_1 + x_2 = 2$ en su extremo final. Desde T_3, las artificiales permanecen a cero y los segmentos sí están dentro de la región factible original.

Qué se ha ganado. La pregunta de la sección tiene respuesta, y cabe en una tabla. Mirando solo la última tabla de un problema de minimizar (al maximizar se invierten los signos de la fila de costos reducidos), hay seis situaciones que hay que saber reconocer:

Lo que se ve en la tabla	**Lo que dice**	**Dónde se ha visto**
Fase I terminada con valor positivo	infactible	el ejercicio del problema infactible
Fase I con valor 0 y una artificial básica a cero con la fila vacía en las columnas originales	una restricción redundante: se tacha la fila	el ejemplo con restricción redundante
Un $c_k - z_k < 0$ cuya columna y_k es ≤ 0	ilimitado; d_k es la dirección de escape	«Un problema ilimitado»
Todos los $c_j - z_j$ no básicos > 0	óptimo único	«Solución óptima finita y única»
Todos ≥ 0, y un cero con paso positivo o con $y_k \leq 0$	óptimos múltiples: un segmento o una semirrecta	«Solución óptima finita múltiple»
Todos ≥ 0, y los ceros solo con paso nulo	óptimo; la tabla no prueba que haya otros	la observación del coste reducido negativo

Lo que queda abierto es qué significan los números de la tabla óptima más allá del punto: los w que han aparecido en cada cálculo de costos reducidos, y cuánto puede cambiar un dato sin que la base deje de ser óptima. Es el capítulo 4.

Ejercicios

Los que se resuelven solo con el simplex. Los que necesitan la dualidad o el análisis de sensibilidad esperan al capítulo 4, y los de formulación están en el capítulo 1.

Ejercicio 3.5. *Las puntuaciones de un examen* R4.3

Un examen tenía tres preguntas, cuyas puntuaciones $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ suman 10 puntos. No se indicaba el valor de cada x_i, pero sí que la pregunta 1 no vale más que la pregunta 2 y que la pregunta 3 vale al menos 2 puntos. Un alumno ha obtenido en las tres preguntas 6, 1 y 4 sobre 10, respectivamente.

1. Formula el problema de hallar las puntuaciones que hacen su nota máxima.
2. Da una formulación equivalente en las variables x_1 y x_2, y resuélvela geométricamente.
3. Resuélvelo algebraicamente partiendo de la base factible formada por x_1 y x_2.

Resolución. *La idea.* Lo primero es decidir quién decide: el baremo, no el alumno. Después, la igualdad $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ permite quitar una variable y bajar al plano, donde el conjunto factible se dibuja y el óptimo se ve. El apartado (c) pide lo mismo por la vía algebraica, pero arrancando del vértice que da la base $\{x_1, x_2\}$ y no del origen: es el simplex empezado desde una base cualquiera, con sus costos reducidos calculados mediante w.
(a) Qué se decide y qué se quiere. Las incógnitas son las puntuaciones x_1, x_2, x_3. Si la pregunta i vale x_i puntos y el alumno ha sacado una fracción α_i de ella, su nota es $\sum_i \alpha_i x_i$ con

$\alpha = (0{,}6;\ 0{,}1;\ 0{,}4)$. Y las condiciones del enunciado son tres:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 0{,}6\,x_1 + 0{,}1\,x_2 + 0{,}4\,x_3 \\ \text{sujeto a:} & x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ & x_1 - x_2 \le 0 \\ & x_3 \ge 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{array}$$

Conviene detenerse en una cosa: el que optimiza no es el alumno, que ya ha hecho el examen, sino alguien que elige el baremo. Las notas del alumno son *datos*; los pesos son las *variables*. Confundir las dos cosas es el error de planteamiento de este problema.

(b) La formulación en dos variables. La restricción de igualdad permite eliminar una variable: $x_3 = 10 - x_1 - x_2$. Sustituyendo en el objetivo,

$$0{,}6x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}4(10 - x_1 - x_2) = 4 + 0{,}2\,x_1 - 0{,}3\,x_2,$$

y las restricciones quedan $x_3 \ge 2 \iff x_1 + x_2 \le 8$, más $x_1 \le x_2$ y $x_1, x_2 \ge 0$. El problema es

$$\text{Maximizar}\quad 4 + 0{,}2x_1 - 0{,}3x_2 \quad \text{sujeto a:} \quad x_1 - x_2 \le 0, \quad x_1 + x_2 \le 8, \quad x \ge 0.$$

Obsérvese que la constante 4 no afecta a dónde está el óptimo, pero sí al valor: es la nota que sacaría el alumno si todo el peso fuera a la pregunta 3.
El conjunto factible es un triángulo con vértices $(0,0)$, $(4,4)$ y $(0,8)$. El $(4,4)$ es el corte de $x_1 = x_2$ con $x_1 + x_2 = 8$; el $(0,8)$, el corte de $x_1 = 0$ con $x_1 + x_2 = 8$. Evaluando:

$$(0,0) \mapsto 4, \qquad (4,4) \mapsto 4 + 0{,}8 - 1{,}2 = 3{,}6, \qquad (0,8) \mapsto 4 - 2{,}4 = 1{,}6.$$

El máximo es 4 en el origen. Geométricamente: el gradiente del objetivo es $(0{,}2; -0{,}3)$, que apunta hacia la derecha y hacia abajo; el triángulo está enteramente arriba y a la derecha del origen, con la condición $x_1 \le x_2$ empujando hacia arriba, de modo que la recta de nivel más favorable es la que pasa por el vértice inferior.

(c) Algebraicamente, desde la base $\{x_1, x_2\}$. En forma estándar, con holguras x_4 y x_5 y minimizando el opuesto,

$$\text{Minimizar}\quad -0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 \quad \text{sujeto a:} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + \quad x_5 = 8, \end{cases} \qquad x \ge 0.$$

La base pedida es $B = [a_1 \mid a_2] = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, con $\det B = 2$ y

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = B^{-1}b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Es factible, y es el vértice $(4,4)$. Los costos reducidos de las no básicas se calculan con $w^T = c_B^T B^{-1}$:

$$w^T = (-0{,}2,\ 0{,}3) \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}(-0{,}2 - 0{,}3,\ -0{,}2 + 0{,}3) = (-0{,}25,\ 0{,}05),$$

de donde $c_4 - z_4 = 0 - w_1 = 0{,}25 > 0$ y $c_5 - z_5 = 0 - w_2 = -0{,}05 < 0$. No es óptimo: entra x_5.
Su columna es $y_5 = B^{-1}a_5 = B^{-1}\binom{0}{1} = \binom{1/2}{1/2}$, con las dos entradas positivas, y el cociente mínimo es mín$\{4/(1/2),\ 4/(1/2)\} = 8$, con empate. Se llegue por donde se llegue, el punto nuevo es el origen; saliendo x_1, la base pasa a ser $\{x_5, x_2\}$, con

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Que una variable básica valga cero ($x_2 = 0$) avisa de que el vértice es **degenerado**, y el dibujo lo confirma: por el origen pasan tres rectas — $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_1 - x_2 = 0$ — donde en dimensión dos bastarían dos.
Con $c_B = (0,\ 0{,}3)$ se obtiene $w^T = c_B^T B^{-1} = (-0{,}3,\ 0)$, y de ahí

$$c_1 - z_1 = -0{,}2 - (-0{,}3) = 0{,}1 > 0, \qquad c_4 - z_4 = 0 - (-0{,}3) = 0{,}3 > 0.$$

Los dos costos reducidos no básicos son positivos: es el óptimo, y es único. El valor del problema transformado es $z = c_B^T \bar{b} = 0$, es decir, una nota de **4** sobre 10 para el alumno, con el reparto $x^* = (0, 0, 10)$.

Otra vía (sin resolver nada). El resultado se puede ver de golpe. La nota es $\sum_i \alpha_i x_i$ con $\sum_i x_i = 10$, es decir, 10 veces una media ponderada de $\alpha = (0{,}6;\ 0{,}1;\ 0{,}4)$ con pesos $x_i/10$ que suman uno. Una media ponderada nunca supera el mayor de los valores promediados, luego la nota no puede pasar de 6, que se alcanzaría poniendo todo el peso en la pregunta 1. Pero $x_1 \le x_2$ lo prohíbe: si x_1 recibe peso, x_2 recibe al menos otro tanto, y x_2 es la peor de las tres para el alumno. La mejor jugada disponible es concentrar todo en la tercera, que es la segunda mejor y no arrastra a nadie, y ahí la nota es $0{,}4 \cdot 10 = 4$. La restricción $x_3 \ge 2$ ni siquiera llega a apretar. La cota que justifica esa elección es

$$4 + 0{,}2x_1 - 0{,}3x_2 \le 4 - 0{,}1x_2 \le 4,$$

por $x_1 \le x_2$ y $x_2 \ge 0$. La igualdad exige $x_2 = 0$ y, por tanto, $x_1 = 0$.
Dónde se falla. En tomar como variables las notas del alumno, que son datos. En perder la constante 4 al eliminar x_3: no mueve el óptimo, pero sin ella el valor sale 0 y la nota parecería un cero. Al pasar a minimizar el opuesto, la nota es $4 - z$, y el $z = 0$ final significa un 4. Y en (c), en tomar el empate del cociente mínimo, 8 y 8, por un error de cuentas: es la señal de que el vértice al que se llega, el origen, es degenerado, porque por él pasan tres rectas.

Ejercicio 3.6. *Un óptimo único que se vuelve múltiple al cambiar el costo* R4.5

Representa el conjunto factible y las líneas de nivel del problema

$$\text{Minimizar} \quad -x_1 - x_2 \quad \text{sujeto a:} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 1 \\ -3x_1 + x_2 \le 1 \\ 4x_1 + x_2 \le 13 \\ -x_1 + x_2 \le 3 \end{cases} \qquad x_1, x_2 \ge 0,$$

y resuélvelo con el simplex en formato tabla. Determina después las soluciones óptimas para la función objetivo $-2x_1 - \frac{1}{2}x_2$ y di qué tipo de solución óptima se obtiene.

Resolución. *La idea.* Con cuatro restricciones $\leq$ y $b \geq 0$ la base inicial está servida, y el simplex recorre el hexágono desde el origen. Para el segundo objetivo no se empieza de nuevo: el conjunto factible y las columnas de la tabla no dependen de c, así que basta rehacer la fila de costos reducidos en la base final. Si sale un cero en una no básica y su cociente mínimo es positivo, hay un segundo vértice óptimo.
En forma estándar hay cuatro holguras, x_3 a x_6, y la identidad que forman da la solución básica factible inicial en el origen. Los vértices del conjunto factible son, recorriéndolo, $(0,0)$, $(1,0)$, $(3,1)$, $(2,5)$, $(1,4)$ y $(0,1)$: un hexágono acotado.
Primera iteración. Con $c_B = 0$ los costos reducidos son los costos, $(-1,-1,0,0,0,0)$. Empate entre x_1 y x_2; entra x_1 por orden lexicográfico. Su columna es $(1,-3,4,-1)^T$ y el cociente mínimo es $\min\{1/1,\ 13/4\} = 1$, luego sale x_3. Se llega a $(1,0)$ con $z = -1$.
Segunda iteración. La tabla queda

		-1	-1	0	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_1	-1	1	-2	1	0	0	0	1
x_4	0	0	-5	3	1	0	0	4
x_5	0	0	$\mathbf{9}$	-4	0	1	0	9
x_6	0	0	-1	1	0	0	1	4
		0	-3	1	0	0	0	-1

Entra x_2 (-3); la única entrada positiva de su columna está en la tercera fila, con cociente $9/9 = 1$, y sale x_5. Se llega a $(3,1)$ con $z = -4$.
Tercera iteración. Ahora $c_3 - z_3 = -1/3 < 0$, entra x_3, y el cociente mínimo

$$\min\Big\{\frac{3}{1/9},\ \frac{9}{7/9},\ \frac{5}{5/9}\Big\} = \min\{27,\ \tfrac{81}{7},\ 9\} = 9$$

hace salir a x_6. Se llega al vértice $(2,5)$ y la tabla final es

		-1	-1	0	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_1	-1	1	0	0	0	$1/5$	$-1/5$	2
x_4	0	0	0	0	1	$2/5$	$-7/5$	2
x_2	-1	0	1	0	0	$1/5$	$4/5$	5
x_3	0	0	0	1	0	$1/5$	$9/5$	9
		0	0	0	0	$2/5$	$3/5$	-7

Los dos costos reducidos no básicos son $2/5$ y $3/5$, *estrictamente* positivos: la solución óptima es **única**,

$$(x_1, x_2)^* = (2,5), \qquad z^* = -7.$$

Con el objetivo nuevo. Aquí está la gracia del ejercicio: cambiar c no cambia el conjunto factible ni las columnas de la tabla, solo la fila de abajo. Con $c = (-2, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0)$ y la misma base final, $c_B = (-2, 0, -\frac{1}{2}, 0)$ para (x_1, x_4, x_2, x_3), y basta rehacer los dos costos reducidos:

$$c_5 - z_5 = 0 - \Big[(-2)\tfrac{1}{5} + (-\tfrac{1}{2})\tfrac{1}{5}\Big] = \tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{10} = \tfrac{1}{2} > 0,$$
$$c_6 - z_6 = 0 - \Big[(-2)(-\tfrac{1}{5}) + (-\tfrac{1}{2})\tfrac{4}{5}\Big] = -\tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{5} = \mathbf{0}.$$

Sigue siendo óptima — ningún costo reducido es negativo — con valor $z^* = (-2)(2) + (-\frac{1}{2})(5) = -\frac{13}{2}$. Pero el costo reducido de x_6, que es no básica, vale cero: hay **solución óptima múltiple**.
Para exhibirla se hace entrar x_6. Su columna es $(-1/5,\ -7/5,\ 4/5,\ 9/5)^T$, con dos entradas positivas, y

$$\text{mín}\Big\{\frac{5}{4/5},\ \frac{9}{9/5}\Big\} = \text{mín}\Big\{\frac{25}{4},\ 5\Big\} = 5$$

hace salir a x_3. El vértice nuevo es $(3, 1)$, con $z = (-2)(3) + (-\frac{1}{2})(1) = -\frac{13}{2}$, el mismo valor. El conjunto de soluciones óptimas es el segmento

$$\lambda(2, 5) + (1 - \lambda)(3, 1), \qquad \lambda \in [0, 1].$$

Otra vía (mirando el dibujo). Los dos vértices $(2, 5)$ y $(3, 1)$ son los extremos de la arista contenida en $4x_1 + x_2 = 13$: en los dos, esa restricción se cumple con igualdad ($8 + 5 = 13$ y $12 + 1 = 13$). El vector director de la arista es $(2, 5) - (3, 1) = (-1, 4)$, y el nuevo gradiente cumple

$$(-2, -\tfrac{1}{2}) \cdot (-1, 4) = 2 - 2 = 0.$$

El objetivo es constante a lo largo de esa arista, luego las rectas de nivel son paralelas a ella y la última que toca el poliedro lo hace por un lado entero, no por un punto. El costo reducido nulo de la tabla y esta ortogonalidad son **la misma observación**, dicha una vez en números y otra en geometría: x_6 es la holgura de la cuarta restricción, $-x_1 + x_2 \leq 3$. Al hacerla positiva se deja de saturar esa restricción y se recorre la arista $4x_1 + x_2 = 13$, cuya holgura x_5 sigue siendo cero. El costo reducido nulo indica que ese movimiento no cambia el objetivo.
Dónde se falla. En cambiar los costos de la fila de arriba y olvidar los de la columna de la izquierda: con c_B viejo, los costos reducidos nuevos salen mal. En declarar «óptimo múltiple» solo por ver el cero, sin calcular el cociente: aquí vale $5 > 0$ y el segundo vértice existe, pero con un cociente nulo el cambio de base no movería el punto. Y en confundir las holguras: x_5 es la de $4x_1 + x_2 \leq 13$ y x_6 la de $-x_1 + x_2 \leq 3$.

En AMPL: cambiar los costos sin cambiar el modelo. El modelo `lp.mod` sirve para minimizar $c^T x$ sujeto a $Ax \leq b$, $x \geq 0$. Las filas se indexan por `RES` y las variables por `IND`. Así podremos reutilizarlo cambiando solo los datos:

```
param n integer >= 1;
param m integer >= 1;
set IND := 1..n;
set RES := 1..m;
param a {RES,IND};
param b {RES};
param c {IND};
var x {IND} >= 0;

minimize z: sum {j in IND} c[j]*x[j];
subject to r {i in RES}:
    sum {j in IND} a[i,j]*x[j] <= b[i];
```

Para este hexágono, el fichero `poligono.dat` es:

```
param n := 2;
param m := 4;
param a : 1 2 :=
1  1 -2
2 -3  1
3  4  1
4 -1  1;
param b := 1 1  2 1  3 13  4 3;
param c := 1 -1  2 -1;
```

El guion `poligono.run` resuelve ambos objetivos. La novedad es `let`: modifica un dato ya cargado, por lo que el segundo `solve` usa los costos nuevos:

```
reset;
model lp.mod;
data poligono.dat;
option solver highs;
solve;
display solve_result, x, z;
let c[1] := -2;
let c[2] := -0.5;
solve;
display solve_result, x, z;
```

El primer resultado es $(2, 5)$, con valor -7. En el segundo se obtiene un punto del segmento óptimo, con valor $-13/2$; una sola ejecución no enumera todos sus puntos.
El modelo de las prácticas antiguas `Relacion_3_Ej_5` usa estos mismos datos, pero exige variables enteras. Esa variante se obtiene sustituyendo la declaración por `var x {IND} integer >= 0;` en `lp-entero.mod`; el guion `poligono-entero.run` carga ese fichero y mantiene las demás órdenes. El primer óptimo sigue siendo $(2, 5)$; con el costo nuevo solo quedan los dos extremos enteros $(2, 5)$ y $(3, 1)$. La versión continua resuelta a mano incluye todo el segmento.

Ejercicio 3.7. *Dos fases, con la fase I terminando en un vértice del problema* R4.6

Representa el conjunto factible y resuelve por el método de las dos fases:

$$\text{Minimizar} \quad -x_1 - 3x_2 \quad \text{sujeto a:} \quad x_1 + x_2 \geq 2, \quad x_1 \geq 1, \quad x_1 + 2x_2 \leq 4, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Resolución. *La idea.* Se cuenta primero cuántas artificiales hacen falta. Las dos restricciones $\geq$ dan excesos con signo -1, que no sirven de columna básica, y necesitan una artificial cada una; la restricción $\leq$ trae su holgura. La fase I solo busca un vértice del problema original, cualquiera. La fase II parte de él con los costos verdaderos. En el plano, cada tabla es un vértice del cuadrilátero.

En forma estándar, con exceso x_3 en la primera, exceso x_4 en la segunda y holgura x_5 en la tercera:

$$x_1 + x_2 - x_3 = 2, \qquad x_1 - x_4 = 1, \qquad x_1 + 2x_2 + x_5 = 4.$$

Las columnas de x_3 y x_4 entran con signo -1. Para construir la base inicial con la identidad se añaden dos artificiales, x_6 y x_7, en las dos primeras filas.

Fase I. Se minimiza $w = x_6 + x_7$ con la base $\{x_6, x_7, x_5\}$ y $\bar{b} = (2, 1, 4)$, de modo que $w = 3$. Los costos reducidos de fase I son $c_j - z_j = 0 - \sum_i y_{ij}$ sobre las filas artificiales:

$$(c_j - z_j)_{j=1,\dots,5} = (-2,\ -1,\ 1,\ 1,\ 0).$$

Entra x_1, y $\min\{2/1,\ 1/1,\ 4/1\} = 1$ hace salir a x_7. Tras pivotar queda $w = 1$, con $x_6 = 1$ todavía positiva. Ahora $c_2 - z_2 = -1$: entra x_2, y $\min\{1/1,\ 3/2\} = 1$ hace salir a x_6. La tabla de fin de fase I es

	0	0	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_2	0	1	-1	1	0	1
x_1	1	0	0	-1	0	1
x_5	0	0	2	-1	1	1

con $w = 0$ y las dos artificiales fuera de la base: el punto $(1, 1)$ es factible para el problema original, y es un vértice.

Fase II. Se recupera el objetivo verdadero, $c = (-1, -3, 0, 0, 0)$, con $c_B = (-3, -1, 0)$ para (x_2, x_1, x_5):

$$z_3 = (-3)(-1) + (-1)(0) + 0 \cdot 2 = 3, \qquad c_3 - z_3 = -3,$$
$$z_4 = (-3)(1) + (-1)(-1) + 0(-1) = -2, \qquad c_4 - z_4 = 2.$$

El valor actual es $z = -4$. Entra x_3 y, como la única entrada positiva de su columna es la tercera, sale x_5 con cociente $1/2$. La tabla final:

		-1	-3	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_2	-3	0	1	0	$1/2$	$1/2$	$3/2$
x_1	-1	1	0	0	-1	0	1
x_3	0	0	0	1	$-1/2$	$1/2$	$1/2$
		0	0	0	$1/2$	$3/2$	$-11/2$

Todos los costos reducidos no básicos son positivos: la solución es única,

$$(x_1, x_2)^* = \left(1, \tfrac{3}{2}\right), \qquad z^* = -\tfrac{11}{2}.$$

En el plano, el conjunto factible es el cuadrilátero de vértices $(1,1)$, $(2,0)$, $(4,0)$ y $(1,3/2)$, y el óptimo está donde se cortan $x_1 = 1$ y $x_1 + 2x_2 = 4$, que son las dos restricciones activas: coherente con que x_4 y x_5, sus variables de exceso y de holgura, respectivamente, sean las dos no básicas de la tabla final.
Dónde se falla. En poner también una artificial en la restricción $\leq$: no es un error de resultado, pero añade una columna y trabajo inútil. En sumar, para los costos reducidos de la fase I, las filas que no son de artificiales: la de x_5 tiene costo 0 y no cuenta. En empezar la fase II con c_B en el orden de los índices, $(-1,-3,0)$, en vez del orden de las filas, $(-3,-1,0)$. Y en dar por óptimo el punto con que termina la fase I: $(1,1)$ solo es factible, vale -4, y la fase II todavía lo mejora hasta $-11/2$.

Ejercicio 3.8. *Un problema infactible, detectado en la fase I* R4.7

Aplica el método de las dos fases a

$$\text{Minimizar} \quad -x_1 - x_2 - x_3 \quad \text{sujeto a:} \quad \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - \ x_3 \geq 5 \\ \ x_1 + \ x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ \qquad 3x_2 + \ x_3 \leq 3 \end{cases} \qquad x \geq 0.$$

Resolución. *La idea.* La fase I minimiza la suma de lo que le falta a cada igualdad para cumplirse. Si, terminada, esa suma sigue siendo positiva, ningún punto cumple todo a la vez: el mínimo positivo es el certificado de infactibilidad. No hay fase II que hacer.
Con excesos x_4, x_5, holgura x_6 y artificiales x_7, x_8 en las dos primeras filas, la fase I minimiza $w = x_7 + x_8$ desde la base $\{x_7, x_8, x_6\}$ con $\bar{b} = (5,2,3)$ y $w = 7$. Los costos reducidos iniciales son

$$(c_j - z_j)_{j=1,\dots,6} = (0,\ -3,\ -1,\ 1,\ 1,\ 0).$$

Entra x_2, y mín$\{5/2,\ 2/1,\ 3/3\} = 1$ hace salir a x_6. Tras pivotar, la tabla queda

		0	0	0	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_7	1	-1	0	$-5/3$	-1	0	$-2/3$	3
x_8	1	1	0	$5/3$	0	-1	$-1/3$	1
x_2	0	0	1	$1/3$	0	0	$1/3$	1
		0	0	0	1	1	1	4

Todos los costos reducidos son ahora ≥ 0: la fase I ha terminado. Pero

$$w^* = 4 > 0,$$

con las dos artificiales todavía positivas ($x_7 = 3$, $x_8 = 1$). Eso significa que **el problema original es infactible**: no existe ningún punto que cumpla las tres restricciones con las variables no negativas, y no hay fase II que hacer.

Otra vía (la contradicción, en dos líneas). El álgebra lo confirma sin ninguna tabla, y merece la pena verlo porque es el tipo de argumento que convierte un cálculo en una demostración. De la tercera restricción, como $x_3 \geq 0$,

$$3x_2 \leq 3x_2 + x_3 \leq 3 \quad \Longrightarrow \quad x_2 \leq 1.$$

De la primera, como $x_1 \geq 0$ y $x_3 \geq 0$,

$$2x_2 \geq 5 + x_1 + x_3 \geq 5 \quad \Longrightarrow \quad x_2 \geq \tfrac{5}{2}.$$

Las dos cotas son incompatibles. Obsérvese que la segunda restricción no ha hecho falta: el conjunto ya es vacío sin ella.
Qué hemos aprendido. El punto en que termina la fase I también dice algo. Es $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 0)$, y en él a la primera restricción le faltan 3 unidades ($2x_2 = 2$ frente a 5) y a la segunda 1 ($x_2 = 1$ frente a 2): son los valores de x_7 y x_8. Entre los puntos con variables no negativas que cumplen la tercera restricción, ninguno se acerca más a cumplir las otras dos, si esa cercanía se mide sumando lo que le falta a cada una: la fase I ha minimizado exactamente esa suma.
Dónde se falla. En declarar la infactibilidad antes de terminar la fase I: hace falta que todos sus costos reducidos sean ≥ 0 y que aun así quede alguna artificial positiva. En confundir las dos maneras de no tener óptimo: un mínimo positivo de la fase I dice que no hay puntos; una columna sin entradas positivas en la fase II dice que hay puntos pero el objetivo no tiene fondo. Y en leer el 4 como «cuánto de infactible» es el problema en un sentido absoluto: si se multiplica una fila por 10, el mínimo cambia; lo que no cambia es que sea positivo.

Ejercicio 3.9. *Dos fases con dos pivotajes en la fase II* R4.8

Aplica el método de las dos fases a

$$\text{Minimizar} \quad -x_1 - x_2 \quad \text{sujeto a:} \quad \begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \geq 3 \end{cases} \qquad x_1, x_2 \geq 0.$$

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *El conjunto factible es un triángulo pequeño. Antes de pivotar, dibújalo y localiza sus tres vértices: la fase I y las dos iteraciones de la fase II los recorren en orden.*
2. *Si la columna que entra tiene una única entrada positiva, solo esa fila participa en el cociente mínimo. Puede haber varias entradas positivas y que el mínimo también se alcance en una sola fila: comprueba los signos antes de dividir.*

Resolución. *La idea.* La fase I llega a un vértice del triángulo, y la fase II lo recorre hasta el óptimo. Con dos variables todo se puede seguir en el dibujo, y conviene hacerlo: cada tabla es un vértice.
Solo la tercera restricción necesita artificial. Con holguras x_3, x_4, exceso x_5 y artificial x_6, la fase I minimiza $w = x_6$ desde la base $\{x_3, x_4, x_6\}$, con $\bar{b} = (1, 5, 3)$ y $w = 3$.
Fase I. Los costos reducidos son $(-1, -2, 0, 0, 1)$ y entra x_2; el cociente mín$\{1/1,\ 5/3,\ 3/2\} =$

1 hace salir a x_3. La tabla siguiente es

		0	0	0	0	0	1	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_2	0	-3	1	1	0	0	0	1
x_4	0	11	0	-3	1	0	0	2
x_6	1	**7**	0	-2	0	-1	1	1
		-7	0	2	0	1	0	1

Ahora $c_1 - z_1 = -7$ y entra x_1. Su columna tiene dos entradas positivas, y mín$\{2/11,\ 1/7\} = 1/7$ hace salir a x_6. La fase I termina con $w = 0$ en el punto $(1/7,\ 10/7)$, que ya es un vértice del triángulo.

Fase II. Se cambian los costos por los verdaderos, $c = (-1, -1, 0, 0, 0)$, y se prescinde de la columna artificial. Con la base $\{x_2, x_4, x_1\}$, es decir $c_B = (-1, 0, -1)$ en el orden de las filas, la tabla de partida es

		-1	-1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_2	-1	0	1	$1/7$	0	$-3/7$	$10/7$
x_4	0	0	0	$1/7$	1	$\mathbf{11/7}$	$3/7$
x_1	-1	1	0	$-2/7$	0	$-1/7$	$1/7$
		0	0	$-1/7$	0	$-4/7$	$-11/7$

El valor es $z = -11/7$ y los costos reducidos de las no básicas valen $c_3 - z_3 = -1/7$ y $c_5 - z_5 = -4/7$. Entra x_5, que es el más negativo; su columna es $(-3/7,\ 11/7,\ -1/7)^T$ y la única entrada positiva es la segunda, con cociente $(3/7)/(11/7) = 3/11$: sale x_4. Se llega a $(2/11,\ 17/11)$ con $z = -19/11$.

En esa tabla queda $c_3 - z_3 = -1/11 < 0$. Entra x_3, con columna $(2/11,\ 1/11,\ -3/11)^T$ y cociente mín$\{17/2,\ 3\} = 3$: sale x_5. La tabla final es

		-1	-1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_2	-1	0	1	0	-1	-2	1
x_3	0	0	0	1	7	11	3
x_1	-1	1	0	0	2	3	1
		0	0	0	1	1	-2

con $c_4 - z_4 = c_5 - z_5 = 1 > 0$: óptimo único en

$$(x_1, x_2)^* = (1, 1), \qquad z^* = -2.$$

Se puede comprobar en el enunciado: $-3 + 1 = -2 \leq 1$ con holgura $x_3 = 3$, que es lo que dice la tabla; $2 + 3 = 5 \leq 5$ con holgura $x_4 = 0$; y $1 + 2 = 3 \geq 3$ con exceso $x_5 = 0$. Las dos restricciones activas son la segunda y la tercera, que es por lo que sus variables de holgura y exceso son las dos no básicas.

Dónde se falla. En la fase II, en dividir también por las entradas negativas de la columna de x_5: $-3/7$ y $-1/7$ no ponen límite, porque esas variables crecen al entrar x_5. En tomar el exceso x_5 como si fuera una holgura: al hacerse positivo, la tercera restricción deja de estar activa, y es justo lo que pasa en la segunda tabla de la fase II. Y en detenerse en $z = -19/11$ porque ya no hay costos reducidos grandes: $-1/11$ es pequeño, pero es negativo, y todavía hay que pivotar.

En AMPL. Se reutiliza `lp.mod` (p. 170). Para escribir todas las filas con $\leq$, se multiplica la tercera desigualdad por -1. Los datos de `dos-fases.dat` coinciden así con el modelo de las prácticas antiguas `Relacion_3_Ej_8`:

```
param n := 2;
param m := 3;
param a : 1 2 :=
1 -3  1
2  2  3
3 -1 -2;
param b := 1 1  2 5  3 -3;
param c := 1 -1  2 -1;
```

El guion `dos-fases.run` es:

```
reset;
model lp.mod;
data dos-fases.dat;
option solver highs;
solve;
display solve_result, x, z;
```

Se obtiene $(1, 1)$ y $z = -2$. El solver gestiona internamente la búsqueda de factibilidad; no se añaden artificiales al modelo. Sus simplificaciones y reglas de pivotaje pueden resolverlo con tablas y un número de iteraciones distintos de los del cálculo a mano.

Ejercicio 3.10. *Una restricción redundante y un problema ilimitado* R4.9

Comprueba que en la fase I del simplex se detecta que el siguiente problema tiene una restricción redundante, y que en la fase II se certifica que no tiene solución óptima acotada:

$$\text{Minimizar} \quad -x_1 - x_2 - x_3 \quad \text{sujeto a:} \quad \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases} \qquad x \geq 0.$$

Resolución. *La idea.* Las dos cosas que pide el enunciado se detectan con dos señales distintas, y en fases distintas. La redundancia se ve al final de la fase I: valor 0, pero una artificial atrapada en la base, a nivel cero, con su fila vacía en las columnas originales. La falta de óptimo se ve en la fase II: una columna que quiere entrar y no tiene ninguna entrada positiva. Esa columna da, además, la dirección por la que el objetivo cae.
La redundancia, antes de calcular nada. Sumando las dos primeras ecuaciones se obtiene $-2x_1 + 3x_2 = 7$, que es exactamente la tercera. Luego $\text{rango}(A) = 2 < 3 = m$, y la hipótesis

rango$(A) = m$ de la sección 3.1 *no* se cumple. El sistema no es incompatible — las tres ecuaciones son coherentes —, simplemente hay una que no dice nada nuevo.
Fase I: cómo se detecta. Con tres artificiales x_4, x_5, x_6, la base inicial da $\bar{b} = (5,2,7)$ y $w = 14$. Entra x_2 (costo reducido -6) y sale x_5 por mín$\{5/2,\ 2/1,\ 7/3\} = 2$. En la tabla siguiente entra x_1 (costo reducido -2) y hay empate en el cociente, mín$\{1/1,\ 1/1\}$; saliendo x_4, la tabla queda

		0	0	0	1	1	1	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_1	0	1	0	-3	1	-2	0	1
x_2	0	0	1	-2	1	-1	0	3
x_6	1	0	0	0	-1	-1	1	0
		0	0	0	2	2	0	0

La fase I ha terminado con $w = 0$, luego el problema es factible y $(1,3,0)$ es un punto suyo. Pero mirando la tabla se ve lo importante:

> la artificial x_6 **sigue en la base**, con valor cero, y su fila tiene todos los coeficientes nulos en las variables originales x_1, x_2, x_3.

Esa es la firma de la restricción redundante, y conviene entender por qué aparece así. Una fila de la tabla es la ecuación correspondiente escrita en la base actual; si la ecuación era combinación lineal de las otras, al eliminar con ellas se queda en $0 = 0$, y lo único que sobrevive en esa fila son los coeficientes de las artificiales. La artificial que la ocupa vale cero y no puede salir de la base por ningún pivotaje sobre las variables originales, porque no tiene ningún coeficiente no nulo entre ellas. Lo que se hace es sencillo: se tacha esa fila y se sigue. No se pierde información, porque la ecuación que representa ya está implicada por las otras dos.
Fase II: el problema es ilimitado. Quedan dos filas y la base $\{x_1, x_2\}$, con $c_B = (-1,-1)$:

$$z_3 = (-1)(-3) + (-1)(-2) = 5, \qquad c_3 - z_3 = -1 - 5 = -6 < 0.$$

Entra x_3. Pero su columna es

$$y_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \leq 0,$$

sin ninguna entrada positiva: **el problema es ilimitado**. No hay un óptimo alcanzado; el ínfimo es $-\infty$. Al aumentar x_3 una unidad, las variables básicas crecen según $-y_3$. La dirección que lo certifica es

$$d = \begin{pmatrix} -y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y las dos comprobaciones que la hacen válida son inmediatas:

$$Ad = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+4-1 \\ -3+2+1 \\ -6+6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad d \geq 0,$$

luego d es una dirección del poliedro; y

$$c^T d = (-1,-1,-1)\cdot(3,2,1) = -6 < 0,$$

luego a lo largo de ella el objetivo baja sin límite. Partiendo del punto factible $(1,3,0)$, la semirrecta $(1,3,0)+\mu(3,2,1)$ está entera en el conjunto factible y el objetivo vale $-4-6\mu$.
Dónde se falla. En confundir las dos firmas de la fase I: valor 0 con una artificial básica a cero es redundancia, y el problema es factible; valor positivo es infactibilidad. En intentar sacar la artificial pivotando sobre un cero, lo que no se puede hacer. Y en la fase II, en declarar el problema ilimitado porque alguna columna no tiene entradas positivas: hace falta que esa columna sea la de una variable con costo reducido negativo. Una columna ≤ 0 con costo reducido positivo es una semirrecta del poliedro por la que el objetivo empeora; con costo reducido nulo, una en la que no cambia, que es de óptimos si la tabla ya es óptima.

QUÉ DEJA. Que el número -6 aparece dos veces y no es casualidad: el costo reducido de la variable que quería entrar es exactamente $c^T d$ para la dirección que se construye con su columna. Es la misma cuenta leída de dos maneras, y por eso el simplex, cuando falla en dar un óptimo, no falla del todo: entrega el certificado de que no lo hay.

Ejercicio 3.11. *Resolver un sistema de ecuaciones con el simplex* R4.10

Resuelve el sistema de ecuaciones

$$2x_1 - x_2 + x_3 = -1, \qquad x_1 + 2x_2 = 0, \qquad 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$

mediante el algoritmo del simplex.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *El simplex solo sabe trabajar con variables* no negativas, *y aquí no hay ninguna condición de signo: las incógnitas de un sistema de ecuaciones son libres. Antes de empezar hay que arreglar eso.*
2. *Un número real cualquiera es diferencia de dos números no negativos.*
3. *Aquí no se pide optimizar nada, solo encontrar un punto que cumpla las tres ecuaciones. ¿Qué parte del método de las dos fases hace exactamente eso?*

Resolución. *Qué se está pidiendo de verdad.* Resolver un sistema no es optimizar: es encontrar un punto factible. Y encontrar un punto factible es, palabra por palabra, lo que hace la **fase I** del método de las dos fases. Así que el problema consiste en montar la fase I del sistema dado y leer el resultado; la fase II no tendrá nada que hacer, porque no hay función objetivo que mejorar.
Hay un obstáculo antes, y es el que da interés al ejercicio. El simplex se mueve por vértices de $\{x:\ Ax=b,\ x\geqq 0\}$, es decir, exige variables no negativas; y las incógnitas de un sistema de ecuaciones son libres. Este sistema, además, no tiene ninguna solución con todas las componentes no negativas: de la segunda ecuación, $x_1 = -2x_2$, de modo que $x_1, x_2 \geq 0$ obligaría a $x_1 = x_2 = 0$, y entonces la primera ecuación daría $x_3 = -1$. Aplicar el simplex tal cual daría «infactible», y esa respuesta sería falsa: el sistema sí tiene solución.
Primer movimiento: partir cada variable libre en dos no negativas. Todo número real se escribe

como diferencia de dos números no negativos, así que ponemos

$$x_1 = x_1^+ - x_1^-, \qquad x_2 = x_2^+ - x_2^-, \qquad x_3 = x_3^+ - x_3^-, \qquad x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-, x_3^+, x_3^- \geq 0.$$

Se pasa de tres variables libres a seis no negativas. Es el mismo recurso con el que en la sección 3.1 se pasaba de la forma canónica a la estándar, y es también el que está detrás de la línea «variable libre $\leftrightarrow$ restricción de igualdad» de la tabla de dualidad del capítulo 4.
Segundo movimiento: términos independientes no negativos y variables artificiales. La primera ecuación tiene -1 a la derecha; se multiplica por -1. Después se añade una artificial por ecuación, $x_4, x_5, x_6 \geq 0$, y se minimiza su suma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & x_4 + x_5 + x_6 \\ \text{sujeto a:} & -2x_1^+ + 2x_1^- + x_2^+ - x_2^- - x_3^+ + x_3^- + x_4 = 1 \\ & x_1^+ - x_1^- + 2x_2^+ - 2x_2^- + x_5 = 0 \\ & 3x_1^+ - 3x_1^- + x_2^+ - x_2^- + 2x_3^+ - 2x_3^- + x_6 = 3 \\ & \text{todas las variables } \geq 0. \end{array}$$

Si el mínimo de la fase I es cero, el sistema tiene solución y la leemos; si fuera positivo, el sistema sería incompatible.
Tabla inicial. Base $\{x_4, x_5, x_6\}$, $c_B = (1,1,1)$. Los costos reducidos son $c_j - z_j$ con z_j igual a la suma de la columna j:

	x_1^+	x_1^-	x_2^+	x_2^-	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_4	-2	2	1	-1	-1	1	1	0	0	1
x_5	1	-1	$\boxed{2}$	-2	0	0	0	1	0	0
x_6	3	-3	1	-1	2	-2	0	0	1	3
$c - z$	-2	2	-4	4	-1	1	0	0	0	4

Entra x_2^+, que es el costo reducido más negativo. Los cocientes son $1/1 = 1$, $0/2 = 0$ y $3/1 = 3$: sale x_5 con cociente cero. Es un **pivotaje degenerado**, que no baja el valor de la fase I; conviene reconocerlo y no asustarse.
Segunda tabla. Base $\{x_4, x_2^+, x_6\}$:

	x_1^+	x_1^-	x_2^+	x_2^-	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_4	$-5/2$	$5/2$	0	0	-1	1	1	$-1/2$	0	1
x_2^+	$1/2$	$-1/2$	1	-1	0	0	0	$1/2$	0	0
x_6	$5/2$	$-5/2$	0	0	$\boxed{2}$	-2	0	$-1/2$	1	3
$c - z$	0	0	0	0	-1	1	0	2	0	4

Entra x_3^+, único costo reducido negativo. El único coeficiente positivo de su columna está en la tercera fila: sale x_6, con cociente $3/2$.
Tercera tabla. Base $\{x_4, x_2^+, x_3^+\}$:

	x_1^+	x_1^-	x_2^+	x_2^-	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_4	$-5/4$	$\boxed{5/4}$	0	0	0	0	1	$-3/4$	$1/2$	$5/2$
x_2^+	$1/2$	$-1/2$	1	-1	0	0	0	$1/2$	0	0
x_3^+	$5/4$	$-5/4$	0	0	1	-1	0	$-1/4$	$1/2$	$3/2$
$c - z$	$5/4$	$-5/4$	0	0	0	0	0	$7/4$	$1/2$	$5/2$

Entra x_1^-, que tiene el único costo reducido negativo, $-5/4$. El único coeficiente positivo de su columna es el $5/4$ de la primera fila: sale x_4, con cociente $(5/2)/(5/4) = 2$.
Tabla final de la fase I. Base $\{x_1^-, x_2^+, x_3^+\}$:

	x_1^+	x_1^-	x_2^+	x_2^-	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_1^-	-1	1	0	0	0	0	$4/5$	$-3/5$	$2/5$	2
x_2^+	0	0	1	-1	0	0	$2/5$	$1/5$	$1/5$	1
x_3^+	0	0	0	0	1	-1	1	-1	1	4
$c - z$	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0

El valor óptimo de la fase I es **cero** y las tres artificiales han salido de la base: el sistema es compatible. La fase II no tiene nada que hacer, porque la función objetivo original es idénticamente nula: cualquier punto factible sirve, y la tabla ya es óptima con todos los costos reducidos nulos.
Lectura de la solución. La base final vale $x_1^- = 2$, $x_2^+ = 1$, $x_3^+ = 4$, y todas las demás variables son cero. Deshaciendo el desdoblamiento,

$$x_1 = x_1^+ - x_1^- = 0 - 2 = -2, \qquad x_2 = x_2^+ - x_2^- = 1 - 0 = 1, \qquad x_3 = x_3^+ - x_3^- = 4 - 0 = 4.$$

Comprobación en las tres ecuaciones: $2(-2) - 1 + 4 = -1$; $-2 + 2(1) = 0$; $3(-2) + 1 + 2(4) = 3$. Correcto.

Otra vía (eliminación gaussiana, para comprobar). El sistema es cuadrado y se resuelve en tres líneas, lo que permite verificar la respuesta sin tablas. De la segunda ecuación, $x_1 = -2x_2$. Sustituyendo en la primera, $-4x_2 - x_2 + x_3 = -1$, es decir, $x_3 = 5x_2 - 1$. Sustituyendo las dos en la tercera, $-6x_2 + x_2 + 2(5x_2 - 1) = 3$, o sea, $5x_2 = 5$ y $x_2 = 1$; de ahí $x_1 = -2$ y $x_3 = 4$. La solución es única, porque el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero.
Que la solución sea única tiene una consecuencia bonita sobre lo que ha hecho el simplex: el poliedro de la fase II, $\{(x^+, x^-) \geq 0\}$ con las tres ecuaciones, no es un punto: a cualquier solución se puede sumar la misma cantidad $t \geq 0$ a x_1^+ y x_1^-, sin alterar su diferencia. Pero todos sus puntos dan la *misma* terna (x_1, x_2, x_3), porque la diferencia $x^+ - x^-$ está determinada. Lo que el simplex ha elegido de entre todos ellos es el vértice en que cada variable original usa una sola de sus dos mitades, que es el representante canónico.
El desdoblamiento de una variable libre en dos no negativas es el puente entre «resolver un sistema» y «optimizar sobre un poliedro», y cuesta el doble de columnas. Cuando en la tabla una variable original aparece con sus dos mitades básicas a la vez, hay un error en la base: sus columnas son a_i y $-a_i$, linealmente dependientes, y no pueden formar parte de una matriz básica invertible. Además, en un vértice no pueden ser ambas positivas: se podrían aumentar y disminuir juntas una pequeña cantidad, escribiendo el punto como punto medio de dos soluciones distintas.
Dónde se falla. En añadir la artificial a la primera ecuación sin cambiarle antes el signo: la base inicial daría $x_4 = -1$, que no es factible, y la fase I no podría arrancar. Y en leer la respuesta en las variables partidas: la tabla da $x_1^- = 2$, y la incógnita es $x_1 = -2$.

CAPÍTULO 4

Dualidad en programación lineal

ANTES DE LEER

Cuatro preguntas para anticipar las ideas del capítulo.

1. Una carpintería usa madera, cola y horas de torno para fabricar muebles, y con esos recursos gana 4.000 euros al mes. Llega alguien y le ofrece comprarle todo el almacén y todas las horas de torno de golpe. ¿Cuánto tendría que ofrecerle como mínimo para que le compense vender? ¿Y ese número tiene algo que ver con los 4.000?
2. Un problema de minimizar tiene 30 restricciones y 50 variables. Alguien afirma que ha encontrado la solución óptima y que vale 17. ¿Qué tendría que enseñarte para que te convencieras *sin* rehacer el problema entero?
3. Si a una restricción de un problema de mínimo le sobra margen en el óptimo (se cumple con desigualdad estricta), ¿cuánto crees que costaría relajarla todavía un poco más? ¿Y cuánto se ganaría?
4. Un problema puede ser infactible o ilimitado. Su dual también. ¿Pueden serlo los dos a la vez? ¿Puede uno ser ilimitado y el otro tener óptimo finito?

Las respuestas están, por este orden, en las secciones 4.1 (qué es el dual y de dónde salen sus precios), 4.2 (dualidad débil, que es el certificado), 4.2 (holguras complementarias y precios sombra) y 4.2 (el teorema fundamental de dualidad y su tabla de casos).

Mapa del capítulo. Cuatro bloques, en este orden. El primero construye el problema dual: la definición canónica, la estándar, la general con su tabla de correspondencias, y la comprobación de que el dual del dual es el primal. El segundo demuestra los teoremas que relacionan los dos problemas — dualidad débil, teorema fundamental de dualidad, dualidad fuerte, holguras complementarias — y termina con la lectura económica, que es la que convierte las variables duales en *precios sombra*. El tercero usa esa relación para construir un algoritmo nuevo, el simplex dual. El cuarto la usa para

responder a la pregunta «¿y si los datos cambian?», que es el análisis de sensibilidad. Todo el capítulo se apoya en los dos anteriores. Del capítulo 2 viene el teorema de Tucker, que es el que hace funcionar la demostración del teorema fundamental de dualidad, y viene también la lectura de un vector no negativo w como un sistema de *precios* que ya apareció al leer el lema de Farkas en clave mecánica. Del capítulo 3 viene la base óptima B: la solución del dual no habrá que calcularla aparte, porque está escrita en la tabla final del simplex.

4.1 El problema dual

LA PREGUNTA

Un taller fabrica muebles con tres recursos: madera, cola y horas de torno. Sabe cuánto gana con cada mueble y cuánto consume de cada recurso, y ha calculado el plan de producción que maximiza su beneficio. Aparece entonces un comprador que no quiere muebles: quiere comprarle el almacén entero y todas las horas de torno, y le pide al taller que le ponga precio a cada recurso. El taller no aceptará ningún precio que le haga perder respecto de fabricar; el comprador no pagará un céntimo más de lo imprescindible. ¿Existe siempre una lista de precios que los deje a los dos conformes, y qué relación tiene con el beneficio que el taller iba a obtener fabricando?

LA IDEA: EL PROBLEMA DEL COMPRADOR DE RECURSOS

La respuesta a esa pregunta es el capítulo entero, y conviene tenerla delante desde el principio.

El taller resuelve un problema de máximo: elegir cuánto fabrica de cada mueble para ganar lo más posible sin pasarse de lo que tiene en el almacén. Llamemos a eso el problema *primal*. El comprador resuelve un problema distinto y de signo contrario: elegir un precio w_i por cada recurso para pagar lo *menos* posible, con una condición que no puede saltarse. La condición es esta: *para cada mueble, lo que el comprador pagaría por los recursos que ese mueble consume tiene que ser al menos lo que el taller ganaría fabricándolo*. Si no fuera así, al taller le saldría más a cuenta quedarse los recursos de ese mueble, fabricarlo y venderlo, y rechazaría la oferta. Ese problema del comprador es el *dual*.

Obsérvese lo que ha pasado con las piezas del problema, porque es toda la mecánica de la dualidad:

- Había una restricción por recurso; ahora hay una *variable* por recurso, que es su precio.
- Había una variable por mueble; ahora hay una *restricción* por mueble, que es la condición de que su precio de recursos cubra su beneficio.
- Se maximizaba el beneficio; ahora se minimiza el pago.
- Los coeficientes de la función objetivo de uno son los términos independientes del otro, y al revés: el comprador paga $\sum_i w_i b_i$, donde b_i es *cuánto hay* de cada recurso.
- Y la matriz de coeficientes es la misma, traspuesta: la columna del mueble j (lo que consume de cada recurso) se convierte en la fila de la restricción j del comprador.

La imagen predice además, sin ninguna cuenta, el resultado central del capítulo. Cualquier lista de precios aceptable para el taller le cuesta al comprador *al menos* lo que el taller ganaría fabricando, porque la aceptabilidad se impuso mueble a mueble. Eso es la *dualidad débil*. Y si los precios se ajustan hasta el límite, la mejor oferta del comprador coincide exactamente con el mejor beneficio del taller: eso es la *dualidad fuerte*, siempre que el taller tenga un óptimo finito. Esos precios son valoraciones *dentro del modelo*: si sobra un recurso en el óptimo, su precio dual es cero; que se agote no obliga a que tenga precio positivo. Mientras la valoración siga siendo válida, el precio mide cuánto cambia el beneficio por unidad de recurso. El análisis de sensibilidad precisará ese intervalo de validez.

DE DÓNDE VIENE: LOS PRECIOS QUE NADIE COBRA

En octubre de 1947, George Dantzig presentó su modelo de programación lineal a John von Neumann en Princeton. Según recuerda Dantzig, von Neumann desarrolló durante hora y media una teoría por analogía con sus trabajos sobre juegos y le explicó la dualidad y el lema de Farkas.[a] La relación entre juegos de suma cero y programación lineal permite conectar la dualidad fuerte con el teorema del minimax.
La lectura económica tenía otro antecedente. En 1939, Leonid Kantoróvich introdujo multiplicadores para organizar la producción en una economía de planificación central. El nombre *valoraciones objetivamente determinadas* llegó después, en su libro de 1959.[b] Kantoróvich y Tjalling Koopmans compartieron en 1975 el premio Nobel de economía por sus aportaciones a la teoría de la asignación óptima de recursos.

[a] G. B. Dantzig, «Linear Programming», *Operations Research* 50(1), 2002, p. 44, doi:10.1287/opre.50.1.42.17798.
[b] T. C. Koopmans, conferencia Nobel de 1975, p. 241, «Concepts of Optimality and Their Uses».

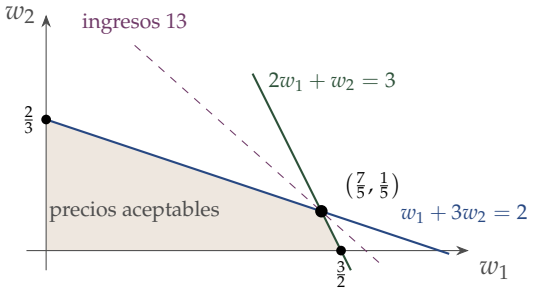
La dieta en miniatura, vista desde el otro lado. Antes de las definiciones conviene hacer a mano el caso más pequeño, y ya hay uno resuelto: la dieta del capítulo 1 (figura 1.1),

$$\begin{array}{lll} \text{Minimizar} & 2x_1 + 3x_2 & \\ \text{sujeto a:} & x_1 + 2x_2 \geq 8 & \text{(nutriente A)} \\ & 3x_1 + x_2 \geq 9 & \text{(nutriente B)} \\ & x_1, x_2 \geq 0, & \end{array}$$

con óptimo $(2, 3)$ y coste 13. Es la historia del taller con los papeles cambiados: aquí el problema de partida minimiza. El otro lado lo pone un vendedor de pastillas de nutriente puro, que quiere venderle a quien hace la dieta las 8 unidades de A y las 9 de B que necesita, a precios w_1 y w_2 por unidad, y cobrar lo más posible, $8w_1 + 9w_2$. Tiene un límite. Una ración del alimento 1 da una unidad de A y tres de B por 2 euros; si esas pastillas costaran más, $w_1 + 3w_2 > 2$, al cliente le saldría más a cuenta comer el alimento. Lo mismo con el alimento 2. El problema del vendedor es

$$\begin{array}{lll} \text{Maximizar} & 8w_1 + 9w_2 & \\ \text{sujeto a:} & w_1 + 3w_2 \leq 2 & \text{(alimento 1)} \\ & 2w_1 + w_2 \leq 3 & \text{(alimento 2)} \\ & w_1, w_2 \geq 0, & \end{array}$$

y se resuelve mirando. Su región factible es el cuadrilátero de vértices $(0,0)$, $\left(\frac{3}{2},0\right)$, $\left(\frac{7}{5},\frac{1}{5}\right)$ y $\left(0,\frac{2}{3}\right)$, donde los ingresos valen 0, 12, 13 y 6. El máximo es 13, en $\left(\frac{7}{5},\frac{1}{5}\right)$: **el mismo número que el mínimo de la dieta**, y en el punto que el capítulo 1 había encontrado como multiplicadores.



Por qué no podía salir otro número. Si x es una dieta válida y w unos precios aceptables, ordenando los productos por alimentos y luego por nutrientes,

$$2x_1 + 3x_2 \;\geq\; (w_1 + 3w_2)\,x_1 + (2w_1 + w_2)\,x_2 \;=\; w_1(x_1 + 2x_2) + w_2(3x_1 + x_2) \;\geq\; 8w_1 + 9w_2.$$

La primera desigualdad usa que los precios son aceptables y que $x \geq 0$; la segunda, que la dieta es válida y que $w \geq 0$. Luego *cualquier* ingreso del vendedor queda por debajo de *cualquier* coste de la dieta: los precios $\left(\frac{3}{2},0\right)$, que dan 12, y la dieta $(8,0)$, que cuesta 16, cumplen $12 \leq 16$, y con solo esos dos datos el óptimo podría estar en cualquier punto entre 12 y 16. El 13 cierra el hueco a la vez por arriba y por abajo. Esa cadena es, entera, la demostración de la dualidad débil de la sección 4.2.

Qué se ve ya en este caso. Cada nutriente, que era una restricción, se ha convertido en un precio, que es una variable. Cada alimento, que era una variable, se ha convertido en una condición sobre los precios. Los costes $(2,3)$ han pasado a ser los términos independientes, y las exigencias $(8,9)$, los coeficientes del objetivo. La matriz $\left(\begin{smallmatrix}1&2\\3&1\end{smallmatrix}\right)$ aparece traspuesta, $\left(\begin{smallmatrix}1&3\\2&1\end{smallmatrix}\right)$. Y el mínimo se ha convertido en máximo. La definición que sigue es esto mismo, escrito para cualquier número de variables y de restricciones.

4.1.1 La definición canónica y la estándar

El dual se define dos veces, según cómo venga escrito el primal, y después se comprueba que las dos definiciones son la misma.

Antes de leerlas conviene tener delante el mecanismo, porque las dos definiciones son la misma transformación aplicada dos veces y se retienen mucho mejor sabiendo qué hace cada pieza. El dual **intercambia los papeles de las filas y las columnas**: cada restricción del primal produce una variable del dual, y cada variable del primal produce una restricción del dual. Con esa correspondencia, la matriz se traspone, el vector de recursos b pasa a ser el de costos y el de costos c pasa a ser el de recursos, y el sentido de la optimización se invierte: donde el primal minimiza, el dual maximiza. Nada más. Lo único que hay que aprender con cuidado son los *signos*, y de eso trata el resto de la sección.

Definición (canónica de dualidad)**.** Sea el problema de programación lineal escrito en **forma canónica** (el *problema primal*)

$$\begin{array}{lll} & \text{Minimizar} & c^T x \\ \text{(P)} & \text{sujeto a:} & Ax \geq b \\ & & x \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

Su **dual canónico** es

$$\begin{array}{lll} & \text{Maximizar} & w^T b \\ \text{(D)} & \text{sujeto a:} & w^T A \leq c^T \\ & & w \geq 0, \quad w \in \mathbb{R}^m. \end{array}$$

Escribiremos $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \geq b, \ x \geq 0\}$ y $W = \{w \in \mathbb{R}^m : \ w^T A \leq c^T, \ w \geq 0\}$ para los dos conjuntos factibles.

Definición (estándar de dualidad)**.** Sea ahora el primal escrito en **forma estándar**

$$\begin{array}{lll} & \text{Minimizar} & c^T x \\ \text{(P)} & \text{sujeto a:} & Ax = b \\ & & x \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

Su **dual estándar** es

$$\begin{array}{lll} & \text{Maximizar} & w^T b \\ \text{(D)} & \text{sujeto a:} & w^T A \leq c^T \\ & & w \text{ irrestringido}, \quad w \in \mathbb{R}^m. \end{array}$$

Las dos definiciones comparten el objetivo, Maximizar $w^T b$, y las restricciones, $w^T A \leq c^T$: una desigualdad por cada columna de A, es decir, por cada variable del primal. La única diferencia entre las dos es el **signo de** w, y no es un capricho: se corresponde con el cambio de $\geq$ a $=$ en el primal. La regla que hay detrás, y que la sección siguiente generaliza, es que *cuanto más apretada está una restricción del primal, más libre queda su variable dual*: una restricción de desigualdad, que solo obliga por un lado, produce una variable dual con signo obligado; una restricción de igualdad, que obliga por los dos lados, produce una variable dual sin ninguna restricción de signo. Conviene ver por qué antes de seguir, porque el argumento es corto y explica el porqué de toda la tabla de correspondencias.

Observación (las dos definiciones son la misma)**.** *De la estándar sale la canónica.* Un primal en forma canónica se pasa a estándar restándole variables de holgura, $Ax - x_H = b$ con $x, x_H \geq 0$, es decir, con la matriz $[A \mid -I]$ y el vector de costos $(c, 0)$. Aplicando la definición estándar a ese problema, el dual es maximizar $w^T b$ sujeto a $w^T[A \mid -I] \leq (c, 0)^T$ con w libre. Pero $w^T[A \mid -I] \leq (c, 0)^T$ son dos bloques de desigualdades: $w^T A \leq c^T$ por un lado y $-w \leq 0$ por otro, es decir, $w \geq 0$. Queda exactamente el dual canónico: la restricción de signo sobre w **la produce la variable de holgura**.

De la canónica sale la estándar. Un primal en forma estándar se escribe con desigualdades desdoblando cada igualdad en dos: $Ax \geq b$ y $-Ax \geq -b$. Aplicando la definición canónica a la matriz $\left(\begin{smallmatrix} A \\ -A \end{smallmatrix}\right)$ y al vector $\left(\begin{smallmatrix} b \\ -b \end{smallmatrix}\right)$, el dual maximiza $(w_1^T, w_2^T)\left(\begin{smallmatrix} b \\ -b \end{smallmatrix}\right) = (w_1 - w_2)^T b$ sujeto a $(w_1 - w_2)^T A \leq c^T$ con $w_1, w_2 \geq 0$. Llamando $w = w_1 - w_2$ y recordando que *cualquier* vector real es diferencia de dos vectores no negativos, la condición $w_1, w_2 \geq 0$ equivale a que w no tenga ninguna restricción de signo. Queda el dual estándar.

EXPLÍCATE. *En el segundo párrafo se ha usado que todo $w \in \mathbb{R}^m$ se escribe como $w_1 - w_2$ con $w_1, w_2 \geq 0$. Escribe explícitamente quiénes son w_1 y w_2 para $w = (3, -2, 0)$. ¿Es única esa descomposición? ¿Importa que no lo sea?*

4.1.2 La forma general y la tabla de correspondencias

Un problema real no viene ni en canónica ni en estándar, sino con las tres clases de restricción y las tres clases de variable mezcladas. La definición general cubre todos los casos a la vez.

Definición (general de dualidad)**.** Sea el problema

$$
\text{(P)}\qquad
\begin{array}{ll}
\text{Min} & c_1^T x_1 + c_2^T x_2 + c_3^T x_3 \\
\text{sujeto a:} & A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 \;\geq\; b_1 \\
& A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 \;\leq\; b_2 \\
& A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 \;=\; b_3 \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0, \quad x_3 \text{ sin restricción de signo.}
\end{array}
$$

Su dual es

$$
\text{(D)}\qquad
\begin{array}{ll}
\text{Max} & w_1^T b_1 + w_2^T b_2 + w_3^T b_3 \\
\text{sujeto a:} & w_1^T A_{11} + w_2^T A_{21} + w_3^T A_{31} \;\leq\; c_1^T \\
& w_1^T A_{12} + w_2^T A_{22} + w_3^T A_{32} \;\geq\; c_2^T \\
& w_1^T A_{13} + w_2^T A_{23} + w_3^T A_{33} \;=\; c_3^T \\
& w_1 \geq 0, \quad w_2 \leq 0, \quad w_3 \text{ sin restricción de signo.}
\end{array}
$$

Todo eso cabe en una tabla, y la tabla es lo único que hay que recordar. Se lee en las dos direcciones: de izquierda a derecha para pasar de un problema de mínimo a su dual de máximo, y de derecha a izquierda para el camino contrario.

	MIN	**MAX**	
	≥ 0	$\leq$	
Variables	≤ 0	$\geq$	**Restricciones**
	sin restricción	$=$	
	$\geq$	≥ 0	
Restricciones	$\leq$	≤ 0	**Variables**
	$=$	sin restricción	

LA IDEA: POR QUÉ LA TABLA ES ESA, Y NO HACE FALTA MEMORIZARLA

Las seis líneas de la tabla son *una* sola idea aplicada seis veces, y la idea es la de la caja del taller: *cuanta menos libertad tiene una pieza en un problema, más libertad tiene su compañera en el otro*.

Mirémoslo con la lectura económica. Una restricción de mínimo del tipo $\geq$ es una *exigencia* («hay que cubrir al menos b_i»): aumentar b_i reduce el conjunto factible y no puede abaratar el mínimo, de ahí el signo $w_i \geq 0$. En una restricción $\leq$, aumentar b_i amplía el conjunto factible y no puede encarecer el mínimo; su multiplicador tiene el signo contrario, $w_i \leq 0$. Y una restricción de *igualdad* no admite ni sobra ni falta: no hay ningún sentido privilegiado, y su precio puede ser de cualquier signo.

Al revés se lee igual de bien. Una variable primal $x_j \geq 0$ solo puede usarse «hacia arriba», así que basta con que su restricción dual la acote por un lado: sale una desigualdad. Una variable libre puede moverse en los dos sentidos, y para que no

> se dispare el objetivo su restricción dual tiene que estar apretada por los dos lados a la vez: sale una *igualdad*. Esta última línea ya se había encontrado en el capítulo 2, al deducir del lema de Farkas la versión con variables libres y no negativas mezcladas: allí las libres producían $u^T B = 0$ y las no negativas $u^T A \leq 0$. Es la misma regla vista antes de tener el vocabulario para nombrarla.

Ejemplo (un dual con las tres clases de restricción)**.** Los dos problemas siguientes son duales el uno del otro:

$$\text{(P)}\qquad \begin{array}{ll} \text{Max} & 8x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeto a:} & x_1 - 6x_2 \;\geq\; 2 \\ & 5x_1 + 7x_2 \;=\; -4 \\ & 3x_1 + 4x_2 \;\leq\; 1 \\ & x_1 \leq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array} \qquad\qquad \text{(D)}\qquad \begin{array}{ll} \text{Min} & 2w_1 - 4w_2 + w_3 \\ \text{sujeto a:} & w_1 + 5w_2 + 3w_3 \;\leq\; 8 \\ & -6w_1 + 7w_2 + 4w_3 \;\geq\; 3 \\ & w_1 \leq 0 \\ & w_2 \text{ sin restricción} \\ & w_3 \geq 0. \end{array}$$

Recorramos la traducción entrada por entrada para comprobar los signos. El primal es de **máximo**, así que se lee la columna MAX de la tabla y se sale por la de MIN.

- *Tres restricciones, tres variables duales.* La primera es $\geq$ en un problema de máximo: la tabla da $w_1 \leq 0$. La segunda es $=$: da w_2 libre. La tercera es $\leq$: da $w_3 \geq 0$.
- *Dos variables, dos restricciones duales.* La variable x_1 es ≤ 0 en un problema de máximo: da una restricción dual de tipo $\leq$, cuya fila son los coeficientes de x_1 en las tres restricciones, $(1, 5, 3)$, y cuyo término independiente es su coste, 8. Sale $w_1 + 5w_2 + 3w_3 \leq 8$. La variable x_2 es ≥ 0: da una restricción $\geq$ con la columna de x_2, que es $(-6, 7, 4)$, y término independiente 3.
- *Los términos independientes cambian de bando.* El vector $b = (2, -4, 1)$ del primal es el vector de costos del dual; el vector $c = (8, 3)$ del primal es el de términos independientes del dual.

EXPLÍCATE. *Escribe el dual del problema* Min $2x_1 + x_2$ *sujeto a* $x_1 + x_2 = 3$, $x_1 - x_2 \leq 1$, $x_1 \geq 0$, x_2 *libre. Comprueba que obtienes dos variables duales, una libre y una* ≤ 0*, y dos restricciones duales, una desigualdad y una igualdad. ¿Cuál de las dos restricciones duales es la igualdad, y por qué?*

Cómo se escribe el dual de un problema dado, paso a paso. La tabla se aplica siempre en el mismo orden, y conviene fijarlo, porque casi todos los errores vienen de mezclar los pasos.

1. *Mirar el sentido del problema.* Si minimiza, se entra en la tabla por la columna MIN y se sale por la MAX; si maximiza, al revés. Todo lo demás depende de esto.
2. *Una variable dual por restricción, con su signo.* Se recorren las restricciones y se lee en la mitad inferior de la tabla el signo de la variable dual de cada una.
3. *Una restricción dual por variable, escrita con su columna.* Para la variable x_j, el miembro izquierdo suma sus coeficientes en todas las restricciones, cada uno multiplicado por la variable dual de su fila. El término independiente es su coste c_j. El sentido lo da la mitad superior de la tabla, según el signo de x_j.
4. *Escribir el objetivo dual*: los términos independientes del primal por las variables duales, con el sentido contrario al del primal.
5. *Comprobar.* Tiene que haber tantas variables duales como restricciones primales, y tantas restricciones duales como variables primales. Si se tiene a mano un punto factible de cada problema, el valor del de máximo no puede superar al del de mínimo.

Un ejemplo con todo mezclado. Sea

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeto a:} & x_1 + x_2 + x_3 \;\geq\; 1 \\ & x_1 - x_3 \;\leq\; 4 \\ & 2x_1 + x_2 \;=\; 3 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0, \quad x_3 \text{ libre.} \end{array}$$

El problema minimiza, así que se entra por la columna MIN (paso 1). Las tres restricciones dan $w_1 \geq 0$, $w_2 \leq 0$ y w_3 libre (paso 2). Las columnas de las variables son $(1,1,2)$, $(1,0,1)$ y $(1,-1,0)$, con costes 2, -1 y 3. La variable $x_1 \geq 0$ da una restricción $\leq$; la variable $x_2 \leq 0$, una $\geq$; la variable libre x_3, una igualdad (paso 3). Con el objetivo del paso 4 queda

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & w_1 + 4w_2 + 3w_3 \\ \text{sujeto a:} & w_1 + w_2 + 2w_3 \;\leq\; 2 \\ & w_1 + w_3 \;\geq\; -1 \\ & w_1 - w_2 \;=\; 3 \\ & w_1 \geq 0, \quad w_2 \leq 0, \quad w_3 \text{ libre.} \end{array}$$

Comprobación (paso 5): tres restricciones y tres variables en cada lado. El punto $x = (2,-1,0)$ cumple el primal y cuesta 5; los precios $w = (3,0,-1)$ cumplen el dual y valen 0; y $0 \leq 5$. De hecho los dos óptimos valen lo mismo, $\frac{3}{2}$, en $x^* = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$ y $w^* = \left(3, 0, -\frac{1}{2}\right)$. Por qué coinciden lo dice la sección siguiente.

Dónde se falla.

- *Entrar por la columna equivocada.* En el ejemplo de las tres clases, que maximiza, la restricción $\geq$ da $w_1 \leq 0$. Leída como si minimizara daría $w_1 \geq 0$, y el dual sería otro problema.
- *Escribir la restricción dual con la fila.* Sus coeficientes se leen en vertical: la de x_1 es $w_1 + w_2 + 2w_3$, porque x_1 aparece con coeficientes 1, 1 y 2 en las tres filas. La primera fila, $(1,1,1)$, no pinta nada ahí.
- *Cambiar de bando b y c.* Los términos independientes del dual son los costes del primal; los términos independientes del primal van al objetivo dual.
- *El signo de una variable ≤ 0.* En un primal de mínimo da una restricción dual $\geq$, no $\leq$. Es la línea de la tabla que más se olvida.
- *Desdoblar una variable libre.* No hace falta: su restricción dual es una igualdad. Desdoblarla en $x_3^+ - x_3^-$ daría dos restricciones, ≤ 3 y ≥ 3, que juntas son la misma igualdad.
- *Pasar a forma canónica y no deshacerlo.* Se puede multiplicar por -1 una restricción $\leq$ para tenerlas todas $\geq$, pero entonces la variable dual de esa fila es la de la tabla cambiada de signo. Mezclar las dos convenciones en el mismo dual da signos incoherentes.

4.1.3 El dual del dual es el primal

Si la dualidad fuese una operación que lleva a alguna parte, aplicarla dos veces llevaría más lejos. No es el caso: aplicarla dos veces devuelve al punto de partida. Esto no es una curiosidad, sino lo que permite hablar de *pares de problemas duales* sin decir cuál es cuál, y lo que ahorra la mitad de las demostraciones del capítulo.

Lema. El dual del dual es el primal.

Toda la prueba consiste en *escribir el dual como si fuera un primal* y aplicarle la definición. Y para escribirlo como primal solo hace falta un cambio de signos, porque maximizar $w^T b$ es minimizar $-b^T w$, y una desigualdad $\leq$ se vuelve $\geq$ al cambiar de signo los dos miembros.

Paso 1: poner el dual en forma canónica de mínimo. Tomemos como problema de partida el dual canónico y reescribámoslo:

$$\begin{array}{lll} \text{Maximizar} & w^T b & \\ \text{sujeto a:} & w^T A \leq c^T & \\ & w \geq 0 & \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{lll} \text{Minimizar} & (-b)^T w & \\ \text{sujeto a:} & (-A)^T w \geq -c & \\ & w \geq 0. & \end{array}$$

Ahora es un problema en forma canónica, con matriz $(-A)^T$, vector de costos $-b$ y términos independientes $-c$.

Paso 2: aplicar la definición canónica (el núcleo, aunque sea una sustitución). El dual de ese problema tiene una variable por cada fila de $(-A)^T$, es decir, n variables, que llamaremos x; maximiza el producto de x por los términos independientes, que ahora son $-c$; y sus restricciones son $x^T(-A^T) \leq (-b)^T$. La matriz $-A^T$ tiene n filas y m columnas, de modo que ambos miembros son filas de longitud m:

$$\begin{array}{lll} \text{Maximizar} & x^T(-c) & \\ \text{sujeto a:} & x^T(-A^T) \leq -b^T & \\ & x \geq 0 & \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{lll} \text{Minimizar} & c^T x & \\ \text{sujeto a:} & Ax \geq b & \\ & x \geq 0, & \end{array}$$

donde la segunda escritura es la primera con los signos cambiados otra vez. Y eso es (P).

Dónde entra cada hipótesis. En ninguna parte se ha usado nada sobre A, b o c: el lema es puramente formal y vale para cualquier par de datos, incluso si los problemas son infactibles. Lo único que se ha usado es que las dos operaciones que traducen un problema de máximo a uno de mínimo — cambiar el signo del objetivo y cambiar el sentido de las desigualdades — son involutivas: aplicadas dos veces, no hacen nada.

Observación. A partir de aquí se trabaja siempre con la **forma canónica** y se habla de *pares de problemas duales*. Todo lo que se diga de (P) vale para (D) sin más que intercambiar los papeles, gracias a este lema. Es la razón de que los teoremas de la sección siguiente se enuncien una sola vez.

El camino que no se tomó: definir el dual como otro problema de mínimo

También se puede escribir el dual como un problema de mínimo, cambiando el signo de su objetivo: minimizar $-w^T b$ equivale a maximizar $w^T b$. Los certificados se conservan, pero hay que recuperar el signo al comparar valores. Si ese objetivo dual vale d y el primal vale p, la desigualdad de dualidad débil se escribe $-d \leq p$.

La convención mínimo–máximo hace visible la comparación directamente: el valor factible dual es una cota inferior y el primal una cota superior. Se elige por esa claridad, no porque la formulación equivalente con dos mínimos pierda información.

CONEXIÓN CON EL LEMA DE FARKAS

El dual no aparece aquí por primera vez. En el capítulo 2, el lema de Farkas decía que, dados A y c, uno y solo uno de estos dos sistemas tiene solución: o bien existe x con $Ax \leq 0$ y $c^T x > 0$, o bien existe $y \geq 0$ con $A^T y = c$. El segundo sistema es *una condición de factibilidad dual*: pide un vector de precios no negativo que explique el vector c como combinación de las filas de A. Y el primero es una dirección por la que el objetivo mejora sin salirse.
Dicho de otro modo: el lema de Farkas ya contenía la dualidad, escrita como una alternativa entre dos sistemas en vez de como una igualdad entre dos óptimos. Lo que hace este capítulo es pasar de «o una cosa o la otra» a «los dos valores coinciden», y la pieza que permite el paso es el teorema de Tucker de la sección 2.3, que es el que se usa en la demostración del teorema fundamental de dualidad.

Qué se ha ganado. La pregunta del taller tiene ya la mitad de la respuesta. La lista de precios que busca el comprador es la solución de un problema lineal, el dual, que se escribe de forma mecánica desde el primal con la tabla de correspondencias, y dualizar dos veces devuelve el punto de partida. En la dieta en miniatura se ha visto además que cualquier oferta aceptable queda por debajo de cualquier plan, y que en el óptimo los dos números coinciden. Falta probar que esas dos cosas pasan siempre, y decir qué ocurre cuando uno de los dos problemas no tiene solución: es la sección siguiente.

4.2 Teoremas de dualidad e interpretación económica del dual

LA PREGUNTA

Un gestor de una red eléctrica afirma que ha encontrado el reparto de generación más barato posible, y que cuesta 17 millones. Comprobar que su reparto es *factible* cuesta un minuto: se suman las columnas y se mira. Pero comprobar que es el *más barato* parecería exigir revisar todos los demás repartos posibles, que son infinitos. ¿Existe algo que el gestor pueda enseñar, del tamaño de un folio, que demuestre que nadie puede hacerlo por menos de 17?

Existe, y es una solución factible del problema dual con ese mismo valor. Toda esta sección consiste en probar que ese certificado existe siempre y en leer qué significan sus números.

4.2.1 Dualidad débil: el certificado

Teorema (de dualidad débil)**.** Si x_0 y w_0 son soluciones factibles de (P) y (D) respectivamente, entonces

$$c^T x_0 \;\geq\; w_0^T b.$$

• CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: EL PAGO POR LOS RECURSOS ACOTA EL BENEFICIO DE FABRICAR

El teorema dice, en la imagen del taller, algo que no necesita cuentas: *cualquier oferta aceptable del comprador es mayor o igual que cualquier beneficio alcanzable fabricando*. La razón es que la aceptabilidad se impuso mueble a mueble, y al sumarla sobre un plan de producción concreto se obtiene la desigualdad global.

En la versión de mínimo que estamos usando, la lectura es la misma con los papeles cambiados: cualquier plan factible cuesta al menos lo que promete cualquier sistema de precios factible. Y la consecuencia práctica es la que se usará todo el capítulo: **cada solución factible del dual es una cota inferior del óptimo primal, y cada solución factible del primal es una cota superior del óptimo dual**. Los dos problemas se acorralan mutuamente, y el hueco entre las dos cotas — lo que se llama el *salto de dualidad* — mide cuánto puede quedar todavía por mejorar.
La demostración es una cadena de dos desigualdades encajadas por el medio, y todo el asunto está en *quién tiene permiso para multiplicar por quién sin cambiar el sentido*: eso lo deciden los signos $w_0 \geq 0$ y $x_0 \geq 0$.

Se trata de acorralar el número $w_0^T A x_0$ por los dos lados, usando una restricción en cada lado.
Paso 1: acotar por abajo con la factibilidad primal. Como $x_0 \in X$ se tiene $Ax_0 \geq b$; y como $w_0 \geq 0$, multiplicar por w_0^T no cambia el sentido de la desigualdad, porque multiplicar una desigualdad componente a componente por números no negativos y sumar la conserva:

$$w_0^T(Ax_0) \;\geq\; w_0^T b.$$

Paso 2: acotar por arriba con la factibilidad dual (el núcleo, porque es donde se usa el signo de x_0). Como $w_0 \in W$ se tiene $w_0^T A \leq c^T$; y como $x_0 \geq 0$, multiplicar por x_0 por la derecha tampoco cambia el sentido:

$$(w_0^T A)x_0 \;\leq\; c^T x_0.$$

Paso 3: encadenar. El número $w_0^T A x_0$ es el mismo en los dos pasos, porque el producto de matrices es asociativo. Encadenando,

$$w_0^T b \;\leq\; w_0^T A x_0 \;\leq\; c^T x_0,$$

que es la tesis.
Dónde entra cada hipótesis. Las dos condiciones de signo son imprescindibles y se usan una en cada paso: $w_0 \geq 0$ en el paso 1 y $x_0 \geq 0$ en el paso 2. Si se permitiera una componente negativa en cualquiera de los dos, la desigualdad correspondiente se daría la vuelta y la cadena se rompería. No se ha usado, en cambio, nada sobre optimalidad: el resultado vale para *cualquier* pareja de soluciones factibles, y esa generalidad es justamente lo que lo hace útil como certificado.

Corolario. Si $x^* \in X$, $w^* \in W$ y además $c^T x^* = (w^*)^T b$, entonces x^* y w^* son soluciones óptimas de (P) y (D) respectivamente. • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

La idea cabe en una línea: *si las dos cotas se tocan, ya no queda sitio para nadie*.
Sea $x \in X$ cualquiera. Por dualidad débil aplicada a la pareja (x, w^*), $c^T x \geq (w^*)^T b = c^T x^*$, luego ningún punto factible del primal mejora a x^*: es óptimo. Simétricamente, sea $w \in W$ cualquiera; por dualidad débil aplicada a (x^*, w), $w^T b \leq c^T x^* = (w^*)^T b$,

luego w^* es óptimo.
Lo que este corolario significa en la práctica. Es el certificado que pedía la pregunta de la sección: para convencer a alguien de que un plan cuesta lo mínimo, basta enseñarle un sistema de precios factible que valga lo mismo. La comprobación es aritmética elemental y no exige rehacer nada. Lo que el corolario *no* dice es que ese certificado exista siempre; eso lo dirá la dualidad fuerte.
Para reconstruirla. Dualidad débil aplicada dos veces, una con cada uno de los dos puntos fijado: si las dos cotas se tocan, ninguna de las dos puede mejorarse.

4.2.2 El teorema fundamental de dualidad lineal

Teorema (fundamental de dualidad lineal)**.** Respecto de (P) y (D), una y solo una de las siguientes afirmaciones es cierta:

(I) (P) y (D) tienen solución óptima finita, x^* y w^*, y entonces $c^T x^* = (w^*)^T b$;
(II) uno de los dos es no acotado y el otro es infactible;
(III) los dos son infactibles.

• CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: UN SOLO VECTOR QUE CONTIENE LOS DOS PROBLEMAS

El enunciado tiene tres casos y la demostración uno solo, y eso es lo que hay que ver antes de leerla.
La idea, en una frase: se meten el primal y el dual dentro de *una sola* matriz antisimétrica K, se le aplica el teorema de Tucker del capítulo 2, y el vector $u \geq 0$ que Tucker devuelve trae, escritos en sus componentes, o bien las dos soluciones óptimas a la vez, o bien la prueba de que uno de los problemas no tiene solución.
¿Por qué antisimétrica, y por qué Tucker? Recúerdese lo que decía aquel teorema: si $K^T = -K$, existe $u \geq 0$ con $Ku \geq 0$ y además $Ku + u > 0$, es decir, un vector no negativo tal que en cada coordenada *o bien u o bien Ku* es estrictamente positivo. Esa alternativa coordenada a coordenada permitirá elegir, cuando ambos problemas sean factibles, una pareja óptima con holgura complementaria fuerte: en cada restricción, o la holgura o el precio será estrictamente positivo. Es una propiedad de esa elección, no de toda pareja óptima.
Y la antisimetría sale sola al escribir juntos los dos problemas. Si se apilan las tres condiciones que uno querría que se cumplieran — factibilidad primal $Ax \geq b$, factibilidad dual $A^T w \leq c$ y coincidencia de valores $b^T w \geq c^T x$ — en un solo sistema, la matriz que aparece es

$$K = \begin{pmatrix} 0 & A & -b \\ -A^T & 0 & c \\ b^T & -c^T & 0 \end{pmatrix},$$

y es antisimétrica *porque el primal y el dual usan la misma matriz A traspuesta y con signo cambiado*. La antisimetría de K no es un truco: es la dualidad misma, escrita en forma de matriz.
La única dificultad real es la variable de más. El vector u tiene una componente extra t_0 que no es ni primal ni dual: es un factor de escala. Si $t_0 > 0$ se puede dividir por él y

se obtienen soluciones de verdad, y sale el caso (i); si $t_0 = 0$, el vector obtenido no da soluciones, sino *direcciones*, y de ahí salen los casos (ii) y (iii). Todo el esfuerzo de la demostración está en esa bifurcación.

Consideremos la matriz $K \in M_{(m+n+1)\times(m+n+1)}$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & A & -b \\ -A^T & 0 & c \\ b^T & -c^T & 0 \end{pmatrix},$$

donde cada 0 es una matriz de ceros del tamaño que corresponda. Es antisimétrica: al trasponer, el bloque A de la primera fila pasa a la primera columna como A^T, y el bloque $-A^T$ de la segunda fila pasa a la segunda columna como $-A$; comparando con $-K$ coinciden todos los bloques.

Paso 1: aplicar Tucker. Por el teorema de Tucker (sección 2.3) existe $u \in \mathbb{R}^{m+n+1}$, $u \geq 0$, $u \neq 0$, tal que $Ku \geq 0$ y $Ku + u > 0$. Escribamos $u^T = (w_0, x_0, t_0)$ con $w_0 \in \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, todos ≥ 0. Desarrollando el producto,

$$Ku = \begin{pmatrix} Ax_0 - t_0 b \\ -A^T w_0 + t_0 c \\ b^T w_0 - c^T x_0 \end{pmatrix} \geq 0, \qquad Ku + u = \begin{pmatrix} Ax_0 - t_0 b + w_0 \\ -A^T w_0 + t_0 c + x_0 \\ w_0^T b - c^T x_0 + t_0 \end{pmatrix} > 0.$$

Llamaremos (1) al primer bloque de desigualdades y (2) al segundo. Son posibles dos casos, según t_0 sea positivo o nulo.

Paso 2, caso $t_0 > 0$: dividir por la escala y leer las soluciones (el núcleo de la prueba). Definamos

$$w^* = \frac{w_0}{t_0} \geq 0, \qquad x^* = \frac{x_0}{t_0} \geq 0.$$

Dividiendo las tres desigualdades de (1) por el número positivo t_0, que no cambia su sentido, queda

$$Ax^* - b \geq 0, \qquad -(w^*)^T A + c^T \geq 0, \qquad (w^*)^T b - c^T x^* \geq 0,$$

es decir, $x^* \in X$, $w^* \in W$ y $(w^*)^T b \geq c^T x^*$. Pero el teorema de dualidad débil dice justo lo contrario, $c^T x^* \geq (w^*)^T b$; las dos desigualdades solo pueden darse a la vez si son igualdades:

$$(w^*)^T b = c^T x^*.$$

Por el corolario de la dualidad débil, x^* y w^* son óptimos, y estamos en el caso (i).

Paso 3, caso $t_0 = 0$: lo que queda son direcciones. Sustituyendo $t_0 = 0$ en (1) y en la tercera componente de (2) se obtiene

$$Ax_0 \geq 0 \ \ (1.1), \qquad -w_0^T A \geq 0 \ \ (1.2), \qquad w_0^T b - c^T x_0 > 0 \ \ (2.3),$$

donde la última es estricta porque en (2) el término t_0 ha desaparecido. Obsérvese que (1.1) y (1.2) no dicen que x_0 o w_0 sean factibles: dicen que son *direcciones* de los respectivos conos homogéneos, es decir, rumbos por los que uno puede alejarse sin

salirse. La desigualdad (2.3) es la que va a producir la contradicción o el problema ilimitado, según el subcaso.

Paso 4, subcaso $X \neq \emptyset$ y $W \neq \emptyset$: imposible. Supongamos que existen $\bar{x} \geq 0$ con $A\bar{x} \geq b$ y $\bar{w} \geq 0$ con $\bar{w}^T A \leq c^T$. Entonces, por un lado,

$$\bar{w}^T(Ax_0) \geq 0 \quad \text{(por (1.1) y } \bar{w} \geq 0), \qquad (\bar{w}^T A)x_0 \leq c^T x_0 \quad \text{(por } \bar{w}^T A \leq c^T \text{ y } x_0 \geq 0),$$

y encadenando, $0 \leq c^T x_0$. Por otro lado,

$$w_0^T(A\bar{x}) \leq 0 \quad \text{(por (1.2) y } \bar{x} \geq 0), \qquad w_0^T(A\bar{x}) \geq w_0^T b \quad \text{(por } A\bar{x} \geq b \text{ y } w_0 \geq 0),$$

y encadenando, $w_0^T b \leq 0$. Juntando las dos conclusiones, $w_0^T b \leq 0 \leq c^T x_0$, es decir, $w_0^T b - c^T x_0 \leq 0$, que contradice (2.3). Luego, *si los dos problemas son factibles, el caso $t_0 = 0$ no puede darse*. Esta frase es la que se reutilizará enseguida para probar la dualidad fuerte.

Paso 5, subcaso $X \neq \emptyset$ y $W = \emptyset$: el primal es ilimitado. Sea $\bar{x} \in X$. La mitad de las cuentas del paso anterior sigue valiendo: de (1.2), $\bar{x} \geq 0$ y $A\bar{x} \geq b$ se sigue $w_0^T b \leq 0$, y con (2.3), $c^T x_0 < w_0^T b \leq 0$. Además, para todo $\lambda \geq 0$,

$$A(\bar{x} + \lambda x_0) = A\bar{x} + \lambda A x_0 \;\geq\; A\bar{x} \;\geq\; b, \qquad \bar{x} + \lambda x_0 \geq 0,$$

usando (1.1) y $\lambda \geq 0$; luego $\bar{x} + \lambda x_0 \in X$ para todo $\lambda \geq 0$: la semirrecta entera es factible. Y su valor objetivo es

$$c^T(\bar{x} + \lambda x_0) = c^T\bar{x} + \lambda\, c^T x_0 \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} -\infty,$$

porque el coeficiente $c^T x_0$ es estrictamente negativo. El problema (P) es ilimitado, y (D) era infactible por hipótesis del subcaso: es el caso (ii). El subcaso simétrico ($X = \emptyset$, $W \neq \emptyset$) se prueba igual intercambiando los papeles, y da también el caso (ii).

Paso 6, subcaso $X = \emptyset$ y $W = \emptyset$. Es directamente el caso (iii).

Como los tres casos del enunciado se excluyen entre sí por su propia redacción (tener óptimo finito, ser ilimitado y ser infactible son situaciones incompatibles), y acabamos de ver que siempre se da alguno, uno y solo uno es cierto.

Dónde entra cada hipótesis. La antisimetría de K es lo único que se necesita para invocar a Tucker, y se ha construido a propósito colocando A y $-A^T$ en posiciones simétricas; con cualquier otra disposición el teorema de Tucker no sería aplicable y la demostración no arrancaría. La condición $Ku + u > 0$ de Tucker, que parece un detalle técnico, es la que da la desigualdad *estricta* (2.3), y sin estrictez el paso 4 no produciría contradicción y el paso 5 no daría un objetivo que tiende a $-\infty$: es, de todo el enunciado de Tucker, la parte que aquí hace el trabajo.

Para reconstruirla. Escríbase la matriz antisimétrica $K = \begin{pmatrix} 0 & A & -b \\ -A^T & 0 & c \\ b^T & -c^T & 0 \end{pmatrix}$, que contiene el primal, el dual y la comparación de valores. Tucker da $u = (w_0, x_0, t_0) \geq 0$ con $Ku \geq 0$ y $Ku + u > 0$. Si $t_0 > 0$, dividir por t_0 produce dos soluciones factibles con $(w^*)^T b \geq c^T x^*$, que con dualidad débil obliga a la igualdad: caso (i). Si $t_0 = 0$, lo que queda son direcciones, y con los dos problemas factibles llevan a contradicción; con uno solo factible, producen una semirrecta a lo largo de la cual el objetivo cae a $-\infty$: caso (ii). Si ninguno es factible, caso (iii).

EXPLÍCATE. *En el paso 4 se han usado cuatro desigualdades y las cuatro se han multiplicado por vectores no negativos. Señala en cada una quién es el vector no negativo que autoriza la multiplicación. Si $\bar{w}$ pudiera tener una componente negativa, ¿cuál de las cuatro fallaría?*

El teorema fundamental con números: dos problemas de una variable. La demostración se entiende mejor viendo a Tucker trabajar en el caso más pequeño posible, con $m = n = 1$: la matriz K es de 3×3 y todo se hace de cabeza. Los dos problemas que siguen solo se distinguen en el signo del coste, y Tucker devuelve en cada uno una cosa de naturaleza distinta.

Primer problema: Min x *sujeto a* $x \geq 1$, $x \geq 0$. Aquí $A = (1)$, $b = (1)$ y $c = (1)$, y el dual es Max w sujeto a $w \leq 1$, $w \geq 0$. Con $u = (w_0, x_0, t_0)$,

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Ku = \begin{pmatrix} x_0 - t_0 \\ t_0 - w_0 \\ w_0 - x_0 \end{pmatrix}.$$

Las tres componentes de Ku suman cero. Si las tres tienen que ser ≥ 0, que es la primera condición de Tucker, son las tres nulas: $x_0 = t_0 = w_0$. Los únicos vectores posibles son $u = s(1,1,1)$, y la segunda condición, $Ku + u = s(1,1,1) > 0$, pide $s > 0$. **Tucker no deja otra salida que** $t_0 > 0$, que es lo que predice el paso 4 cuando los dos problemas son factibles, y aquí lo son: $x = 1$ cumple el primal y $w = 0$ el dual. Dividiendo por $t_0 = s$ sale $x^* = 1$ y $w^* = 1$, con $c^T x^* = 1 = (w^*)^T b$. Es el caso (i), y en efecto el mínimo del primal y el máximo del dual valen 1. La pareja cumple además la holgura complementaria fuerte del apartado siguiente: la restricción primal está apretada ($x^* - 1 = 0$) pero su precio es positivo ($w^* = 1$), y la restricción dual está apretada ($1 - w^* = 0$) pero la variable primal es positiva ($x^* = 1$).

Segundo problema: Min $-x$ *sujeto a* $x \geq 1$, $x \geq 0$. Solo cambia el signo del coste, $c = (-1)$. El dual es Max w con $w \leq -1$ y $w \geq 0$, que es infactible. Ahora

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Ku = \begin{pmatrix} x_0 - t_0 \\ -w_0 - t_0 \\ w_0 + x_0 \end{pmatrix}.$$

La segunda componente, $-(w_0 + t_0) \geq 0$ con $w_0, t_0 \geq 0$, obliga a $w_0 = t_0 = 0$: **Tucker está obligado a devolver** $t_0 = 0$. Queda $u = (0, s, 0)$ con $s > 0$, y $Ku + u = (s, s, s) > 0$. Es el paso 3 de la demostración: $x_0 = s$ no es una solución sino una dirección, porque solo cumple $Ax_0 = s \geq 0$, y la desigualdad estricta (2.3) dice $w_0 b - cx_0 = s > 0$, es decir, $cx_0 = -s < 0$: por esa dirección el objetivo baja. Partiendo del punto factible $\bar{x} = 1$, la semirrecta $1 + \lambda s$ es factible para todo $\lambda \geq 0$ y su valor, $-1 - \lambda s$, cae a $-\infty$. Es el caso (ii): primal ilimitado, dual infactible.

Qué enseñan los dos. El mismo teorema, aplicado a dos matrices que solo difieren en el signo de c, devuelve un punto (se puede dividir por t_0) o una dirección (no se puede). La demostración no tiene que decidir de antemano en qué caso está: lo decide el vector que sale.

4.2.3 Dualidad fuerte

Teorema (de dualidad fuerte)**.** Si (P) y (D) son factibles, entonces existen x^* y w^* soluciones óptimas de (P) y (D) y además $c^T x^* = (w^*)^T b$. • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: EL CERTIFICADO EXISTE SIEMPRE

La dualidad débil decía que cualquier certificado dual es una cota, pero dejaba abierta la pregunta importante: ¿hay siempre un certificado que *ajuste*, es decir, que valga exactamente el óptimo? La dualidad fuerte dice que sí, con la única condición de que los dos problemas sean factibles.
En la imagen del taller: siempre existe una lista de precios que deja indiferente al taller entre vender los recursos y fabricar. No hay «casi óptimos» que se resistan; el salto de dualidad se cierra del todo. Esto es una propiedad fuerte y *no* es cierta en general fuera del mundo lineal: en optimización no lineal el salto de dualidad puede ser estrictamente positivo, y una parte importante de esa teoría consiste en dar condiciones para que no lo sea.
La demostración no cuesta nada porque el trabajo ya está hecho: el paso 4 del teorema anterior probó exactamente que, con los dos problemas factibles, el caso malo $t_0 = 0$ es imposible. Y el caso $t_0 > 0$ era precisamente el que producía las dos soluciones óptimas con el mismo valor.

En la demostración del teorema fundamental se probó (paso 4) que si $X \neq \emptyset$ y $W \neq \emptyset$ entonces no puede darse $t_0 = 0$. Luego $t_0 > 0$, y ese caso es el paso 2, que produce $x^* = x_0/t_0 \in X$ y $w^* = w_0/t_0 \in W$ con $c^T x^* = (w^*)^T b$, óptimos por el corolario de la dualidad débil. Es la afirmación (i) del teorema fundamental.
Para reconstruirla. Con los dos problemas factibles, el caso $t_0 = 0$ del teorema fundamental era imposible; luego $t_0 > 0$, que era justamente el caso que producía las dos soluciones óptimas con el mismo valor.

Otra vía, por el simplex. La anterior es la canónica y se apoya en Tucker. Hay una segunda demostración, más corta y de sabor completamente distinto, que no usa análisis convexo sino el algoritmo del capítulo 3: *la tabla final del simplex ya contiene la solución dual*. Conviene conocerla porque explica de dónde salen, en la práctica, los precios sombra.
Sea (P) escrito en forma estándar y supongamos que el simplex termina con una base óptima B, es decir, con $B^{-1}b \geq 0$ (factible) y con todos los costos reducidos $c_j - z_j = c_j - c_B^T B^{-1} a_j \geq 0$ (óptima). Definimos

$$(w^*)^T = c_B^T B^{-1}.$$

Paso 1: w^* es factible en el dual. La condición de optimalidad $c_j - c_B^T B^{-1} a_j \geq 0$ para toda columna a_j de A se escribe, columna a columna, $c_B^T B^{-1} a_j \leq c_j$; poniéndolo todo junto, $(w^*)^T A \leq c^T$, que es la factibilidad dual. (En la forma canónica, donde el paso a estándar añade las holguras con matriz $-I$, la misma condición aplicada a esas columnas da $c_B^T B^{-1}(-I) \leq 0$ con costos nulos, es decir, $w^* \geq 0$: *la no negatividad de los precios sale de los costos reducidos de las holguras*.)

Paso 2: los dos valores coinciden (el núcleo, y es una línea). La solución primal asociada a la base es $x^* = (B^{-1}b, 0)$, de modo que

$$c^T x^* = c_B^T B^{-1} b = (w^*)^T b.$$

Paso 3: concluir. Por el corolario de la dualidad débil, x^* y w^* son óptimos.
Qué se gana y qué se pierde con esta vía. Se gana que es constructiva: dice *dónde* está w^*, a saber, en la fila de costos reducidos de las columnas de holgura de la tabla final. Se pierde generalidad, porque exige que el simplex termine, cosa que hay que probar aparte y que en presencia de degeneración requiere una regla anticiclado.
Para reconstruirla (por el simplex). Tómese $(w^*)^T = c_B^T B^{-1}$ con B la base óptima. La condición de optimalidad $c_j - c_B^T B^{-1} a_j \geq 0$ *es* la factibilidad dual, y aplicada a las columnas de holgura da $w^* \geq 0$. Y $c^T x^* = c_B^T B^{-1} b = (w^*)^T b$ cierra por el corolario de la dualidad débil.

Observación (la dualidad no es completamente simétrica)**.** Merece la pena escribir con cuidado qué implica qué, porque es donde se cometen más errores de razonamiento:

(P) tiene óptimo finito	$\iff$	(D) tiene óptimo finito
(P) no acotado	$\implies$	(D) infactible
(D) no acotado	$\implies$	(P) infactible
(P) infactible	$\implies$	(D) infactible *o* no acotado
(D) infactible	$\implies$	(P) infactible *o* no acotado

Las dos últimas líneas son las que sorprenden: de que un problema sea infactible **no** se deduce que el otro sea ilimitado. La casuística completa, con las tres situaciones posibles para cada uno, se resume así:

(P) \ **(D)**	Factible acotado	Factible ilimitado	Infactible
Factible acotado	✓		
Factible ilimitado			✓
Infactible		✓	✓

Solo hay cuatro casillas posibles de las nueve, y las cinco vacías lo están por el teorema fundamental.

Ejemplo (los casos de la tabla, con números)**.** Los ejemplos siguientes ilustran tres de las cuatro casillas. La casilla «primal infactible, dual ilimitado» se obtiene intercambiando los papeles en el segundo ejemplo.

1. Los dos con óptimo finito.

$$\text{(P)}\quad \begin{array}{ll} \text{Min} & 4x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a:} & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \text{(D)}\quad \begin{array}{ll} \text{Max} & 2w_1 + w_2 \\ \text{sujeto a:} & w_1 + w_2 \leq 4 \\ & w_1 - w_2 \leq 2 \\ & w_1, w_2 \geq 0 \end{array}$$

2. (P) ilimitado y (D) infactible.

$$\text{(P)}\quad \begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 - x_2 \\ \text{sujeto a:} & -x_1 + x_2 \geq 2 \\ & -x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \text{(D)}\quad \begin{array}{ll} \text{Max} & 2w_1 + w_2 \\ \text{sujeto a:} & -w_1 - w_2 \leq -1 \\ & w_1 + w_2 \leq -1 \\ & w_1, w_2 \geq 0 \end{array}$$

El dual es infactible a simple vista: la segunda restricción pide $w_1 + w_2 \leq -1$ con $w_1, w_2 \geq 0$.

3. Los dos infactibles.

$$\text{(P)}\quad \begin{array}{ll} \text{Min} & -4x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a:} & -x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \text{(D)}\quad \begin{array}{ll} \text{Max} & 2w_1 + w_2 \\ \text{sujeto a:} & -w_1 + w_2 \leq -4 \\ & w_1 - w_2 \leq 2 \\ & w_1, w_2 \geq 0 \end{array}$$

Sumando las dos restricciones del primal sale $0 \geq 3$: infactible. El dual también lo es, porque de la primera restricción se sigue $w_1 - w_2 \geq 4$, incompatible con la segunda.

4. Un infactible cuyo dual no es ilimitado. Es el aviso que hace falta para no extrapolar mal:

$$\text{(P)}\quad \begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 - x_2 \\ \text{sujeto a:} & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & -x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \text{(D)}\quad \begin{array}{ll} \text{Max} & w_1 + w_2 \\ \text{sujeto a:} & w_1 - w_2 \leq -1 \\ & -w_1 + w_2 \leq -1 \\ & w_1, w_2 \geq 0 \end{array}$$

El primal es infactible, porque las dos restricciones piden $x_1 - x_2 \geq 1$ y $x_1 - x_2 \leq -1$. Y el dual, escrito, resulta ser *el mismo problema* con otros nombres, de modo que también es infactible. Estamos en la casilla «infactible-infactible», no en «infactible-ilimitado».

4.2.4 Holgura fuerte

Teorema (de holgura complementaria fuerte)**.** Si (P) y (D) son factibles, entonces existen x^* y w^* óptimos respectivos de (P) y (D) tales que

$$(Ax^* - b) + w^* > 0, \qquad \left(-(w^*)^T A + c^T\right) + (x^*)^T > 0.$$

• CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: PARA CADA RESTRICCIÓN, O HOLGURA O PRECIO, PERO NUNCA LAS DOS AUSENCIAS

La desigualdad estricta dice, coordenada a coordenada, algo muy concreto: *para cada restricción primal, o le sobra margen, o su precio es positivo*. Nunca las dos cosas fallan a la vez, es decir, nunca ocurre que una restricción esté apretada y además su precio sea cero. Lo mismo, cambiando los papeles, para cada variable primal y su restricción dual.

Es un refinamiento de las holguras complementarias que vienen a continuación. Aquellas prohibén que las dos cosas sean positivas a la vez; esta prohibe que las dos sean nulas a la vez, *para una elección adecuada de las soluciones óptimas*. Ese matiz importa: no vale para cualquier pareja de óptimos, sino que hay que elegirlos bien, y por eso el enunciado dice «existen» y no «para todos».

Y el hecho de que exista esa pareja está, otra vez, escrito en el teorema de Tucker: la

condición $Ku + u > 0$, la que parecía un adorno técnico, es exactamente esta afirmación antes de dividir por t_0.

Por dualidad fuerte, si (P) y (D) son factibles existen soluciones óptimas. Recuperamos ahora el bloque (2) de la demostración del teorema fundamental, que decía

$$Ax_0 - bt_0 + w_0 > 0, \qquad -w_0^T A + t_0 c^T + x_0^T > 0, \qquad w_0^T b - c^T x_0 + t_0 > 0.$$

Como $X \neq \emptyset$ y $W \neq \emptyset$, el paso 4 de aquella demostración excluye $t_0 = 0$, luego $t_0 > 0$. Dividiendo las dos primeras desigualdades por $t_0 > 0$, que no altera el sentido estricto, y llamando $w^* = w_0/t_0 \geq 0$ y $x^* = x_0/t_0 \geq 0$, queda

$$Ax^* - b + w^* > 0, \qquad -(w^*)^T A + c^T + (x^*)^T > 0,$$

que es la tesis; y esos x^* y w^* son óptimos por el paso 2 de aquella demostración.
Para reconstruirla. Es la segunda mitad del enunciado de Tucker, $Ku + u > 0$, dividida por t_0; y $t_0 > 0$ está garantizado porque los dos problemas son factibles.

4.2.5 Holguras complementarias

Teorema (de holguras complementarias)**.** Sean (P) y (D) problemas duales en forma canónica y sean x^* y w^* soluciones factibles cualesquiera del primal y del dual. Entonces son óptimas si y solo si
1. $\big((w^*)^T A - c^T\big)x^* = 0$, y
2. $(w^*)^T\big(Ax^* - b\big) = 0$.

• CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: LO QUE SOBRA NO SE PAGA

Las dos condiciones parecen dos ecuaciones y son, en realidad, *dos listas de alternativas*. Mirando la segunda: w^* es no negativo y $Ax^* - b$ también lo es (por factibilidad primal), así que su producto escalar es una suma de términos no negativos; que la suma sea cero obliga a que *cada* término sea cero. Es decir, para cada i,

$$w_i^* = 0 \qquad \text{o bien} \qquad (a^i)^T x^* = b_i.$$

Traducido: **una restricción con holgura tiene precio sombra cero; un precio sombra positivo exige una restricción activa**. Es una valoración marginal del modelo, no una afirmación sobre el precio de mercado de un recurso. La primera condición dice lo mismo con los papeles cambiados: un producto que se fabrica en cantidad positiva ($x_j^* > 0$) tiene que ser exactamente rentable a los precios sombra ($(w^*)^T a_j = c_j$), y un producto cuyos recursos valen menos de lo que cuesta ($(w^*)^T a_j < c_j$) no se fabrica ($x_j^* = 0$).
Esa lectura es la que convierte el teorema en una herramienta de cálculo y no en una curiosidad: conocida la solución de uno de los dos problemas, las alternativas anteriores reducen el sistema que debe satisfacer la del otro. Todavía hay que imponer

factibilidad, y puede haber varias soluciones óptimas. Si se sabe que $x^* = (3, 0, 2)$ resuelve el primal y que la segunda restricción tiene holgura, ya se sabe que $w_2^* = 0$ y que las restricciones duales primera y tercera se cumplen con igualdad: dos ecuaciones y una incógnita menos.

La igualdad clave es la misma cadena de la dualidad débil, ahora leída al revés: *aquella prueba encajaba el número $(w^*)^T A x^*$ entre $(w^*)^T b$ y $c^T x^*$, y las dos condiciones del enunciado dicen precisamente que los dos encajes son ajustados*. Si los dos huecos son cero, los extremos coinciden y hay optimalidad; y al revés, si los extremos coinciden, los dos huecos, que son no negativos y suman la diferencia entre los extremos, tienen que ser nulos.
Paso 1 ($\Leftarrow$): de las dos condiciones sale la optimalidad. Supongamos que se cumplen (1) y (2). Desarrollando la primera, $(w^*)^T A x^* = c^T x^*$; desarrollando la segunda, $(w^*)^T A x^* = (w^*)^T b$. Igualando,

$$(w^*)^T b = c^T x^*,$$

y por el corolario de la dualidad débil, x^* y w^* son óptimos.
Paso 2 ($\Rightarrow$): de la optimalidad salen las dos condiciones (el núcleo, y donde se usa la dualidad fuerte). Supongamos que x^* y w^* son óptimos. Por la dualidad fuerte (los dos problemas son factibles, porque tienen soluciones), $c^T x^* = (w^*)^T b$. Consideremos las dos cantidades

$$\alpha = (w^*)^T (A x^* - b) \geq 0, \qquad \beta = \big(c^T - (w^*)^T A\big) x^* \geq 0,$$

no negativas porque en la primera se multiplican $w^* \geq 0$ y $A x^* - b \geq 0$, y en la segunda $c^T - (w^*)^T A \geq 0$ y $x^* \geq 0$. Su suma es

$$\alpha + \beta = (w^*)^T A x^* - (w^*)^T b + c^T x^* - (w^*)^T A x^* = c^T x^* - (w^*)^T b = 0.$$

Dos números no negativos que suman cero son los dos cero: $\alpha = \beta = 0$, que son las condiciones (2) y (1) del enunciado.
Dónde entra cada hipótesis. La no negatividad de w^* y de x^* y las dos factibilidades se usan exclusivamente para garantizar que α y β son ≥ 0; sin eso, dos números que suman cero no tienen por qué ser nulos y el paso 2 se cae. La forma *canónica* también importa: en forma estándar las restricciones primales son igualdades, $A x^* - b = 0$ idénticamente, y la condición (2) se cumple sola sin decir nada; las holguras complementarias que tienen contenido son entonces las de la lista (1).
Para reconstruirla. Los dos huecos de la cadena de la dualidad débil, $\alpha = (w^*)^T (A x^* - b)$ y $\beta = (c^T - (w^*)^T A) x^*$, son no negativos y suman $c^T x^* - (w^*)^T b$. Si hay optimalidad, esa diferencia es cero por dualidad fuerte y los dos huecos se anulan; y al revés, si los dos huecos se anulan, los valores coinciden y el corolario de la dualidad débil da la optimalidad.

Observación (la forma en que se usan)**.** En la práctica el teorema se aplica siempre desglosado

en cuatro implicaciones, que conviene tener escritas:

$$x_j^* > 0 \implies (w^*)^T a_j = c_j, \qquad (w^*)^T a_j < c_j \implies x_j^* = 0,$$
$$w_i^* > 0 \implies (a^i)^T x^* = b_i, \qquad (a^i)^T x^* > b_i \implies w_i^* = 0,$$

donde a_j es la columna j de A y a^i su fila i. Dicho en palabras: si una variable de un problema es positiva, la restricción correspondiente del otro se cumple con igualdad; y si una restricción de un problema se cumple con holgura, la variable correspondiente del otro es cero.

Las holguras complementarias como método: de x^* a w^*, o a la prueba de que x no es óptimo. El teorema se lee como una pregunta que se puede hacer a cualquier punto factible x: *¿existe un vector de precios factible en el dual que cumpla con x las cuatro implicaciones?* Si existe, los dos son óptimos. Si las implicaciones fuerzan un único candidato y ese candidato no es factible en el dual, no existe ninguno, y x no es óptimo. El método tiene tres pasos.

1. *Anotar qué está apretado y qué no.* Para cada restricción primal, si se cumple con igualdad o con holgura; para cada variable primal, si es positiva o nula.
2. *Traducir a ecuaciones sobre w.* Cada restricción primal con holgura da $w_i = 0$; cada variable primal positiva da la igualdad en su restricción dual, $w^T a_j = c_j$, donde a_j es la *columna* de x_j.
3. *Resolver y comprobar la factibilidad dual.* Resuelto el sistema, se comprueban las condiciones de signo de w y las restricciones duales que no entraron en el sistema. Este paso no se puede saltar: las ecuaciones del paso 2 dicen qué precios *tendría* que haber, no que esos precios sean aceptables.

Con la dieta en miniatura del capítulo 1. El problema es Min $2x_1 + 3x_2$ con $x_1 + 2x_2 \geq 8$, $3x_1 + x_2 \geq 9$ y $x \geq 0$, y su dual, Max $8w_1 + 9w_2$ con $w_1 + 3w_2 \leq 2$, $2w_1 + w_2 \leq 3$ y $w \geq 0$. El punto $(2, 3)$ tiene las dos variables positivas, así que las dos restricciones duales se cumplen con igualdad:

$$w_1 + 3w_2 = 2, \qquad 2w_1 + w_2 = 3 \qquad \implies \qquad w = \left(\tfrac{7}{5},\ \tfrac{1}{5}\right).$$

El vector es no negativo y cumple las dos restricciones duales: es factible, y $(2, 3)$ es óptimo. Son los multiplicadores que el capítulo 1 encontraba resolviendo un sistema, ahora con su nombre: la solución del dual, con valor $8 \cdot \frac{7}{5} + 9 \cdot \frac{1}{5} = 13$.

Ahora el punto factible $(8, 0)$, que cuesta 16. La restricción del nutriente B se cumple con holgura ($24 > 9$), luego $w_2 = 0$; y $x_1 = 8 > 0$ obliga a $w_1 + 3w_2 = 2$, luego $w_1 = 2$. El único candidato es $w = (2, 0)$, y no es factible: la restricción dual de x_2 da $2 \cdot 2 + 0 = 4 > 3$. Luego $(8, 0)$ no es óptimo, y la restricción violada dice incluso por qué. La diferencia $3 - 4 = -1$ es el costo reducido de x_2 en la base de ese vértice: a esos precios, una ración del alimento 2 vale 4 y cuesta 3, y conviene meterla. Con $(0, 9)$ pasa lo mismo: sale $w = (0, 3)$, que incumple la restricción dual de x_1 ($0 + 3 \cdot 3 = 9 > 2$).

Qué hemos aprendido. Las holguras complementarias son a la vez un certificado y un detector: convierten «¿es óptimo este punto?» en un sistema lineal pequeño más una comprobación de signos. Y la restricción dual que falla es la columna que el simplex metería en la base.

Dónde se falla.

- *Emparejar mal.* La variable x_j va con la restricción dual j, la que se escribe con la *columna* a_j; la restricción primal i va con la variable dual w_i.

- *Leer la implicación al revés.* Una variable nula no obliga a que su restricción dual tenga holgura, y un precio nulo no obliga a que su restricción tenga margen. En el ejercicio 4.8, el vértice óptimo tiene sus tres restricciones activas y aun así hay precios óptimos con alguna componente nula.
- *Saltarse el paso 3.* Con $(8,0)$, el sistema da $w=(2,0)$ sin protestar; solo la comprobación de la restricción que no entró en él descubre que el punto no es óptimo.
- *Un vértice degenerado da menos ecuaciones que incógnitas.* En el ejercicio 4.8, $x^*=(1,2,0)$ tiene las tres restricciones activas y solo dos variables positivas: dos ecuaciones para tres precios. Añadiendo los signos y la restricción dual que falta, las soluciones forman todo un segmento de precios óptimos, $u=(-2-t,\ -1-t,\ t)$ con $-1\le t\le 0$, todos con valor -4. No hay error en las cuentas: el dual tiene infinitas soluciones óptimas.
- *Pedir información a una igualdad.* Si la restricción primal i es una igualdad, la condición $w_i\big((a^i)^Tx-b_i\big)=0$ se cumple sola y no dice nada sobre w_i, que es libre.

4.2.6 Interpretación económica: los precios sombra

Ya se ha dicho varias veces que las variables duales son precios. Ahora se puede decir en qué sentido exacto, y demostrarlo.

Teorema (interpretación económica del dual)**.** Fijados A y c, sea $z(b)$ el valor óptimo del problema

$$\begin{array}{ll}\text{Min} & c^Tx\\ \text{sujeto a:} & Ax\ge b,\ x\ge 0.\end{array}$$

Esta función se considera donde el óptimo es finito. Si es finita en un entorno abierto de b y diferenciable en b, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial b_i}=w_i^*,$$

donde w^* es cualquier solución óptima del dual asociado a b. Al vector w^* se le llama **vector de precios sombra**. • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: EL VALOR MARGINAL DE CAMBIAR UNA CONDICIÓN

Un precio sombra mide cuánto cambia el valor óptimo al variar una exigencia o una capacidad del modelo. Puede valorar una hora adicional de quirófano, capacidad en un aeropuerto o terreno disponible, se puedan comprar o no. Es una valoración de esa situación concreta; compararla con un precio de mercado ayuda a estudiar si compensa adquirir más recurso.

La palabra *marginal* importa: w_i^* es una tasa de cambio. Multiplicarla por una variación de b_i da el cambio exacto mientras se permanezca en el mismo tramo lineal; una unidad puede ser demasiado grande para permanecer en él.

Por qué tiene que ser así, antes de la cuenta. Por dualidad fuerte, el valor óptimo del primal es $z(b)=(w^*)^Tb=\sum_i w_i^*b_i$. Es decir, el coste óptimo *se reparte exactamente* entre los recursos, y a cada uno le toca su cantidad multiplicada por su precio. Mientras ese vector w^* siga siendo óptimo, la expresión es lineal en b y tiene derivada w_i^* respecto de b_i: al derivar $\sum_j w_j^*b_j$ respecto de b_i, los sumandos con $j\neq i$ no dependen de b_i y se van, y queda el coeficiente.

El intervalo de validez. Al variar b, puede dejar de ser óptima la base elegida. Eso puede cambiar w^*, aunque un cambio de base no obliga a que cambie el precio. La función z, donde es finita, es convexa y lineal a trozos, y los precios sombra son la pendiente del trozo en que uno está: valen para variaciones pequeñas de b_i, no para cualquiera. Determinar hasta dónde llega el trozo es exactamente el análisis de sensibilidad, que es el último apartado de este capítulo. Al variar una sola coordenada, un quiebro puede dar pendientes laterales distintas. La degeneración puede acompañar esos cambios de base, pero no obliga por sí sola a que exista un quiebro.
La consecuencia de una holgura. Si la restricción i no está activa en un óptimo, las holguras complementarias dan $w_i^* = 0$: relajar esa restricción no mejora el valor óptimo. La implicación inversa no vale en general: una restricción activa también puede tener precio sombra cero.

Sea b un vector de recursos para el que el problema tiene óptimo finito, y sea w^* la solución óptima del dual asociado. Por el teorema de dualidad fuerte,

$$z(b) = c^T x^* = (w^*)^T b = \sum_{j=1}^{m} w_j^* b_j.$$

Mientras la base óptima no cambie, w^* es un vector constante y la expresión anterior es una función lineal de b. Derivando respecto de b_i,

$$\frac{\partial z}{\partial b_i} = \frac{\partial}{\partial b_i}\Big(\sum_{j=1}^{m} w_j^* b_j\Big) = w_i^*.$$

El argumento también vale bajo la hipótesis de diferenciabilidad del enunciado, sin suponer una base fija de antemano. El dual factible no depende de b, por lo que el mismo w^* da, por dualidad débil, para b' cercano,

$$z(b') \geq (w^*)^T b' = z(b) + (w^*)^T (b' - b).$$

La diferencia entre ambos miembros es una función diferenciable con mínimo local en $b' = b$. Su gradiente allí es cero, de donde $\nabla z(b) = w^*$.
La lectura según el sentido del problema. Si (P) minimiza coste con restricciones $Ax \geq b$, donde la fila i representa una demanda que hay que cubrir, w_i^* es el incremento marginal del coste por unidad adicional de demanda. Si el problema es de máximo con restricciones $Ax \leq b$, donde la fila i representa un recurso disponible, w_i^* es el aumento marginal del beneficio por unidad adicional de recurso. El cambio por una unidad completa coincide con ese precio si toda la variación queda dentro del intervalo de validez.
Si hay holgura. Obsérvese que si la restricción i del primal no es activa en el óptimo, es decir, si $\sum_j a_{ij} x_j^* > b_i$, las holguras complementarias dan $w_i^* = 0$, coherente con la derivada: relajar una restricción que ya sobraba no cambia el óptimo.
Para reconstruirla. Por dualidad fuerte, $z(b) = (w^*)^T b$: el valor óptimo es una función *lineal* de los recursos con coeficientes w_i^*, mientras la base óptima no cambie. Derivar una función lineal es leer su coeficiente.

Los precios sombra de la dieta, con números. En la dieta en miniatura, los precios óptimos son $w^* = \left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$, y mientras la base $\{x_1, x_2\}$ siga siendo la óptima el coste mínimo es

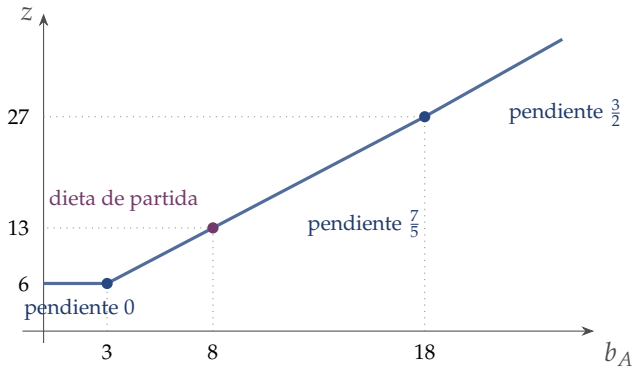
$$z(b_A, b_B) = \tfrac{7}{5}\, b_A + \tfrac{1}{5}\, b_B,$$

que con las exigencias $(8, 9)$ vale 13. Se puede comprobar sin fórmulas. Si se exige una unidad más de A, el vértice óptimo pasa a ser el corte de $x_1 + 2x_2 = 9$ con $3x_1 + x_2 = 9$, que es $\left(\frac{9}{5}, \frac{18}{5}\right)$, y cuesta $\frac{18}{5} + \frac{54}{5} = 14{,}4$: exactamente $\frac{7}{5}$ más. Si se exige una más de B, el vértice es $\left(\frac{12}{5}, \frac{14}{5}\right)$ y cuesta 13,2: $\frac{1}{5}$ más. Las unidades ayudan a leerlos: $w_A^* = \frac{7}{5}$ son *euros por unidad de nutriente A exigida*.

Hasta dónde vale. Con $b_B = 9$ fijo, el vértice formado por las dos rectas es $x = \left(\frac{18 - b_A}{5}, \frac{3b_A - 9}{5}\right)$, y es factible mientras $3 \le b_A \le 18$. Fuera de ese tramo manda otra base, y con ella otro precio. Por encima de 18, la dieta solo usa el alimento 2, y cada unidad más de A cuesta media ración de ese alimento, $\frac{3}{2}$ euros. Por debajo de 3, la manera más barata de cubrir B, que es $(3, 0)$, ya da suficiente A, y exigir un poco más de A no cuesta nada. La función entera es

$$z(b_A) = \operatorname{Max}\left\{\, 6,\ \ \tfrac{7}{5}\, b_A + \tfrac{9}{5},\ \ \tfrac{3}{2}\, b_A \,\right\} \qquad (b_B = 9),$$

y cada uno de los tres trozos es el valor $b_A w_1 + 9w_2$ en un vértice de la región factible del dual: $\left(0, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. El cuarto vértice, el origen, da 0 y nunca gana.



Las pendientes crecen, $0 < \frac{7}{5} < \frac{3}{2}$: cuanto más A se exige, más cara sale la unidad siguiente. Es la convexidad que se demostrará en el análisis de sensibilidad (sección 4.4.2), vista aquí en el caso más pequeño.

Qué hemos aprendido. Un precio sombra es una pendiente con su intervalo. La frase «cada unidad de A cuesta $\frac{7}{5}$» es verdad entre 3 y 18, y falsa fuera: quien la use para pasar de 8 a 20 unidades se equivoca en el coste de las dos últimas.

CONEXIÓN CON LA SALIDA DE UN RESOLVEDOR

Estos multiplicadores son los *dual values* o *shadow prices* que proporcionan los resolvedores de programación lineal. En el apéndice G se utiliza `display restricciones;` para verlos, y en una salida real de un resolvedor dos restricciones tenían precio sombra $-0{,}1\overline{3}$ y $-0{,}2$ y una tercera lo tenía nulo. En ese ejemplo se comprueba además que la tercera tiene holgura: $36{,}8\overline{3} < 48$; su precio cero es consecuencia de ello. Los otros dos precios negativos indican que aumentar esos términos independientes relaja exigencias escritas con signo menos y reduce el coste, dentro de los intervalos de sensibilidad indicados.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: USAR LA DERIVADA DIRECTAMENTE, SIN DUAL

Se podría intentar calcular los precios sombra por fuerza bruta: resolver el problema con b, resolverlo otra vez con $b + \varepsilon e_i$, restar y dividir por ε. Tiene la ventaja de ser una comprobación numérica directa, también utilizable cuando el valor óptimo de un problema no lineal varía de forma regular. Para aproximar todas las componentes exige resolver $m + 1$ problemas, y con ε demasiado grande se salta al trozo siguiente de la función z, dando una pendiente que no es la de este trozo, mientras que con ε demasiado pequeño el cociente puede perder precisión por redondeo. Los multiplicadores duales evitan esas resoluciones adicionales; el intervalo de validez se obtiene mediante el análisis de sensibilidad. En un resolvedor numérico, ambos resultados están sujetos a las tolerancias del cálculo.

Del primal resuelto al dual resuelto: el método completo. Todo lo de esta sección se usa a la vez cuando se tiene la tabla óptima de un problema y se quiere el dual entero: su formulación, su solución, la comprobación de que lo es y lo que dicen sus números. Son cinco pasos, y cada uno descansa en un resultado ya demostrado.

1. *Escribir el dual con la tabla de correspondencias* de la sección 4.1: una variable por restricción, con el signo que da la tabla; una restricción por variable, escrita con la *columna* de esa variable.
2. *Leer w^* en la tabla óptima.* Lo que vale siempre es $(w^*)^T = c_B^T B^{-1}$, y B^{-1} está escrita en la tabla: en las columnas que al empezar formaban la identidad (holguras de las filas $\leq$ y artificiales), ordenadas según las filas originales. Hay un atajo. Una columna auxiliar de coste 0 en la fila i vale $+e_i$ o $-e_i$, y su costo reducido es $0 - (w^*)^T(\pm e_i) = \mp w_i^*$. Luego **bajo una holgura ($+e_i$) se lee $-w_i^*$, y bajo un exceso ($-e_i$) se lee $+w_i^*$.** Bajo una artificial, que también es $+e_i$, calculando con coste 0, se lee $-w_i^*$.
3. *Comprobar.* Los signos de w^* tienen que ser los de la tabla de correspondencias; las restricciones duales tienen que cumplirse; y tiene que ser $(w^*)^T b = c^T x^*$. Con eso, el corolario de la dualidad débil certifica que los dos son óptimos.
4. *Holguras complementarias, en las dos direcciones.* Cada variable primal positiva, con su restricción dual activa; cada precio no nulo, con su restricción primal activa; cada restricción primal con holgura, con su precio nulo.
5. *Interpretar cada precio* con tres cosas: su signo, sus unidades y su intervalo de validez. En un problema de mínimo, una exigencia ($\geq$) tiene precio ≥ 0 y exigir más encarece; una capacidad ($\leq$) tiene precio ≤ 0 y disponer de más abarata; una igualdad puede tener precio de cualquier signo.
   Un ejemplo con los tres tipos de restricción. Sea

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \\ \text{sujeto a:} & 2x_1 + 2x_2 \;\geq\; 3 & \text{(exigencia)} \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \;\leq\; 7 & \text{(capacidad)} \\ & 2x_2 + 2x_3 \;=\; 4 & \text{(cantidad fija)} \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. & \end{array}$$

En forma estándar, x_4 es el exceso de la primera fila (columna $-e_1$) y x_5 la holgura de la segunda ($+e_2$); para empezar hacen falta artificiales en la primera y en la tercera fila, x_6 ($+e_1$) y x_7 ($+e_3$). La tabla óptima, conservando las columnas de las artificiales como se hace a

menudo, es

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2}$
$c_j - z_j$	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{4}{3}$	6

con $x^* = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y $z^* = 6$. Los costos reducidos de las artificiales están calculados con coste 0.

Paso 1. La primera restricción es $\geq$ en un mínimo: $w_1 \geq 0$. La segunda es $\leq$: $w_2 \leq 0$. La tercera es una igualdad: w_3 libre. Las tres variables son ≥ 0: tres restricciones duales de tipo $\leq$, con las columnas $(2,3,0)$, $(2,2,2)$ y $(0,2,2)$:

$$\begin{array}{lll} \text{Max} & 3w_1 + 7w_2 + 4w_3 & \\ \text{sujeto a:} & 2w_1 + 3w_2 \leq 1, \qquad 2w_1 + 2w_2 + 2w_3 \leq 4, & \qquad 2w_2 + 2w_3 \leq 2, \\ & w_1 \geq 0, \quad w_2 \leq 0, \quad w_3 \text{ libre.} & \end{array}$$

Paso 2. La identidad inicial estaba en las columnas de x_6, x_5 y x_7, por este orden de filas, así que

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \qquad (w^*)^T = c_B^T B^{-1} = (1,4,2)\, B^{-1} = \left(1,\ -\tfrac{1}{3},\ \tfrac{4}{3}\right).$$

Con el atajo sale lo mismo sin multiplicar: bajo el exceso x_4 se lee $1 = w_1^*$; bajo la holgura x_5, $\frac{1}{3} = -w_2^*$; bajo la artificial x_7, $-\frac{4}{3} = -w_3^*$. Los números negativos bajo las artificiales *no* dicen que la tabla deje de ser óptima: esas columnas ya no forman parte del problema, y solo se usan para leer precios.

Paso 3. Signos: $w_1^* = 1 \geq 0$, $w_2^* = -\frac{1}{3} \leq 0$, y w_3^* es libre. Restricciones duales: $2 - 1 = 1 \leq 1$, $2 - \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = 4 \leq 4$ y $-\frac{2}{3} + \frac{8}{3} = 2 \leq 2$. Valores: $3 \cdot 1 + 7\left(-\frac{1}{3}\right) + 4 \cdot \frac{4}{3} = 6 = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{2}$. Los dos son óptimos.

Paso 4. Las tres variables primales son positivas, y las tres restricciones duales se acaban de ver activas. Los precios w_1^* y w_2^* no son nulos, y sus restricciones primales son activas: $2 + 1 = 3$ y $3 + 1 + 3 = 7$. La tercera fila es una igualdad y no pide nada.

Paso 5. El precio $w_1^* = 1$ dice que subir la exigencia $b_1 = 3$ una unidad sube el coste mínimo en una unidad. El precio $w_2^* = -\frac{1}{3}$ dice que cada unidad más de capacidad $b_2 = 7$ lo baja $\frac{1}{3}$. Y $w_3^* = \frac{4}{3}$ dice que mover la cantidad fija $b_3 = 4$ cuesta $\frac{4}{3}$ por unidad hacia arriba y ahorra $\frac{4}{3}$ por unidad hacia abajo. Los intervalos en que valen se calculan en la sección 4.4.2, y son $b_1 \in [2,6]$, $b_2 \in \left[4, \frac{17}{2}\right]$ y $b_3 \in \left[\frac{5}{2}, 7\right]$. Con ellos se contesta la pregunta «¿qué dato conviene cambiar?». Por unidad, bajar b_3 es lo que más ahorra. En total, sin salir de los intervalos, bajar b_3 hasta $\frac{5}{2}$ ahorra 2; bajar b_1 hasta 2 ahorra 1; y subir b_2 hasta $\frac{17}{2}$ ahorra $\frac{1}{2}$. Más allá de esos extremos los precios cambian, y hay que reoptimizar.

Dónde se falla.

- *El signo de la lectura rápida.* Bajo una holgura se lee $-w_i^*$ y bajo un exceso $+w_i^*$. Quien lo olvide obtiene $w_2^* = +\frac{1}{3}$, y la comprobación de signos del paso 3 lo delata: una capacidad en un problema de mínimo no puede tener precio positivo.
- *Los números bajo las artificiales.* Un $-\frac{4}{3}$ en esa fila no manda pivotar: la columna no pertenece al problema.

- *Leer precios en una tabla que no es óptima.* Si algún costo reducido de una variable del problema es negativo, $c_B^T B^{-1}$ incumple su restricción dual; si lo que falla es $\bar{b} \geq 0$, es factible en el dual pero no óptimo. Antes de leer nada hay que comprobar las dos cosas. Es la trampa del ejercicio 4.11.
- *El orden de B^{-1}.* Sus columnas van por las filas originales (e_1, e_2, e_3); sus filas, por el orden de las básicas en la tabla. Aquí la identidad inicial estaba en x_6, x_5, x_7, no en x_5, x_6, x_7.
- *Saltarse $(w^*)^T b = c^T x^*$.* Es la comprobación más barata de todas, y la única que caza a la vez un error de signo y uno de cuentas.
- *Interpretar sin intervalo.* El precio es una pendiente con su tramo, como en la dieta: fuera del intervalo, otro precio.

Qué se ha ganado. La pregunta del gestor tiene respuesta. El folio que demuestra que nadie lo hace por menos de 17 es una solución factible del dual que valga 17: la dualidad débil dice que certifica, y la fuerte, que existe siempre que el óptimo sea finito. El teorema fundamental dice además qué pasa cuando no lo es, y no hay más casos que los de su tabla. Las holguras complementarias convierten el certificado en un sistema de ecuaciones, y los precios sombra le dan significado: son las pendientes del valor óptimo respecto de los recursos. Quedan dos cosas: un algoritmo que aproveche que los dos problemas se resuelven a la vez (sección 4.3) y el cálculo de los intervalos en que valen los precios (sección 4.4).

4.3 Algoritmo del simplex dual

LA PREGUNTA

Un comedor social tiene que diseñar un menú que cubra unas exigencias nutricionales mínimas al menor coste posible. Hay dos maneras opuestas de buscarlo. Una es partir de un menú que ya cumple todo, aunque sea carísimo, e ir abaratando sin dejar de cumplir nunca. La otra es partir del menú más barato imaginable — no dar de comer nada, que cuesta cero — e ir añadiendo lo imprescindible, gastando lo mínimo en cada paso aunque durante todo el camino el menú siga siendo ilegal. ¿Llegan las dos al mismo sitio? ¿Y hay alguna razón para preferir empezar por el menú ilegal y barato en vez de por el legal y caro?

Los problemas de dieta estuvieron entre las primeras aplicaciones de la programación lineal. Aquí sirven para comparar los dos algoritmos. La primera es el método del simplex del capítulo 3, que se mueve siempre por puntos factibles y va bajando el costo. La segunda es el **simplex dual**, que es el objeto de esta sección: se mueve siempre por puntos que cumplen la condición de optimalidad y va subiendo el costo hasta que, en el último paso, se vuelve factible.

LA IDEA: CAMINAR POR FUERA MANTENIENDO LA OPTIMALIDAD

Conviene fijar la imagen antes de ver una sola fórmula, porque toda la sección es esa imagen.

Una solución básica del problema tiene dos propiedades que puede cumplir o no:

- ser **factible**, es decir, $\bar{b} = B^{-1} b \geq 0$: las cantidades que propone no son negativas y

respetan las restricciones;
- cumplir la **condición algebraica de optimalidad**, es decir, tener todos los costos reducidos $c_j - z_j \geq 0$: no hay ninguna columna que, al entrar, abarate el objetivo.

El punto que se busca cumple las dos. El método del simplex del capítulo anterior arranca de una base factible y conserva la factibilidad mientras busca satisfacer la segunda condición: el coste no aumenta. El simplex dual parte de una base que cumple la segunda condición y la conserva mientras busca factibilidad primal: la cota dual no disminuye. Si la base inicial ya cumple ambas condiciones, cualquiera de los dos termina sin pivotar.

Y aquí está lo que hay que ver, porque es lo que da nombre al algoritmo. El teorema que se demuestra a continuación muestra que cumplir la condición algebraica de optimalidad del primal equivale a obtener el vector de precios factible en el dual. Los dos algoritmos son entonces el mismo algoritmo mirado desde los dos lados, usando las bases complementarias del par primal–dual. En el esquema, «COND. OPTIM.» significa cumplir el criterio algebraico, no ser ya una solución óptima:

$$\begin{array}{ccc} \text{(P) básica FACTIBLE} & \xrightarrow{\text{simplex}} & \text{(P) COND. OPTIM.} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \text{(D) COND. OPTIM.} & \xleftarrow{\text{simplex dual}} & \text{(D) básica FACTIBLE} \end{array}$$

Leer ese diagrama de izquierda a derecha es el simplex; leerlo de derecha a izquierda, subiendo por la columna de la derecha, es el simplex dual. La ganancia práctica sale sola: hay problemas para los que encontrar un punto factible cuesta tanto como resolverlos — por eso hizo falta una fase I entera en el capítulo 3 — y en cambio encontrar un punto que cumpla la condición de optimalidad suele estar regalado: si todos los costos son no negativos, la base de holguras ya la cumple, y más abajo se ve en dos líneas por qué. El menú vacío es inmejorable en precio; lo único que le pasa es que no alimenta a nadie.

La intuición falsa que hay que desmontar antes de seguir. Uno tiende a pensar que las tablas intermedias del simplex dual son soluciones peores del problema, como lo eran las del simplex. No lo son: **no son soluciones del problema en absoluto**. Tienen componentes negativas, violan restricciones, y si alguien las leyera como un plan de producción estaría leyendo un disparate. Lo único que conservan es la condición de optimalidad, que es una propiedad de los *precios*, no de las cantidades. El algoritmo camina por fuera de la región factible, y solo al terminar obtiene un punto factible. El valor primal de esas bases puede subir porque está mejorando la cota dual; puede también permanecer igual en un paso degenerado.

DE DÓNDE VIENE: LA DIETA DE STIGLER Y EL VINAGRE DE DANTZIG

El problema del menú no es un ejemplo de libro. En 1945 el economista George Stigler publicó el cálculo de la dieta más barata capaz de cubrir nueve requerimientos nutricionales a partir de setenta y siete alimentos, una pregunta que la guerra había puesto sobre la mesa en muchos países. Stigler no disponía todavía de ningún método general — el simplex es de 1947 — y trabajó descartando combinaciones con criterios heurísticos hasta dar con una dieta de 39,93

dólares al año. Escribió con honradez que no podía demostrar que fuera la mejor. Dos años más tarde, un equipo de nueve calculistas con máquinas de mesa resolvió el mismo problema con el simplex recién inventado, en unas ciento veinte jornadas de trabajo: el óptimo verdadero era 39,69. Stigler se había quedado a veinticuatro centavos.
Dantzig cuenta también el reverso cómico del asunto. Al probar el método sobre su propia dieta, con las restricciones puestas a la ligera, la primera solución óptima le prescribió una cantidad desmesurada de vinagre al día; acotado el vinagre, la siguiente recetó centenares de pastillas de caldo concentrado; acotadas también, salvado e hígado en cantidades industriales. La anécdota se cuenta como chiste, pero dice algo serio que este libro repite: *el modelo es tan bueno como sus restricciones*, y un óptimo matemático impecable sobre un modelo incompleto es una respuesta impecablemente inútil.

4.3.1 La base óptima del primal da una solución factible del dual

Todo el algoritmo cuelga del siguiente resultado, que ya se ha usado implícitamente al leer la solución del dual en la tabla final del simplex y que ahora se enuncia y se demuestra.

Teorema (del simplex dual)**.** Sean (P) y (D) el par primal-dual en forma canónica,

$$\begin{array}{llll} \text{(P)} & \text{Min} & c^T x & \\ & \text{sujeto a:} & Ax \geq b,\ x \geq 0, & \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \text{(D)} & \text{Max} & w^T b & \\ & \text{sujeto a:} & w^T A \leq c^T,\ w \geq 0, & \end{array}$$

y sea B una base del problema escrito en forma estándar. Entonces:

i) si B es base **óptima** del primal, es decir, si $c_j - z_j \geq 0$ para todo j, el vector $(w^*)^T = c_B^T B^{-1}$ es solución **factible** del dual;

ii) si además B es **factible**, es decir, si $B^{-1}b \geq 0$, entonces $(w^*)^T = c_B^T B^{-1}$ es solución **óptima** del dual.

• CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: LA PALABRA «ÓPTIMA» CAMBIA DE DUEÑO

El enunciado desconcierta la primera vez porque llama «base óptima» a una base que quizá ni siquiera es factible, y entonces no es óptima de nada. Es un abuso de lenguaje consagrado y conviene traducirlo: *óptima* aquí significa *cumple la condición algebraica de optimalidad*, $c_j - z_j \geq 0$, sin prometer que la solución básica asociada sirva para nada. Lo que dice el teorema es que esa condición, que en el primal es una promesa a medias, en el dual es una realidad completa: es *exactamente* la factibilidad dual. La misma desigualdad, leída en un problema, es «no hay columna que mejore»; leída en el otro, es «estos precios son aceptables».

La prueba entera consiste en escribir la condición $c_j - z_j \geq 0$ para todas las columnas, incluidas las de las variables de holgura, y leer lo que dice cada bloque.
Paso 1: poner (P) en forma estándar sin perder de vista las holguras. El primal canónico $Ax \geq b$, $x \geq 0$ se escribe en forma estándar restando una variable de holgura por restricción,

$$Ax - x_H = b, \qquad x \geq 0,\ x_H \geq 0,$$

es decir, con matriz $[A \mid -I]$ y vector de costos $(c, 0)$. Sea B una base de esa matriz y sea $w^T = c_B^T B^{-1}$. Obsérvese que w no es un objeto nuevo: es la fila de multiplicadores

que ya se usaba en el capítulo 3 para calcular $z_j = c_B^T B^{-1} a_j$.
Paso 2: las columnas originales dan las restricciones del dual (el núcleo de la prueba). Para $j = 1, \ldots, n$, la columna j de $[A \mid -I]$ es a_j, la columna j de A. La condición de optimalidad en esa columna es

$$c_j - z_j = c_j - c_B^T B^{-1} a_j = c_j - w^T a_j \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad w^T a_j \leq c_j.$$

Recorriendo todas las columnas, eso es exactamente $w^T A \leq c^T$: las restricciones del dual. Aquí está todo el teorema; lo que sigue es contabilidad.
Paso 3: las columnas de holgura dan el signo de w. La columna de la holgura i-ésima es $-e_i$, y su costo es 0. Su costo reducido es

$$0 - c_B^T B^{-1}(-e_i) = +\, c_B^T B^{-1} e_i = w_i \; \geq 0.$$

Es decir, **la restricción de signo $w \geq 0$ la producen las variables de holgura**, igual que ocurría al comprobar en la sección 4.1 que la definición canónica y la estándar coinciden. Con los pasos 2 y 3, w cumple $w^T A \leq c^T$ y $w \geq 0$: es factible en (D), y queda probado i).
Paso 4: si además hay factibilidad primal, los dos valores coinciden. Si $\bar{b} = B^{-1} b \geq 0$, el vector x^* con $x_B^* = B^{-1} b$ y $x_N^* = 0$ es factible en (P), y

$$c^T x^* = c_B^T B^{-1} b = w^T b.$$

Hay entonces un par de soluciones factibles, una de cada problema, con el mismo valor objetivo. Por el corolario del teorema de dualidad débil (sección 4.2), las dos son óptimas. Queda probado ii).
Dónde ha entrado cada hipótesis. La optimalidad ($c_j - z_j \geq 0$) se ha usado dos veces y para dos cosas distintas: en las columnas originales, para las restricciones del dual; en las columnas de holgura, para el signo de w. La factibilidad ($B^{-1} b \geq 0$) no se ha usado en absoluto en i), y esa es justamente la puerta por la que entra el algoritmo: se puede tener un vector dual factible sin tener todavía ninguna solución primal.
Para reconstruirla. $c_j - z_j \geq 0$ en las columnas de A *es* $w^T A \leq c^T$, y en las columnas de holgura *es* $w \geq 0$, con $w^T = c_B^T B^{-1}$. Eso es i). Para ii), basta observar que si también $B^{-1} b \geq 0$ los dos valores objetivos coinciden y se aplica el corolario de la dualidad débil.

Observación (dónde se lee w^* en la tabla, y el susto de los signos)**.** El paso 3 deja escrita una regla de lectura que se usará constantemente a partir de aquí:

> *el costo reducido de la variable de holgura de la restricción i es w_i^*.*

Conviene fijarse en que esa regla es inmune a cómo se haya preparado la restricción. Una desigualdad $a^i x \geq b_i$ se puede poner en forma estándar de dos maneras: restando holgura, $a^i x - x_{H_i} = b_i$, o cambiando de signo la fila entera y sumándola, $-a^i x + x_{H_i} = -b_i$. En la segunda, la matriz básica queda multiplicada por -1 en esa fila y $c_B^T B^{-1}$ sale con el signo cambiado; pero la columna de la holgura también cambia de $-e_i$ a $+e_i$, y los dos cambios se cancelan. **El número que aparece en la fila de costos reducidos, debajo de la holgura de la fila i, es w_i^* en los dos casos.** Es un buen sitio para equivocarse, y por eso conviene

comprobarlo siempre con la dualidad débil: si $w^T b$ no coincide con $c^T x$, hay que revisar los signos y las cuentas.

4.3.2 Qué hacer cuando la base es óptima pero no factible

Ya se tiene el punto de partida. En lo que sigue, A incluye las columnas de holgura y n cuenta todas las variables de la forma estándar. Sea B una base con $c_j - z_j \geq 0$ para todo j. Hay dos casos.

Caso 1: $\bar{b} = B^{-1}b \geq 0$. No hay nada que hacer. La solución $x^* = (B^{-1}b,\, 0)$ es factible y óptima del primal, y w^*, leída en los costos reducidos de las holguras, es factible y óptima del dual.

Caso 2: existe $\bar{b}_r < 0$. La base actual no sirve como solución. Hay que cambiarla, y el cambio tiene que respetar dos cosas a la vez: *no perder* la condición de optimalidad (la factibilidad dual) y hacer que la cota dual no disminuya. Elegida una componente negativa $\bar{b}_r$, sale su variable básica x_{B_r}. Queda decidir quién entra; la posibilidad de pasos sin mejora estricta se tratará al hablar de convergencia.

Sea $(y_{r1}, \ldots, y_{rn})$ la fila r-ésima de $B^{-1}A$, es decir, la fila de la tabla del simplex correspondiente a la variable que sale.

Lema (criterio de infactibilidad)**.** Si $y_{rj} \geq 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$, entonces (P) es infactible, y (D) es ilimitado.

LA IDEA: UNA FILA ENTERA QUE NO PUEDE SUMAR NEGATIVO

La fila r de la tabla dice, leída como ecuación, que $\sum_j y_{rj} x_j = \bar{b}_r$. Si todos los coeficientes y_{rj} son mayores o iguales que cero y todas las variables también, el miembro de la izquierda es una suma de cosas no negativas y no hay manera humana de que dé un número negativo. Pero el miembro de la derecha *es* negativo. La ecuación no tiene solución no negativa, y como es una consecuencia de $Ax = b$, tampoco la tiene el sistema entero. No hace falta buscar más: el problema no tiene ningún punto factible.

Paso 1: trasladar la infactibilidad a una sola ecuación (el núcleo de la prueba). Por reducción al absurdo, supóngase que existe $x \geq 0$ con $Ax = b$. Multiplicando por B^{-1},

$$B^{-1}Ax = B^{-1}b = \bar{b} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} B^{-1}a_j\, x_j = \bar{b} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} y_j\, x_j = \bar{b},$$

donde $y_j = B^{-1}a_j$ es la columna j de la tabla. Tomando la componente r-ésima de esa igualdad vectorial queda la ecuación escalar

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\, x_j = \bar{b}_r.$$

Paso 2: contar signos. Por hipótesis $y_{rj} \geq 0$ para todo j, y $x_j \geq 0$ por ser x factible; luego el miembro izquierdo es ≥ 0. Pero $\bar{b}_r < 0$. Contradicción. Por tanto no existe tal x y (P) es infactible.

Paso 3: y entonces el dual es ilimitado. El dual no puede ser infactible: por el apartado i) del teorema anterior, la base actual cumple $c_j - z_j \geq 0$ y por tanto $w^T = c_B^T B^{-1}$ es

un punto factible del dual. Un dual factible cuyo primal es infactible tiene que ser ilimitado, por la tabla de casos de la sección 4.2.
Para reconstruirla. La fila r de la tabla es una ecuación válida del sistema; si todos sus coeficientes son ≥ 0 y su término independiente es < 0, no admite solución no negativa. Y como el dual es factible por construcción, la única casilla disponible es «primal infactible, dual ilimitado».

El criterio, con números. Sea Min $x_1 + x_2$ con $x_1 + x_2 \geq 3$, $x_1 + x_2 \leq 2$ y $x \geq 0$, que pide a la vez una suma de al menos 3 y de a lo sumo 2. Cambiando de signo la primera fila y sumando holguras, $-x_1 - x_2 + x_3 = -3$ y $x_1 + x_2 + x_4 = 2$. La base de holguras tiene costos reducidos $(1, 1, 0, 0) \geq 0$ y $\bar{b} = (-3, 2)$. Sale x_3; en su fila $(-1, -1, 1, 0)$ los dos cocientes valen -1, y entra x_1. Tras pivotar, las filas son

$$x_1 + x_2 - x_3 = 3, \qquad x_3 + x_4 = -1,$$

con costos reducidos $(0, 0, 1, 0)$. La fila de x_4 tiene todos sus coeficientes no negativos y término independiente -1: el lema dice que no hay punto factible. La fila se lee sola: $x_3 = x_1 + x_2 - 3$ es lo que sobra en la primera restricción y $x_4 = 2 - x_1 - x_2$ lo que sobra en la segunda, y dos sobrantes no negativos no pueden sumar -1. Es la misma cuenta que sumar las dos restricciones y llegar a $0 \geq 1$. El dual, Max $3w_1 + 2w_2$ con $w_1 + w_2 \leq 1$, $w_1 \geq 0$ y $w_2 \leq 0$, es ilimitado: los precios $(t, -t)$ son factibles para todo $t \geq 0$ y valen t.

Descartado ese caso, existe algún $y_{rk} < 0$ y se puede pivotar. Queda por decidir cuál, y la decisión es la parte fina del algoritmo.

Proposición (criterio de entrada del simplex dual)**.** Sea B una base con $c_j - z_j \geq 0$ para todo j, sea $\bar{b}_r < 0$ y supóngase que existe $y_{rj} < 0$ para algún j. Sea k un índice donde se alcanza

$$\frac{c_k - z_k}{y_{rk}} = \operatorname{Max}\left\{ \frac{c_j - z_j}{y_{rj}} \;:\; y_{rj} < 0 \right\}. \tag{4.1}$$

Al pivotar sobre y_{rk} — entra x_k, sale x_{B_r} — se obtiene una base B' que:

i) sigue cumpliendo la condición de optimalidad, $c_j - z'_j \geq 0$ para todo j;

ii) tiene valor objetivo primal $z' = z + (c_k - z_k)\dfrac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \geq z$, es decir, el valor objetivo del dual no disminuye.

LA IDEA: EL COCIENTE MÁS SUAVE ES EL QUE NO ROMPE NADA

La regla (4.1) tiene la misma forma que el test del cociente mínimo del simplex, y no es casualidad: es el mismo test, visto en el dual. Aquí lo que hay que proteger no es la factibilidad primal (que ya está rota) sino los costos reducidos, y la amenaza tiene un aspecto muy concreto. Al pivotar, cada costo reducido se mueve una cantidad proporcional a $c_k - z_k$; los que están en peligro de bajar de cero son exactamente los de las columnas con $y_{rj} < 0$, y el que primero llegaría a cero es el de cociente mayor. Eligiendo *ese*, uno se queda justo en el borde: ese costo reducido se hace cero — no negativo — y los demás se quedan por encima. Es la misma idea de «avanzar hasta el primer obstáculo, ni un paso más» que gobierna todo el simplex.
Hay que fijarse en que el máximo se toma sobre números *no positivos*: $c_j - z_j \geq 0$ y

$y_{rj} < 0$, luego los cocientes son ≤ 0. El máximo de números no positivos es el más próximo a cero, es decir, *el menor en valor absoluto*. Escrito así, $\left|\frac{c_k - z_k}{y_{rk}}\right| = \text{Min}\left\{\left|\frac{c_j - z_j}{y_{rj}}\right| : y_{rj} < 0\right\}$, la analogía con el test del cociente mínimo es literal.

Se trata de calcular los costos reducidos nuevos y ver que la regla (4.1) es precisamente la que los deja no negativos.
Paso 1: cómo cambian los datos al pivotar. Al entrar x_k y salir x_{B_r}, el vector de costos básicos cambia solo en su componente r-ésima, que pasa de c_{B_r} a c_k:

$$c_{B'} = c_B + (c_k - c_{B_r})\, e_r.$$

Y las columnas de la tabla se transforman con las fórmulas de pivotaje del capítulo 3:

$$y'_{ij} = \begin{cases} y_{ij} - \dfrac{y_{ik}}{y_{rk}}\, y_{rj}, & i \neq r, \\ \dfrac{y_{rj}}{y_{rk}}, & i = r. \end{cases}$$

Paso 2: la fórmula de actualización de los costos reducidos (el núcleo de la prueba). Escribiendo $z'_j = \sum_{i=1}^{m} c_{B'_i}\, y'_{ij}$ y sustituyendo,

$$\begin{aligned} z'_j &= \sum_{i \neq r} c_{B_i}\left(y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj}\right) + c_k \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \\ &= \left(z_j - c_{B_r} y_{rj}\right) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}\left(z_k - c_{B_r} y_{rk}\right) + c_k \frac{y_{rj}}{y_{rk}}, \end{aligned}$$

donde se ha usado $\sum_{i \neq r} c_{B_i} y_{ij} = z_j - c_{B_r} y_{rj}$ y lo mismo con k. Los dos términos en c_{B_r} se cancelan y queda

$$z'_j = z_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k - c_k) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{c_j - z'_j = (c_j - z_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}\,(c_k - z_k).}$$

Toda la proposición cabe en esa igualdad: el costo reducido de la columna j se desplaza una cantidad proporcional al costo reducido de la columna que entra, con constante de proporcionalidad y_{rj}/y_{rk}.
Paso 3: las columnas inofensivas. Si $y_{rj} \geq 0$, entonces $y_{rj}/y_{rk} \leq 0$ porque $y_{rk} < 0$; y como $c_k - z_k \geq 0$, el término que se resta es ≤ 0. Luego $c_j - z'_j \geq c_j - z_j \geq 0$. Esas columnas no solo no molestan: *mejoran*.
Paso 4: las columnas peligrosas, y por qué la regla (4.1) *las salva.* Si $y_{rj} < 0$, la elección de k da

$$\frac{c_k - z_k}{y_{rk}} \;\geq\; \frac{c_j - z_j}{y_{rj}}.$$

Multiplicando por y_{rj}, que es *negativo*, la desigualdad se invierte:

$$\frac{y_{rj}}{y_{rk}}\,(c_k - z_k) \;\leq\; c_j - z_j \qquad \Longrightarrow \qquad c_j - z'_j = (c_j - z_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}(c_k - z_k) \;\geq\; 0.$$

Con los pasos 3 y 4 queda probado i). Obsérvese que en la propia columna k la fórmula da $c_k - z'_k = (c_k - z_k) - 1 \cdot (c_k - z_k) = 0$, como tiene que ser: x_k ha pasado a ser básica.

Paso 5: el valor objetivo empeora en el primal, luego mejora en el dual. Al cambiar de base, la variable x_{B_r}, que valía $\bar{b}_r < 0$, pasa a ser no básica y vale 0; la variable x_k, que valía 0, pasa a valer

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} > 0$$

(cociente de dos números negativos). Con la fórmula de variación del objetivo del capítulo 3,

$$z' = z + (c_k - z_k)\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \;\geq\; z,$$

porque $c_k - z_k \geq 0$ y $\bar{b}_r / y_{rk} > 0$. En un problema de mínimo, subir el objetivo es empeorar; pero por el teorema anterior $z = c_B^T B^{-1} b = w^T b$ es también el valor objetivo del *dual*, que es de máximo. Lo mismo, en el dual, es

$$(w')^T b = w^T b + (c_k - z_k)\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \;\geq\; w^T b :$$

mejora. Queda probado ii).

Qué se rompe si se quita una hipótesis. Si se elige k sin respetar (4.1), el paso 4 falla y algún costo reducido se hace negativo: se pierde la factibilidad dual, que es lo único que se tenía, y el algoritmo se queda sin nada. Si se elige una fila r con $\bar{b}_r \geq 0$, el paso 5 falla: $\bar{b}_r / y_{rk} \leq 0$ y el objetivo dual no aumenta, con lo que el algoritmo puede dar vueltas indefinidamente.

Para reconstruirla. Una sola fórmula, $c_j - z'_j = (c_j - z_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}(c_k - z_k)$, y dos casos según el signo de y_{rj}: si es positivo el costo reducido sube solo; si es negativo, la regla del máximo cociente es exactamente la que impide que baje de cero. El objetivo se mueve $(c_k - z_k)\bar{b}_r / y_{rk} \geq 0$, que en el dual es una mejora.

4.3.3 El algoritmo

Con los dos resultados anteriores el algoritmo se escribe solo.

Algoritmo del simplex dual.

Paso 0. Partir de una base B del problema en forma estándar tal que $c_j - z_j = c_j - c_B^T B^{-1} a_j \geq 0$ para todo j.

Paso 1. Calcular $\bar{b} = B^{-1} b$.

- Si $\bar{b} \geq 0$: ALTO. La solución óptima es $(x^*)^T = (\bar{b}^T, 0^T)$ y $(w^*)^T = c_B^T B^{-1}$.
- Si no, elegir la fila r donde se alcanza $\text{Min}\{\bar{b}_i\}$. Sale x_{B_r}.

Paso 2. Calcular la fila r-ésima de $B^{-1}A$, es decir, $y_{rj} = e_r^T B^{-1} a_j$.

- Si $y_{rj} \geq 0$ para todo j: ALTO. Primal infactible, dual ilimitado.
- Si no, elegir la columna k que alcanza $\dfrac{c_k - z_k}{y_{rk}} = \text{Max}\left\{\dfrac{c_j - z_j}{y_{rj}} : y_{rj} < 0\right\}$. Pivotar sobre y_{rk} y volver al paso 1.

Observación (si el problema es de maximizar)**.** La condición de optimalidad de un problema de máximo es $c_j - z_j \leq 0$, no ≥ 0. Para que el paso 4 de la demostración anterior siga

funcionando hay que tomar en el paso 2 el **mínimo** en lugar del máximo. Las dos reglas se dejan escribir en una sola, y es la forma que conviene memorizar porque no depende del sentido del problema:

$$\left|\frac{c_k - z_k}{y_{rk}}\right| = \text{Min}\left\{\left|\frac{c_j - z_j}{y_{rj}}\right| \;:\; y_{rj} < 0\right\}.$$

Observación (cómo se consigue el paso 0, que es lo único que parece un truco)**.** El paso 0 pide una base con todos los costos reducidos no negativos, y la pregunta natural es de dónde sale. La respuesta habitual es tan barata que sorprende. Si el problema es

$$\text{Min } c^T x \quad \text{sujeto a: } Ax \geq b,\ x \geq 0, \qquad \text{con } c \geq 0,$$

bástese con cambiar de signo cada restricción y añadir su holgura, $-Ax + x_H = -b$, para tener como base la identidad $B = I$, con $c_B = 0$ y por tanto $c_j - z_j = c_j \geq 0$ para todo j. Es el menú vacío de la pregunta que abre la sección: la base de holguras cumple ya la condición de optimalidad, porque no producir nada no puede abaratarse, y es infactible en cuanto algún b_i sea positivo, porque no cubre ninguna demanda. Todo el trabajo lo hace después el algoritmo.

La condición $c \geq 0$ aparece en muchos modelos de costes, aunque un coste neto puede ser negativo. Cuando no se cumple, esta base de holguras no sirve de inicio: hay que encontrar otra base dual factible o realizar una fase de inicialización. Su territorio natural, con diferencia el más frecuente, es el otro: **reoptimizar**. Cuando ya se tiene una tabla óptima y algo cambia en el problema de manera que la factibilidad se rompe pero la optimalidad no, el paso 0 está regalado. Eso es exactamente lo que ocurre en el apartado siguiente al perturbar el vector de recursos o al añadir una restricción, y lo que ocurrirá en el capítulo 5 cada vez que se añada un corte de Gomory.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: ESCRIBIR EL DUAL Y APLICARLE EL SIMPLEX DE SIEMPRE

Puesto que lo que se quiere es resolver el dual, lo más directo parecería ser escribirlo explícitamente, montar su tabla y aplicarle el método del simplex del capítulo anterior, sin inventar ningún algoritmo nuevo. Es una vía legítima y a veces se hace; su ventaja es que no hay nada nuevo que aprender.

El simplex dual evita construir y traducir una tabla distinta: trabaja con la tabla primal y conserva la información de su base. Esto resulta útil al reoptimizar después de añadir una restricción, operación que corresponde a añadir una variable en el dual. Trabajar con el dual explícito también permite actualizar su tabla; no exige recalcularla entera. La ventaja de la versión presentada aquí es aprovechar directamente la tabla primal que ya se tiene.

Observación (convergencia y pasos degenerados)**.** Si el objetivo dual aumenta estrictamente en cada iteración, ninguna base puede repetirse; como hay un número finito de bases, el algoritmo termina. Si $c_k - z_k = 0$ en la columna que entra, el objetivo no cambia y ese argumento no basta para excluir ciclos.

La garantía general requiere una regla anticiclado completa, por ejemplo una regla lexicográfica para el simplex dual. Elegir el menor índice solo entre los empates de la regla anterior no constituye, por sí solo, esa garantía. La prueba de terminación con una regla anticiclado no se desarrolla aquí.

4.3.4 Un ejemplo completo, y lo que enseña su dibujo

Ejemplo. Resúelvase con el simplex dual

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{sujeto a:} & x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

Por qué este problema pide el simplex dual. Al pasarlo a forma estándar restando holguras, la base de holguras de $[A \mid -I]$ da $x_H = -b < 0$ y no es factible. El simplex primal necesitaría otra base factible, encontrada directamente o mediante una fase I. En cambio los tres costos son positivos, así que el paso 0 del simplex dual está servido. Se cambian de signo las dos filas y se les suma su holgura:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 3 \iff -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 4 \iff -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4. \end{array}$$

Tabla inicial. Base $B = (a_4, a_5) = I$, $c_B = (0, 0)$.

	2	3	4	0	0	
x_4	-1	-2	-1	1	0	-3
x_5	-2	1	-3	0	1	-4
$c_j - z_j$	2	3	4	0	0	0

Todos los costos reducidos son ≥ 0: base dual factible. Pero $\bar{b} \not\geq 0$: no es una solución del problema.

Primera iteración. $\text{Min}\{\bar{b}_i\} = -4$, en la fila de x_5: sale x_5. Su fila es $(-2, 1, -3, 0, 1)$, con entradas negativas en las columnas 1 y 3. Los cocientes son

$$\frac{c_1 - z_1}{y_{51}} = \frac{2}{-2} = -1, \qquad \frac{c_3 - z_3}{y_{53}} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3},$$

y el máximo es -1: entra x_1. Pivotando sobre $y_{51} = -2$:

	2	3	4	0	0	
x_4	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	-1
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	2
$c_j - z_j$	0	4	1	0	1	4

Los costos reducidos siguen siendo ≥ 0, como prometía la proposición; el valor objetivo ha pasado de 0 a 4, es decir, *ha empeorado* para el primal y mejorado para el dual. Y $\bar{b}$ sigue teniendo una componente negativa.

Segunda iteración. Sale x_4, cuya fila es $(0, -\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$, con entradas negativas en las columnas 2 y 5. Los cocientes son

$$\frac{4}{-5/2} = -\frac{8}{5}, \qquad \frac{1}{-1/2} = -2,$$

y el máximo es $-\frac{8}{5}$: entra x_2. Pivotando sobre $y_{42} = -\frac{5}{2}$:

	2	3	4	0	0	
x_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
x_1	1	0	$\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{11}{5}$
$c_j - z_j$	0	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{28}{5}$

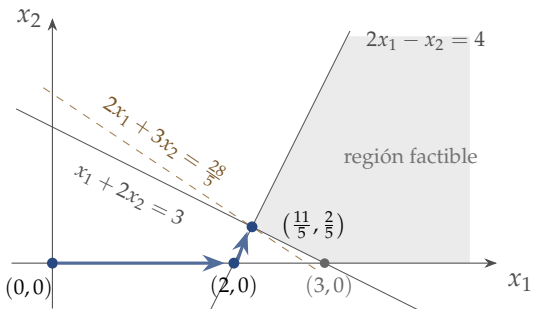
Ahora $\bar{b} \geq 0$ y los costos reducidos son ≥ 0: alto. La tabla dice tres cosas.

- La solución óptima del primal es $(x^*)^T = \left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$, con valor óptimo $z^* = \frac{28}{5}$. Se comprueba directamente: $\frac{11}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} = 3$ y $2 \cdot \frac{11}{5} - \frac{2}{5} = 4$, las dos restricciones se cumplen con igualdad, y $2 \cdot \frac{11}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{28}{5}$.
- La solución óptima del dual se lee en los costos reducidos de las holguras: $(w^*)^T = \left(\frac{8}{5}, \frac{1}{5}\right)$, con el mismo valor $\frac{28}{5}$. También se comprueba: $3 \cdot \frac{8}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{28}{5}$, y las tres restricciones duales son $\frac{8}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} = 2 \leq 2$, $2 \cdot \frac{8}{5} - \frac{1}{5} = 3 \leq 3$ y $\frac{8}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{11}{5} \leq 4$.
- Por holguras complementarias, las dos restricciones del primal y las dos primeras del dual son activas, y la tercera del dual no lo es, en correspondencia con $x_3^* = 0$.

El dibujo, que es lo que de verdad enseña el ejemplo. La tercera variable vale cero en las tres tablas. Para representar esos puntos tomamos la sección $x_3 = 0$ de la región factible, no su proyección; en ese plano queda

$$\text{Min } 2x_1 + 3x_2 \quad \text{sujeto a: } x_1 + 2x_2 \geq 3,\ 2x_1 - x_2 \geq 4,\ x \geq 0,$$

y las tres bases recorridas corresponden a los puntos $(0,0)$, $(2,0)$ y $\left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right)$.



Los dos primeros puntos están **fuera** de la región factible: $(0,0)$ no cumple ninguna de las dos desigualdades y $(2,0)$ solo cumple la segunda. Son intersecciones de dos rectas del sistema, igual que los vértices, pero de las que quedan del lado prohibido. El costo va subiendo, $0 \to 4 \to \frac{28}{5}$, y la infactibilidad va bajando, de dos restricciones violadas a una y de una a ninguna. El último paso es el que entra en la región, y entra directamente por el vértice óptimo.

Compárese con lo que haría el simplex del capítulo anterior: tras una fase I para encontrar un punto factible, bajaría por dentro de la región desde ese punto hasta $\left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right)$. Dos caminos distintos, uno por fuera y otro por dentro, y el mismo óptimo en este ejemplo. En general, ambos algoritmos alcanzan el mismo valor óptimo, aunque puedan terminar en puntos distintos si hay varias soluciones óptimas.

Observación (el otro vértice, y por qué el algoritmo no pasó por él)**.** La región factible de la figura tiene dos vértices, $\left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right)$ y $(3,0)$, y dos direcciones extremas, $(1,0)$ y $(1,2)$. Como $c^T(1,0) = 2 > 0$ y $c^T(1,2) = 8 > 0$, el teorema fundamental de la programación lineal

(sección 3.2) garantiza óptimo finito alcanzado en un vértice, y basta comparar los dos: $\frac{28}{5} = 5{,}6$ frente a 6. El simplex dual no llegó a visitar $(3, 0)$ porque no lo necesitaba: su criterio de entrada no compara vértices factibles, sino que elige en cada paso la columna que no rompe los precios.

Dónde se falla con el simplex dual.

- *Tomar el cociente más negativo.* En la primera iteración del ejemplo, entrar x_3, con cociente $-\frac{4}{3}$, en vez de x_1, con -1, deja $c_1 - z_1 = 2 - \frac{-2}{-3} \cdot 4 = -\frac{2}{3} < 0$: se pierde la factibilidad dual, que era lo único que se tenía. Se elige el cociente más próximo a cero.
- *Pivotar sobre una entrada positiva de la fila.* Solo las negativas sirven: con una positiva, la variable que entra tomaría el valor $\bar{b}_r / y_{rk} < 0$.
- *Leer mal el final.* Una fila con término negativo y sin entradas negativas no significa «ilimitado»: significa primal infactible, y el ilimitado es el dual.
- *No cambiar de signo las filas $\geq$.* Sin ese cambio, las holguras aparecen con columna $-e_i$, la base de holguras es $-I$ y no la identidad, y leer la tabla como si fuera I da los signos de $\bar{b}$ al revés.
- *Leer una tabla intermedia como un plan.* Tiene componentes negativas: no es una solución de nada hasta la última tabla.

CONEXIÓN CON LO QUE VIENE: EL SIMPLEX DUAL COMO HERRAMIENTA DE REPARACIÓN

Este algoritmo se ha presentado como una manera de resolver un problema desde cero, y sirve para eso; pero su uso principal es otro. En el apartado siguiente, al perturbar el vector de recursos b o al añadir una restricción, la tabla óptima que ya se tenía conserva sus costos reducidos — que no dependen de b — y pierde la factibilidad. Esa es, palabra por palabra, la situación del paso 0. En el capítulo 5 pasará lo mismo: cada corte de Gomory añade una fila que la solución actual no cumple, y el simplex dual permite reoptimizar aprovechando la tabla anterior, sin un número prefijado de pivotajes. Vale la pena guardar esta frase: **cuando se estropea la factibilidad, simplex dual; cuando se estropea la optimalidad, simplex**.

Qué se ha ganado. Las dos maneras de buscar el menú de la pregunta llegan al mismo coste mínimo, y a veces por puntos distintos. El simplex dual arranca del menú vacío, barato e ilegal; cada pivotaje sube la cota dual sin perder la condición de optimalidad, y termina en un óptimo o en un certificado de infactibilidad. Empezar por ahí compensa en dos situaciones. La primera es cuando la base de partida sale gratis, como con costos no negativos y restricciones $\geq$, y se ahorra la fase I. La segunda, la más frecuente, es cuando se repara una tabla óptima a la que se le ha estropeado la factibilidad: es lo que se hace en la sección siguiente.

4.4 Análisis de sensibilidad y post-optimalidad

LA PREGUNTA

Los datos de un modelo pueden cambiar: precios, capacidades o previsiones de demanda. Una decisión sensible a esos cambios necesita interpretarse con ese margen de incertidumbre. ¿Se puede saber, aprovechando la tabla óptima, hasta dónde puede variar un dato sin que cambie la base óptima? ¿Y qué hay que hacer, exactamente, cuando el dato se pasa de ese margen?

El análisis de sensibilidad y la post-optimalidad estudian cómo aprovechar una solución ya calculada cuando cambian los datos.

Son cuatro las modificaciones que interesan, y este apartado las recorre en este orden:

- **estimaciones**: cambios en el vector de costos c;
- **restricciones no rígidas**: cambios en el vector de recursos b;
- **factores no tenidos en cuenta**: añadir una nueva variable, o añadir una nueva restricción.

LA IDEA: DOS MANERAS DE TOCAR UN PROBLEMA, Y SOLO DOS COSAS QUE SE PUEDEN ROMPER

Antes de ninguna fórmula conviene tener el mapa entero, porque con él las cuatro cuentas de este apartado se reducen a una sola idea.

Una tabla óptima del simplex es óptima porque cumple dos condiciones a la vez, y ya se ha insistido en ellas al presentar el simplex dual: la **factibilidad**, $\bar{b} = B^{-1}b \geq 0$, y la **optimalidad**, $c_j - z_j \geq 0$. Ahora obsérvese de qué depende cada una:

Condición	**Fórmula**	**Depende de**
Factibilidad	$B^{-1}b \geq 0$	de b, y no de c
Optimalidad	$c_j - c_B^T B^{-1} a_j \geq 0$	de c, y no de b

Manteniendo fija la matriz y la base, eso reparte el trabajo en dos casos:

- **Tocar los costos** no puede hacer infactible nada. Lo único que puede romper es la optimalidad. Cuando se rompe, se repara con el **simplex**, que es el algoritmo que arregla la optimalidad conservando la factibilidad.
- **Tocar los recursos** no puede cambiar ningún costo reducido. Lo único que puede romper es la factibilidad. Cuando se rompe, se repara con el **simplex dual**, que es el algoritmo que arregla la factibilidad conservando la optimalidad.

Y las dos modificaciones restantes son casos de esas dos. Añadir una variable añade una columna, es decir, un costo reducido nuevo: amenaza la optimalidad, y se repara con el simplex. Añadir una restricción añade una fila, es decir, una componente nueva de $\bar{b}$: amenaza la factibilidad, y se repara con el simplex dual.

La imagen geométrica, que es la que hay que llevarse. En el plano, cambiar los costos puede **girar** o escalar el vector c dejando el poliedro quieto; cambiar los recursos es **desplazar** una recta del poliedro dejando c quieto. Al girar c, el vértice óptimo no se mueve *hasta que* el giro es tan grande que otro vértice lo alcanza: por eso hay un intervalo de giro permitido y no un solo valor. Al desplazar una recta, el vértice óptimo *sí* se mueve, deslizando a lo largo de la otra recta activa, y sigue siendo el óptimo hasta que tropieza con una tercera restricción. Las dos cuentas de este apartado son esas dos frases escritas con álgebra.

4.4.1 Cambio en el vector de costos

Se estudia la perturbación del vector de costos a lo largo de una dirección fija d:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & (c^T + \lambda d^T)x \\ \text{sujeto a:} & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{array}$$

y se buscan las soluciones óptimas $x^*(\lambda)$ y los valores óptimos $z^*(\lambda)$ como función de λ. Se parte de una base B óptima para $\lambda = 0$, con $x_B(0) = B^{-1}b \geq 0$, $x_N(0) = 0$ y valor $z(0)$.

Proposición (rango de validez de la base ante un cambio de costos)**.** Con la notación anterior, escríbase $\hat{z}_j = d_B^T B^{-1} a_j$ para $j \in NB$. La base B sigue siendo óptima exactamente para los λ del intervalo

$$\lambda_1 = \text{Max}_{j\in NB}\left\{-\frac{c_j - z_j}{d_j - \hat{z}_j} \;:\; d_j - \hat{z}_j > 0\right\} \;\leq\; \lambda \;\leq\; \text{Min}_{j\in NB}\left\{-\frac{c_j - z_j}{d_j - \hat{z}_j} \;:\; d_j - \hat{z}_j < 0\right\} = \lambda_2,$$

con el convenio de que un máximo sobre el conjunto vacío vale $-\infty$ y un mínimo sobre el conjunto vacío vale $+\infty$. Dentro del intervalo, la solución básica asociada se mantiene óptima, $x^*(\lambda) = x^*(0)$, aunque pueda haber otros óptimos. El valor óptimo es la función afín $z^*(\lambda) = z(0) + \lambda\, d_B^T \bar{b}$. • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: UN CONO DE COSTOS ALREDEDOR DE CADA VÉRTICE

La fórmula asusta y la imagen no.

Fíjese un vértice $\hat{x}$ del poliedro y pregúntese *para qué vectores de costo es ese vértice el óptimo*. La respuesta es geométrica y muy limpia: para los c que forman ángulo no obtuso con todas las aristas que salen de $\hat{x}$, es decir, para los c tales que avanzar por cualquier arista, incluidas las no acotadas, no abarata. Ese conjunto es una intersección de semiespacios que pasan por el origen: un **cono convexo de costos**. Es el cono normal con el signo adecuado para minimizar, opuesto al convenio de normales exteriores. En un politopo, los conos de los vértices cubren el espacio de costos; en un poliedro no acotado puede haber costos para los que el objetivo sea ilimitado.

Si la base es no degenerada, su intervalo de optimalidad se lee en ese cono. Con una base degenerada, el punto puede seguir siendo óptimo después de que esa base pierda el criterio algebraico: otra base del mismo punto puede certificar su optimalidad.

La geometría explica por qué aparece un intervalo. El vector de costos perturbado, $c + \lambda d$, recorre una **recta** en el espacio de costos cuando λ recorre $\mathbb{R}$. Una recta que empieza dentro de un cono convexo sale de él a lo sumo por dos sitios, uno por cada lado; los valores de λ para los que sigue dentro forman un intervalo, y λ_1 y λ_2 son sus extremos. Nada más.

Siempre $\lambda_1 \leq 0 \leq \lambda_2$, porque la base es óptima en $\lambda = 0$. En un extremo finito del intervalo se anula algún costo reducido. Si permite avanzar una distancia positiva sin cambiar el objetivo, aparecen otros óptimos, como en el ejemplo siguiente. Con degeneración, el costo reducido nulo puede corresponder solo a un cambio de base sin mover el punto. Por ejemplo, $x_1 + x_2 = 0$, $x \geq 0$, tiene un único punto factible: ningún costo reducido nulo puede crear otro óptimo.

Paso 1: escribir los costos reducidos nuevos. El problema perturbado tiene vector de costos $c + \lambda d$, y su parte básica es $c_B + \lambda d_B$. Los costos reducidos de las columnas no básicas son, por definición,

$$(c_N^T + \lambda d_N^T) - (c_B^T + \lambda d_B^T)B^{-1}N = \underbrace{(c_N^T - c_B^T B^{-1}N)}_{\text{los de antes}} + \lambda \underbrace{(d_N^T - d_B^T B^{-1}N)}_{\text{lo que añade } d}.$$

Componente a componente, y con la abreviatura $\hat{z}_j = d_B^T B^{-1} a_j$, eso es

$$(c_j - z_j) + \lambda\,(d_j - \hat{z}_j), \qquad j \in NB.$$

Obsérvese lo importante: **cada costo reducido es una función afín de** λ, con ordenada en el origen el costo reducido antiguo y con pendiente $d_j - \hat{z}_j$.
Paso 2: imponer la optimalidad, recta a recta (el núcleo de la prueba). La base sigue siendo óptima si y solo si todas esas funciones afines son no negativas. Una función afín $\alpha + \lambda\beta$ con $\alpha \geq 0$ es no negativa:

- para todo λ, si $\beta = 0$: esa columna no dice nada;
- para $\lambda \geq -\alpha/\beta$, si $\beta > 0$: esa columna pone una **cota inferior**;
- para $\lambda \leq -\alpha/\beta$, si $\beta < 0$: esa columna pone una **cota superior**.

Reuniendo todas las cotas inferiores con un máximo y todas las superiores con un mínimo se obtiene exactamente el intervalo $[\lambda_1, \lambda_2]$ del enunciado.
Paso 3: dentro del intervalo no cambia nada más que el valor. La factibilidad no depende de c: $B^{-1}b$ es el mismo. Luego la solución básica asociada a B es la misma, $x^*(\lambda) = x^*(0)$, y sigue siendo óptima. Su valor es

$$z^*(\lambda) = (c_B + \lambda d_B)^T B^{-1} b = c_B^T \bar{b} + \lambda\, d_B^T \bar{b} = z(0) + \lambda\, d_B^T \bar{b},$$

una función afín de λ con pendiente $d_B^T \bar{b}$.
Dónde ha entrado cada hipótesis. La optimalidad en $\lambda = 0$ garantiza $c_j - z_j \geq 0$, que es lo que hace que 0 pertenezca al intervalo. La factibilidad no se ha usado en el paso 2 en absoluto, y por eso el intervalo no depende de b.
Para reconstruirla. Cada costo reducido es la recta $(c_j - z_j) + \lambda(d_j - \hat{z}_j)$; exigir que todas esas rectas estén por encima de cero es cortar el eje λ con un intervalo, cuyos extremos son los cocientes $-\frac{c_j - z_j}{d_j - \hat{z}_j}$ repartidos según el signo de la pendiente.

Qué hacer fuera del intervalo. Para $\lambda > \lambda_2$ o $\lambda < \lambda_1$ algún costo reducido se ha hecho negativo: se ha perdido la optimalidad, pero no la factibilidad. Se recalculan los costos reducidos para el nuevo valor de λ y se continúa con el simplex desde esa base. En un seguimiento paramétrico se puede pivotar ya en el extremo del intervalo, donde el costo reducido correspondiente es cero, para preparar el tramo siguiente. La tabla no hay que rehacerla: el bloque central, que es $B^{-1}A$, no depende de c.

Observación (el caso que más se usa: cambiar un solo costo)**.** La dirección d más frecuente con diferencia es $d = e_k$, es decir, mover un único costo c_k dejando los demás quietos. Merece la pena particularizar la proposición, porque las fórmulas quedan más cortas y más fáciles de recordar, y porque los dos casos que salen son cualitativamente distintos.

Si x_k es no básica. Entonces $d_B = 0$, luego $\hat{z}_j = 0$ para todo j, y $d_j = 0$ salvo $d_k = 1$. La única

condición es $(c_k - z_k) + \lambda \geq 0$, es decir,

$$\lambda \;\geq\; -(c_k - z_k).$$

En palabras: **el costo de una variable no básica puede subir cuanto se quiera, y puede bajar exactamente su costo reducido**. Tiene todo el sentido: si algo no se está produciendo, encarecerlo conserva esta solución óptima. Abaratarlo más que su costo reducido hace que esta base pierda el criterio algebraico de optimalidad; si es degenerada, eso no obliga a que el punto deje de ser óptimo.

Si x_k es básica, digamos $k = B_r$. Entonces $d_B = e_r$, luego $\hat{z}_j = e_r^T B^{-1} a_j = y_{rj}$, y $d_j = 0$ para toda j no básica. La condición es $(c_j - z_j) - \lambda\, y_{rj} \geq 0$ para todo $j \in NB$, es decir,

$$\operatorname{Max}\left\{ \frac{c_j - z_j}{y_{rj}} \;:\; y_{rj} < 0 \right\} \;\leq\; \lambda \;\leq\; \operatorname{Min}\left\{ \frac{c_j - z_j}{y_{rj}} \;:\; y_{rj} > 0 \right\}.$$

Aquí intervienen **todos** los costos reducidos, con los coeficientes de la fila r como pesos, porque cambiar el costo de una variable básica cambia c_B y con ello todos los z_j a la vez. Y ahora el valor óptimo sí se mueve: $d_B^T \bar{b} = \bar{b}_r = x_k^*$, luego $z^*(\lambda) = z(0) + \lambda\, x_k^*$, que dice lo evidente: si sube el precio unitario de algo que se está produciendo, el costo total sube proporcionalmente a cuánto se produce.

Ejemplo. Estúdiese la variación del vector de costos a lo largo de $d^T = (2, 1)$ en

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 - 3x_2 \\ \text{sujeto a:} & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Con holguras x_3 y x_4, la tabla óptima es

	-1	-3	0	0	
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4
$c_j - z_j$	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	-14

con $x^* = (2, 4)$ y $z^* = -14$. Las columnas no básicas son las de las holguras, y su bloque es $B^{-1}N = B^{-1}$. Como $d_B = (2, 1)$ y $d_N = (0, 0)$,

$$d_N^T - d_B^T B^{-1} N = (0,0) - (2,1) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \left(-\tfrac{5}{3},\; \tfrac{1}{3}\right),$$

de modo que los dos costos reducidos, como funciones de λ, son

$$\left(\tfrac{5}{3},\; \tfrac{2}{3}\right) + \lambda\left(-\tfrac{5}{3},\; \tfrac{1}{3}\right) \;\geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} \frac{5}{3} - \frac{5}{3}\lambda \geq 0 & \Longrightarrow\; \lambda \leq 1 = \lambda_2, \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\lambda \geq 0 & \Longrightarrow\; \lambda \geq -2 = \lambda_1. \end{cases}$$

Para $-2 \leq \lambda \leq 1$ la solución óptima sigue siendo $(2, 4)$, con valor $z^*(\lambda) = -14 + \lambda\, d_B^T \bar{b} = -14 + \lambda(2 \cdot 2 + 1 \cdot 4) = -14 + 8\lambda$.

En el extremo $\lambda = 1$. El vector de costos pasa a ser $(-1,-3)+(2,1) = (1,-2)$. Recalculando los costos reducidos con la misma tabla:

	1	-2	0	0	
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4
$c_j - z_j$	0	0	0	1	-6

La tabla sigue siendo óptima, con $x^* = (2,4)$ y $z^* = -6$, pero hay un costo reducido nulo en una columna no básica: **hay solución óptima múltiple**. La otra solución básica óptima se obtiene metiendo x_3 en la base; el test del cociente mínimo da $\text{Min}\{2/\frac{2}{3},\ 4/\frac{1}{3}\} = \text{Min}\{3, 12\} = 3$ en la fila de x_1, que es la que sale:

	1	-2	0	0	
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	3
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	3
$c_j - z_j$	0	0	0	1	-6

es decir, el vértice $(0,3)$, también con valor -6. El conjunto de óptimos es todo el segmento

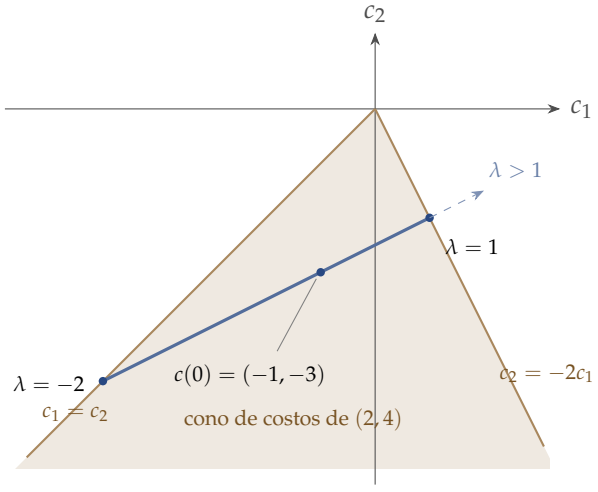
$$\{\alpha(2,4) + (1-\alpha)(0,3) \ :\ \alpha \in [0,1]\}, \qquad z^* = -6.$$

Para $1 < \lambda < 3$, el óptimo pasa a $(0,3)$, con valor $-9+3\lambda$. En $\lambda = 3$ el costo es $(5,0)$ y todo el segmento $\{(0,t) : 0 \le t \le 3\}$ es óptimo. Para $\lambda > 3$ ambos costos son positivos y el óptimo es $(0,0)$. Por el otro extremo, para $\lambda < -2$ el óptimo es $(6,0)$. Estos tramos se obtienen continuando con el simplex o comparando el objetivo en los cuatro vértices.

El dibujo en el espacio de los costos. La imagen del cono normal se puede ver aquí entera, y conviene mirarla porque explica los dos números -2 y 1 sin ninguna cuenta. Del vértice $(2,4)$ salen dos aristas: una hacia $(6,0)$, con dirección $(1,-1)$, y otra hacia $(0,3)$, con dirección $(-2,-1)$. El vértice es óptimo exactamente cuando avanzar por cualquiera de las dos no abarata, es decir, cuando

$$c^T(1,-1) \ge 0 \quad \text{y} \quad c^T(-2,-1) \ge 0,$$

o sea $c_1 \ge c_2$ y $c_2 \le -2c_1$. Ese cono está generado por las direcciones $(-1,-1)$ y $(1,-2)$, y el segmento $c(\lambda) = (-1,-3) + \lambda(2,1)$ lo atraviesa:



Los dos extremos del intervalo caen *sobre los bordes* del cono, y por eso en los dos hay solución múltiple: en $\lambda = 1$ el costo es exactamente $(1, -2)$, que es una de las dos aristas del cono, la que corresponde a empatar con el vértice $(0, 3)$; en $\lambda = -2$ el costo es $(-5, -5)$, proporcional a $(-1, -1)$, que es la otra, la que corresponde a empatar con $(6, 0)$. Fuera del cono, el óptimo es otro vértice.

Los rangos de un solo costo, en esta tabla. La pregunta más frecuente no mueve el vector c en una dirección cualquiera, sino un solo costo. Con la observación anterior se lee en la tabla óptima. La variable x_1 es básica en la primera fila, cuya parte no básica es $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, y los costos reducidos no básicos son $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Si c_1 pasa a $-1 + \delta$, los dos costos reducidos pasan a ser

$$\tfrac{5}{3} - \tfrac{2}{3}\,\delta \;\geq 0 \quad (\delta \leq \tfrac{5}{2}), \qquad \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\,\delta \;\geq 0 \quad (\delta \geq -2),$$

luego $c_1 \in \left[-3, \frac{3}{2}\right]$. La entrada positiva de la fila ha dado la cota superior, y la negativa, la inferior. Con x_2, básica en la segunda fila $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, las dos entradas son positivas y las dos dan cota superior, $\delta \leq 5$ y $\delta \leq 2$: $c_2 \in (-\infty, -1]$. Los extremos se comprueban en el dibujo de la región: con $c = \left(\frac{3}{2}, -3\right)$ empatan $(2, 4)$ y $(0, 3)$, que valen -9; con $c = (-3, -3)$ empatan $(2, 4)$ y $(6, 0)$; y con $c = (-1, -1)$, también $(2, 4)$ y $(6, 0)$. Dentro del rango de c_1, el valor óptimo es $-14 + 2\delta$, porque $x_1^* = 2$: cada euro de más en el costo unitario de x_1 encarece el plan en lo que se produce de x_1.

4.4.2 Perturbación del vector de recursos

Ahora se perturba el otro dato:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & c^T x \\ \text{sujeto a:} & Ax = b + \lambda g \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Los recursos intervienen en la factibilidad y no en la optimalidad, así que lo que hay que vigilar es que la solución básica siga siendo no negativa.

Proposición (rango de validez de la base ante un cambio de recursos)**.** Sea B una base factible y óptima para $\lambda = 0$, y sea $\bar{g} = B^{-1}g$. La base B sigue siendo factible (y por tanto óptima) exactamente para

$$\lambda_1 = \text{Max}\left\{-\frac{\bar{b}_i}{\bar{g}_i} \;:\; \bar{g}_i > 0\right\} \;\leq\; \lambda \;\leq\; \text{Min}\left\{-\frac{\bar{b}_i}{\bar{g}_i} \;:\; \bar{g}_i < 0\right\} = \lambda_2,$$

con el mismo convenio sobre conjuntos vacíos. Dentro de ese intervalo la solución óptima es $x_B(\lambda) = \bar{b} + \lambda\bar{g}$, $x_N(\lambda) = 0$, y el valor óptimo es la función afín $z^*(\lambda) = z(0) + \lambda\,(w^*)^T g$, donde $(w^*)^T = c_B^T B^{-1}$ es el vector de precios sombra. • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: LA RECTA SE DESPLAZA Y EL VÉRTICE SE DESLIZA

Al cambiar los costos, la solución asociada a una base fija permanece en el mismo punto. Al cambiar los recursos, esa solución pasa a ser $x_B(\lambda) = \bar{b} + \lambda\bar{g}$: en general se mueve, aunque algunas componentes pueden permanecer constantes. Se conservan las columnas de la base; en un vértice degenerado puede haber más restricciones activas que las necesarias para determinarlo.

En el plano, aumentar b_i desplaza paralelamente la recta correspondiente. Si esa recta forma el vértice óptimo con otra que permanece fija, el vértice se desliza sobre la segunda. Mientras siga siendo factible, esa base conserva su optimalidad. Al llegar una componente básica a cero puede agotarse su intervalo de factibilidad: habrá que cambiar de base o comprobar si el nuevo problema es infactible.
El valor óptimo varía con pendiente $(w^*)^T g$. Así, el intervalo calculado indica hasta dónde esta base certifica la misma fórmula afín para el valor; otra base puede prolongarla. Si después aparece un tramo con otra pendiente, esta no puede ser menor al avanzar en λ. La razón es la **convexidad de la función valor**: donde el mínimo es finito, la dualidad fuerte da

$$z(b) = \text{Max}\{w^T b : \ w^T A \leq c^T\}.$$

El conjunto dual no depende de b: es un máximo de funciones lineales de b, luego es convexo. Lo que no disminuye es la pendiente escalar $(w^*)^T g$, no necesariamente cada componente del vector de precios sombra.
En un modelo de costo mínimo frente a exigencias, esto permite interpretar que el costo marginal de elevar una exigencia no disminuye. En un modelo de beneficio máximo con recursos $Ax \leq b$, el valor es en cambio cóncavo en b: el beneficio marginal de añadir un recurso no aumenta. Las pendientes pueden mantenerse iguales durante un tramo; no se afirma que cada unidad sea estrictamente más cara o menos rentable.

Paso 1: la optimalidad no está en juego. Los costos reducidos son $c_j - c_B^T B^{-1} a_j$ y en esa expresión no aparece b. Cambiar b por $b + \lambda g$ los deja intactos. Lo único que hay que comprobar es la no negatividad de la solución básica.
Paso 2: la solución básica es afín en λ (el núcleo de la prueba).

$$x_B(\lambda) = B^{-1}(b + \lambda g) = B^{-1}b + \lambda B^{-1} g = \bar{b} + \lambda \bar{g}.$$

Componente a componente, $x_{B_i}(\lambda) = \bar{b}_i + \lambda \bar{g}_i$: otra vez una colección de funciones afines de λ, exactamente como en el apartado anterior, solo que ahora son las *cantidades* y no los *precios*.
Paso 3: imponer la no negatividad. Con $\bar{b}_i \geq 0$:
- si $\bar{g}_i = 0$, la componente i no impone nada;
- si $\bar{g}_i > 0$, se exige $\lambda \geq -\bar{b}_i / \bar{g}_i$: cota inferior;
- si $\bar{g}_i < 0$, se exige $\lambda \leq -\bar{b}_i / \bar{g}_i$: cota superior.

Agrupando, el intervalo del enunciado.
Paso 4: el valor óptimo. Directamente,

$$z^*(\lambda) = c_B^T x_B(\lambda) = c_B^T B^{-1}(b + \lambda g) = z(0) + \lambda \, c_B^T B^{-1} g = z(0) + \lambda \, (w^*)^T g.$$

Para reconstruirla. $x_B(\lambda) = \bar{b} + \lambda \bar{g}$ con $\bar{g} = B^{-1} g$; se pide que las m rectas $\bar{b}_i + \lambda \bar{g}_i$ estén por encima de cero, lo que recorta un intervalo en λ; y el valor óptimo se lee con los precios sombra, $z(0) + \lambda (w^*)^T g$.

Qué hacer fuera del intervalo. Se ha perdido la factibilidad y no la optimalidad: es exacta-

mente el paso 0 del simplex dual. Se escribe la tabla con el nuevo término independiente y se pivota con el algoritmo de la sección 4.3 hasta recuperar $\bar{b} \geq 0$ o certificar que el nuevo problema es infactible.

Ejemplo. En el problema anterior, tómese $g^T = (-1, 1)$, es decir, recursos $(6-\lambda,\ 6+\lambda)$.

Con la misma tabla óptima,

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \bar{g} = B^{-1}g = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

luego

$$\bar{b} + \lambda\bar{g} = \begin{pmatrix} 2-\lambda \\ 4 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \leq 2,$$

es decir, $\lambda_1 = -\infty$ y $\lambda_2 = 2$. Para $\lambda \leq 2$,

$$x^*(\lambda) = \begin{pmatrix} 2-\lambda \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad z^*(\lambda) = (-1, -3) \begin{pmatrix} 2-\lambda \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda - 14.$$

La pendiente 1 es, como prometía la proposición, $(w^*)^T g$ con $(w^*)^T = c_B^T B^{-1} = (-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3})$: en efecto, $(-\frac{5}{3})(-1) + (-\frac{2}{3})(1) = 1$.

Para $\lambda > 2$. La base sigue siendo óptima — los costos reducidos no dependen de λ — pero deja de ser factible. Se aplica el simplex dual. Sale x_1, cuya fila es $(1, 0, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, con una única entrada negativa, la de x_4: entra x_4. Pivotando sobre $-\frac{1}{3}$:

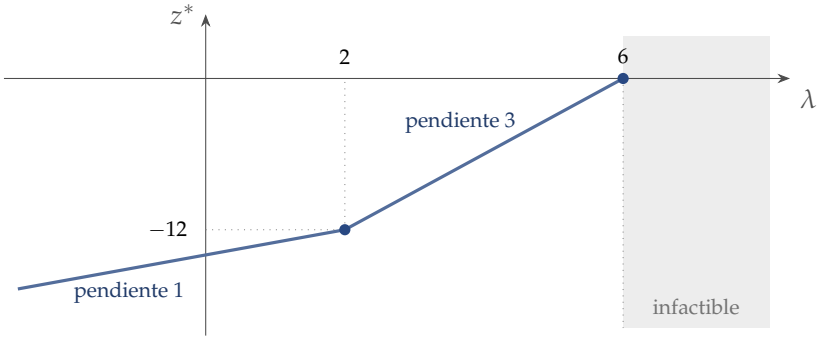
	-1	-3	0	0	
x_4	-3	0	-2	1	$3\lambda - 6$
x_2	1	1	1	0	$6 - \lambda$
$c_j - z_j$	2	0	3	0	$3\lambda - 18$

Los costos reducidos siguen siendo no negativos, como tenía que ocurrir. La nueva base es factible mientras $3\lambda - 6 \geq 0$ y $6 - \lambda \geq 0$, es decir, para $2 \leq \lambda \leq 6$. En resumen,

$$(x^*)^T = \begin{cases} (2-\lambda,\ 4,\ 0,\ 0) & \text{si } \lambda \leq 2, \\ (0,\ 6-\lambda,\ 0,\ 3\lambda - 6) & \text{si } 2 \leq \lambda \leq 6, \end{cases} \qquad z^*(\lambda) = \begin{cases} \lambda - 14 & \text{si } \lambda \leq 2, \\ 3\lambda - 18 & \text{si } 2 \leq \lambda \leq 6. \end{cases}$$

Y para $\lambda > 6$ el problema es **infactible**: en la tabla anterior la fila de x_2 tiene término independiente $6 - \lambda < 0$ y todos sus coeficientes son no negativos, que es justamente el criterio de infactibilidad del simplex dual. Tiene que ser así, y se ve sin tablas: la primera restricción es $x_1 + x_2 \leq 6 - \lambda$ con $x \geq 0$, y un número no negativo no puede ser menor que un número negativo.

La gráfica de $z^*(\lambda)$, que es la moraleja del apartado. Dibujada, la función valor es esto:



Dos tramos rectos, con pendientes 1 y 3, y un quiebro en $\lambda = 2$. Las pendientes son $(w^*)^T g$ en cada tramo y pasan de 1 a 3, de acuerdo con la convexidad del valor mínimo. Aquí $g = (-1, 1)$ reduce un recurso y aumenta el otro: la pendiente mide el efecto conjunto de ambos cambios. En el punto de quiebro, $\lambda = 2$, la derivada no existe: hay una pendiente por la izquierda y otra por la derecha, y la solución básica es **degenerada**, con $x_1 = 0$ siendo básica. Para $\lambda > 6$ la región factible está vacía y no hay valor óptimo finito; en $\lambda = 6$ aún hay solución, con valor 0.

El caso que más se usa: cambiar un solo recurso. Con $g = e_k$ se mueve solo b_k. Entonces $\bar{g} = B^{-1}e_k$ es la columna k de B^{-1}, y está escrita en la tabla, debajo de la columna que valía e_k al empezar: la holgura de la fila k si era $\leq$, o su artificial. La base aguanta mientras

$$\bar{b}_i + \lambda\, \bar{g}_i \;\geq 0 \qquad \text{para todo } i,$$

y dentro de ese tramo el valor óptimo es $z(0) + \lambda\, w_k^*$: el precio sombra de la fila k por lo que se ha movido. Si la fila k era $\geq$ y su columna auxiliar es un exceso ($-e_k$), debajo de ella está $-\bar{g}$, y hay que cambiarle el signo antes de usarla.

En el ejemplo. Las dos filas son $\leq$, así que $\bar{g}$ se lee directamente bajo las holguras. Para b_1, $\bar{g} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$: las dos entradas son positivas y solo dan cotas inferiores, $\lambda \geq -3$ y $\lambda \geq -12$; luego $b_1 \in [3, +\infty)$, con $z^*(b_1) = -14 - \frac{5}{3}(b_1 - 6)$. En $b_1 = 3$ el vértice ha resbalado hasta $(0, 3)$, y $-14 + 5 = -9$ es su valor. Para b_2, $\bar{g} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$: $\lambda \leq 6$ y $\lambda \geq -12$, luego $b_2 \in [-6, 12]$, con los extremos en $(6, 0)$ y $(0, 6)$.

Con un exceso. En el ejemplo del método completo de la sección 4.2, la primera fila era $2x_1 + 2x_2 \geq 3$ con exceso x_4. Bajo x_4 se lee $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, luego $\bar{g} = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Con $\bar{b} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ sale $-1 \leq \lambda \leq 3$, es decir, $b_1 \in [2, 6]$, el intervalo que allí se usó. Sin cambiar el signo saldría $[0, 4]$, que es falso por los dos lados: en $b_1 = \frac{1}{2}$ la base da $x_2 = -\frac{3}{4}$, y en $b_1 = 5$ la base sigue siendo óptima, con valor 8.

4.4.3 Añadir una nueva variable

Supóngase resuelto el problema, con base óptima factible B, y que aparece una variable nueva $x_{n+1} \geq 0$, con costo c_{n+1} y columna de restricciones a_{n+1}. En la práctica es un producto nuevo que se plantea fabricar, una ruta nueva, una actividad que no se había contemplado.

Proposición (criterio para una variable nueva)**.** La solución básica óptima actual, ampliada con $x_{n+1}^* = 0$, sigue siendo factible. La base B conserva el criterio algebraico de optimalidad si y solo si

$$c_{n+1} - z_{n+1} = c_{n+1} - c_B^T B^{-1} a_{n+1} \;\geq\; 0.$$

Si se cumple, la solución sigue siendo óptima. Si ese número es negativo, se reanuda el simplex con la columna nueva: puede mejorar el valor, cambiar de base sin mover el punto si hay degeneración, o detectar ilimitación. • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: EL PRODUCTO NUEVO COMPITE CONTRA LOS PRECIOS SOMBRA, NO CONTRA LOS PRODUCTOS

El número $z_{n+1} = c_B^T B^{-1} a_{n+1} = (w^*)^T a_{n+1}$ valora la contribución de la actividad nueva a las restricciones con los precios sombra actuales. Para el problema de *mínimo*, se compara ese valor con su costo directo c_{n+1}. Si $c_{n+1} < z_{n+1}$, el costo reducido es negativo y la columna es candidata a entrar: al aumentar su cantidad y ajustar las

variables básicas, el costo disminuye por unidad. El test del cociente decide cuánto se puede avanzar sin perder factibilidad; con degeneración, ese primer paso puede ser cero.
En un modelo de *máximo beneficio* con recursos disponibles, la lectura se invierte: interesa un beneficio directo que supere el valor de los recursos consumidos a precios sombra. Una actividad de gran margen puede usar un recurso escaso y resultar poco conveniente; el costo reducido incorpora esa comparación. Los precios permiten decidir si la base conserva el criterio de optimalidad sin resolver todo el problema ampliado.

Paso 1: la factibilidad es gratis. Poniendo $x_{n+1} = 0$, el vector $(x^*, 0)$ satisface las mismas ecuaciones que x^*, porque la columna nueva queda multiplicada por cero. Sigue siendo, además, la solución básica asociada a B, ya que B no ha cambiado.
Paso 2: el criterio de la base depende de una sola columna (el núcleo). La condición de optimalidad, $c_j - z_j \geq 0$, sigue cumpliéndose para $j = 1, \ldots, n$, porque ni c_B ni B^{-1} han cambiado. La única condición nueva es la de la columna $n+1$, es decir, $c_{n+1} - c_B^T B^{-1} a_{n+1} \geq 0$. Con eso el criterio queda probado en las dos direcciones.
Paso 3: qué hacer si falla. Si $c_{n+1} - z_{n+1} < 0$, la columna nueva es candidata a entrar. Para meterla en la tabla hay que calcular $y_{n+1} = B^{-1} a_{n+1}$, que es su expresión en la base actual, y a partir de ahí el método del simplex sigue como siempre: test del cociente mínimo y pivotaje, o detección de ilimitación si ninguna entrada de la columna es positiva. Obsérvese que no hay que recalcular nada más de la tabla.
Para reconstruirla. Añadir una columna solo añade una desigualdad a la condición de optimalidad, la suya; todo lo demás de la tabla es independiente de esa columna.

Ejemplo. Sea

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{sujeto a:} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_i \geq 0, \end{array}$$

con tabla óptima

	-2	1	-1	0	0	
x_1	1	1	1	1	0	6
x_5	0	3	1	1	1	10
$c_j - z_j$	0	3	1	2	0	-12

y considérese una variable nueva $x_6 \geq 0$ con $c_6 = 1$ y $a_6 = (-1, 2)^T$.

La base es $B = (a_1, a_5)$, con $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (que se lee en las columnas de x_4 y x_5 de la tabla) y $c_B = (-2, 0)$. El costo reducido de la variable nueva es

$$c_6 - z_6 = 1 - (-2, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 - (-2, 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 2 = -1 < 0,$$

de modo que la solución actual deja de ser óptima: el producto nuevo compensa. Su columna en la tabla es $y_6 = B^{-1} a_6 = (-1, 1)^T$, y con ella:

	-2	1	-1	0	0	1	
x_1	1	1	1	1	0	-1	6
x_5	0	3	1	1	1	1	10
$c_j - z_j$	0	3	1	2	0	-1	-12

Entra x_6. El test del cociente mínimo solo mira las entradas positivas de la columna, y hay una sola, la de la fila de x_5, con cociente $10/1 = 10$: sale x_5. Pivotando:

	-2	1	-1	0	0	1	
x_1	1	4	2	2	1	0	16
x_6	0	3	1	1	1	1	10
$c_j - z_j$	0	6	2	3	1	0	-22

Todos los costos reducidos son no negativos: la solución óptima con la variable nueva es $x^* = (16, 0, 0)$ con $x_6^* = 10$ y valor $z^* = -22$, frente a los -12 de antes. Se comprueba directamente: $16 + 0 + 0 + (-1) \cdot 10 = 6$ y $-16 + 0 + 2 \cdot 10 = 4$, las dos restricciones se cumplen con igualdad, y $-2 \cdot 16 + 1 \cdot 10 = -22$.

CONEXIÓN CON LA GENERACIÓN DE COLUMNAS Y EL PROBLEMA DEL CORTADOR

Este criterio no es solo una comprobación *a posteriori*: es el motor de una técnica entera. En el capítulo 1 apareció el problema de cortar rollos de material en piezas, donde cada variable representa un *patrón de corte*; el número de patrones posibles crece de manera explosiva y escribirlos todos es inviable. Gilmore y Gomory observaron en 1961 que se puede resolver la relajación lineal sin enumerarlos todos: se empieza con un conjunto de patrones que permita cubrir la demanda, se resuelve ese problema reducido y se pregunta si existe algún patrón con costo reducido negativo. Esa pregunta, $\text{Min}_a \{c_a - (w^*)^T a\}$ sobre todos los patrones factibles, es a su vez un problema de optimización auxiliar — un problema de la mochila — que se resuelve aparte. Si su valor es no negativo, la solución actual es óptima para la *relajación lineal con todos los patrones*, incluidos los que nunca se escribieron. Exigir cantidades enteras de rollos requiere un paso adicional de programación entera. La **generación de columnas** aplica repetidamente el criterio de esta proposición.

4.4.4 Añadir una nueva restricción

El último caso es el simétrico del anterior: en lugar de una columna, aparece una fila.

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & c^T x \\ \text{sujeto a:} & Ax = b \\ & a_{m+1}^T x \leq b_{m+1} \\ & x \geq 0. \end{array}$$

La solución óptima del problema sin esa restricción puede satisfacerla, con lo cual sigue siendo óptima y factible y no hay nada que hacer; o puede no satisfacerla, y entonces deja de ser factible.

LA IDEA: CORTAR EL POLIEDRO CON UN CUCHILLO

Geométricamente, añadir una restricción es cortar el poliedro con un hiperplano y conservar un lado. Si la solución óptima anterior sigue en ese lado, continúa siendo óptima. Si queda fuera, hay que buscar una solución nueva; incluso puede no quedar ningún punto factible.
Cuando el problema recortado es factible, existe un nuevo óptimo **sobre el corte**. Para verlo, une el óptimo anterior con un óptimo nuevo. Si este último está estrictamente dentro del lado conservado, el segmento cruza el corte antes de alcanzarlo. Ese punto

cumple las restricciones y su valor, por linealidad, no es peor que el del óptimo nuevo; por tanto también es óptimo. Esto no obliga a que todos los óptimos estén sobre el corte.
La tabla anterior se puede aprovechar con el simplex dual, porque se ha perdido la factibilidad y se conserva el criterio de optimalidad. El número de pivotes necesarios no está prefijado. La misma operación aparece en el capítulo 5: un corte de Gomory excluye el óptimo fraccionario sin excluir ninguna solución entera.

Proposición (cómo se actualiza la tabla)**.** Escríbase la restricción nueva con su variable de holgura, $a_{m+1}^T x + x_H = b_{m+1}$. Si B era la base óptima anterior, entonces

$$B' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ (a_{m+1}^B)^T & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{es base del problema ampliado, y}$$

$$(B')^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ -(a_{m+1}^B)^T B^{-1} & 1 \end{pmatrix},$$

donde a_{m+1}^B es el vector de coeficientes de la restricción nueva sobre las variables básicas. Multiplicar la tabla ampliada por $(B')^{-1}$ equivale a restar de la fila nueva la combinación de las filas básicas que anula sus coeficientes básicos, es decir, a hacer ceros en la fila nueva por operaciones elementales. • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

Paso 1: comprobar que la inversa es la que se dice. Basta multiplicar por bloques:

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ (a^B)^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ -(a^B)^T B^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BB^{-1} & 0 \\ (a^B)^T B^{-1} - (a^B)^T B^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde se ha escrito a^B por a_{m+1}^B para aligerar. Obsérvese que B' es invertible sin ninguna hipótesis adicional: su determinante es $\det(B) \cdot 1 \neq 0$, porque es triangular por bloques.
Paso 2: leer qué hace esa inversa sobre la tabla (el núcleo). La tabla ampliada tiene como filas las m ecuaciones antiguas y la nueva. Al multiplicarla por $(B')^{-1}$, el bloque superior de la matriz actúa exactamente como antes — las m primeras filas de la tabla no cambian — y la última fila se convierte en

$$\text{(fila nueva)} \; - \; (a^B)^T B^{-1} \cdot \text{(filas antiguas)} = \text{(fila nueva)} - \sum_{i=1}^{m} a_i^B \cdot \text{(fila } i \text{ de la tabla)}.$$

Y eso es, literalmente, el proceso de hacer ceros en la fila nueva bajo las columnas básicas, restando de ella cada fila básica multiplicada por el coeficiente correspondiente. Queda probado que las operaciones elementales de siempre son la multiplicación por $(B')^{-1}$, que es lo que suele dejarse propuesto como ejercicio.
Paso 3: qué queda en el término independiente. Tras esa operación, el término independiente de la fila nueva es $b_{m+1} - (a^B)^T B^{-1} b = b_{m+1} - a_{m+1}^T x^*$, que es justamente **el margen que le sobra o le falta a la solución actual en la restricción nueva**: no negativo si la cumple, negativo si no. Ese signo es el que decide si hay que hacer algo.
Para reconstruirla. B' es triangular por bloques y su inversa también; el bloque inferior izquierdo, $-(a^B)^T B^{-1}$, es el que resta de la fila nueva la combinación de las filas

básicas, y el término independiente que resulta es la holgura de la solución actual en la restricción recién añadida.

Para estudiar este cambio por separado, volvemos al problema inicial del ejemplo anterior, sin la variable nueva. El símbolo x_6 se usará ahora para la holgura de la restricción añadida.

Ejemplo. En el problema del ejemplo anterior, con la misma tabla óptima, añádase la restricción $-x_1 + 2x_3 \geq 2$.

La solución actual es $(x^*)^T = (6, 0, 0)$, que da $-6 + 0 = -6 < 2$: no la cumple. Escrita con holgura y con el signo que deja $\leq$,

$$-x_1 + 2x_3 \geq 2 \iff x_1 - 2x_3 \leq -2 \iff x_1 - 2x_3 + x_6 = -2,$$

y se añade a la tabla:

	-2	1	-1	0	0	0	
x_1	1	1	1	1	0	0	6
x_5	0	3	1	1	1	0	10
x_6	1	0	-2	0	0	1	-2
$c_j - z_j$	0	3	1	2	0	0	-12

La fila nueva tiene un 1 en la columna de x_1, que es básica; hay que anularlo. Según el paso 2 de la proposición, $a^B = (1, 0)$ y basta restarle la fila de x_1:

	-2	1	-1	0	0	0	
x_1	1	1	1	1	0	0	6
x_5	0	3	1	1	1	0	10
x_6	0	-1	-3	-1	0	1	-8
$c_j - z_j$	0	3	1	2	0	0	-12

El -8 es, como anunciaba el paso 3, el margen que le falta a la solución actual: $b_{m+1} - a_{m+1}^T x^* = -2 - (1 \cdot 6 - 2 \cdot 0) = -8$.

Ahora se aplica el simplex dual. Sale x_6; su fila es $(0, -1, -3, -1, 0, 1)$, con entradas negativas en las columnas 2, 3 y 4. Los cocientes son

$$\frac{3}{-1} = -3, \qquad \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{-1} = -2,$$

y el máximo es $-\frac{1}{3}$: entra x_3. Pivotando sobre -3:

	-2	1	-1	0	0	0	
x_1	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$
x_5	0	$\frac{8}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{22}{3}$
x_3	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
$c_j - z_j$	0	$\frac{8}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{28}{3}$

Término independiente no negativo y costos reducidos no negativos: óptima. La solución con la restricción nueva es $x^* = \left(\frac{10}{3}, 0, \frac{8}{3}\right)$, con $z^* = -\frac{28}{3} \approx -9{,}33$, peor que los -12 de antes, como no podía ser de otra manera: añadir una restricción nunca puede mejorar el óptimo. Se comprueba: $\frac{10}{3} + \frac{8}{3} = 6$ (primera restricción activa), $-\frac{10}{3} \leq 4$ (segunda con holgura $\frac{22}{3}$) y $-\frac{10}{3} + 2 \cdot \frac{8}{3} = 2$ (la nueva, activa), y $-2 \cdot \frac{10}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{28}{3}$.

Observación (una restricción de igualdad, o una que ya se cumple)**.** Dos casos que conviene tener resueltos. Si la restricción nueva *ya la cumple* la solución actual, el término independiente de su fila sale no negativo y la tabla ampliada es directamente óptima y factible: la restricción conserva ese óptimo, aunque pueda excluir otros puntos del poliedro. Si la restricción nueva es de igualdad, no hay holgura que meter y la base no se puede ampliar de esa manera; lo que se hace entonces es introducir una variable artificial y tratarla como en la fase I del capítulo 3, o bien desdoblar la igualdad en dos desigualdades.

Qué se ha ganado. La pregunta del principio tiene respuesta completa, y cabe en una tabla. Cada modificación amenaza una sola de las dos condiciones de la tabla óptima; eso dice qué hay que mirar y con qué algoritmo se repara.

Cambio	**Qué amenaza**	**Cómo se ve**	**Cómo se repara**
Un costo c_k	optimalidad	algún $c_j - z_j < 0$	simplex; ilimitado si la columna no tiene entradas positivas
Un recurso b_k	factibilidad	algún $\bar{b}_i < 0$	simplex dual; infactible si la fila no tiene entradas negativas
Una variable nueva	optimalidad	$c_{n+1} - (w^*)^T a_{n+1} < 0$	simplex, con la columna $B^{-1}a_{n+1}$
Una restricción nueva	factibilidad	término negativo en la fila nueva, tras hacer ceros	simplex dual

Hay, por tanto, cuatro finales posibles: el dato queda dentro del rango y no hay que hacer nada; se sigue con el simplex; se sigue con el simplex dual; o el problema resulta ilimitado o infactible. Y en los dos primeros casos no se rehace nada: $B^{-1}A$ no depende de c ni de b.

Dónde se falla.

- *La fórmula de la no básica aplicada a una básica.* El costo de una no básica solo mueve su propio costo reducido; el de una básica los mueve todos, pesados por su fila.
- *Las cotas al revés.* Para el costo de una básica en un problema de mínimo, una entrada positiva de su fila da cota superior y una negativa, inferior. Dividir por un número negativo da la vuelta a la desigualdad, y ahí se equivoca casi todo el mundo una vez.
- *Dar el rango de δ en vez del de c_k.* Pedido el rango del costo, se suma el valor original: $\delta \in \left[-2, \frac{5}{2}\right]$ es $c_1 \in \left[-3, \frac{3}{2}\right]$.
- *El signo de la columna de un exceso*, en el rango de un recurso: sale $[0, 4]$ en vez de $[2, 6]$.
- *Un problema de máximo.* La condición de optimalidad es $c_j - z_j \leq 0$ y las desigualdades cambian de sentido. Lo más seguro es pasar a mínimo cambiando el signo de c.
- *Mover dos datos con los rangos de uno.* Cada rango vale moviendo un solo dato. Si se mueven dos a la vez, hay que imponer las condiciones juntas, como en el ejercicio 4.7, donde la región válida es un cono del plano de los parámetros.

4.4.5 Consultar la sensibilidad en AMPL

El modelo de las prácticas antiguas `Relacion_6_Ej_4` permite contrastar estas cuentas con el ordenador:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a:} & 3x_1 - 2x_2 \le 4, \quad -x_1 - 2x_2 \le -1, \\ & -x_1 - x_2 \le -2, \quad 7x_1 + 5x_2 \le 17, \quad x_1, x_2 \ge 0. \end{array}$$

Se reutiliza `lp.mod` del capítulo 3 (p. 170), con los datos `sensibilidad.dat`:

```
param n := 2;
param m := 4;
param a : 1 2 :=
1 3 -2
2 -1 -2
3 -1 -1
4 7 5;
param b := 1 4  2 -1  3 -2  4 17;
param c := 1 -1  2 1;
```

Para consultar rangos se usa aquí CPLEX con su opción de sensibilidad. El guion `sensibilidad.run` requiere que ese solver esté disponible en la instalación:

```
reset;
model lp.mod;
data sensibilidad.dat;
option solver cplex;
option presolve 0;
option cplex_options 'sens=1';
solve;
display solve_result, x, z;
display x.rc, r.dual;
display x.sensobjlo, x.sensobj, x.sensobjhi;
display r.sensrhslo, b, r.sensrhshi;
```

`presolve 0` desactiva las simplificaciones de AMPL para facilitar la correspondencia entre las filas escritas y los rangos devueltos. La opción `sens=1` solicita el análisis de sensibilidad a CPLEX. Las consultas significan:

- `x.rc`: costos reducidos; `r.dual`: valores duales de las filas.
- `x.sensobjlo`, `x.sensobj`, `x.sensobjhi`: extremo inferior, costo actual y extremo superior del intervalo de cada coeficiente del objetivo.
- `r.sensrhslo`, `r.sensrhshi`: extremos del intervalo del término independiente de cada fila. Se muestra `b` entre ellos como valor actual.

Cada intervalo cambia *un solo dato*, manteniendo los demás fijos, y conserva la base óptima devuelta. Las opciones y sufijos dependen de la interfaz del solver; estos son los nombres de la interfaz actual de CPLEX. Las prácticas antiguas usan `.down`, `.current` y `.up`; algunas versiones conservan esos nombres por compatibilidad. Para resolver únicamente el primal con HiGHS, se cambia el solver y se omiten `cplex_options` y las dos consultas de rangos.

El resultado es $x^* = (8/5, 2/5)$, $z^* = -6/5$, con precios $u^* = (-2/5, 0, -1/5, 0)$. Los rangos de los costos son

$$c_1 \in [-3/2, 1], \qquad c_2 \in [2/3, +\infty).$$

Por ejemplo, el rango de b_1 es $[-4, 6]$. Dentro de él, y sin cambiar otro dato,

$$z^*(b_1) = -\frac{6}{5} - \frac{2}{5}(b_1 - 4).$$

Así se interpreta un precio sombra: no es solo el número $-2/5$, sino una pendiente acompañada de su intervalo de validez. En la salida numérica, CPLEX puede representar límites infinitos mediante valores de magnitud 10^{20}; el intervalo matemático se escribe con ∞.

4.5 Ejercicios de dualidad, sensibilidad y post-optimalidad

Los ocho ejercicios que siguen desglosan cinco problemas. Los cuatro primeros son los cuatro apartados del primero y comparten enunciado: hallar la solución óptima, el rango del coeficiente de x_1 en la función objetivo para el que la base asociada sigue siendo óptima, y lo mismo para x_2. Están ordenados de menor a mayor dificultad conceptual, y los dos últimos de ellos son los interesantes, porque en uno las variables no están acotadas por abajo y en el otro no hay óptimo.

Ejercicio 4.1. *Una igualdad que regala la solución* R5.1(A)

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -3x_1 - 4x_2 - x_3 \\ \text{sujeto a:} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 50 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 15 \\ & x_1 + x_2 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

Resolución. *La idea.* Antes de montar una fase I conviene mirar si alguna restricción simplifica el problema, y aquí la igualdad $x_1 + x_2 = 10$ permite eliminar una variable. Lo que queda tiene dos variables que no compiten entre sí, y se resuelve sin tablas. Para los rangos sí hace falta la tabla óptima, y en ella lo único que importa es si la variable es básica o no. La forma estándar necesita una holgura $x_4 \geq 0$ en la primera restricción y un exceso $x_5 \geq 0$ en la segunda; la tercera ya es una igualdad:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 50, \qquad 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 15, \qquad x_1 + x_2 = 10.$$

No hay identidad a la vista, así que un ataque directo pediría fase I. Antes de eso conviene mirar el problema, porque tiene una estructura que lo resuelve casi sin cuentas.
Primer movimiento: usar la igualdad para eliminar una variable. De $x_1 + x_2 = 10$ sale $x_1 = 10 - x_2$ con $0 \leq x_2 \leq 10$ (las dos cotas vienen de $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$). Sustituyendo en el objetivo,

$$-3x_1 - 4x_2 - x_3 = -3(10 - x_2) - 4x_2 - x_3 = -30 - x_2 - x_3,$$

y en las dos desigualdades,

$$(10 - x_2) + x_2 + x_3 \leq 50 \iff x_3 \leq 40, \qquad 2(10 - x_2) - x_2 + x_3 \geq 15 \iff 3x_2 - x_3 \leq 5.$$

El problema se ha convertido en: maximizar $x_2 + x_3$ con $x_3 \leq 40$, $3x_2 - x_3 \leq 5$ y $0 \leq x_2 \leq 10$. Y así no hace falta el simplex, porque las dos variables no compiten: subir x_3 mejora el objetivo y además *relaja* la restricción $3x_2 - x_3 \leq 5$, de modo que conviene ponerlo en su

tope, $x_3 = 40$; con ese valor la segunda condición da $3x_2 \leq 45$, es decir, $x_2 \leq 15$, que no aprieta porque ya $x_2 \leq 10$; luego $x_2 = 10$. Y entonces $x_1 = 0$:

$$x^* = (0,\, 10,\, 40), \qquad z^* = -30 - 10 - 40 = -80.$$

Comprobación en el problema original. $0 + 10 + 40 = 50 \leq 50$ (activa), $0 - 10 + 40 = 30 \geq 15$ (con exceso 15), $0 + 10 = 10$ (activa), y $-3 \cdot 0 - 4 \cdot 10 - 40 = -80$.
La tabla óptima, que hace falta para los apartados 2 y 3. La base es $B = (a_2, a_3, a_5)$, y con ella

	-3	-4	-1	0	0	
x_2	1	1	0	0	0	10
x_3	0	0	1	1	0	40
x_5	-3	0	0	1	1	15
$c_j - z_j$	1	0	0	1	0	-80

(se comprueba, por ejemplo, que $B \cdot (1, 0, -3)^T = a_1$ y que $B \cdot (10, 40, 15)^T = b$). Los dos costos reducidos no básicos son 1 y 1: la base es óptima y la solución es única.
Apartado 2: rango de c_1. La variable x_1 es **no básica**, luego solo cambia su propio costo reducido y la condición es $(c_1 - z_1) + \delta \geq 0$ con δ la variación:

$$1 + \delta \geq 0 \iff \delta \geq -1 \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 \in [-4, +\infty).$$

Apartado 3: rango de c_2. Ahora x_2 es **básica**, en la primera fila. Hay que mirar toda esa fila sobre las columnas no básicas, que son x_1 y x_4, con entradas $y_{11} = 1$ y $y_{14} = 0$. La única que impone algo es la de x_1, y por ser positiva impone cota superior:

$$\delta \leq \frac{c_1 - z_1}{y_{11}} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad c_2 \in (-\infty, -3].$$

Otra vía (con la forma reducida, que da los dos rangos de un golpe). En la forma reducida, el objetivo general $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$ se escribe, sustituyendo $x_1 = 10 - x_2$, como

$$10c_1 + (c_2 - c_1)x_2 + c_3x_3.$$

La solución $x_2 = 10$, $x_3 = 40$ es óptima exactamente cuando conviene subir x_2 y subir x_3, es decir, cuando $c_2 - c_1 \leq 0$ y $c_3 \leq 0$. Con $c_2 = -4$ eso da $c_1 \geq -4$, y con $c_1 = -3$ da $c_2 \leq -3$: los dos rangos del apartado anterior, obtenidos sin tabla. La lectura es transparente: x_1 y x_2 compiten por la misma unidad de la igualdad $x_1 + x_2 = 10$, y gana la más barata; el rango es el punto en que empatan.

Este problema deja una idea que se reutiliza mucho: una restricción de igualdad con coeficientes sencillos no es un estorbo, es un regalo, porque permite eliminar una variable y bajar la dimensión del problema antes de empezar. Y deja también la distinción que gobierna todo el análisis de costos: el rango de una variable no básica lo fija su propio costo reducido y nada más; el de una básica lo fijan todos los demás costos reducidos, pesados por su fila.
Dónde se falla. En tratar c_2 como el costo de una no básica: x_2 es básica, y su rango lo fija la fila de x_2 sobre las no básicas, no su propio costo reducido, que es cero. En el sentido de la cota: la entrada $y_{11} = 1$ es positiva y por eso da cota *superior*. Y en dar el rango de la variación, $\delta \geq -1$, cuando se pide el del costo, $c_1 \geq -4$.

Ejercicio 4.2. *Un pivotaje y dos rangos* R5.1(B)

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 \\ \text{sujeto a:} & x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \le 6 \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \le 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{array}$$

Resolución. *La idea.* Con holguras la base inicial es factible y basta el simplex de siempre. En la tabla óptima, x_1 y x_2 resultan no básicas, así que cada rango se lee en su propio costo reducido, y el precio sombra de la restricción que aprieta explica por qué esos costos reducidos valen lo que valen.
Con holguras x_5 y x_6 la base inicial es la identidad y el término independiente es no negativo: se puede arrancar el simplex sin fase I. La tabla inicial tiene $c_j - z_j = c_j$ porque $c_B = 0$:

	-1	-2	-5	3	0	0	
x_5	1	2	4	-1	1	0	6
x_6	2	3	-1	1	0	1	4
$c_j - z_j$	-1	-2	-5	3	0	0	0

El costo reducido más negativo es el de x_3, con -5. Su columna es $y_3 = (4, -1)^T$ y solo tiene una entrada positiva, la primera, con cociente $6/4 = 3/2$: sale x_5. Pivotando sobre el 4:

	-1	-2	-5	3	0	0	
x_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{2}$
x_6	$\frac{9}{4}$	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{11}{2}$
$c_j - z_j$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{7}{4}$	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{15}{2}$

Todos los costos reducidos no básicos son ahora positivos: un solo pivotaje ha bastado. La solución óptima es

$$x^* = \Big(0,\, 0,\, \tfrac{3}{2},\, 0\Big), \qquad z^* = -\tfrac{15}{2},$$

y es **única**, porque ningún costo reducido no básico es cero. Comprobación: $4 \cdot \frac{3}{2} = 6$ (primera restricción activa) y $-\frac{3}{2} \le 4$ (segunda con holgura $\frac{11}{2}$), y $-5 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{15}{2}$.
Apartados 2 y 3. Tanto x_1 como x_2 son no básicas, así que los dos rangos se leen directamente en sus costos reducidos:

$$c_1 \in \Big[-1 - \tfrac{1}{4},\, +\infty\Big) = \Big[-\tfrac{5}{4}, +\infty\Big), \qquad c_2 \in \Big[-2 - \tfrac{1}{2},\, +\infty\Big) = \Big[-\tfrac{5}{2}, +\infty\Big).$$

Merece la pena leer estos dos números con la interpretación económica. Los precios sombra son $(w^*)^T = c_B^T B^{-1} = (-\frac{5}{4},\, 0)$: la primera restricción es el cuello de botella y la segunda tiene precio sombra nulo porque sobra recurso. Para la primera actividad, $z_1 = (w^*)^T a_1 = -\frac{5}{4}$: su costo $c_1 = -1$ tendría que bajar más de $\frac{1}{4}$ para que su costo reducido fuese negativo. Si se interpreta $-c_1$ como beneficio, tendría que superar $\frac{5}{4}$. La segunda actividad consume dos unidades del recurso escaso y su costo tendría que bajar más de $\frac{1}{2}$ para entrar con costo reducido negativo.
Dónde se falla. En escribir el costo reducido como extremo del rango: el extremo es $c_1 - (c_1 - z_1) = -1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$, no $\frac{1}{4}$. Y en creer que encarecer una variable no básica puede cambiar el óptimo: si no se produce, subir su costo nunca la hace entrar.

Ejercicio 4.3. *Variables libres y el cono de costos* R5.1(c)

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 3x_1 - x_2 \\ \text{sujeto a:} & x_1 - 3x_2 \geq -3 \\ & 2x_1 + x_2 \geq -2 \\ & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & 4x_1 - x_2 \leq 16. \end{array}$$

Obsérvese que aquí **no hay condiciones de no negatividad**: las dos variables son libres.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Antes de desdoblar cada variable libre en dos no negativas y montar un simplex de cuatro columnas, compruebe si la región es acotada. Si lo es, todo se decide comparando vértices.*
2. *Para saber si es acotada, calcule su cono de recesión: las direcciones d que cumplen las cuatro desigualdades con término independiente cero.*
3. *Para los rangos, no hace falta ninguna tabla: basta con las direcciones de las dos aristas que salen del vértice óptimo.*

Resolución. *La idea.* Sin condiciones de signo, el camino corto no es el simplex sino la geometría: si la región es acotada, el mínimo está en un vértice, y hay tres. Los rangos salen del cono de costos del vértice óptimo, que se escribe con las dos aristas que salen de él.
Paso 1: la región es un polígono acotado. El cono de recesión está formado por las direcciones $d = (d_1, d_2)$ con

$$d_1 - 3d_2 \geq 0, \qquad 2d_1 + d_2 \geq 0, \qquad d_1 + d_2 \leq 0, \qquad 4d_1 - d_2 \leq 0.$$

Restando la tercera de la segunda, $d_1 = (2d_1 + d_2) - (d_1 + d_2) \geq 0 - 0 = 0$. De la cuarta, $d_2 \geq 4d_1 \geq 0$. Y entonces la tercera, $d_1 + d_2 \leq 0$ con las dos componentes no negativas, obliga a $d_1 = d_2 = 0$. El cono de recesión es $\{0\}$: la región es un **politopo**, no tiene direcciones y el mínimo se alcanza en un vértice. No hace falta simplex.
Paso 2: los vértices. Se cortan las rectas dos a dos y se descartan los cortes que incumplan alguna otra desigualdad. Llamando L_1 a $x_1 - 3x_2 = -3$, L_2 a $2x_1 + x_2 = -2$, L_3 a $x_1 + x_2 = 8$ y L_4 a $4x_1 - x_2 = 16$:

$$\begin{array}{lll} L_1 \cap L_2 = \left(-\frac{9}{7}, \frac{4}{7}\right) & \text{factible} & \\ L_1 \cap L_3 = \left(\frac{21}{4}, \frac{11}{4}\right) & \text{no factible} & (4x_1 - x_2 = \frac{73}{4} > 16) \\ L_1 \cap L_4 = \left(\frac{51}{11}, \frac{28}{11}\right) & \text{factible} & \\ L_2 \cap L_3 = (-10, 18) & \text{no factible} & (x_1 - 3x_2 = -64 < -3) \\ L_2 \cap L_4 = \left(\frac{7}{3}, -\frac{20}{3}\right) & \text{factible} & \\ L_3 \cap L_4 = \left(\frac{24}{5}, \frac{16}{5}\right) & \text{no factible} & (x_1 - 3x_2 = -\frac{24}{5} < -3) \end{array}$$

La región es el triángulo de vértices $\left(-\frac{9}{7}, \frac{4}{7}\right)$, $\left(\frac{51}{11}, \frac{28}{11}\right)$ y $\left(\frac{7}{3}, -\frac{20}{3}\right)$. La restricción L_3 no aparece en ningún vértice: es **redundante**.
Paso 3: el óptimo. Evaluando $3x_1 - x_2$:

$$\left(-\tfrac{9}{7}, \tfrac{4}{7}\right) \mapsto -\tfrac{31}{7} \approx -4{,}43, \qquad \left(\tfrac{51}{11}, \tfrac{28}{11}\right) \mapsto \tfrac{125}{11} \approx 11{,}36, \qquad \left(\tfrac{7}{3}, -\tfrac{20}{3}\right) \mapsto \tfrac{41}{3} \approx 13{,}67.$$

Luego $x^* = \left(-\frac{9}{7}, \frac{4}{7}\right)$ y $z^* = -\frac{31}{7}$.

Paso 4: los rangos, con el cono de costos. Del vértice óptimo salen dos aristas: la que va por L_1 hacia $\left(\frac{51}{11}, \frac{28}{11}\right)$, con dirección $(3,1)$, y la que va por L_2 hacia $\left(\frac{7}{3}, -\frac{20}{3}\right)$, con dirección $(1,-2)$. (Se comprueba que son direcciones de esas rectas: $3-3\cdot 1=0$ y $2\cdot 1+(-2)=0$.) El vértice es óptimo si y solo si avanzar por cualquiera de las dos no abarata:

$$c^T(3,1)\geq 0 \iff 3c_1+c_2\geq 0, \qquad c^T(1,-2)\geq 0 \iff c_1-2c_2\geq 0.$$

Con $c=(3,-1)$ las dos se cumplen, $8\geq 0$ y $5\geq 0$, como tenía que ser. Y ahora:

$$\text{con } c_2=-1: \quad 3c_1-1\geq 0 \text{ y } c_1+2\geq 0 \implies \boxed{c_1\geq \tfrac{1}{3}}$$

$$\text{con } c_1=3: \quad 9+c_2\geq 0 \text{ y } 3-2c_2\geq 0 \implies \boxed{-9\leq c_2\leq \tfrac{3}{2}}$$

En $c_1=\frac{1}{3}$ el primer producto escalar se anula: hay empate a lo largo de la arista y el problema tiene solución múltiple, todo el segmento entre los dos vértices de L_1. Se comprueba: con $c=\left(\frac{1}{3},-1\right)$ los dos extremos valen -1.

Otra vía (desdoblando las variables libres). La vía mecánica existe y conviene saber montarla, aunque aquí cueste más. Se escribe $x_i=x_i^+-x_i^-$ con $x_i^+, x_i^-\geq 0$, lo que convierte el problema en uno de cuatro variables no negativas y cuatro restricciones; con las holguras y los excesos quedan ocho columnas. No hace falta fase I: multiplicando por -1 las dos primeras desigualdades, las cuatro quedan con signo $\leq$ y término independiente positivo. Sus holguras forman una base factible inicial en el origen. El resultado es el mismo, con $x_1^-=\frac{9}{7}$, $x_2^+=\frac{4}{7}$ y las demás nulas. La comparación entre las dos vías muestra por qué aquí resulta más breve comparar los tres vértices.

El ejercicio deja dos cosas. La primera, que la ausencia de $x\geq 0$ no impide nada, pero cambia el modo de pasar a forma estándar. En este ejemplo conviene mirar primero la geometría. La segunda, que el rango de un coeficiente de costo se puede calcular sin tabla si se conocen las aristas que salen del vértice óptimo: sus direcciones definen las desigualdades del cono de costos.

Dónde se falla. En añadir $x\geq 0$ por costumbre: con esa condición de más, el óptimo sería $(0,1)$, con valor -1, y no $\left(-\frac{9}{7}, \frac{4}{7}\right)$. En quedarse con cortes que no son vértices: $(-10,18)$ incumple $x_1-3x_2\geq -3$ y valdría -48, un «mínimo» falso. Y en tomar las aristas en sentido contrario, hacia el vértice y no desde él, lo que da la vuelta a las dos desigualdades del cono.

Ejercicio 4.4. *Cuando no hay óptimo, la pregunta cambia* R5.1(D)

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1-3x_2 \\ \text{sujeto a:} & x_1-2x_2\leq 4 \\ & -x_1+x_2\leq 16 \\ & x_1,x_2\geq 0. \end{array}$$

Resolución. *La idea.* Primero las direcciones, luego los vértices. Si hay una dirección de la región por la que el objetivo baja, no hay mínimo y la pregunta por el rango de una base

óptima deja de tener sentido. Se sustituye por otra: para qué costos existe óptimo.
Paso 1: buscar direcciones antes que vértices. El cono de recesión es $\{d \geq 0 : \ d_1 - 2d_2 \leq 0, \ -d_1 + d_2 \leq 0\} = \{d \geq 0 : \ d_2 \leq d_1 \leq 2d_2\}$, que no es $\{0\}$: la región no está acotada. Sus direcciones extremas son las de los dos bordes del cono, $d^1 = (1,1)$ (donde $d_1 = d_2$) y $d^2 = (2,1)$ (donde $d_1 = 2d_2$).
Paso 2: aplicar el teorema fundamental. Según el teorema fundamental de la programación lineal (sección 3.2), hay óptimo finito si y solo si $c^T d^j \geq 0$ para toda dirección extrema. Aquí

$$c^T d^1 = (-1)(1) + (-3)(1) = -4 < 0,$$

luego **el problema es ilimitado**: avanzando desde cualquier punto factible en la dirección $(1,1)$ el objetivo baja sin cota. Por ejemplo, desde el origen, los puntos (t,t) son factibles para todo $t \geq 0$ y valen $-4t \to -\infty$.
Paso 3: qué significan entonces los apartados 2 y 3. No existe ninguna base óptima, así que preguntar por el rango en el que «sigue siendo óptima» no tiene objeto. La pregunta honesta, y la que enseña algo, es la contraria: *¿para qué valores del coeficiente hay óptimo?* Y el teorema fundamental la contesta sin resolver nada:

$$c^T d^1 \geq 0 \text{ y } c^T d^2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c_1 + c_2 \geq 0 \text{ y } 2c_1 + c_2 \geq 0.$$

Con $c_2 = -3$ fijo, eso da $c_1 \geq 3$ y $c_1 \geq \frac{3}{2}$, es decir, $c_1 \geq 3$. Con $c_1 = -1$ fijo, da $c_2 \geq 1$ y $c_2 \geq 2$, es decir, $c_2 \geq 2$.
Paso 4: y ya que hay óptimo, dónde está. Los vértices de la región son $(0,0)$, $(4,0)$ y $(0,16)$. Con $c_2 = -3$ y $c_1 \geq 3$, sus valores son 0, $4c_1 \geq 12$ y -48: el óptimo está en $(0,16)$ para todo $c_1 \geq 3$, y vale -48. Con $c_1 = -1$ y $c_2 \geq 2$, los valores son 0, -4 y $16c_2 \geq 32$: el óptimo está en $(4,0)$ y vale -4. Obsérvese que el vértice óptimo no es el mismo en los dos casos, lo cual es coherente: mover c_1 y mover c_2 son dos rectas distintas del espacio de costos y atraviesan conos distintos.

Lo que deja este apartado es un hábito: antes de pivotar, mirar las direcciones. En un problema con esta región factible no acotada, las desigualdades $c^T d^j \geq 0$ determinan para qué costos existe óptimo finito. Para localizarlo o conocer el rango de una base concreta, aún hay que comparar los vértices o examinar sus costos reducidos.
Dónde se falla. En comparar solo vértices. Los tres valen 0, -4 y -48, y quien se quede ahí dará $(0,16)$ como mínimo, con -48. Es falso: los puntos (t,t) son factibles y valen $-4t$, sin cota.

Ejercicio 4.5. *El capítulo entero en un problema* R5.2

Sea Min cx sujeto a $x \in X$, con

$$X = \left\{ \begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array} \right\}.$$

(a) Representar X y determinar sus puntos extremos.
(b) Determinar el conjunto de vectores c para los que el problema tiene solución **única** en

$(x_1, x_2) = (3, 2)$.

(c) Comprobar si $(c_1, c_2) = (-1, -1)$ está en ese conjunto y, si lo está, escribir la tabla óptima (T).

(d) Calcular los precios sombra de (T), formular el dual y comprobar que los precios sombra son su solución óptima.

(e) Si la segunda restricción pasa a ser $2x_1 + x_2 \leq 8 - \Delta$, determinar Δ_0, el mayor Δ para el que la base de (T) sigue siendo óptima, y justificarlo con el dibujo.

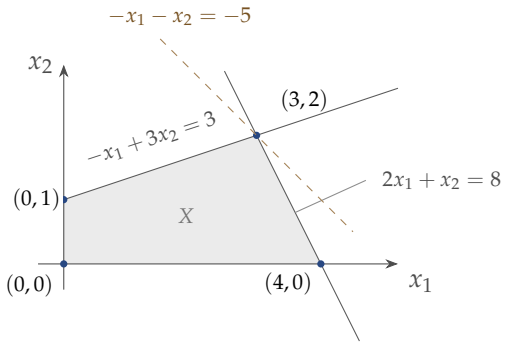
(f) Determinar la solución óptima para $\Delta = \frac{15}{2}$.

Resolución. *La idea.* Un solo vértice, $(3, 2)$, mirado seis veces. Primero la geometría: sus aristas dicen para qué costos es el único óptimo. Después la tabla de su base, de la que se leen los precios sombra y el dual. Por último, un recurso que se mueve: mientras $B^{-1}b \geq 0$ la base aguanta, y cuando deja de aguantar se repara con el simplex dual.

(a) Las dos rectas se cortan donde $-x_1 + 3x_2 = 3$ y $2x_1 + x_2 = 8$; de la primera $x_1 = 3x_2 - 3$, y sustituyendo, $7x_2 = 14$, luego $x_2 = 2$ y $x_1 = 3$. Con los cortes con los ejes, los puntos extremos son

$$(0, 0), \qquad (0, 1), \qquad (3, 2), \qquad (4, 0),$$

y X es el cuadrilátero que determinan.



(b) Del vértice $(3, 2)$ salen dos aristas: hacia $(0, 1)$, con dirección $(0, 1) - (3, 2) = (-3, -1)$, y hacia $(4, 0)$, con dirección $(4, 0) - (3, 2) = (1, -2)$. El vértice es óptimo *único* si y solo si avanzar por cualquiera de las dos aristas encarece **estrictamente**:

$$c^T(-3, -1) > 0 \iff 3c_1 + c_2 < 0, \qquad c^T(1, -2) > 0 \iff c_1 - 2c_2 > 0.$$

Luego el conjunto pedido es

$$C = \{(c_1, c_2) \ : \ 3c_1 + c_2 < 0 \ \text{ y } \ -c_1 + 2c_2 < 0\}.$$

Otra vía (comparando con los cuatro vértices). Otra manera, más elemental y que no exige saber cuáles son las aristas, es imponer que $(3, 2)$ gane a los otros tres puntos extremos, uno a uno:

$$3c_1 + 2c_2 < 0 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2, \qquad 3c_1 + 2c_2 < 0, \qquad 3c_1 + 2c_2 < 4c_1 + 0 \cdot c_2,$$

es decir, $3c_1 + c_2 < 0$, $3c_1 + 2c_2 < 0$ y $-c_1 + 2c_2 < 0$. Se obtienen tres condiciones en lugar de dos, y la de en medio sobra: de $3c_1 + c_2 < 0$ y $c_1 > 2c_2$ se deduce $c_2 \leq 0$ (si fuera $c_2 > 0$,

entonces $c_1 > 2c_2 > 0$ y $3c_1 + c_2$ sería positivo), y entonces $3c_1 + 2c_2 = (3c_1 + c_2) + c_2 < 0$. Las dos vías dan el mismo conjunto, y la comparación enseña algo general: **en un politopo, basta comparar un vértice con sus vecinos para decidir si es óptimo**. En un poliedro no acotado hay que comprobar también sus aristas no acotadas. Esa es la razón de que el simplex mire solo columnas y no todos los vértices.

(c) Con $c = (-1,-1)$: $3(-1) + (-1) = -4 < 0$ y $-(-1) + 2(-1) = -1 < 0$. Sí pertenece a C. Poniendo el problema en forma estándar con holguras x_3 y x_4,

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \qquad 2x_1 + x_2 + x_4 = 8,$$

la base asociada al vértice $(3,2)$ es $B = (a_2, a_1)$, con

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

y la tabla óptima es

(T)

	-1	-1	0	0	
x_2	0	1	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	2
x_1	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	3
$c_j - z_j$	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	-5

Los dos costos reducidos son estrictamente positivos: óptimo único, como prometía (b).

(d) Los precios sombra son

$$(w^*)^T = c_B^T B^{-1} = (-1,-1)\cdot\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \left(-\tfrac{1}{7},\ -\tfrac{4}{7}\right),$$

que son, cambiados de signo, los costos reducidos de las holguras $\frac{1}{7}$ y $\frac{4}{7}$. El problema dual de un mínimo con restricciones $\leq$ es

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 3u_1 + 8u_2 \\ \text{sujeto a:} & -u_1 + 2u_2 \leq -1 \\ & 3u_1 + u_2 \leq -1 \\ & u_1, u_2 \leq 0, \end{array}$$

(el signo $u \leq 0$ viene de haber tenido que cambiar de signo las restricciones para llevarlas a la forma canónica $\geq$). Conviene fijar aquí la regla general de signos, que es fuente constante de errores: lo que *siempre* vale es $(w^*)^T = c_B^T B^{-1}$; el costo reducido de la variable auxiliar de la fila i coincide con w_i^* si la restricción es $\geq$ (la columna auxiliar es $-e_i$) y con $-w_i^*$ si es $\leq$ (la columna auxiliar es $+e_i$). La igualdad $w^T b = c^T x$ certifica optimalidad cuando ambos puntos son factibles. Si aquí los valores no coinciden, hay que revisar la tabla, los signos y las cuentas. Comprobación de que $u^* = \left(-\frac{1}{7}, -\frac{4}{7}\right)$ es factible y óptima:

$$\tfrac{1}{7} - \tfrac{8}{7} = -1 \leq -1 \text{ (activa)}, \qquad -\tfrac{3}{7} - \tfrac{4}{7} = -1 \leq -1 \text{ (activa)}, \qquad u^* \leq 0,$$

y su valor objetivo es $3\left(-\frac{1}{7}\right) + 8\left(-\frac{4}{7}\right) = -\frac{35}{7} = -5 = z^*$. Por el corolario de la dualidad débil, las dos son óptimas. Las dos restricciones duales son activas porque las dos variables primales son positivas: es la holgura complementaria.

(e) Con la segunda restricción $2x_1 + x_2 \le 8 - \Delta$, el término independiente es $b = (3,\, 8-\Delta)^T$ y la solución básica pasa a ser

$$\bar{b}(\Delta) = B^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 8-\Delta \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2\cdot 3 + (8-\Delta) \\ -3 + 3(8-\Delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{\Delta}{7} \\ 3 - \frac{3\Delta}{7} \end{pmatrix}.$$

La base sigue siendo factible mientras las dos componentes sean no negativas:

$$2 - \tfrac{\Delta}{7} \ge 0 \iff \Delta \le 14, \qquad 3 - \tfrac{3\Delta}{7} \ge 0 \iff \Delta \le 7,$$

y manda la segunda: $\Delta_0 = 7$. El valor óptimo en ese tramo es $z^*(\Delta) = -\big(2 - \frac{\Delta}{7}\big) - \big(3 - \frac{3\Delta}{7}\big) = -5 + \frac{4\Delta}{7}$, coherente con los precios sombra: la variación de b es $(0, -\Delta)$ y $(w^*)^T(0,-\Delta) = \frac{4}{7}\Delta$.

La justificación gráfica, que es lo que pide el enunciado. Aumentar Δ desplaza la recta $2x_1 + x_2 = 8 - \Delta$ paralelamente hacia el origen. El vértice óptimo, que es el corte de esa recta con $-x_1 + 3x_2 = 3$, *se desliza a lo largo de esta última*, bajando hacia la izquierda: son los puntos $\big(3 - \frac{3\Delta}{7},\, 2 - \frac{\Delta}{7}\big)$. Cuando $\Delta = 7$ el punto ha llegado a $(0,1)$, es decir, al eje x_2, y no puede seguir sin que x_1 se haga negativa. Ese es exactamente el momento en que la base pierde la factibilidad, y por eso $\Delta_0 = 7$.

(f) Con $\Delta = \frac{15}{2} > 7$ la base de (T) ya no es factible: $\bar{b} = \big(\frac{13}{14},\, -\frac{3}{14}\big)$. Pero sigue siendo óptima, porque los costos reducidos no dependen de b. Es el paso 0 del simplex dual.

Sale x_1, cuya fila es $\big(1, 0, -\frac{1}{7}, \frac{3}{7}\big)$, con una única entrada negativa, la de x_3. Entra x_3, y no hace falta ni calcular cocientes. Pivotando sobre $-\frac{1}{7}$:

	-1	-1	0	0	
x_2	2	1	0	1	$\frac{1}{2}$
x_3	-7	0	1	-3	$\frac{3}{2}$
$c_j - z_j$	1	0	0	1	$-\frac{1}{2}$

Término independiente no negativo y costos reducidos no negativos: óptima. La solución es

$$x^* = \Big(0,\, \tfrac{1}{2}\Big), \qquad z^* = -\tfrac{1}{2},$$

con $x_3 = \frac{3}{2}$ (sobra margen en la primera restricción) y $x_4 = 0$ (la segunda es activa). Se comprueba: $-0 + 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \le 3$ y $2\cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 8 - \frac{15}{2}$. Geométricamente, la recta desplazada ha cortado tanto el polígono que el óptimo ha saltado del lado $-x_1 + 3x_2 = 3$ al eje $x_1 = 0$.

Este problema es el resumen del capítulo: el mismo vértice se mira desde la geometría (a), desde el cono de costos (b), desde la tabla (c), desde el dual (d), desde el desplazamiento de un recurso (e) y desde el simplex dual (f). Conviene rehacerlo entero cuando el capítulo se haya olvidado un poco, porque cada apartado engancha con el siguiente.

Dónde se falla. En (b), en usar $\ge$ en vez de $>$: con un producto nulo, el vértice empata con toda una arista y deja de ser el único óptimo. En (d), en el signo de los precios: el problema es de mínimo con restricciones $\le$, así que $u \le 0$, y bajo las holguras se lee $-u$. En (e), en el sentido del cambio: el recurso es $8 - \Delta$, luego $g = (0, -1)$; con $g = (0, 1)$ saldría la cota $\Delta \ge -7$, que es otra pregunta. Y en (f), en pivotar con el simplex porque $\bar{b}$ tiene una componente negativa: lo roto es la factibilidad, y eso es simplex dual.

Ejercicio 4.6. *Un parámetro dentro de la tabla* R5.3

Sea P el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 - 3x_2 - 5x_5 \\ \text{sujeto a:} & x_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4 + x_5 = \frac{7}{2} \\ & x_2 + \vartheta x_3 + \frac{1}{4}x_4 + 3x_5 = \frac{3}{2} \\ & x_1, \ldots, x_5 \geq 0, \end{array} \qquad (T) \quad \begin{array}{c|ccccc|c} & & & & & & \\ x_1 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} & 1 & \frac{7}{2} \\ x_2 & 0 & 1 & \vartheta & \frac{1}{4} & 3 & \frac{3}{2} \end{array}$$

con $\vartheta \in \mathbb{R}$. Determinar los valores de ϑ para los que P tiene a (T) como tabla óptima; tiene solución ilimitada; tiene más de una solución básica factible óptima; o es infactible.

Resolución. *La idea.* Lo primero es localizar dónde vive el parámetro. Aquí está en una sola columna no básica, de modo que ni $\bar{b}$ ni el valor dependen de él. Todo se decide en el costo reducido de x_3 y en el signo de las entradas de su columna.
Observación de partida, que ahorra la mitad del trabajo. Las columnas de x_1 y x_2 son e_1 y e_2, luego $B = (a_1, a_2) = I$ y $B^{-1} = I$: la tabla *es* la matriz de restricciones, y $\bar{b} = b = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right) \geq 0$ para todo ϑ. De ahí sale ya una respuesta:

P **no es infactible para ningún** ϑ, porque la base $\{x_1, x_2\}$ es factible siempre.

Los costos reducidos. Con $c_B = (-1, -3)$ y $z_j = c_B^T y_j$:

$$\begin{array}{ll} z_3 = (-1)\left(-\frac{1}{4}\right) + (-3)\vartheta = \frac{1}{4} - 3\vartheta, & c_3 - z_3 = 0 - \left(\frac{1}{4} - 3\vartheta\right) = 3\vartheta - \frac{1}{4}, \\ z_4 = (-1)\frac{7}{4} + (-3)\frac{1}{4} = -\frac{10}{4}, & c_4 - z_4 = \frac{5}{2}, \\ z_5 = (-1)(1) + (-3)(3) = -10, & c_5 - z_5 = -5 + 10 = 5. \end{array}$$

Solo uno de los tres depende de ϑ, y todo el problema se decide en él. El valor objetivo de esta solución básica no depende de ϑ: $z = c_B^T \bar{b} = -\frac{7}{2} - \frac{9}{2} = -8$.
Cuándo (T) *es óptima.* Hace falta $c_3 - z_3 \geq 0$:

$$3\vartheta - \tfrac{1}{4} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\vartheta \geq \tfrac{1}{12}}.$$

En ese caso $x^* = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0, 0\right)$ con $z^* = -8$.
Cuándo hay más de una solución básica factible óptima. Hace falta que el costo reducido de una no básica se anule *y* que esa columna pueda entrar de verdad en la base, aquí, como las dos variables básicas son positivas, basta con que esa columna tenga alguna entrada positiva para que el paso sea estrictamente positivo:

$$c_3 - z_3 = 0 \iff \vartheta = \tfrac{1}{12},$$

y en ese caso $y_3 = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{12}\right)$ tiene la segunda entrada positiva, con cociente $\frac{3/2}{1/12} = 18$: entra x_3, sale x_2, y se obtiene una segunda solución básica factible con el mismo valor -8. Luego

$$\boxed{\vartheta = \tfrac{1}{12}}$$

es el único caso de óptimo múltiple ($c_4 - z_4$ y $c_5 - z_5$ nunca se anulan).
Cuándo es ilimitado. Hace falta una columna con costo reducido negativo y sin ninguna entrada positiva. La única candidata es la de x_3, con $y_3 = \left(-\frac{1}{4}, \vartheta\right)$: la primera entrada

es siempre negativa, así que la condición es $\vartheta \le 0$; y entonces $c_3 - z_3 = 3\vartheta - \frac{1}{4} < 0$ automáticamente. Luego

$$\boxed{\vartheta \le 0}.$$

La dirección que hace bajar el objetivo sin cota es $d = (-y_3;\, e_3) = \big(\frac{1}{4},\, -\vartheta,\, 1,\, 0,\, 0\big)$, que es no negativa precisamente porque $\vartheta \le 0$, cumple $Ad = 0$ y tiene $c^T d = c_3 - z_3 < 0$.
Y el caso que queda. Para $0 < \vartheta < \frac{1}{12}$ la tabla no es óptima pero el problema tampoco es ilimitado: $c_3 - z_3 < 0$ y y_3 tiene la segunda entrada positiva, así que x_3 entra con cociente $\frac{3/2}{\vartheta}$ y sale x_2. La nueva base $\{x_1, x_3\}$ sí es óptima — se comprueba que sus tres costos reducidos, $-3 + \frac{1}{4\vartheta}$, $\frac{7}{4} + \frac{1}{16\vartheta}$ y $-4 + \frac{3}{4\vartheta}$, son no negativos para $0 < \vartheta \le \frac{1}{12}$ — con $x^* = \big(\frac{7}{2} + \frac{3}{8\vartheta},\, 0,\, \frac{3}{2\vartheta},\, 0,\, 0\big)$. Un pivotaje basta.

Lo que conviene retener es el método, no el resultado: cuando un parámetro vive *dentro* de la tabla, lo primero es localizar qué cantidades dependen de él. Aquí el parámetro estaba en una sola columna no básica, así que $\bar{b}$ no dependía de él (nunca infactible), el valor objetivo tampoco (siempre -8 mientras la base sirva) y todo el comportamiento se decidía en un único costo reducido y en el signo de una única columna.
Dónde se falla. En declarar ilimitado en cuanto $c_3 - z_3 < 0$: para $0 < \vartheta < \frac{1}{12}$ el costo reducido es negativo, pero la columna tiene una entrada positiva y basta un pivotaje. En llamar múltiple a $\vartheta = \frac{1}{12}$ sin comprobar que x_3 puede entrar con paso positivo; aquí puede, con cociente 18. Y en buscar valores de ϑ que hagan el problema infactible, cuando ϑ no toca el término independiente.

Ejercicio 4.7. *Dos parámetros en los recursos* R5.4

Considérese, para $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$,

$$(P_{\theta_1,\theta_2}) \qquad \begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 + x_2 + 2x_4 \\ \text{sujeto a:} & 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 4 + \theta_1 \\ & x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 5 + \theta_2 \\ & x_1, \ldots, x_5 \ge 0. \end{array}$$

(a) Para $\theta_1 = \theta_2 = 0$, aplicar la fase I e identificar la base factible B_I.
(b) Para $\theta_1 = \theta_2 = 0$, aplicar la fase II e indicar el tipo de solución óptima.
(c) ¿Podrían pertenecer x_4 y x_5 a la misma base para algún (θ_1, θ_2)?
(d) Representar $\Gamma = \{(\theta_1, \theta_2) : B_I \text{ es base factible de } (P_{\theta_1,\theta_2})\}$, con sus vértices y direcciones.
(e) Con $c_1 = \delta$, $c_3 = -5\delta$ y el resto sin cambios en $(P_{0,0})$, hallar el rango de δ para el que la base óptima define solución única. ¿Qué ocurre si $\delta = 5$? ¿Y con el dual?

Resolución. *La idea.* La fase I da una base, y después cada apartado mira una sola cosa de ella: los costos reducidos para la optimalidad, la dependencia lineal de dos columnas para (c), la condición $B^{-1}b(\theta) \ge 0$ para la región de parámetros, y otra vez los costos reducidos, ahora con un parámetro, para (e).
(a) Se añaden artificiales x_6 y x_7 y se minimiza $x_6 + x_7$. Con $c_B = (1, 1)$, los costos reducidos iniciales son $c_j - z_j = -(\text{suma de la columna})$, es decir, $(-3, -2, 1, 2, -2)$ para $x_1, \ldots, x_5$.

Entra x_1 (el más negativo); los cocientes son $4/2 = 2$ y $5/1 = 5$, luego sale x_6. Pivotando:

x_1	1	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
x_7	0	$\frac{1}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
$c_j - z_j$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	3

Entra x_3, cuya columna es $(-1, 2)^T$: el único cociente es $3/2$ y sale x_7. Pivotando sobre el 2:

x_1	1	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$
x_3	0	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$c_j - z_j$	0	0	0	0	0	1	1	0

El objetivo de la fase I vale 0 y las dos artificiales han salido: el problema es factible y

$$B_I = \{x_1, x_3\}, \qquad x = \left(\tfrac{7}{2},\, 0,\, \tfrac{3}{2},\, 0,\, 0\right).$$

(b) Con los costos verdaderos $c = (-1, 1, 0, 2, 0)$ y esa base, $B = (a_1, a_3) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B^{-1} = \frac{1}{4}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ y $c_B = (-1, 0)$, de donde $c_B^T B^{-1} = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ y

	-1	1	0	2	0	
x_1	1	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{2}$
x_3	0	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
$c_j - z_j$	0	$\frac{7}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{2}$

La fase II no necesita ningún pivotaje: la base que dejó la fase I ya es óptima. Los tres costos reducidos no básicos son *estrictamente* positivos y las dos componentes básicas son *estrictamente* positivas, luego la solución es **óptima, única y no degenerada**:

$$x^* = \left(\tfrac{7}{2},\, 0,\, \tfrac{3}{2},\, 0,\, 0\right), \qquad z^* = -\tfrac{7}{2}.$$

(c) No, para ningún (θ_1, θ_2), y la razón no tiene nada que ver con los parámetros. Las columnas de x_4 y x_5 son

$$a_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad a_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -a_4,$$

es decir, linealmente dependientes. Una base está formada por columnas linealmente independientes, así que $\{a_4, a_5\}$ no puede ser una base, y cambiar el término independiente no altera las columnas.

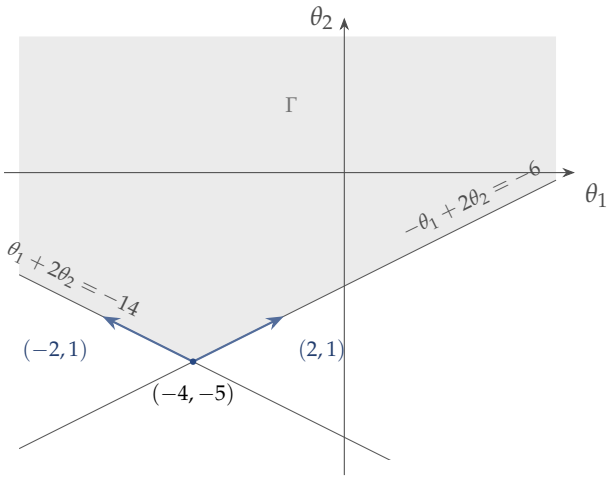
(d) La base $B_I = \{x_1, x_3\}$ es factible cuando

$$B^{-1}\begin{pmatrix} 4+\theta_1 \\ 5+\theta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (4+\theta_1) + 2(5+\theta_2) \\ -(4+\theta_1) + 2(5+\theta_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 14+\theta_1+2\theta_2 \\ 6-\theta_1+2\theta_2 \end{pmatrix} \geq 0,$$

es decir,

$$\Gamma = \{(\theta_1, \theta_2) \,:\, \theta_1 + 2\theta_2 \geq -14,\ -\theta_1 + 2\theta_2 \geq -6\}.$$

Es la intersección de dos semiplanos, luego un cono desplazado. Su único vértice es el corte de las dos rectas: sumando, $4\theta_2 = -20$, luego $\theta_2 = -5$ y $\theta_1 = -4$. Sus direcciones extremas son las de los dos bordes del cono de recesión $\{d :\ d_1 + 2d_2 \geq 0,\ -d_1 + 2d_2 \geq 0\}$, que son $(2, 1)$ y $(-2, 1)$.



(e) Con $c = (\delta,\ 1,\ -5\delta,\ 2,\ 0)$ y la misma base, $c_B = (\delta, -5\delta)$ y

$$c_B^T B^{-1} = (\delta, -5\delta) \cdot \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(6\delta,\ -8\delta) = \left(\tfrac{3\delta}{2},\ -2\delta\right),$$

de donde

$$c_2 - z_2 = 1 + \tfrac{\delta}{2}, \qquad c_4 - z_4 = 2 - \tfrac{\delta}{2}, \qquad c_5 - z_5 = \tfrac{\delta}{2}.$$

Para que la base sea óptima con solución *única* los tres tienen que ser estrictamente positivos:

$$1 + \tfrac{\delta}{2} > 0, \qquad 2 - \tfrac{\delta}{2} > 0, \qquad \tfrac{\delta}{2} > 0 \iff \boxed{0 < \delta < 4}.$$

En los extremos aparece óptimo múltiple: en $\delta = 0$ se anula $c_5 - z_5$ y en $\delta = 4$ se anula $c_4 - z_4$.
Si $\delta = 5$, entonces $c_4 - z_4 = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} < 0$: la base deja de ser óptima y x_4 es candidata a entrar. Pero su columna es

$$y_4 = B^{-1}a_4 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \leq 0,$$

sin ninguna entrada positiva: no hay test del cociente que hacer y **el problema es ilimitado**. La dirección que lo prueba es $d = (-y_4; e_4) = \left(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}, 1, 0\right)$, que cumple $d \geq 0$, $Ad = 0$ (en efecto, $2 \cdot \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 0$ y $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - 1 = 0$) y $c^T d = c_4 - z_4 = -\frac{1}{2} < 0$.
Y el dual. Si el primal es ilimitado, el dual **es infactible**: por dualidad débil, cualquier w factible en el dual acotaría el primal por debajo con $w^T b$, y un problema ilimitado no admite cota inferior. Aquí eso se puede ver también directamente: la restricción dual asociada a la columna a_4 pide $w^T a_4 \leq c_4$, es decir, $-w_1 - w_2 \leq 2$; y las de a_1 y a_3 piden $2w_1 + w_2 \leq 5$ y $-2w_1 + w_2 \leq -25$. Sumando $\frac{3}{4}$ de la primera de estas dos últimas desigualdades y $\frac{1}{4}$ de la segunda, resulta $w_1 + w_2 \leq -\frac{5}{2}$. Pero la desigualdad asociada a a_4 exige $w_1 + w_2 \geq -2$: contradicción. Los pesos $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{4}$ no se han elegido al azar: son las componentes de la dirección d en x_1 y en x_3. Combinar las restricciones duales de a_1, a_3 y a_4 con los pesos de d da $w^T Ad \leq c^T d$, es decir, $0 \leq -\frac{1}{2}$, porque $Ad = 0$. La dirección que hace ilimitado el primal es a la vez el certificado de que el dual no tiene solución.

El ejercicio deja tres ideas que se repiten. Que un parámetro en el término independiente define una *región* de parámetros — aquí el cono Γ — y que esa región es siempre poliédrica, porque las condiciones $B^{-1}b(\theta) \geq 0$ son lineales en θ. Que dos columnas proporcionales nunca comparten base, sin necesidad de mirar nada más. Y que la señal de «ilimitado» es siempre la misma pareja: costo reducido negativo y columna sin entradas positivas.
Dónde se falla. En (c), en buscar valores de θ cuando la respuesta está en las columnas: $a_5 = -a_4$ y nunca serán base. En (e), en pedir ≥ 0 cuando la pregunta es por solución *única*, que exige > 0. Y con $\delta = 5$, en buscar otro vértice óptimo: la columna que debería entrar no tiene entradas positivas, y eso es ilimitado.

Ejercicio 4.8. *Degeneración, precios sombra y un corte* R5.5

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -2x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{sujeto a:} & x_1 + x_3 \leq 1 \\ & x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

(a) Probar que la solución básica de base $\{x_1, x_2, x_3\}$ es óptima y hallar el valor de las variables.
(b) Escribir el dual y hallar su solución óptima.
(c) ¿Cuál es la solución óptima si el lado derecho de la tercera restricción pasa a $b_3 = 3{,}5$?
(d) Hallar la solución óptima si se añade al problema original la restricción $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2{,}5$.

Resolución. *La idea.* La optimalidad de una base dada se comprueba con los precios, sin pivotar: $w = c_B^T B^{-1}$ y los costos reducidos de las holguras. El vértice es degenerado, y eso es lo que hace interesantes los apartados siguientes: un precio sombra que no predice el cambio, y un pivotaje dual que no arregla nada a la primera.
(a) Con holguras x_4, x_5, x_6, la base $\{x_1, x_2, x_3\}$ tiene

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

(se comprueba multiplicando). Resolver $Bx_B = b$ es resolver $x_1 + x_3 = 1$, $x_2 + x_3 = 2$, $x_1 + x_2 = 3$; sumando las tres, $2(x_1 + x_2 + x_3) = 6$, luego $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ y de ahí

$$x_1 = 3 - 2 = 1, \qquad x_2 = 3 - 1 = 2, \qquad x_3 = 3 - 3 = 0.$$

La solución básica es factible pero **degenerada**: la variable básica x_3 vale cero. En el espacio de las tres variables originales, en $(1, 2, 0)$ son activas las tres restricciones dadas y también $x_3 = 0$: cuatro condiciones activas para un vértice de tres dimensiones. Para la optimalidad se calculan los costos reducidos de las tres holguras, que son las no básicas. Con $c_B = (-2, -1, -1)$,

$$(w^*)^T = c_B^T B^{-1} = (-1,\ 0,\ -1), \qquad c_j - z_j = 0 - w_i^* \text{ para la holgura } i: \quad (1,\ 0,\ 1)\ \geq 0.$$

Todos no negativos: la base es óptima, con $x^* = (1, 2, 0)$ y $z^* = -4$. El cero en el costo reducido de x_5 anuncia óptimo múltiple o degeneración; aquí es lo segundo, y se verá su efecto en (c).

(b) Como las restricciones son $\leq$ en un problema de mínimo, el dual es

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & u_1 + 2u_2 + 3u_3 \\ \text{sujeto a:} & u_1 + u_3 \leq -2 \\ & u_2 + u_3 \leq -1 \\ & u_1 + u_2 \leq -1 \\ & u_1, u_2, u_3 \leq 0, \end{array}$$

y su solución óptima es $u^* = (w^*)^T = (-1, 0, -1)$. Comprobación: las tres restricciones duales se cumplen con igualdad ($-1 - 1 = -2$, $0 - 1 = -1$, $-1 + 0 = -1$), porque los costos reducidos de las columnas básicas son cero. La holgura complementaria solo exigiría las dos primeras igualdades, pues $x_3^* = 0$. Además, $u^* \leq 0$; y el valor objetivo es $1(-1) + 2(0) + 3(-1) = -4 = z^*$.

(c) Con $b = (1, 2, \frac{7}{2})$, la misma base da

$$\bar{b} = B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{9}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

con la tercera componente negativa: la base pierde la factibilidad y hay que aplicar el simplex dual. Sale x_3; su fila sobre las columnas no básicas (x_4, x_5, x_6) es la tercera fila de B^{-1}, es decir, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, con una única entrada negativa, la de x_6: entra x_6. La nueva base es $\{x_1, x_2, x_6\}$ y da

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 2, \qquad x_6 = \tfrac{7}{2} - 1 - 2 = \tfrac{1}{2},$$

es decir, **la misma solución óptima** $x^* = (1, 2, 0)$ con $z^* = -4$, ahora con holgura $\frac{1}{2}$ en la tercera restricción. Se comprueba que la nueva base es óptima: los nuevos precios sombra son $(-2, -1, 0)$ y los costos reducidos de x_3, x_4, x_5 son 2, 2 y 1.

Y aquí está lo interesante. El precio sombra de la tercera restricción era $w_3^* = -1$, lo que sugeriría que aumentar b_3 en media unidad debería bajar el costo en $\frac{1}{2}$. No ha bajado nada. La explicación es la degeneración: el vértice $(1, 2, 0)$ tiene una base degenerada y, en este ejemplo, la función $z(b)$ presenta un **quiebro** al variar b_3. Su derivada por la izquierda respecto de b_3 vale -1 y por la derecha vale 0: relajar la tercera restricción no sirve de nada porque no era ella la que apretaba de verdad. Es exactamente la advertencia que se hizo al presentar los precios sombra en la sección 4.2, vista en un caso concreto.

(d) La solución actual da $x_1 + x_2 + x_3 = 3 > \frac{5}{2}$: la restricción nueva no se cumple. Se añade con holgura, $x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = \frac{5}{2}$, y se hacen ceros en las columnas básicas. El coeficiente de la fila nueva sobre las básicas es $a^B = (1, 1, 1)$, luego su término independiente pasa a ser

$$\tfrac{5}{2} - (1, 1, 1) \cdot (1, 2, 0)^T = \tfrac{5}{2} - 3 = -\tfrac{1}{2},$$

y sus coeficientes sobre (x_4, x_5, x_6) pasan a ser $-(1,1,1)B^{-1} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$:

	-2	-1	-1	0	0	0	0	
x_1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
x_7	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
$c_j - z_j$	0	0	0	1	0	1	0	-4

Primer pivotaje dual. Sale x_7. En su fila las tres entradas son negativas, y los cocientes son $\frac{1}{-1/2} = -2$, $\frac{0}{-1/2} = 0$ y $\frac{1}{-1/2} = -2$; el máximo es 0, luego entra x_5. Tras pivotar, la fila de x_3 queda con término independiente $-\frac{1}{2}$: sigue habiendo infactibilidad, porque el pivotaje ha sido degenerado (el costo reducido de la columna que entró era cero y el objetivo no ha cambiado).
Segundo pivotaje dual. Sale x_3; su fila es ahora $(0,0,1,0,0,-1,1)$ y la única entrada negativa es la de x_6, que entra. La base final es $\{x_1, x_2, x_5, x_6\}$:

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = \tfrac{3}{2}, \qquad x_5 = \tfrac{1}{2}, \qquad x_6 = \tfrac{1}{2}, \qquad x_3 = x_4 = x_7 = 0,$$

es decir,

$$x^* = \left(1,\ \tfrac{3}{2},\ 0\right), \qquad z^* = -\tfrac{7}{2}.$$

Comprobación: $1 + 0 = 1 \le 1$ (activa), $\frac{3}{2} + 0 = \frac{3}{2} \le 2$, $1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \le 3$, $1 + \frac{3}{2} + 0 = \frac{5}{2} \le \frac{5}{2}$ (la nueva, activa), y $-2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$. El valor ha empeorado respecto de -4, como tiene que ocurrir al añadir una restricción.

Este problema es el que mejor enseña qué hace la degeneración con la intuición económica. En un vértice degenerado puede haber distintos vectores duales óptimos y pendientes distintas según la dirección del cambio, como aquí: relajar una restricción activa puede no valer nada si otra sigue apretando en el mismo sitio. Y enseña también que un pivotaje dual con costo reducido nulo no mueve el objetivo y puede no arreglar la factibilidad de un tirón: hace falta otro.
Dónde se falla. En (c), en usar el precio $w_3^* = -1$ para predecir $z = -4 - \frac{1}{2}$: el valor sigue siendo -4, porque en un vértice degenerado el precio es solo la pendiente por un lado. En (d), en olvidar hacer ceros en la fila nueva bajo las básicas, o en parar tras el primer pivotaje dual, que es degenerado y deja $\bar{b}$ con una componente negativa.

Seis problemas de dualidad y sensibilidad R6

Los seis problemas siguientes incluyen tablas dadas o calculadas, un modelo de movimiento y modificaciones de costos, recursos o columnas. Cuatro indican su procedencia de examen.

Ejercicio 4.9. *Cuatro modificaciones sobre la misma tabla* R6.1

Sea

$$\text{(P)}\qquad \begin{array}{ll} \text{Min} & -2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{sujeto a:} & x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8 \\ & -x_1 + x_2 + 2x_3 \le 4 \\ & x_i \ge 0, \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	2	1	1	0	8
x_5	0	3	3	1	1	12
	0	3	3	2	0	

1. Escribir el dual de (P).
2. Hallar la nueva solución óptima si el costo de x_2 pasa a $c_2 = -5$. Hallar la solución si el coeficiente de x_3 en la segunda restricción pasa a 1.
3. Hallar la nueva solución si se añade la restricción $x_2 + x_3 \ge 2$. Igualmente si se añade una variable nueva x_6 con $c_6 = -4$ y $a_6 = (1,2)^T$.

Resolución. *La idea.* Una tabla óptima y cuatro cambios, y en cada uno la misma pregunta previa: ¿qué condición amenaza? Un costo o una columna no básica tocan la optimalidad; una restricción nueva, la factibilidad; una variable nueva, otra vez la optimalidad. Todo se calcula con la B^{-1} que está bajo las holguras.
La tabla dada tiene base $\{x_1, x_5\}$, con $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, que se lee en las columnas de las dos holguras; la solución es $x^* = (8,0,0)$ con $z^* = -16$, única porque los tres costos reducidos no básicos son positivos.
1. Al ser un mínimo con restricciones $\le$, las variables duales son ≤ 0:

$$\text{(D)}\qquad \begin{array}{ll} \text{Max} & 8u_1 + 4u_2 \\ \text{sujeto a:} & u_1 - u_2 \le -2, \quad 2u_1 + u_2 \le -1, \quad u_1 + 2u_2 \le 1, \quad u_1, u_2 \le 0. \end{array}$$

Su solución óptima es $(u^*)^T = c_B^T B^{-1} = (-2,0)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = (-2,0)$, con valor $8(-2) = -16 = z^*$. La primera restricción dual es activa, que es lo que corresponde a $x_1^* > 0$; las otras dos tienen holgura 3 y 3, que son los costos reducidos de x_2 y x_3.
2a. El costo de x_2 pasa a -5. La variable x_2 es no básica y su costo reducido es 3, luego puede bajar a lo sumo 3, es decir, hasta $c_2 = -4$. Con $c_2 = -5$ el nuevo costo reducido es $3 - 4 = -1 < 0$ y hay que pivotar. La columna es $y_2 = (2,3)^T$ y el test del cociente mínimo da $8/2 = 4$ y $12/3 = 4$: hay empate, señal de que la solución siguiente será degenerada. Tomando la primera fila, sale x_1 y entra x_2:

	-2	-5	1	0	0	
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	4
x_5	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0
$c_j - z_j$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	-20

Todos los costos reducidos no básicos son positivos: óptima, con $x^* = (0,4,0)$ y $z^* = -20$. La solución es **degenerada**, porque la variable básica x_5 vale cero: en el punto $(0,4)$ las dos restricciones son activas.
2b. El coeficiente de x_3 en la segunda restricción pasa a 1. Ahora cambia la *columna* de x_3, que pasa de $a_3 = (1,2)^T$ a $a_3 = (1,1)^T$. Como x_3 es no básica, se recalculan su columna en la tabla y su costo reducido:

$$y_3 = B^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad z_3 = c_B^T y_3 = (-2,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2, \qquad c_3 - z_3 = 1 + 2 = 3 \ge 0.$$

Sigue siendo no negativo, de modo que **la solución óptima no cambia**: $x^* = (8, 0, 0)$ con $z^* = -16$. Este apartado es el más instructivo de los cuatro porque muestra que la solución actual puede conservarse aunque cambie una columna no básica. Mientras su costo reducido siga siendo no negativo, esta base certifica la optimalidad; otros puntos factibles y futuros pivotajes sí pueden verse afectados.

3a. Se añade $x_2 + x_3 \geq 2$. La solución actual da $0 + 0 = 0 < 2$: no la cumple. Escrita con holgura y con el signo que la deja en la forma habitual, $-x_2 - x_3 + x_6 = -2$. Sus coeficientes sobre las variables básicas x_1 y x_5 son cero, así que no hace falta eliminar nada: la fila entra tal cual, con término independiente -2. Se aplica el simplex dual; sale x_6 y de las dos entradas negativas de su fila los cocientes empatan en -3, luego entra x_2 (o x_3; se toma x_2). El resultado es

	-2	-1	1	0	0	0	
x_1	1	0	-1	1	0	2	4
x_5	0	0	0	1	1	3	6
x_2	0	1	1	0	0	-1	2
$c_j - z_j$	0	0	0	2	0	3	-10

con $x^* = (4, 2, 0)$ y $z^* = -10$, peor que -16, como corresponde a haber añadido una restricción. La columna no básica x_3 tiene costo reducido nulo y permite un paso positivo: aumentando $x_3 = t$, con $0 \leq t \leq 2$, se obtienen los óptimos $(4 + t, 2 - t, t)$, todos con valor -10. La variable x_5 es básica; su costo reducido nulo no es señal de multiplicidad.

3b. Se añade la variable x_6 con $c_6 = -4$ y $a_6 = (1, 2)^T$. Su costo reducido es

$$c_6 - z_6 = -4 - c_B^T B^{-1} a_6 = -4 - (-2, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -4 + 2 = -2 < 0,$$

luego el producto nuevo compensa y entra en la base. Su columna es $y_6 = B^{-1} a_6 = (1, 3)^T$, y el test del cociente da $8/1 = 8$ y $12/3 = 4$: sale x_5. Pivotando:

	-2	-1	1	0	0	-4	
x_1	1	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	4
x_6	0	1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	4
$c_j - z_j$	0	5	5	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	-24

Óptima, con $x^* = (4, 0, 0)$ y $x_6^* = 4$, y valor $z^* = -24$. Comprobación: $4 + 4 = 8 \leq 8$ y $-4 + 8 = 4 \leq 4$, las dos activas, y $-2 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = -24$.

Los apartados permiten comparar varias modificaciones del modelo. Conviene fijarse en qué se rompe en cada una: cambiar un costo o una columna no básica amenaza la optimalidad y se repara con el simplex; añadir una restricción amenaza la factibilidad y se repara con el simplex dual; y añadir una variable amenaza otra vez la optimalidad. Ninguna de las cuatro exige rehacer el problema.

Dónde se falla. En 2b, en rehacer toda la tabla cuando solo cambia una columna no básica: bastan y_3 y su costo reducido. En 3a, en escribir la restricción nueva como $x_2 + x_3 - x_6 = 2$, cuya holgura entra con -1 y no sirve de columna básica; hay que cambiarla de signo antes. En 3b, en hacer el test del cociente con $a_6 = (1, 2)$ en vez de con $y_6 = B^{-1} a_6 = (1, 3)$: el paso saldría 6 en vez de 4, y el punto final sería otro.

Ejercicio 4.10. *El móvil, y una función de valor con pico* R6.2

Un móvil puede desplazarse en la dirección de los vectores $v_1 = (0,1)$, $v_2 = (1,-1)$ y $v_3 = (-1,-1)$, tardando 1 segundo en alcanzar, respectivamente, v_1, v_2 y v_3.

(a) Formular como un problema de programación lineal el problema de hallar el tiempo mínimo $T(p_1,p_2)$ necesario para desplazarse desde el origen a un punto (p_1,p_2).
(b) Formular el dual.
(c) Describir la función $\vartheta \mapsto T(\vartheta,1)$.

Resolución. *La idea.* El tiempo empleado en cada dirección es una variable, y llegar al destino son dos ecuaciones, una por coordenada. El dual se lee como un potencial que ninguna dirección puede hacer subir más de una unidad por segundo. Y T es el máximo de ese potencial sobre los vértices del dual, luego convexa y lineal a trozos.

(a) Si el móvil emplea $t_i \geq 0$ segundos desplazándose en la dirección v_i, recorre $t_i v_i$, porque en un segundo alcanza v_i. El desplazamiento total es $t_1v_1 + t_2v_2 + t_3v_3$ y el tiempo total es $t_1 + t_2 + t_3$. Imponiendo llegar a (p_1,p_2):

$$\begin{array}{lll} T(p_1,p_2) = & \text{Min} & t_1+t_2+t_3 \\ & \text{sujeto a:} & t_2 - t_3 = p_1 \\ & & t_1 - t_2 - t_3 = p_2 \\ & & t_1,t_2,t_3 \geq 0. \end{array}$$

(La primera ecuación es la componente horizontal, a la que solo contribuyen v_2 y v_3; la segunda es la vertical.)

(b) Las restricciones son igualdades, luego las variables duales son libres, y hay una restricción dual por cada columna, es decir, por cada dirección:

$$\text{(D)} \quad \begin{array}{ll} \text{Max} & p_1u_1 + p_2u_2 \\ \text{sujeto a:} & u^Tv_1 \leq 1, \quad u^Tv_2 \leq 1, \quad u^Tv_3 \leq 1, \end{array} \qquad \text{es decir} \qquad \begin{array}{l} u_2 \leq 1, \\ u_1 - u_2 \leq 1, \\ -u_1 - u_2 \leq 1. \end{array}$$

LA IDEA: EL DUAL MIDE EL TIEMPO CON UNA REGLA QUE NINGUNA DIRECCIÓN PUEDE ENGAÑAR

El dual de este problema tiene una lectura física preciosa y merece contarse.
Una solución dual u es un *campo de potencial lineal* sobre el plano: al punto x se le asigna el número u^Tx. Las tres restricciones dicen que *ninguna de las tres direcciones permitidas hace subir ese potencial más de una unidad por segundo*. Y el objetivo maximiza el potencial del destino. La dualidad fuerte dice entonces:

> *el tiempo mínimo para llegar a un punto es el mayor potencial que se le puede asignar con una regla que ninguna dirección pueda superar a más de una unidad por segundo.*

Es exactamente el mismo mecanismo que el dual del camino más corto, donde las variables duales eran potenciales de los nodos y las restricciones decían que la diferencia de potencial entre dos nodos no supera la longitud del arco. Y es también la razón de que T resulte ser una función *convexa y lineal a trozos*: es el máximo de una familia finita de funciones lineales, una por cada vértice del poliedro dual.

(c) La región factible del dual no depende de (p_1, p_2), y es el triángulo determinado por las tres desigualdades. Sus vértices se obtienen cortando las rectas dos a dos:

$$\begin{cases} u_2 = 1 \\ u_1 - u_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (2,1), \qquad \begin{cases} u_2 = 1 \\ -u_1 - u_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (-2,1),$$

$$\begin{cases} u_1 - u_2 = 1 \\ -u_1 - u_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (0,-1).$$

Es un triángulo, luego acotado, y por el teorema fundamental de la programación lineal el máximo se alcanza en un vértice. Con $p = (\vartheta, 1)$, los tres valores son

$$2\vartheta + 1, \qquad -2\vartheta + 1, \qquad -1,$$

y por tanto

$$\boxed{T(\vartheta,1) = \operatorname{Max}\{2\vartheta+1,\ -2\vartheta+1,\ -1\} = 2|\vartheta| + 1}$$

(el tercer valor nunca gana, porque $2|\vartheta| + 1 \geq 1 > -1$).

Otra vía (resolviendo el primal a mano, que confirma la fórmula). De la segunda ecuación, $t_1 = p_2 + t_2 + t_3$, y el tiempo total es

$$t_1 + t_2 + t_3 = p_2 + 2(t_2 + t_3),$$

de modo que hay que hacer $t_2 + t_3$ lo más pequeño posible. Las dos condiciones que lo limitan son $t_2 - t_3 = p_1$ con $t_2, t_3 \geq 0$, que obliga a $t_2 + t_3 \geq |p_1|$, y $t_1 \geq 0$, que obliga a $t_2 + t_3 \geq -p_2$. Luego

$$T(p_1, p_2) = p_2 + 2\operatorname{Max}\{|p_1|, -p_2\},$$

y en particular $T(\vartheta, 1) = 1 + 2\operatorname{Max}\{|\vartheta|, -1\} = 1 + 2|\vartheta|$. Coincide.

La gráfica de $\vartheta \mapsto T(\vartheta, 1)$ es una uve con vértice en $(0,1)$ y pendientes -2 y 2. Es el mismo fenómeno que la función $z^*(\lambda)$ de la sección 4.4.2: **el valor mínimo de un problema lineal es convexo y lineal a trozos en el término independiente donde es finito**, y sus tramos corresponden a vértices distintos del poliedro dual. Aquí el pico está en $\vartheta = 0$, donde el vértice óptimo del dual cambia de $(-2,1)$ a $(2,1)$: es decir, donde el móvil deja de necesitar v_3 y pasa a necesitar v_2.

Dónde se falla. En escribir las ecuaciones por direcciones en vez de por coordenadas: la primera suma las componentes horizontales de v_1, v_2 y v_3, no las dos componentes de v_1. En poner signo a las variables duales, cuando las restricciones son igualdades. Y en descartar el vértice $(0,-1)$ porque aquí nunca gana: para el destino $(0,-1)$ es el que da el tiempo mínimo, $T = 1$.

Ejercicio 4.11. *Reconstruir el problema desde su tabla* R6.3, JUN 2021

La tabla siguiente corresponde a un problema de programación lineal de **minimizar** con las tres restricciones de la forma $\leq$, y x_4, x_5, x_6 son las holguras de la primera, la segunda y la

---

tercera:

(T)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Ld
x_4	1	1	0	1	0	0	7
x_5	2	2	0	0	1	1	9
x_3	1	0	1	0	0	1	5
	7	−1	0	0	0	3	−15

(a) Escribir el problema original y dar la solución óptima del primal.
(b) Obtener el dual, su solución óptima, y verificar la holgura complementaria.
(c) Determinar el rango de variación del coeficiente de x_2 en la función objetivo para el que la tabla sigue siendo óptima.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Las columnas de las holguras de una tabla son las columnas de B^{-1}, y con B^{-1} se recupera B y con B se recuperan las columnas originales: $a_j = B\,y_j$.*
2. *Los costos se recuperan de la fila de costos reducidos, sabiendo que $c_j - z_j = 0$ para las básicas.*
3. *Antes de contestar (b) y (c), mire si la tabla que le dan es óptima.*

Resolución. *La idea.* Es el camino al revés. Bajo las holguras está B^{-1}; invirtiéndola se recupera B; con B se recuperan las columnas originales, $a_j = By_j$, y el término independiente, $b = B\bar{b}$; y los costos salen de la fila de costos reducidos, sabiendo que las básicas tienen costo reducido nulo. Antes de leer precios o rangos hay que comprobar si la tabla es óptima.
(a) *Paso 1: recuperar B^{-1}.* La base es $\{x_4, x_5, x_3\}$, en ese orden. Como las columnas originales de las holguras son e_1, e_2 y e_3, las columnas de la tabla bajo x_4, x_5 y x_6 son las tres columnas de B^{-1}:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{luego} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Paso 2: recuperar las columnas. De $y_j = B^{-1}a_j$ se sigue $a_j = B\,y_j$:

$$a_1 = B\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = B\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad a_3 = B\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y el término independiente es $b = B\bar{b} = B(7,9,5)^T = (7,4,5)^T$.
Paso 3: recuperar los costos. Con $c_B = (0,0,c_3)$, porque x_4 y x_5 son holguras y tienen costo nulo, resulta $z_j = c_3\,y_{3j}$, donde y_{3j} es la tercera fila de la tabla. De la columna de x_6: $c_6 - z_6 = 0 - c_3 \cdot 1 = 3$, luego $c_3 = -3$. De la columna de x_1: $c_1 - z_1 = c_1 - c_3 \cdot 1 = c_1 + 3 = 7$, luego $c_1 = 4$. Y de la de x_2: $c_2 - z_2 = c_2 - c_3 \cdot 0 = c_2 = -1$. El problema original es, por tanto,

(P)

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 4x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{sujeto a:} & x_1 + x_2 \le 7 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 \le 4 \\ & x_1 + x_3 \le 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{array}$$

Se comprueba que la tabla es la suya: la solución básica es $(0,0,5)$ con $z = -15$, y $x_4 = 7$, $x_5 = 9$, $x_6 = 0$, en efecto.

Paso 4: y la tabla no es óptima. El costo reducido de x_2 vale $-1 < 0$, de modo que (T) es una tabla intermedia y hay que seguir. Entra x_2, cuya columna es $(1,2,0)^T$; el test del cociente mínimo da $7/1 = 7$ y $9/2 = \frac{9}{2}$, y la tercera fila no cuenta porque su entrada es nula: sale x_5. Pivotando sobre el 2:

	4	−1	−3	0	0	0	
x_4	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_2	1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$
x_3	1	0	1	0	0	1	5
$c_j - z_j$	8	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	$-\frac{39}{2}$

Ahora todos los costos reducidos no básicos son positivos: la solución óptima es

$$x^* = \Big(0,\ \tfrac{9}{2},\ 5\Big), \qquad z^* = -\tfrac{39}{2},$$

y es única. Comprobación: $0 + \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \le 7$ (holgura $\frac{5}{2}$), $0 + 9 - 5 = 4 \le 4$ (activa) y $0 + 5 = 5 \le 5$ (activa); y $-\frac{9}{2} - 15 = -\frac{39}{2}$.
(b) El dual de un mínimo con restricciones $\le$ tiene variables ≤ 0:

$$\text{(D)} \quad \begin{array}{ll} \text{Max} & 7u_1 + 4u_2 + 5u_3 \\ \text{sujeto a:} & u_1 + u_2 + u_3 \le 4, \quad u_1 + 2u_2 \le -1, \quad -u_2 + u_3 \le -3, \quad u \le 0. \end{array}$$

Los precios sombra se leen en los costos reducidos de las holguras, cambiados de signo:

$$u^* = \Big(0,\ -\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{7}{2}\Big), \qquad 7\cdot 0 + 4\big(-\tfrac{1}{2}\big) + 5\big(-\tfrac{7}{2}\big) = -2 - \tfrac{35}{2} = -\tfrac{39}{2} = z^*.$$

Holgura complementaria, en las dos direcciones: x_2^* y x_3^* son positivas y sus restricciones duales son activas ($0 - 1 = -1$ y $\frac{1}{2} - \frac{7}{2} = -3$); $x_1^* = 0$ y su restricción dual tiene holgura 8, que es su costo reducido. Por el otro lado, u_2^* y u_3^* son no nulas y las restricciones segunda y tercera del primal son activas; $u_1^* = 0$ y la primera restricción tiene holgura $\frac{5}{2} > 0$.
(c) Hay que distinguir las dos tablas. En la tabla dada (T), x_2 es no básica y su costo reducido es c_2: esa tabla es óptima para $c_2 \ge 0$, aunque no lo era con el dato original $c_2 = -1$.
Si se pide el rango de la *tabla óptima obtenida en (a)*, x_2 es básica en la segunda fila. Su fila sobre las columnas no básicas x_1, x_5 y x_6 es $\big(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big)$: las tres entradas son *positivas*, luego las tres imponen cota superior y ninguna impone cota inferior:

$$\delta \ \le\ \text{Min}\left\{\frac{8}{1},\ \frac{1/2}{1/2},\ \frac{7/2}{1/2}\right\} = \text{Min}\{8,1,7\} = 1,$$

de donde $c_2 \in (-\infty,\ -1+1] = (-\infty,\ 0]$. En el extremo $c_2 = 0$ empata con la columna de x_5, es decir, con la holgura de la segunda restricción.

Este problema recorre el camino *al revés*: de la tabla al problema. Conviene quedarse con las dos reglas de lectura: las columnas de las holguras son B^{-1}, y los costos se despejan de la fila de costos reducidos. Y con el aviso de mirar siempre si la tabla que se da es de verdad óptima antes de leer nada en ella.
Dónde se falla. En leer el dual en la tabla dada: sus precios, $(0,0,-3)$, valen -15, que es el valor de esa tabla, pero incumplen la restricción dual de x_2, $u_1 + 2u_2 \le -1$. No son un

certificado de nada, porque la tabla no era óptima. Y en (c), en contestar para una tabla cuando se pregunta por la otra: la dada es óptima para $c_2 \geq 0$, y la final, para $c_2 \leq 0$.

En AMPL. El primal reconstruido coincide con el modelo de las prácticas antiguas `Relacion_5_Ej_3`. Con `lp.mod` y los datos `reconstruir.dat`:

```
param n := 3;
param m := 3;
param a : 1 2 3 :=
1 1 1 0
2 1 2 -1
3 1 0 1;
param b := 1 7  2 4  3 5;
param c := 1 4  2 -1  3 -3;
```

El guion `reconstruir.run` aplica las consultas explicadas en la página 233:

```
reset;
model lp.mod;
data reconstruir.dat;
option solver cplex;
option presolve 0;
option cplex_options 'sens=1';
solve;
display solve_result, x, z;
display x.rc, r.dual;
display x.sensobjlo, x.sensobj, x.sensobjhi;
display r.sensrhslo, b, r.sensrhshi;
```

Se obtienen $(0, 9/2, 5)$, valor $-39/2$ y precios $(0, -1/2, -7/2)$. Para el coeficiente c_2, los extremos devueltos son $-\infty$ y 0: corresponden a la base óptima final. No son el rango $c_2 \geq 0$ de la tabla intermedia (T) del enunciado. Esta comparación comprueba tanto el cálculo como qué base se está estudiando.

Ejercicio 4.12. *Dos fases con una sola artificial* R6.4, JUN 2020

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{array}{ll} \text{Min} & x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 \\ \text{sujeto a:} & -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{array}$$

(a) Resolver por el método de las dos fases introduciendo una única variable artificial.
(b) Identificar el tipo de solución óptima.
(c) Formular el dual y determinar una solución óptima.
(d) Determinar condiciones que, cumplidas simultáneamente por c_1 y c_3, mantengan la optimalidad de la base.
(e) Determinar condiciones sobre λ para que una variable nueva de columna $(-\lambda, 2\lambda)^T$ y coeficiente objetivo -3 no afecte a la optimalidad.

Resolución. *La idea.* Solo la igualdad necesita artificial: la holgura de la primera fila ya es

una columna unitaria. La fase I dura un pivotaje, y la base que deja es óptima. Los apartados siguientes son lecturas de esa tabla: el dual por $c_B^T B^{-1}$, los rangos por los costos reducidos con c_1 y c_3 como parámetros, y la variable nueva por su costo reducido.

(a) La primera restricción es $\leq$ y su holgura x_5 sirve de columna básica; solo la segunda, que es una igualdad, necesita artificial x_6. La base inicial $\{x_5, x_6\}$ es factible porque $b = (2, 1) \geq 0$. En la fase I se minimiza x_6: con $c_B = (0, 1)$ los costos reducidos son menos la segunda fila, es decir, $(-1, -1, -2, 1, 0)$ para $x_1, \ldots, x_5$. Entra x_3, que es el más negativo; su columna es $(-1, 2)^T$ y el único cociente posible es $1/2$, luego sale x_6. La fase I termina en una iteración con valor 0 y base $\{x_5, x_3\}$.

En la fase II se recalculan los costos reducidos con $c_B = (c_5, c_3) = (0, -1)$ y $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{smallmatrix}\right)$:

	1	2	-1	3	0	
x_5	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{2}$
x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$c_j - z_j$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

No hace falta ningún pivotaje más:

$$x^* = \left(0,\ 0,\ \tfrac{1}{2},\ 0\right), \qquad z^* = -\tfrac{1}{2}.$$

(b) Los tres costos reducidos no básicos son *estrictamente* positivos y las dos componentes básicas también, luego la solución óptima es **única y no degenerada**.

(c) La primera restricción es $\leq$ y la segunda una igualdad, de modo que $u_1 \leq 0$ y u_2 es libre:

$$\begin{array}{lll} & \text{Max} & 2u_1 + u_2 \\ \text{(D)} & \text{sujeto a:} & -u_1 + u_2 \leq 1, \quad 2u_1 + u_2 \leq 2, \quad -u_1 + 2u_2 \leq -1, \quad u_1 - u_2 \leq 3, \\ & & u_1 \leq 0,\ u_2 \text{ libre.} \end{array}$$

Su solución óptima es $(u^*)^T = c_B^T B^{-1} = (0, -1)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{smallmatrix}\right) = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$, con valor $2 \cdot 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = z^*$. Las cuatro restricciones duales se cumplen, y la tercera, la de la columna de x_3, es la única activa: $-0 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$, coherente con que x_3 sea la única variable positiva.

(d) Sean c_1 y c_3 los dos costos variables, con $c_2 = 2$ y $c_4 = 3$ fijos. La variable x_1 es no básica y x_3 es básica, luego c_3 entra en c_B y afecta a todos los costos reducidos, mientras que c_1 solo afecta al suyo. Con $c_B = (0, c_3)$,

$$c_B^T B^{-1} = \left(0,\ \tfrac{c_3}{2}\right),$$

y los tres costos reducidos no básicos son

$$c_1 - z_1 = c_1 - \tfrac{c_3}{2}, \qquad c_2 - z_2 = 2 - \tfrac{c_3}{2}, \qquad c_4 - z_4 = 3 + \tfrac{c_3}{2}.$$

Imponiendo que los tres sean no negativos:

$$\boxed{c_1 \ \geq\ \frac{c_3}{2}, \qquad -6 \ \leq\ c_3 \ \leq\ 4}$$

Con los valores originales, $c_1 = 1$ y $c_3 = -1$, las tres se cumplen holgadamente. La primera condición tiene una lectura clara: x_1 y x_3 compiten, y como una unidad de x_3 hace el trabajo

de dos de x_1 en la restricción de igualdad, conservar $x_1 = 0$ requiere que su costo sea al menos la mitad del de x_3. Por debajo, conviene sustituir parte de x_3 por x_1 mientras lo permita la factibilidad.
(e) La columna nueva es $a = (-\lambda, 2\lambda)^T$ con costo -3. La base sigue siendo óptima si y solo si su costo reducido es no negativo:

$$c - z = -3 - (u^*)^T a = -3 - \left(0, -\tfrac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} -\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} = -3 + \lambda \ \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\lambda \geq 3}$$

El costo directo de la actividad nueva es -3 y su valoración dual es $-\lambda$. Para minimizar, su costo reducido es negativo cuando $-3 < -\lambda$, es decir, cuando $\lambda < 3$. En ese caso hay que continuar el simplex; la base se conserva óptima exactamente cuando $\lambda \geq 3$.
Dónde se falla. En poner una artificial también en la fila $\leq$, que alarga la fase I sin necesidad. En dar signo a u_2, que es la variable de una igualdad y es libre. Y en (d), en estudiar c_1 y c_3 por separado: como x_3 es básica, c_3 entra en todos los costos reducidos, y la condición $c_1 \geq \frac{c_3}{2}$ los liga.

Ejercicio 4.13. *Rangos y una columna genérica* R6.5, JUN 2023

Al resolver

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{array}{ll} \text{Min} & 2x_1 + x_2 + 3x_4 + x_5 \\ \text{sujeto a:} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 \geq 2 \\ & 3x_1 - x_3 + 2x_4 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 \leq 2 \\ & x_i \geq 0 \end{array}$$

por el método de las dos fases se obtiene la tabla (T), donde x_6, x_7 y x_8 son las variables de holgura de las tres restricciones:

$$(T) \qquad \begin{array}{c|cccccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & \text{Ld} \\ \hline x_2 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{7}{6} \\ x_1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ x_8 & 0 & 0 & -1 & 1 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \hline & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & 0 & \frac{11}{6} \end{array}$$

(a) Tipo de solución óptima.
(b) Formular el dual y determinar una de sus soluciones óptimas.
(c) Rango de c_1 que mantiene óptima la tabla.
(d) Con $c_1 = 0$, calcular la nueva solución mediante pivotajes primales e identificar el tipo de solución.
(e) Rango de b_1 que mantiene óptima la tabla.
(f) Condición suficiente de optimalidad en función de una columna genérica $a_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})^T$ para x_3.

Resolución. *La idea.* Todo se lee en la tabla, sin pivotar salvo en (d). Lo delicado son los signos: las dos primeras filas son $\geq$ y sus variables auxiliares son excesos, con columna

$-e_i$, y la tercera es una holgura, con columna $+e_3$. Eso decide cómo se leen los precios y la columna de B^{-1} que da el rango de b_1.
(a) Todos los costos reducidos no básicos son estrictamente positivos y las tres componentes básicas también, luego la solución es **óptima, única y no degenerada**:

$$x^* = \Big(\tfrac{1}{3},\ \tfrac{7}{6},\ 0,\ 0,\ 0\Big), \qquad z^* = \tfrac{11}{6},$$

con $x_8^* = \frac{1}{2}$: la tercera restricción no está activa.
(b) Las dos primeras restricciones son $\geq$ y la tercera $\leq$, en un problema de mínimo, luego $u_1, u_2 \geq 0$ y $u_3 \leq 0$:

$$\begin{array}{lll} & \text{Max} & 2u_1 + u_2 + 2u_3 \\ \text{(D)} & \text{sujeto a:} & -u_1 + 3u_2 + u_3 \leq 2, \quad 2u_1 + u_3 \leq 1, \quad u_1 - u_2 - u_3 \leq 0, \\ & & 2u_2 + 2u_3 \leq 3, \quad u_1 - 3u_3 \leq 1, \quad u_1, u_2 \geq 0,\ u_3 \leq 0. \end{array}$$

Los precios sombra se leen en los costos reducidos de x_6, x_7 y x_8; como las dos primeras son variables de exceso (columna $-e_i$) y la tercera es holgura (columna $+e_3$),

$$u^* = \Big(\tfrac{1}{2},\ \tfrac{5}{6},\ 0\Big), \qquad 2 \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{6} + 0 = 1 + \tfrac{5}{6} = \tfrac{11}{6} = z^*.$$

La tercera variable dual es nula porque la tercera restricción primal tiene holgura, que es la holgura complementaria.
(c) La variable x_1 es básica, en la segunda fila. Sobre las columnas no básicas x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, su fila es $\big(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 0,\ 0,\ -\frac{1}{3}\big)$, y sus costos reducidos son $\big(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\big)$. Con $c_1 = 2 + \delta$, cada uno pasa a ser $(c_j - z_j) - \delta\, y_{2j}$. Las entradas positivas de la fila imponen cota superior y las negativas, inferior:

$$\delta \leq \frac{4/3}{2/3} = 2, \qquad \delta \geq \text{Max}\left\{\frac{1/3}{-1/3'},\ \frac{5/6}{-1/3}\right\} = \text{Max}\Big\{-1,\ -\tfrac{5}{2}\Big\} = -1,$$

de donde

$$c_1 \in [\,2 - 1,\ 2 + 2\,] = [1,\ 4].$$

(d) Con $c_1 = 0$, es decir, $\delta = -2 < -1$, se pierde la optimalidad: el costo reducido de x_3 pasa a $\frac{1}{3} - (-2)\big(-\frac{1}{3}\big) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} < 0$ y el de x_7 a $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6} > 0$. Entra x_3, cuya columna es $\big(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -1\big)$, con una única entrada positiva: el cociente es $\frac{7/6}{1/3} = \frac{7}{2}$ y sale x_2. Pivotando y recalculando con $c = (0, 1, 0, 3, 1)$ se obtiene

$$x^* = \Big(\tfrac{3}{2},\ 0,\ \tfrac{7}{2},\ 0,\ 0\Big), \qquad z^* = 0,$$

con todos los costos reducidos no básicos ≥ 0 y *dos* de ellos nulos, los de x_6 y x_7: la solución óptima es **múltiple**. Se comprueba sin tablas: con $c_1 = 0$ el objetivo es $x_2 + 3x_4 + x_5$, suma de tres términos no negativos, luego $z \geq 0$ siempre; y vale exactamente 0 en todo punto factible con $x_2 = x_4 = x_5 = 0$, que son varios.
(e) El rango de b_1 se obtiene de $\bar{b} + \Delta\bar{g} \geq 0$ con $\bar{g} = B^{-1}e_1$. La primera restricción es $\geq$ y su exceso x_6 tiene columna $-e_1$, luego $B^{-1}e_1$ es *menos* la columna de x_6 de la tabla: $\bar{g} = \big(\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2}\big)$. Imponiendo

$$\tfrac{7}{6} + \tfrac{\Delta}{2} \geq 0, \qquad \tfrac{1}{3} \geq 0, \qquad \tfrac{1}{2} - \tfrac{\Delta}{2} \geq 0,$$

sale $-\frac{7}{3} \le \Delta \le 1$, es decir,

$$b_1 \in \left[2-\tfrac{7}{3},\, 2+1\right] = \left[-\tfrac{1}{3},\, 3\right].$$

En el extremo superior, $b_1 = 3$, la variable x_8 se anula: la tercera restricción pasa a ser activa. La base aún es factible en el extremo, pero deja de serlo al superar $b_1 = 3$.
(f) La condición de optimalidad para la columna de x_3, sea cual sea, es $c_3 - z_3 \ge 0$ con $z_3 = (u^*)^T a_3$. Con $c_3 = 0$ y $u^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 0\right)$:

$$0 - \left(\tfrac{1}{2}a_{13} + \tfrac{5}{6}a_{23} + 0 \cdot a_{33}\right) \ge 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\tfrac{1}{2}a_{13} + \tfrac{5}{6}a_{23} \le 0}$$

o, multiplicando por 6, $3a_{13} + 5a_{23} \le 0$. Obsérvese que a_{33} **no interviene**: la tercera restricción tiene precio sombra nulo, así que lo que la columna consuma de ella no cuesta nada. Con la columna original $a_3 = (1, -1, -1)^T$ se tiene $3 - 5 = -2 \le 0$, coherente con que su costo reducido, $\frac{1}{3}$, sea positivo.

El apartado (f) muestra qué información resume el precio sombra: esta base conserva su optimalidad si el costo directo de la columna no es menor que su valoración dual. Como $x_3 = 0$, variar a_{33} no altera la solución actual ni su costo reducido, pues $u_3^* = 0$; sí puede alterar otros puntos factibles del problema.
Dónde se falla. En leer los precios bajo los excesos con el signo de las holguras: saldría $u = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}, 0\right)$, con $u_1, u_2 < 0$, imposible para restricciones $\ge$ de un mínimo. En (e), en usar la columna de x_6 tal cual: saldría $b_1 \in \left[1, \frac{13}{3}\right]$ en vez de $\left[-\frac{1}{3}, 3\right]$. Y en (d), en detenerse al ver costos reducidos no negativos sin fijarse en que dos no básicos son nulos: el óptimo es múltiple.

Ejercicio 4.14. *Un coeficiente que decide si hay óptimo* R6.6, JUN 2024

$$\text{(P)} \qquad \begin{array}{ll} \text{Min} & -2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \\ \text{sujeto a:} & -2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 \le 6 \\ & a_{21}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \ge 2 \\ & -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 \le 3 \\ & x_i \ge 0. \end{array}$$

El dato inicial es $a_{21} = -1$; después se estudia ese coeficiente como parámetro.

(a) Aplicar el método de las dos fases para el dato inicial $a_{21} = -1$ y decidir si existe solución óptima.
(b) Determinar condiciones sobre a_{21} para que (P) no tenga solución óptima por no estar acotada inferiormente la función objetivo. ¿Qué le ocurre entonces al dual?
(c) Para $a_{21} = -2$, sea (T) la tabla óptima. Indicar el tipo de solución y su valor.
(d) Calcular los precios sombra de (T). ¿Qué le ocurre al valor óptimo si se incrementa el lado derecho de la segunda restricción?
(e) Incrementar ese lado derecho en dos unidades y restaurar la factibilidad con pivotajes duales hasta obtener la tabla (T').
(f) Identificar el tipo de solución óptima de (T').

Resolución. *La idea.* La señal de problema ilimitado es una columna con costo reducido negativo y sin entradas positivas. Con el coeficiente como parámetro, la pregunta pasa a ser si existe una dirección que abarate, y se contesta con el teorema fundamental. En (c)-(f) vuelve el problema grande de siempre: tabla óptima, precios, un recurso que se mueve y el simplex dual.
(a) Para $a_{21} = -1$, se añaden las holguras x_6, x_8, el exceso x_7 y una artificial x_9 en la segunda restricción. La base inicial es $\{x_6, x_9, x_8\}$, con valores $(6, 2, 3)$. La fase I minimiza x_9; los costos reducidos de x_2, x_3, x_4 son -1. Se elige x_2: los cocientes positivos son $2/1$ y $3/1$, de modo que sale x_9. La fase I termina con valor 0.
Eliminada la artificial, la tabla de fase II, ordenando primero la fila de x_2, es

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_2	-1	1	1	1	-1	0	-1	0	2
x_6	-3	0	2	1	0	1	-1	0	8
x_8	-1	0	-2	1	0	0	1	1	1
$c_j - z_j$	-1	0	0	1	2	0	1	0	2

La columna x_1 tiene costo reducido -1 y ninguna entrada positiva: el problema es **ilimitado**. Por ejemplo, $(0, 2, 0, 0, 0) + t(1, 1, 0, 0, 0)$ es factible para $t \geq 0$ y tiene valor $2 - t$.
(b) El punto $(0, 1, 1, 0, 0)$ es factible para cualquier a_{21}. Por el teorema fundamental de la programación lineal, (P) es ilimitado si y solo si existe una dirección $d \geq 0$ del poliedro con $c^T d < 0$. Como el único costo negativo es el de x_1, toda dirección que abarate tiene que usar x_1, y normalizando $d_1 = 1$ hay que resolver

$$\text{Min } S = d_2 + d_3 + 2d_4 + d_5 \quad \text{sujeto a ser dirección,}$$

porque $c^T d = -2 + S$ y la condición es $S < 2$. Escritas las tres restricciones en forma de dirección (con las holguras y el exceso no negativos):

$$2 + d_2 - d_3 - d_5 \geq 0, \qquad a_{21} + d_2 + d_3 + d_4 - d_5 \geq 0, \qquad 2 - d_2 + d_3 - 2d_4 + d_5 \geq 0.$$

La única de las tres que aprieta es la segunda, y para satisfacerla lo más barato es subir d_2 y d_3, que cuestan 1 cada una en S y aportan 1 cada una a la segunda condición (subir d_4 cuesta 2 y subir d_5 estorba). Tomando $d_2 = d_3 = -a_{21}/2$ cuando $a_{21} < 0$, las condiciones primera y tercera se cumplen porque $d_2 - d_3 = 0$, y queda $S_{\text{mín}} = \text{Max}\{0, -a_{21}\}$. Por tanto

$$\text{(P) es ilimitado} \iff S_{\text{mín}} < 2 \iff -a_{21} < 2 \iff \boxed{a_{21} > -2}$$

Y por dualidad débil, si el primal es ilimitado el **dual es infactible**: si tuviera algún punto factible u, el valor $u^T b$ acotaría el primal por debajo.
(c) Con $a_{21} = -2$ la tabla óptima tiene base $\{x_2, x_6, x_8\}$, donde x_6 y x_8 son las holguras de la primera y la tercera restricción y x_7 el exceso de la segunda:

(T)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_2	-2	1	1	1	-1	0	-1	0	2
x_6	-4	0	2	1	0	1	-1	0	8
x_8	0	0	-2	1	0	0	1	1	1
$c_j - z_j$	0	0	0	1	2	0	1	0	2

Todos los costos reducidos son ≥ 0: óptima, con $x^* = (0,2,0,0,0)$ y $z^* = 2$. La solución es **múltiple y el conjunto de óptimos es no acotado**. La columna de x_1 tiene costo reducido cero y ninguna entrada positiva, de modo que contiene la semirrecta $(0,2,0,0,0) + t(1,2,0,0,0)$, $t \geq 0$.

Pero no son todos los óptimos: también x_3 tiene costo reducido nulo. La fila de costos reducidos obliga a $x_4 = x_5 = x_7 = 0$ en cualquier óptimo. Escribiendo $x_1 = t$ y $x_3 = s$, las filas de la tabla dan $x_2 = 2 + 2t - s$, $x_6 = 8 + 4t - 2s$ y $x_8 = 1 + 2s$. Por tanto, el conjunto completo es

$$\boxed{\{(t,\, 2+2t-s,\, s,\, 0,\, 0) :\ t \geq 0, \quad 0 \leq s \leq 2+2t\}}.$$

Todos esos puntos tienen valor 2. En particular, también $(0,0,2,0,0)$ es óptimo y no pertenece a la semirrecta anterior.

(d) Los costos reducidos de x_6, x_7 y x_8 son 0, 1 y 0. Como x_6 y x_8 son holguras (columna $+e_i$) y x_7 es exceso (columna $-e_2$),

$$u^* = (0,\ 1,\ 0).$$

Esta base es no degenerada, por lo que es válida para pequeñas variaciones de b_2. Así, $\partial z^*/\partial b_2 = u_2^* = 1$: **incrementar el lado derecho de la segunda restricción empeora el objetivo, en una unidad por unidad**. Tiene todo el sentido, porque esa restricción es del tipo $\geq$, es decir, una exigencia mínima: exigir más cuesta más. Las otras dos restricciones tienen precio sombra nulo porque no son activas: la primera tiene holgura 8 y la tercera, 1.

(e) Con $b_2 = 4$, la solución básica pasa a ser $\bar{b} + 2\bar{g}$, donde $\bar{g} = B^{-1}e_2$ es *menos* la columna de x_7, es decir, $(1,1,-1)^T$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La tercera componente es negativa: se ha perdido la factibilidad, no la optimalidad. Simplex dual: sale x_8, y en su fila la única entrada negativa es la de x_3, con lo que no hay cociente que calcular: entra x_3. Pivotando sobre -2:

(T')

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_2	-2	1	0	$\frac{3}{2}$	-1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_6	-4	0	0	2	0	1	0	1	9
$c_j - z_j$	0	0	0	1	2	0	1	0	4

Factible y óptima, con $x^* = \left(0, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$ y $z^* = 4$. El valor ha subido de 2 a 4, es decir, exactamente las dos unidades que anunciaba el precio sombra $u_2^* = 1$. El vector dual sigue siendo óptimo tras el cambio de base: por eso la fórmula del valor se prolonga y la pendiente permanece constante en este tramo.

(f) Tipo de solución de (T'). Es múltiple y su conjunto de óptimos vuelve a ser no acotado. Contiene la semirrecta $\left(0, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right) + t(1,2,0,0,0)$, pero también otros puntos: los costos reducidos de x_1 y x_8 son nulos. Como antes, los costos reducidos positivos imponen $x_4 = x_5 = x_7 = 0$. Con $x_1 = t$ y $x_3 = s$, las restricciones dan el conjunto completo

$$\boxed{\{(t,\, 4+2t-s,\, s,\, 0,\, 0) :\ t \geq 0, \quad \tfrac{1}{2} \leq s \leq 4+2t\}}.$$

Su valor es siempre 4.

El parámetro a_{21} permite ver cómo aparece la ilimitación. Para $a_{21} < -2$, el valor mínimo es 2 y los óptimos forman el segmento $\{(0, 2-s, s, 0, 0) : 0 \le s \le 2\}$. En efecto, la segunda restricción permite escribir el objetivo como

$$2 + x_7 + (-2 - a_{21})x_1 + x_4 + 2x_5 \ge 2;$$

la igualdad exige $x_1 = x_4 = x_5 = x_7 = 0$. En $a_{21} = -2$ desaparece el término que penaliza x_1, y el conjunto de óptimos se vuelve no acotado sin que cambie el valor mínimo. Para $a_{21} > -2$, una dirección de recesión abarata sin límite. No aparece un tramo de óptimo único: se pasa de un segmento óptimo a un conjunto óptimo no acotado y después a un objetivo ilimitado.
Dónde se falla. En (b), en incluir $a_{21} = -2$ entre los ilimitados: ahí el mínimo existe, vale 2, y lo que es no acotado es el conjunto de óptimos. En (c), en llamar única a la solución: hay costos reducidos nulos fuera de la base. En (d), en el signo de u_2: x_7 es un exceso, y bajo él se lee $+u_2 = 1$. Y en (e), en creer que el cambio de base obliga a cambiar el precio: aquí el vector dual sigue siendo óptimo, y el valor sube exactamente 2.

REPASO INTERCALADO

Primera ronda: recordar. Al día siguiente de terminar el capítulo, a libro cerrado.

1. Escribe el par primal-dual canónico y el estándar. ¿Qué pieza del primal produce la restricción de signo sobre w?
2. Enuncia la dualidad débil y su corolario. ¿Por qué el corolario es un *certificado* que se puede comprobar en un minuto?
3. Enuncia el teorema de holguras complementarias en las cuatro implicaciones. Tradúcelas a la frase «lo que sobra no se paga».
4. ¿Qué es un precio sombra y por qué la función $z(b)$ es lineal a trozos?
5. Escribe el criterio de entrada del simplex dual y di qué propiedad protege.
6. (Capítulo 3.) ¿Cuándo dice el simplex que un problema es ilimitado, y qué dirección lo certifica?
7. (Capítulo 2.) Enuncia el lema de Farkas. ¿Cuál de sus dos sistemas aparece en la demostración del teorema fundamental de dualidad?

Segunda ronda: aplicar. Dos o tres días después.

1. Dado el problema Min $2x_1 + 3x_2$ con $x_1 + x_2 \ge 4$, $x_1 + 3x_2 \ge 6$, $x \ge 0$, escribe su dual, resuélvelo gráficamente y deduce del dual la solución del primal usando las holguras complementarias.
2. En una tabla óptima, la fila de una variable básica es $(1, 0, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ y los costos reducidos de las no básicas son $\frac{5}{3}$ y $\frac{2}{3}$. Calcula el rango del costo de esa variable básica.
3. Un problema de mínimo tiene óptimo -20 y precios sombra $(3, 0, -1)$. ¿Qué pasa si el segundo recurso aumenta en 10? ¿Y si el tercero aumenta en 1? ¿Qué precaución hay que tomar al responder?
4. Aplica un paso de simplex dual a la tabla con fila de la variable que sale igual a $(0, -2, 1, -3)$, costos reducidos $(4, 6, 0, 3)$ y término independiente -5. ¿Quién

entra?

5. En la tabla óptima de un problema de mínimo, bajo el exceso de la primera fila ($\geq$) se lee 2 y bajo la holgura de la segunda ($\leq$) se lee $\frac{1}{2}$. ¿Cuáles son los precios sombra, y qué signo tenían que tener? ¿Cuánto cambia el coste mínimo si b_1 sube una unidad sin salir de su rango?
6. (Capítulo 1.) Formula el problema del transporte y escribe su dual. ¿Qué significan las variables duales?

Tercera ronda: subir el nivel. Al terminar el capítulo de programación entera.

1. Explica por qué la condición de optimalidad del primal *es* la factibilidad del dual, y por qué eso convierte al simplex y al simplex dual en el mismo algoritmo visto por las dos caras.
2. Un problema y su dual son los dos infactibles. Constrúyelo con dos variables y dos restricciones, y explica por qué esa casilla de la tabla de casos no se puede descartar.
3. (Capítulo 2.) La demostración del teorema fundamental de dualidad aplica el teorema de Tucker a una matriz antisimétrica K. Reconstruye K y di qué significa cada bloque, y dónde se usa que $t_0 > 0$.
4. Un vértice óptimo es degenerado. Explica, con la función $z(b)$ dibujada, por qué el precio sombra de una restricción activa puede valer -1 por la izquierda y 0 por la derecha, y por qué eso no contradice ningún teorema.
5. En la dieta en miniatura, el coste mínimo como función de la exigencia de A tiene tres tramos, con pendientes 0, $\frac{7}{5}$ y $\frac{3}{2}$. Explica por qué cada tramo corresponde a un vértice de la región factible del dual, y por qué las pendientes solo pueden crecer.
6. (Anticipo del capítulo 5.) Un corte de Gomory añade al problema una restricción que la solución óptima actual no cumple. ¿Con qué algoritmo se repara, y por qué ese y no el otro?

CAPÍTULO 5

Programación lineal entera

ANTES DE LEER

Cuatro preguntas para anticipar las ideas del capítulo.

1. Un problema lineal tiene por solución óptima $x^* = (1{,}86,\ 0)$ y las dos variables cuentan objetos que no se pueden partir. ¿Qué tiene de malo redondear a $(2, 0)$? ¿Y a $(1, 0)$? ¿Cuánto se puede perder?
2. Todos los vértices de un cuadrado de lado uno con esquinas en los puntos de coordenadas enteras son enteros. ¿Se te ocurre alguna condición sobre las *desigualdades* que garantice que eso pasa para cualquier término independiente entero?
3. En un problema de transporte, las ofertas y las demandas son números enteros de camiones. ¿Crees que hace falta hacer algo especial para que la solución salga en camiones enteros?
4. Si se añade a un problema ya resuelto una restricción que su solución óptima no cumple, ¿qué algoritmo del capítulo anterior sirve para repararlo, y por qué ese y no el otro?

Las respuestas están, por este orden, en las secciones 5.1 (el ejemplo del redondeo, que es la puerta de entrada al tema), 5.2.1 (las matrices totalmente unimodulares), 5.2.2 (el transporte con ofertas y demandas enteras) y 5.4 (los cortes de Gomory, que son esa reparación hecha a propósito).

Mapa del capítulo. Cuatro bloques, en este orden. El primero plantea el problema y enseña, con un ejemplo de dos variables, por qué redondear no vale. El segundo estudia las familias de problemas en las que se puede obtener un óptimo entero resolviendo la relajación con el simplex. La unimodularidad total de la matriz y un término independiente entero garantizan que los vértices sean enteros: por la regla de Cramer, las componentes de $B^{-1}b$ son cocientes de determinantes enteros, y un denominador ± 1 no introduce fracciones. Puede haber otros óptimos fraccionarios entre vértices enteros. Los apartados tercero y cuarto son los dos algoritmos generales,

para cuando la integridad no sale gratis: *ramificación y acotación*, que parte el problema en trozos, y los *cortes de Gomory*, que excluyen sucesivos óptimos fraccionarios sin excluir soluciones enteras, hasta obtener un óptimo entero o certificar infactibilidad. Todo el capítulo se apoya en los tres anteriores. Del capítulo 2 vienen los puntos extremos y el teorema de representación; del 3, el simplex y la lectura de la tabla; y del 4, el simplex dual, que es la herramienta con la que se reparan las tablas tras añadir restricciones, y la dualidad, que ayuda a interpretar las cotas.

5.1 Introducción

LA PREGUNTA

Un ayuntamiento tiene que decidir en qué barrios abre parques de bomberos, y cuántos. El cálculo continuo, el que ignora que un parque de bomberos no se puede partir, es un problema lineal de los del capítulo anterior. Su respuesta dice, por ejemplo, que hay que abrir 1,86 parques en el barrio norte. La tentación es redondear a dos y pasar a otra cosa. ¿Es la aritmética de lo indivisible una versión ligeramente más incómoda de la aritmética de lo divisible, o es un problema de otra naturaleza?

En la definición de los problemas de programación lineal solo se exigía a las variables una condición de no negatividad, pero esa suposición no siempre corresponde a la realidad. En ocasiones la naturaleza de la variable exige una condición adicional: la de ser entera. Si lo que se cuenta son trabajadores, camiones, aviones, turnos o estaciones de bomberos, no hay media unidad que valga. Esa restricción nueva añade dificultades enormes a la resolución del problema, y este capítulo trata de ellas.

Definición (problemas enteros puros y mixtos)**.** Un problema de programación lineal en el que **todas** las variables han de ser enteras se dice **entero puro**. Si solo **algunas** de ellas han de serlo, se dice **entero mixto**. La expresión *problema de programación entera* (PPE) comprende los dos casos. A los problemas en que todas las variables están restringidas a los valores $\{0, 1\}$ se les llama **problemas de programación 0-1** o **booleana**.

Definición (problema relajado)**.** Al problema de programación lineal que se obtiene al **omitir las restricciones de integridad** de un problema entero se le llama **problema entero relajado**, o simplemente *la relajación lineal*.

Proposición (la relajación es más ancha y su óptimo es mejor)**.** La región factible del problema relajado contiene a la del problema entero. En consecuencia, el óptimo del relajado alcanza un valor mejor o igual que el del entero: para un problema de mínimo, $z^*_{\text{relajado}} \leq z^*_{\text{entero}}$.

En el caso entero puro se intersecta la región del relajado con $\mathbb{Z}^n$; en el mixto se exige integridad solo en las coordenadas correspondientes. En ambos casos se obtiene un subconjunto de la región relajada. Minimizar la misma función sobre un conjunto más grande no puede dar un valor mayor, porque todo candidato del conjunto pequeño sigue siendo candidato en el grande.

La idea: la relajación es una promesa, no una respuesta

Esa desigualdad, que parece una obviedad, es la pieza que sostiene los dos algoritmos del final del capítulo, y conviene leerla en el sentido útil. El valor del relajado no es la respuesta al problema entero: es una **cota**, una promesa de que no se podrá hacer mejor que eso. Cuando el algoritmo de ramificación y acotación descarta una rama entera sin explorarla, lo que está haciendo es comparar esa promesa con una solución entera que ya tiene en la mano; y cuando un corte de Gomory recorta el poliedro, lo que hace es *empeorar la promesa* hasta que se vuelve cumplible. La diferencia entre ambos valores óptimos, cuando son finitos, se denomina *salto de integridad* en sentido aditivo; también se usan medidas relativas.

5.1.1 Por qué redondear no vale

La primera idea que se le ocurre a cualquiera es resolver el relajado y redondear. El siguiente ejemplo muestra, con solo dos variables, que no garantiza una solución factible ni óptima.

Ejemplo. Considérese

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 21x_1 + 11x_2 \\ \text{sujeto a:} & 7x_1 + 4x_2 \le 13 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \text{ enteras.} \end{array}$$

Los puntos enteros factibles son solo seis:

$$F = \{(0,0),\ (0,1),\ (0,2),\ (0,3),\ (1,0),\ (1,1)\},$$

(por ejemplo $(0,3)$ cumple $12 \le 13$ y $(0,4)$ no, y $(1,1)$ cumple $11 \le 13$ mientras que $(1,2)$ da $15 > 13$). Evaluando el objetivo en los seis, el máximo es

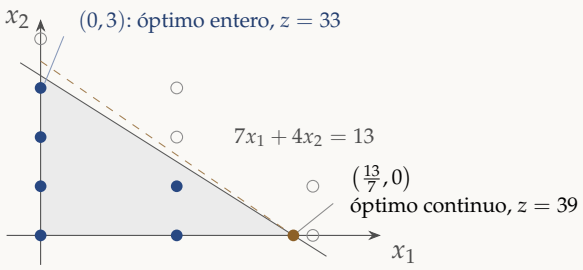
$$x^* = (0,3), \qquad z^* = 33.$$

La solución del problema relajado, en cambio, está en el vértice $\left(\frac{13}{7}, 0\right)$, con valor 39. Y ahora vienen las dos malas noticias, que son las que hay que llevarse:

- **Redondear hacia arriba destruye la factibilidad.** $(2,0)$ da $7 \cdot 2 = 14 > 13$: no es un punto del problema. Ni siquiera es una solución mala; no es una solución.
- **Redondear hacia abajo conserva la factibilidad y da un disparate.** $(1,0)$ sí es factible, y vale 21, frente a los 33 del óptimo verdadero. Se ha perdido $12/33 = 4/11$, algo más de un tercio del objetivo, y el óptimo entero ni siquiera está cerca del relajado: la primera componente pasa de $\frac{13}{7} \approx 1{,}86$ a 0.

La idea: por qué el óptimo entero puede estar lejos del continuo

El continuo prefiere x_1 porque proporciona $21/7 = 3$ unidades de beneficio por unidad de recurso, frente a $11/4$ de x_2. Pero fabricar una unidad entera de x_1 deja 6 unidades de recurso: solo cabe una de x_2, con beneficio total 32. Fabricar tres de x_2 aprovecha 12 unidades de recurso y da 33. La mejor proporción continua no tiene por qué producir la mejor combinación de objetos enteros.



Los puntos rellenos son los seis puntos enteros factibles y los huecos, algunos enteros que quedan fuera. La moraleja es geométrica: **redondear es un movimiento local, y el óptimo entero no tiene por qué estar cerca del continuo**. En dimensión dos el error se ve; en dimensiones altas la figura ya no basta. Si hay 50 coordenadas fraccionarias, elegir redondeo hacia arriba o hacia abajo genera 2^{50} candidatos.

El camino que no se tomó: enumerar todos los puntos enteros

El ejemplo anterior se ha resuelto enumerando los seis puntos factibles, y esa es, en efecto, una manera de resolver cualquier problema entero puro con región factible acotada. Su ventaja es que no exige ninguna teoría y que siempre funciona.

Lo que la hunde es el número. Un problema con 50 variables binarias tiene 2^{50} puntos candidatos, que es aproximadamente 10^{15}: un ordenador que evaluara mil millones por segundo tardaría unos trece días, y con 60 variables, unos treinta y siete años. Y si las variables son enteras sin cota superior, los candidatos son infinitos. Aun así, la enumeración es la base de la ramificación y acotación: recorre un árbol de posibilidades y descarta ramas enteras cuando demuestra que no contienen nada mejor. Los cortes siguen otra vía: añaden desigualdades válidas para estrechar la relajación.

De dónde viene: el problema que nadie sabía resolver

El simplex de Dantzig, de 1947, proporcionó un método para resolver problemas lineales, pero no imponía integridad a las variables. Gomory cuenta que, en 1957, un modelo de una fuerza naval le planteó la dificultad de interpretar respuestas como 1,3 portaaviones. Tras varios días de trabajo observó que, si un objetivo entero tenía máximo relajado $7\frac{1}{4}$, su máximo entero no podía superar 7. Esa desigualdad adicional fue el punto de partida de sus cortes; desarrolló el método y la prueba de terminación durante las semanas siguientes, y lo presentó públicamente a comienzos de 1958.[a]

En 1960, Ailsa Land y Alison Doig publicaron un algoritmo que dio origen al método de ramificación y acotación para programación entera.[b] Las dos ideas se complementan: ramificar divide las posibilidades y cortar mejora las relajaciones con las que se acotan. Su combinación se conoce como *branch and cut*.

[a] R. E. Gomory, «Early Integer Programming», *Operations Research* 50(1), 2002, pp. 78–81, `https://doi.org/10.1287/opre.50.1.78.17793`.

[b] A. H. Land y A. G. Doig, «An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems», *Econometrica* 28(3), 1960, pp. 497–520, `https://doi.org/10.2307/1910129`.

Observación (la lista de modelos ya está escrita)**.** Los cuatro modelos con los que suele abrirse este tema — la mochila, la localización discreta de plantas, el transporte y la asignación — muestran que los problemas enteros aparecen por todas partes. Los cuatro están formulados y discutidos en el capítulo 1, con sus variables y sus restricciones de acoplamiento, y los dos

últimos vuelven en este capítulo con más detalle porque tienen estructura propia. Merece la pena releer allí, antes de seguir, la binaria de apertura y_i y la restricción que la ata a las variables de flujo, porque son el patrón que se repite en casi todos los modelos enteros.

Dos modelos correctos no son igual de buenos: los juzga su relajación. Un modelo entero es *correcto* si sus soluciones enteras son exactamente los planes válidos del enunciado. Pero el mismo conjunto de puntos enteros se puede describir con desigualdades distintas, y cada descripción tiene su propia relajación. Como la relajación es la promesa con la que trabajan los dos algoritmos del final del capítulo, dos modelos igual de correctos pueden ser muy distintos de resolver. Dos casos mínimos lo enseñan.

Primer caso: el tamaño de la M. Una planta cuesta 10 si se abre, fabricar cuesta 1 por unidad, hay que servir 3 unidades y una planta cerrada no fabrica. Con $y \in \{0,1\}$ la apertura y x lo fabricado, la ligadura del catálogo del capítulo 1 da

$$\text{Min } 10y + x \qquad \text{sujeto a: } x = 3, \quad x \le My, \quad x \ge 0, \quad y \in \{0,1\}.$$

Para cualquier $M \ge 3$ el modelo es correcto: con $y = 0$ la ligadura obliga a $x = 0$, que no sirve las 3 unidades; con $y = 1$ se fabrica y se paga $10 + 3 = 13$, que es el óptimo entero. La relajación, en cambio, permite abrir un trozo de planta: basta $y = 3/M$ para que la ligadura deje pasar las 3 unidades, y su valor óptimo es

$$z_{\text{relajado}}(M) = 3 + \frac{30}{M}.$$

La fórmula se lee así: se paga lo fabricado entero, y del coste de apertura solo la fracción $3/M$ que la ligadura exige abrir. Con $M = 100$ la promesa vale 3,3 frente a un óptimo de 13; con $M = 5$, que podría ser la capacidad real de la planta, vale 9; con $M = 3$, la menor constante que no recorta el plan válido, vale exactamente 13. Y con $M = 2$ el modelo ya no es correcto: $x \le 2y \le 2$ impide servir las 3 unidades y el problema queda infactible. Una M de menos recorta planes reales; una M de más no cambia las soluciones enteras, pero vacía la promesa.

Segundo caso: agregar o desagregar la ligadura. Dos plantas, con apertura 10 cada una, y dos clientes, cada uno servido entero por una planta abierta. Servir al cliente j desde la planta i cuesta c_{ij}, con $c_{11} = c_{22} = 1$ y $c_{12} = c_{21} = 5$: cada cliente tiene una planta cercana y otra lejana. Con $x_{ij} \in \{0,1\}$ y $x_{i1} + x_{i2}$ la carga de la planta i, «una planta cerrada no sirve a nadie» admite dos escrituras correctas:

$$\text{agregada: } x_{i1} + x_{i2} \le 2y_i, \qquad \text{desagregada: } x_{i1} \le y_i, \quad x_{i2} \le y_i.$$

Con y_i binaria dicen lo mismo, y el óptimo entero es abrir una sola planta y servir desde ella a los dos clientes: $10 + 1 + 5 = 16$. Las relajaciones no dicen lo mismo. La agregada admite $y = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ con cada cliente servido desde su planta cercana, que cuesta $5 + 5 + 1 + 1 = 12$, y ese es su óptimo. La desagregada rechaza ese punto, porque $x_{11} = 1$ supera $y_1 = \frac{1}{2}$, y su óptimo vale 16: la promesa coincide con la respuesta. No es casualidad que la desagregada gane. Sumando sus dos desigualdades se obtiene la agregada, así que todo punto de su relajación está en la relajación agregada, y no al revés. Es la ligadura que usa el ejercicio de las plantas del capítulo 1.

Cómo se piensa, entonces, una formulación entera.

1. *Tipo de cada decisión.* Una cantidad que se puede partir es continua; una que cuenta objetos es entera; un sí o no es binaria. La integridad se exige donde el enunciado la impone,

no en todas las variables por si acaso: una variable declarada entera sin serlo cambia el problema, y cada una es una rama más en el árbol de la sección 5.3.
2. *Una restricción por frase.* Cada frase lógica del enunciado se traduce con un recurso del catálogo del capítulo 1: ligar, exactamente uno, cobertura, contar lo usado, disyunción con M.
3. *La M más pequeña válida.* Cada M se deduce de los datos: la capacidad, el horizonte, la suma de las ofertas. Tiene que ser la menor que no recorta ningún plan válido.
4. *Ligaduras desagregadas*, siempre que el número de restricciones lo permita.
5. *Dos comprobaciones.* Un plan válido hecho a mano cumple todas las restricciones. Y si se tiene el óptimo de la relajación, se lee: si «abre media planta» para servir entero a un cliente, alguna ligadura está floja.

Dónde se falla.

- *Una M de sobra.* El modelo sigue siendo correcto, y por eso el fallo no se ve al comprobarlo con puntos enteros: solo se ve en la relajación, que promete 3,3 donde el óptimo vale 13.
- *Una M escasa.* Recorta planes válidos: con $M = 2$, el modelo del primer caso es infactible sin que el problema lo sea.
- *Confundir correcto con bueno.* La corrección se comprueba con puntos enteros; la calidad, con puntos fraccionarios. Las dos pruebas son distintas y hacen falta las dos.
- *Integridad donde no toca.* Unas existencias que se miden en kilos, declaradas enteras, excluyen planes válidos, y el óptimo que sale puede ser peor que el verdadero.

Qué se ha ganado. La pregunta del ayuntamiento tiene respuesta: lo indivisible es un problema de otra naturaleza. Redondear el óptimo continuo puede dar un punto infactible o uno muy lejos del óptimo, porque el conjunto de puntos enteros no es convexo y lo más cerca del óptimo continuo no tiene por qué ser lo mejor. Del problema continuo queda una promesa, la relajación, que acota el valor entero, y cuya calidad depende de cómo se haya escrito el modelo. Quedan abiertas dos preguntas: cuándo la promesa es exacta sin hacer nada, que es la sección siguiente, y qué hacer cuando no lo es, que son las dos últimas.

5.2 Problemas con estructura especial

Hay familias enteras de problemas que se pueden resolver *directamente por el método del simplex*, sin tener en cuenta las restricciones de integridad, porque la solución sale entera sola. Eso ocurre cuando el conjunto factible es un poliedro con todos sus puntos extremos enteros, y esos poliedros guardan una relación muy estrecha con una clase de matrices que se llaman *totalmente unimodulares*. Esta sección estudia esa relación y después la aplica a los tres modelos clásicos: transporte, asignación y flujo en redes.

5.2.1 Poliedros enteros y matrices totalmente unimodulares

LA PREGUNTA

Una empresa de reparto resuelve todos los días el mismo problema con datos distintos: las mismas rutas, los mismos almacenes, pero cada día otras cantidades. Le sale, día tras día y sin pedirlo, una solución en camiones enteros. Otra empresa, con un problema que sobre el papel se parece mucho, obtiene fracciones casi siempre. ¿Puede

haber algo en la *forma* de las restricciones — no en los datos, que cambian cada día, sino en la matriz de coeficientes — que garantice de antemano que la respuesta será entera?

Definición (poliedro entero)**.** Un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ se dice **entero** si todos sus puntos extremos son enteros. Salvo mención expresa, se supone que A y b son enteros.

LA IDEA: LA ÚNICA FRACCIÓN POSIBLE ESTÁ EN EL DENOMINADOR

Antes de nada conviene ver de dónde puede venir una fracción, porque la respuesta cabe en una línea y es toda la teoría de este apartado.
Tras añadir las holguras, un punto extremo corresponde a una solución básica del sistema $[A \mid I](x, s)^T = b$: se eligen m columnas independientes de $[A \mid I]$, se forma con ellas B y se calcula

$$x_B = B^{-1}b.$$

Los datos A y b son enteros. Y por la regla de Cramer — que dice que la solución de $Bx = b$ con B cuadrada e invertible tiene componentes $x_i = \det(B_i)/\det(B)$, con B_i igual a B con la columna i sustituida por b; escrita para las m columnas a la vez, esa misma regla es la fórmula de la inversa por la adjunta —,

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \operatorname{adj}(B),$$

donde la matriz adjunta $\operatorname{adj}(B)$ es entera, porque sus entradas son determinantes de submatrices de una matriz entera. (La regla de Cramer, con un ejemplo de base que da vértice entero y otra que no, está en el apéndice F, sección «Álgebra lineal».) Es decir:

lo único que puede producir una fracción es el $\det(B)$ *del denominador.*

Si todas las bases posibles tuvieran determinante ± 1, no habría denominador que valiera y todas las soluciones básicas serían enteras, **para cualquier** b **entero**. Esa es exactamente la propiedad que se va a definir, y es una propiedad de la *matriz*, no de los datos: por eso la empresa de reparto de la pregunta obtiene camiones enteros todos los días sin hacer nada.

Antes de la definición conviene enunciar con precisión qué se gana con que un poliedro sea entero, porque son cuatro afirmaciones equivalentes y la primera vez sorprende que lo sean.

Teorema (caracterizaciones de los poliedros enteros)**.** Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ no vacío, y para cada c escríbase $z_{PL}(c) = \operatorname{Min}\{c^T x : \ x \in P\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) P es entero;
2) (PL) tiene una solución óptima entera para todo $c \in \mathbb{R}^n$ para el cual (PL) tiene solución óptima finita;
3) (PL) tiene una solución óptima entera para todo $c \in \mathbb{Z}^n$ para el cual (PL) tiene solución óptima finita;

4) $z_{PL}(c) \in \mathbb{Z}$ para todo $c \in \mathbb{Z}^n$ para el cual (PL) tiene solución óptima finita.

• CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: DE «LOS VÉRTICES SON ENTEROS» A «EL VALOR ÓPTIMO ES ENTERO»

Las cuatro afirmaciones van bajando de exigencia, y por eso la cadena $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4)$ es fácil: si los vértices son enteros, se puede elegir un óptimo entero, pues el mínimo finito se alcanza en algún vértice; y si el óptimo es entero y el costo también, el valor óptimo es un número entero.
Lo llamativo es el cierre, $4) \Rightarrow 1)$: que basta con que *el número* $z_{PL}(c)$ salga entero para todos los costos enteros, sin decir nada de dónde se alcanza, para que *todos* los vértices sean enteros. La idea de la prueba es un truco de precisión: si hubiera un vértice con una coordenada fraccionaria, se puede elegir un costo entero w que lo señale a él y solo a él. Se multiplica ese costo por un entero grande q y se suma e_j: la dirección apenas cambia y el óptimo permanece en el mismo punto. Restar el valor para qw del valor para $qw + e_j$, ambos enteros, revela su coordenada j. La contradicción viene de haber podido *leer una coordenada* en la diferencia de dos valores objetivos.

Paso 1: $1) \Rightarrow 2)$. Como $P \subseteq \{x \geq 0\}$, el poliedro no contiene ninguna recta y por tanto tiene puntos extremos. Si (PL) tiene óptimo finito, por el teorema fundamental de la programación lineal (sección 3.2) el óptimo se alcanza en un punto extremo, que por hipótesis es entero.
Paso 2: $2) \Rightarrow 3)$. Inmediato, porque $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$: se está pidiendo lo mismo para menos vectores de costo.
Paso 3: $3) \Rightarrow 4)$. Si $x^*(c)$ es entero y c es entero, entonces $z_{PL}(c) = c^T x^*(c)$ es una suma de productos de enteros, luego es entero.
Paso 4: $4) \Rightarrow 1)$, *el núcleo de la prueba.* Por reducción al absurdo, supóngase que P tiene un punto extremo $\hat{x}$ con alguna coordenada fraccionaria, $\hat{x}_j \notin \mathbb{Z}$.
Como P es un poliedro con datos enteros y $\hat{x}$ es un punto extremo suyo, existe un vector $w \in \mathbb{Z}^n$ tal que $\hat{x}$ es la *única* solución óptima de $\operatorname{Min}\{w^T x : x \in P\}$. La razón es geométrica: el conjunto de vectores de costo para los que $\hat{x}$ es óptimo es el cono normal de P en $\hat{x}$, que apareció en la sección 4.4.1; ese cono tiene interior no vacío porque $\hat{x}$ es un vértice. Por la densidad de los racionales, su interior contiene un vector racional; multiplicándolo por un denominador común positivo se obtiene un vector entero que sigue en el interior del cono. Un costo del interior del cono hace único al óptimo.
Sea ahora q un entero positivo grande. El vector $qw + e_j$ también es entero, y para q suficientemente grande $\hat{x}$ sigue siendo la única solución óptima de $\operatorname{Min}\{(qw + e_j)^T x\}$: dividido por q, ese costo es $w + \frac{1}{q} e_j$, que está tan cerca de w como se quiera, y w estaba en el interior del cono normal. Entonces

$$z_{PL}(qw + e_j) = (qw + e_j)^T \hat{x} = q\, w^T \hat{x} + \hat{x}_j = q\, z_{PL}(w) + \hat{x}_j.$$

Por la hipótesis 4), $z_{PL}(qw + e_j)$ y $z_{PL}(w)$ son números enteros, luego

$$\hat{x}_j = z_{PL}(qw + e_j) - q\, z_{PL}(w) \in \mathbb{Z},$$

en contra de haber supuesto que $\hat{x}_j$ era fraccionaria. Por tanto todos los puntos extremos son enteros y P es entero.
Dónde ha entrado cada hipótesis. La condición $x \geq 0$ se ha usado en el paso 1 para asegurar que hay puntos extremos: sin ella el poliedro podría contener rectas y el óptimo no estaría en ningún vértice. En el paso 4, el carácter poliédrico proporciona el cono con interior no vacío; la densidad de los racionales permite elegir w entero tras escalar. Ese paso no necesita que los datos sean racionales.
Para reconstruirla. Bajar por la cadena son tres frases: el óptimo está en un vértice, $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$, y un producto escalar de enteros es entero. Para subir, se elige un costo entero que señale al vértice sospechoso y solo a él. Para q grande, los costos enteros qw y $qw + e_j$ señalan el mismo vértice; la diferencia de sus valores óptimos es $\hat{x}_j$.

5.2.1.1 *La definición y las siete operaciones*

Definición (matriz totalmente unimodular)**.** Una matriz entera $A \in M_{m\times n}$ es **totalmente unimodular** (TU) si el determinante de *cualquier* submatriz cuadrada de A vale 0, 1 o -1.

Observación (una consecuencia inmediata, y una intuición falsa que hay que quitarse)**.** Las submatrices cuadradas de tamaño 1×1 son las propias entradas, luego

$$A \text{ es TU} \implies a_{ij} \in \{0, 1, -1\} \quad \text{para todos } i, j.$$

El recíproco es **falso**, y conviene ver el contraejemplo cuanto antes porque es el que aparece en los exámenes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det(A) = -2.$$

Todas sus entradas son ceros y unos y no es TU. Esa matriz no es una rareza: es la matriz de incidencia de un triángulo, es decir, de un ciclo de longitud impar, y más adelante se verá que los ciclos impares son exactamente el obstáculo que impide que las matrices de incidencia de grafos no dirigidos sean totalmente unimodulares.

Teorema (equivalencias de la unimodularidad total)**.** Sea A una matriz TU. Entonces también son TU:
1) la traspuesta A^T;
2) la matriz ampliada $[A \mid I]$;
3) la matriz obtenida de A eliminando una fila o una columna unitaria;
4) la matriz obtenida de A multiplicando una fila o una columna por -1;
5) la matriz obtenida de A intercambiando dos filas o dos columnas;
6) la matriz obtenida de A duplicando filas o columnas;
7) la matriz obtenida de A **pivotando** una vez, como en el simplex.

• CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: SEIS OPERACIONES QUE NO TOCAN LOS DETERMINANTES, Y UNA QUE SÍ

Las seis primeras son de trámite y por una razón única: *mantienen los determinantes de las submatrices dentro de* $\{0, 1, -1\}$. Trasponer no cambia ningún determinante; añadir

columnas de la identidad solo añade submatrices que, desarrolladas por esa columna, se reducen a submatrices de A; borrar filas o columnas deja submatrices que ya estaban; multiplicar una fila por -1 cambia el signo de algunos determinantes, y $\{0, 1, -1\}$ es simétrico; permutar dos filas cambia el signo; y duplicar una fila crea submatrices con dos filas iguales, cuyo determinante es cero.
La séptima es la interesante, y es la que hay que saber demostrar. Pivotar *sí* cambia la matriz de verdad, porque combina filas. Lo que salva la propiedad es que, por la observación que sigue a la definición, el elemento sobre el que se pivota vale ± 1: dividir por él es multiplicar por ± 1, no introducir un denominador. El resto de la prueba consiste en perseguir un determinante cualquiera de la matriz nueva y ver que coincide, salvo signo, con uno de la vieja.
Y hay una razón de fondo para que esta propiedad importe tanto: el simplex *es* una sucesión de pivotajes. Decir que pivotar conserva la unimodularidad total es decir que **el algoritmo no puede estropear la estructura** que garantiza que la respuesta salga entera. Todas las tablas intermedias son tan buenas como la primera.

Las seis primeras propiedades son las de la caja anterior; se demuestra la séptima.
Paso 1: el pivote vale ± 1. Supóngase que se pivota sobre a_{ij}. No se puede pivotar sobre un elemento nulo, y por ser A totalmente unimodular todas sus entradas están en $\{0, 1, -1\}$; luego $|a_{ij}| = 1$. Este es el paso del que cuelga todo lo demás.
Paso 2: escribir la matriz nueva. Sea $\bar{A}$ la matriz tras el pivotaje. Sus filas son

$$\bar{a}_{i\cdot} = \begin{cases} a_{i\cdot} & \text{si } a_{ij} = 1, \\ -a_{i\cdot} & \text{si } a_{ij} = -1, \end{cases} \qquad \bar{a}_{k\cdot} = \begin{cases} a_{k\cdot} & \text{si } a_{kj} = 0, \\ a_{k\cdot} - \bar{a}_{i\cdot} & \text{si } a_{kj} = 1, \\ a_{k\cdot} + \bar{a}_{i\cdot} & \text{si } a_{kj} = -1, \end{cases} \quad k \neq i.$$

Obsérvese que la fila i solo se multiplica por ± 1, y que las demás se modifican sumándoles o restándoles la fila i. Estas operaciones conservan el valor absoluto de un menor si incluye la fila pivote; cuando no la incluye, hace falta el argumento siguiente.
Paso 3: perseguir un determinante (el núcleo de la prueba). Sea $\bar{B}$ una submatriz cuadrada de $\bar{A}$ y sea B la submatriz de A formada por las mismas filas y columnas. Hay que probar que $\det(\bar{B}) \in \{0, 1, -1\}$. Se distinguen dos casos.
Caso A: la fila i aparece en $\bar{B}$. Entonces $\bar{B}$ se obtiene de B multiplicando esa fila por ± 1 y sumando múltiplos de ella a las demás, luego $|\det \bar{B}| = |\det B|$, y como A es TU, $\det(\bar{B}) \in \{0, 1, -1\}$.
Caso B: la fila i no aparece en $\bar{B}$. Aquí hay que usar que, tras el pivotaje, la columna j de $\bar{A}$ es el vector e_i. Hay dos posibilidades.

- Si la columna j *sí* aparece en $\bar{B}$, esa columna de $\bar{B}$ es idénticamente nula (todos sus 1 están en la fila i, que no está), luego $\det(\bar{B}) = 0$.
- Si la columna j *no* aparece en $\bar{B}$, se amplía $\bar{B}$ añadiéndole la fila i y la columna j.

Llamando C a la submatriz correspondiente de A y $\bar{C}$ a la de $\bar{A}$,

$$C = \begin{pmatrix} a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \\ a_{lj} & & B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{pivotar}} \bar{C} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \bar{a}_{ip} \\ 0 & & \\ \vdots & & \bar{B} \\ 0 & & \end{pmatrix},$$

y desarrollando $\bar{C}$ por su primera columna, $\det(\bar{C}) = \det(\bar{B})$. Pero en $\bar{C}$ *sí* aparece la fila i, luego por el caso A, $|\det(\bar{C})| = |\det(C)|$. Encadenando,

$$|\det(\bar{B})| = |\det(\bar{C})| = |\det(C)| \in \{0, 1\},$$

porque C es una submatriz de A, que es TU. Luego $\det(\bar{B}) \in \{0, 1, -1\}$.
En todos los casos el determinante de cualquier submatriz de $\bar{A}$ está en $\{0, 1, -1\}$, luego $\bar{A}$ es TU.
Para reconstruirla. El pivote vale ± 1, así que pivotar es multiplicar una fila por ± 1 y sumar múltiplos suyos a las demás: operaciones que no cambian el valor absoluto de ningún determinante *si la fila pivote está dentro*. Si no está, se la mete a la fuerza junto con la columna pivote, que tras el pivotaje es e_i, y el desarrollo por esa columna devuelve el mismo determinante.

5.2.1.2 *El teorema de Hoffman y Kruskal*

Ya se puede enunciar el resultado central del apartado: la unimodularidad total de A es exactamente la condición que hace entero al poliedro para cualquier vector de recursos entero.

Teorema (Hoffman-Kruskal)**.** La matriz entera A es totalmente unimodular **si y solo si** el poliedro

$$P(b) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leq b, \ x \geq 0\}$$

es entero para todo $b \in \mathbb{Z}^m$ tal que $P(b) \neq \emptyset$. • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: UNA IDA FÁCIL POR CRAMER Y UNA VUELTA QUE FABRICA EL b QUE HACE FALTA

La ida es la frase de la caja del principio, escrita con cuidado: los vértices son $B^{-1}b$, la inversa de una matriz de determinante ± 1 es entera, y una matriz entera por un vector entero da un vector entero. No hay nada más.
La vuelta es más ingeniosa y merece contarse antes de escribirla. Lo que se sabe es que *todos* los poliedros $P(b)$, para todos los b enteros, tienen vértices enteros; lo que se quiere es que todas las submatrices cuadradas *no singulares* tengan determinante ± 1. La estrategia es usar la libertad de elegir b: dada una submatriz A_1 que se quiere controlar, se la completa hasta una base $\bar{A}_1$ del sistema ampliado y se **fabrica a medida** un vector b entero tal que el vértice asociado a esa base sea $z + \bar{A}_1^{-1} e_i$, con z entero grande. Como ese vértice tiene que ser entero, también lo es $\bar{A}_1^{-1} e_i$, que es la columna i de la inversa. Y haciendo eso para cada i se obtiene que *toda* la inversa es entera; con lo cual $\det(\bar{A}_1)$ y $\det(\bar{A}_1^{-1})$ son enteros que multiplicados dan 1, luego valen ± 1.

El truco, en una frase: **si se pueden elegir los datos, se puede obligar al poliedro a enseñar cualquier columna de cualquier inversa**.

Ida (⇒). Paso 1: escribir el poliedro en forma estándar. Con holguras, $Ax + Iy = b$ con $x, y \geq 0$, y la matriz del sistema es $[A \mid I]$, que es TU por la propiedad 2) del teorema anterior.
Paso 2: los vértices son soluciones básicas. Un punto extremo de $P(b)$ corresponde a una base B formada por columnas de $[A \mid I]$, con $B^{-1}b \geq 0$.
Paso 3: Cramer (el núcleo). Como B es una submatriz cuadrada regular de una matriz TU, $\det(B) \in \{1, -1\}$. Por la regla de Cramer, en su forma de fórmula de la inversa (sección 5.1, y apéndice F), $B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \operatorname{adj}(B)$, y la adjunta es entera por ser sus entradas determinantes de submatrices de una matriz entera. Luego B^{-1} es entera, y $x_B = B^{-1}b \in \mathbb{Z}^m$ por ser b entero. El punto extremo es entero.

Vuelta (⇐). Paso 1: fijar la submatriz que se quiere controlar. Sea A_1 una submatriz cuadrada de A de orden $k \leq m$. Si $\det(A_1) = 0$ no hay nada que probar, así que supóngase $\det(A_1) \neq 0$.
Paso 2: completarla hasta una base. Reordenando filas y columnas, se puede colocar A_1 en la esquina superior izquierda de A. Constrúyase la matriz $m \times m$

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & I \end{pmatrix},$$

donde A_2 es el bloque de A que queda debajo de A_1 en las mismas columnas, y el bloque identidad son columnas de holgura. Es una base de $[A \mid I]$, y por ser triangular por bloques,

$$\det(\bar{A}_1) = \det(A_1) \neq 0.$$

Paso 3: fabricar el vector de recursos (el núcleo de la prueba). Sea $i \in \{1, \ldots, m\}$ arbitrario y tómese $z \in \mathbb{Z}^m$ con todas sus componentes suficientemente grandes. Defínase

$$b = \bar{A}_1 z + e_i \ \in \mathbb{Z}^m,$$

que es entero porque $\bar{A}_1$, z y e_i lo son. Entonces

$$\bar{A}_1^{-1} b = z + \bar{A}_1^{-1} e_i,$$

y eligiendo z bastante grande esa expresión es no negativa, porque el término $\bar{A}_1^{-1} e_i$ está fijo y z se puede tomar tan grande como se quiera.
Paso 4: leer la conclusión. Al ser $\bar{A}_1^{-1} b \geq 0$, es la solución básica factible del sistema ampliado asociada a $\bar{A}_1$. Sus coordenadas originales forman un punto extremo x de $P(b)$, entero por hipótesis. Las holguras también son enteras, pues valen $b - Ax$. Por tanto todas las coordenadas básicas son enteras: $\bar{A}_1^{-1} b \in \mathbb{Z}^m$. Como z es entero,

$$\bar{A}_1^{-1} e_i = \bar{A}_1^{-1} b - z \in \mathbb{Z}^m.$$

Pero $\bar{A}_1^{-1} e_i$ es la columna i-ésima de $\bar{A}_1^{-1}$, e i era arbitrario: toda la matriz $\bar{A}_1^{-1}$ es entera.

Paso 5: cerrar con los determinantes. De $\bar{A}_1\bar{A}_1^{-1} = I$ se sigue

$$1 = \det(I) = \det(\bar{A}_1) \cdot \det(\bar{A}_1^{-1}),$$

producto de dos números *enteros*. Luego $\det(\bar{A}_1) \in \{1, -1\}$, y como $\det(\bar{A}_1) = \det(A_1)$, también $\det(A_1) \in \{1, -1\}$. Al ser A_1 arbitraria, A es TU.
Dónde ha entrado cada hipótesis. La ida usa únicamente que b es entero y que $\det(B) = \pm 1$. La vuelta usa que la hipótesis vale *para todo* b entero: es esa libertad la que permite fabricar el b del paso 3. Con un solo b el teorema es falso.
Para reconstruirla. Ida: Cramer, B^{-1} entera, $B^{-1}b$ entero. Vuelta: se completa la submatriz hasta una base $\bar{A}_1$, se toma $b = \bar{A}_1 z + e_i$ con z grande para que el vértice sea factible, y de que ese vértice sea entero se deduce que $\bar{A}_1^{-1}e_i$ es entera; con todas las columnas, $\bar{A}_1^{-1}$ es entera y $\det(\bar{A}_1) = \pm 1$.

El teorema con números: la matriz del triángulo. La matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ de la observación anterior no es TU, porque $\det(A) = -2$. El teorema predice entonces que algún b entero da un poliedro con un vértice fraccionario, y ese b se encuentra de las dos maneras.

Mirando. Con $b = (1, 1, 1)$, el poliedro es $P(b) = \{x \geq 0 : \ x_1 + x_2 \leq 1, \ x_1 + x_3 \leq 1, \ x_2 + x_3 \leq 1\}$. El punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ cumple las tres desigualdades con igualdad, y las tres son independientes porque $\det(A) \neq 0$: tres restricciones activas independientes en $\mathbb{R}^3$ hacen de él un vértice, y es fraccionario. Tiene una lectura concreta. Si $x_i = 1$ significa elegir el vértice i del triángulo, las restricciones prohíben elegir dos vecinos, y el máximo de $x_1 + x_2 + x_3$ es 1 con puntos enteros, pero $\frac{3}{2}$ en la relajación, justo en ese vértice. Las mitades son el $\frac{1}{\det(A)}$ de la regla de Cramer: el denominador que la unimodularidad total habría prohibido.

Con la máquina de la vuelta. La inversa es $A^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, y no es entera. Aquí $A_1 = A$ ya es cuadrada de orden $m = 3$, así que $\bar{A}_1 = A$ sin añadir holguras. El paso 3 de la prueba toma $z = (1, 1, 1)$, que basta para que $z + A^{-1}e_1 \geq 0$, e $i = 1$:

$$b = Az + e_1 = (2, 2, 2) + (1, 0, 0) = (3, 2, 2),$$
$$A^{-1}b = z + A^{-1}e_1 = (1, 1, 1) + \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right).$$

Se comprueba: $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$, $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$ y $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$. El vértice enseña, desplazada por z, la primera columna de A^{-1}; si $P(b)$ fuera entero para todo b, esa columna tendría que ser entera. Y para un b concreto el poliedro puede salir entero aunque A no sea TU: con $b = (0, 0, 0)$ se reduce al origen. Por eso la vuelta necesita poder elegir b.

Corolario (el poliedro dual también es entero)**.** Si A es TU, entonces el poliedro $Q(c) = \{u \in \mathbb{R}^m : \ u^T A \geq c^T, \ u \geq 0\}$ es entero para todo $c \in \mathbb{Z}^n$ tal que $Q(c) \neq \emptyset$.

La desigualdad $u^T A \geq c^T$ es la misma que $(-A)^T u \leq -c$. Ahora bien, A es TU, luego también lo es $(-A)^T$: la propiedad 4) del teorema de las siete operaciones cambia el signo de *una* fila, y aplicada una vez por cada fila da $-A$; después, la propiedad 1) traspone. Aplicando el teorema de Hoffman-Kruskal a la matriz $(-A)^T$ y al vector entero $-c$, el poliedro $Q(c)$ es entero.

Observación (por qué este corolario importa)**.** Dice que cuando la matriz es totalmente unimodular la integridad no es un privilegio del primal: también el dual tiene vértices enteros cuando el vector de costos es entero. En transporte, con costos enteros se pueden elegir precios sombra enteros, fijando uno de los potenciales para eliminar la libertad de sumar una constante a unos y restarla a los otros. Esa estructura permite usar aritmética entera en algoritmos como el húngaro para asignación.

5.2.1.3 Cómo se reconoce una matriz totalmente unimodular

Comprobar la definición directamente es inviable: una matriz 10×20 tiene varios millones de submatrices cuadradas. Hacen falta criterios, y hay tres, encadenados.

Teorema (caracterización por particiones de filas)**.** Sea $A \in M_{m\times n}$ con $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$ para todos i, j. Entonces A es TU si y solo si para cada subconjunto de filas $Q \subseteq M = \{1, \ldots, m\}$ existe una partición Q_1, Q_2 de Q tal que

$$\left| \sum_{i\in Q_1} a_{ij} - \sum_{i\in Q_2} a_{ij} \right| \leq 1 \qquad \text{para toda columna } j = 1, \ldots, n.$$

LA IDEA: PINTAR LAS FILAS DE DOS COLORES Y QUE NINGUNA COLUMNA SE DESEQUILIBRE

El enunciado se lee mejor como un problema de colorear. Se elige cualquier grupo de filas y se pintan de dos colores, digamos azul y rojo. Para cada columna se suman sus entradas en las filas azules y en las rojas por separado, y se restan las dos sumas. La condición pide que exista un coloreado en el que *ninguna* columna se desequilibre en más de una unidad.
La imagen dice por qué el criterio funciona en los casos que interesan. En una matriz de transporte, cada columna tiene exactamente dos unos: uno en una fila de orígenes y otro en una de destinos. Pintando todos los orígenes de azul y todos los destinos de rojo, cada columna aporta 1 a cada lado y la diferencia es 0. En una matriz de incidencia de un grafo dirigido, cada columna tiene un $+1$ y un -1; pintando *todo* de azul, la suma de la columna es cero y la diferencia también. Para un subconjunto cualquiera de filas se conservan esos colores: si solo queda uno de los dos elementos de una columna, la diferencia vale ± 1; si quedan los dos, vale 0. Así se cumple la condición para *todo* subconjunto, como exige el teorema.

Observación (una omisión que conviene declarar)**.** Este teorema de Ghouila-Houri se utiliza sin demostración. Su referencia original es «Caractérisation des matrices totalement unimodulaires», *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 254 (1962), pp. 1192–1194. Los dos corolarios siguientes sí se demuestran. Para aplicar el criterio general hay que justificar una partición válida para cada subconjunto de filas; bajo la hipótesis de dos elementos no nulos por columna, el primer corolario permite hacerlo con una sola partición de todas las filas.

Corolario (criterio de los dos elementos no nulos)**.** Sea A con $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$ y con a lo sumo dos elementos no nulos en cada columna. Entonces A es TU si y solo si existe una partición Q_1, Q_2 de las filas de A tal que, en toda columna con dos elementos no nulos:
i) si los dos tienen el **mismo** signo, uno está en una fila de Q_1 y el otro en una de Q_2;
ii) si tienen **distinto** signo, los dos están en Q_1 o los dos en Q_2.

Basta traducir la condición del teorema anterior columna a columna. Fijada la columna j y una partición Q_1, Q_2, la cantidad $\left|\sum_{Q_1} a_{ij} - \sum_{Q_2} a_{ij}\right|$ vale:

- 0 si todos los elementos de la columna son nulos;
- 1 si hay exactamente un elemento no nulo, esté donde esté;
- si hay dos elementos no nulos a y a': cuando están en bloques distintos la diferencia es $|a - a'|$, y cuando están en el mismo bloque es $|a + a'|$. Con $a, a' \in \{1, -1\}$, el primer caso da 0 si $a = a'$ y 2 si $a \neq a'$; el segundo, al revés.

Por tanto la condición ≤ 1 equivale exactamente a i) y ii). Y como la partición se toma de las filas de A enteras, sirve para todo subconjunto Q: basta restringirla.

Corolario (criterio de la suma nula)**.** Si A tiene $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$, a lo sumo dos elementos no nulos por columna, y $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = 0$ en toda columna con dos elementos no nulos, entonces A es TU.

Que la suma de una columna con dos no nulos sea cero significa que los dos tienen signos opuestos. Aplicando el corolario anterior con la partición trivial $Q_1 = \{1, \ldots, m\}$ y $Q_2 = \emptyset$, la condición ii) se cumple para todas esas columnas y la i) no interviene. Luego A es TU.

Cómo se decide si una matriz es TU, paso a paso. Casi nunca se calculan todos los menores. Se sigue este orden, que va de lo más barato a lo más caro, y en cada paso se puede terminar.

1. *Mirar las entradas.* Si alguna no está en $\{0, 1, -1\}$, la matriz no es TU: esa entrada ya es una submatriz 1×1 prohibida. Un 2 de una capacidad, un $\frac{1}{2}$ o un $-M$ de una ligadura bastan.
2. *Buscar un testigo pequeño.* Una submatriz 2×2 como $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, de determinante 2, o un ciclo impar de unos, como el triángulo, de determinante ± 2. Si aparece, no es TU, y la respuesta es esa submatriz.
3. *Simplificar con las operaciones que conservan la propiedad.* Se quitan las filas y columnas repetidas y las columnas con un solo ± 1, y se cambia el signo de filas o columnas enteras. Si lo que queda es TU, la matriz de partida también, por las propiedades 2), 4) y 6) del teorema de las siete operaciones: añadir columnas unitarias, cambiar signos y duplicar conservan la unimodularidad total.
4. *Si cada columna tiene a lo sumo dos no nulos, dibujar el grafo de las filas.* Un nodo por fila, y por cada columna con dos no nulos una arista entre sus dos filas, marcada «igual» si los signos coinciden y «distinto» si no. El criterio de los dos elementos no nulos pide repartir los nodos en dos bloques de modo que las aristas «igual» crucen de un bloque al otro y las «distinto» no. Con solo aristas «igual», eso es que el grafo sea bipartito. Dicho de otra manera: si cambiando el signo de algunas filas enteras se consigue un $+1$ y un -1 en cada columna de dos no nulos, la matriz es la de incidencia de un grafo dirigido y es TU. Las filas cambiadas forman uno de los dos bloques.
5. *Si alguna columna tiene tres o más no nulos, eso no descarta nada.* Se prueba a simplificar con el paso 3 o a reconocer una familia conocida. Una es la de las matrices de intervalos: si, reordenando las filas, los unos de cada columna quedan en posiciones consecutivas, la matriz es TU. La prueba, con el criterio de las particiones pintando las filas alternativamente, y una matriz 4×5 con columnas de tres y cuatro unos que lo es, están en la sección E.8.
   Un modelo de red, decidido. Dos minas con producción máxima a_1, a_2 envían a dos fábricas,

ya abiertas, que envían a dos ciudades con demandas mínimas d_1, d_2. Las variables son x_{ik}, de la mina i a la fábrica k, y z_{kj}, de la fábrica k a la ciudad j; y las filas, las dos minas ($\leq$), las dos ciudades ($\geq$) y los dos balances de las fábricas ($=$). Con las columnas en el orden $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}$,

$$\begin{array}{r} \text{mina 1} \\ \text{mina 2} \\ \text{ciudad 1} \\ \text{ciudad 2} \\ \text{fábrica 1} \\ \text{fábrica 2} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Las entradas están en $\{0, 1, -1\}$ y cada columna tiene exactamente dos no nulos (pasos 1 y 4). La columna de x_{ik} tiene dos unos, en su mina y en su fábrica; la de z_{kj}, un 1 en su ciudad y un -1 en su fábrica. Cambiando el signo de las dos filas de las minas, toda columna queda con un $+1$ y un -1: es la matriz de incidencia del grafo dirigido de los envíos, y es TU. Para aplicar el teorema de Hoffman-Kruskal se escriben las ciudades con $\leq$, cambiándoles el signo, y cada balance como dos desigualdades con filas opuestas. Ninguna de esas operaciones estropea la propiedad, así que con a_i y d_j enteros los vértices de la relajación son enteros. En cuanto se añaden las aperturas, con $x_{ik} \leq My_k$, la columna de y_k lleva un $-M$, y con $M > 1$ el paso 1 ya dice que no es TU. El caso general, con tres minas, tres fábricas y tres ciudades, está resuelto en la sección E.5.

Dónde se falla.

- *Declarar TU porque todas las entradas son* 0 *y* 1. Es la condición necesaria del paso 1, no la suficiente: el triángulo la cumple y no es TU.
- *Declarar que no es TU porque una columna tiene tres unos.* El criterio de los dos no nulos no se aplica, pero eso no demuestra nada: las matrices de intervalos lo son.
- *Buscar una partición por columna.* El criterio pide *una sola* partición de las filas que sirva para todas las columnas a la vez.
- *Dar por mala una partición y concluir que no hay ninguna.* La condición es de existencia: que $\{1,2\}$ y $\{3,4\}$ fallen no dice que no haya otra. Si se afirma que no es TU, hay que enseñar la submatriz.
- *Mirar la matriz equivocada.* Cuenta la de los coeficientes de las restricciones, con todas las variables, las binarias incluidas. La fila del objetivo y la columna del término independiente no entran.
- *Creer que TU basta.* Hace falta además b entero: con ofertas fraccionarias los vértices del transporte salen fraccionarios aunque la matriz sea la misma.

Ejercicio 5.1. *Comprobar si una matriz es totalmente unimodular*

Decídase, razonadamente, cuáles de estas matrices son totalmente unimodulares:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Resolución. *La idea.* Las tres tienen sus entradas en $\{0, 1, -1\}$ y dos no nulos por columna,

---

así que el paso 1 no decide nada y el paso 4 lo decide todo: se dibuja el grafo de las filas de cada una y se mira si admite el reparto en dos bloques. Donde no lo admita, el ciclo impar da el testigo, y su determinante lo certifica.
La matriz A no es TU, y hay dos maneras de verlo. La directa: $\det(A) = -2$, porque desarrollando por la primera fila, $\det(A) = 1 \cdot (0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) - 1 \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) + 0 = -1 - 1 = -2$. La conceptual, que es la que se generaliza: cada columna tiene exactamente dos unos, del mismo signo, luego por el criterio de los dos elementos no nulos haría falta una partición de las tres filas en dos bloques de manera que *cada* par de filas quedara separado; es decir, un coloreado de los tres vértices de un triángulo con dos colores sin que dos adyacentes compartan color, y eso es imposible. Los ciclos impares son el obstáculo.
La matriz B sí es TU. Cada columna tiene dos unos del mismo signo, y ahora la partición existe: $Q_1 = \{1, 3\}$ y $Q_2 = \{2, 4\}$ separa los dos unos de cada columna (columna 1: filas 1 y 4; columna 2: filas 1 y 2; columna 3: filas 2 y 3; columna 4: filas 3 y 4; en las cuatro, una fila de cada bloque). Es un ciclo de longitud *par*, y por eso admite el coloreado.
La matriz C sí es TU, y ni siquiera hace falta buscar partición: cada columna tiene dos elementos no nulos y suman cero, luego por el criterio de la suma nula, con la partición trivial, es TU. Obsérvese que C es la matriz de incidencia del mismo triángulo, pero con las aristas *orientadas*: orientar un ciclo impar lo arregla. Esa es, en una frase, la diferencia entre los grafos dirigidos y los no dirigidos en todo este tema.

Estas tres matrices resumen el criterio entero: con dos no nulos por columna, del mismo signo, hace falta que el grafo asociado sea *bipartito*, es decir, que no tenga ciclos impares; con signos opuestos, no hace falta nada.
Dónde se falla. En A, en contestar que es TU porque sus entradas son ceros y unos. En B, en probar la partición $\{1, 2\}, \{3, 4\}$, ver que la columna 2 da $|1 + 1| = 2$ y concluir que no es TU: esa partición falla, pero la de filas alternas funciona. En C, en buscar una partición que separe los dos no nulos de cada columna, que es la regla de los signos iguales: con signos opuestos la regla es la contraria. Y en las tres, en calcular solo el determinante de la matriz entera: que $\det(C) = 0$ o $\det(B) = 0$ no dice nada de sus submatrices.

5.2.2 El problema del transporte

LA PREGUNTA

Gaspard Monge estudió en 1781 un problema concreto: mover tierra de unos montones a unos hoyos con el menor costo de transporte posible. Más de dos siglos después, esta clase de problema decide cómo se reparten las vacunas entre almacenes y hospitales, o los contenedores entre puertos. Cuando las ofertas y las demandas son números enteros de camiones, ¿hay que hacer algo especial para que el reparto salga en camiones enteros, o sale solo?

El **problema del transporte** se formula así: hay m orígenes con cantidades $a_i > 0$ de una mercancía que ha de enviarse a n destinos con demandas $b_j > 0$; el coste unitario de transportar del origen i al destino j es c_{ij}; y se quiere minimizar el coste total satisfaciendo ofertas y demandas. Se supone $a_i, b_j \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{sujeto a:} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1,\dots,m, \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1,\dots,n, \\ & x_{ij} \geq 0,\ x_{ij} \in \mathbb{Z} \quad \forall i,j, \end{aligned}$$

donde x_{ij} son las cantidades transportadas del origen i al destino j. La primera familia dice que lo que sale del origen i es exactamente su oferta; la segunda, que lo que llega al destino j es exactamente su demanda.

Observación (el problema equilibrado, y cómo se equilibra)**.** Escrito con igualdades, el problema solo puede ser factible si $\sum_i a_i = \sum_j b_j$, y entonces se dice **equilibrado**. Si se permite dejar oferta sin enviar, pero hay que satisfacer exactamente cada demanda, se procede así:

- si $\sum_i a_i < \sum_j b_j$, no hay solución: no hay mercancía bastante para cubrir la demanda;
- si $\sum_i a_i > \sum_j b_j$, se crea un **destino ficticio** $n+1$ con demanda $b_{n+1} = \sum_i a_i - \sum_j b_j$ y costes $c_{i(n+1)} = 0$ para todo i. Lo que se «envía» a ese destino es lo que se queda en el almacén, y como no cuesta nada, el modelo no lo penaliza.

El truco del destino ficticio es el mismo que se usaba en el capítulo 1 con las variables de holgura, y conviene reconocerlo: convertir una desigualdad en igualdad inventándole un sumidero.

5.2.2.1 *La matriz del transporte*

Desarrollando las restricciones, la matriz $A \in M_{(m+n)\times mn}$ tiene esta forma por cajas, con $\mathbf{1}_n$ un vector fila de n unos:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & & & \\ & \mathbf{1}_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{1}_n \\ I_n & I_n & \cdots & I_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m \text{ filas} \\ \left.\begin{matrix} \end{matrix}\right\} n \text{ filas} \end{matrix}$$

y sus columnas, que se numeran a_{ij}, son vectores de $m+n$ componentes de la forma

$$a_{ij} = e_i + e_{m+j},$$

con un 1 en la posición i (su origen) y otro en la posición $m+j$ (su destino), y ceros en el resto.

La idea: cada variable es una flecha, y su columna dice de dónde sale y a dónde va

Esa fórmula, $a_{ij} = e_i + e_{m+j}$, es toda la estructura del problema y conviene mirarla despacio. Cada variable x_{ij} representa una *flecha* del origen i al destino j, y su columna en la matriz tiene exactamente dos unos: uno en la fila del origen del que sale y otro en la fila del destino al que llega. Nada más. Toda la matriz es, literalmente, la lista de flechas de un grafo bipartito con m nodos a la izquierda y n a la derecha.
De esa observación salen, sin esfuerzo, las tres propiedades del apartado: que la matriz es totalmente unimodular (porque hay una partición evidente, izquierda contra derecha); que su rango es $m+n-1$ y no $m+n$ (porque sumando todas las filas de la izquierda y todas las de la derecha se obtiene lo mismo: la suma de todas las flechas); y que las soluciones básicas son enteras. Es un buen ejemplo de que *escribir bien una columna* ahorra tres demostraciones.

Ejemplo. Un problema de transporte con 2 orígenes y 3 destinos, con ofertas, demandas y costes

	1	2	3	a_i
1	4	7	5	30
2	2	4	3	20
b_j	15	10	25	50

se escribe así:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 4x_{11}+7x_{12}+5x_{13}+2x_{21}+4x_{22}+3x_{23} \\ \text{sujeto a:} & x_{11}+x_{12}+x_{13}=30 \\ & x_{21}+x_{22}+x_{23}=20 \\ & x_{11}+x_{21}=15 \\ & x_{12}+x_{22}=10 \\ & x_{13}+x_{23}=25 \\ & x_{ij}\geq 0 \text{ enteras,} \end{array} \qquad A=\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1\\ 1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&1 \end{pmatrix} \in M_{5\times 6}.$$

Resolviendo el problema *relajado* — sin imponer nada de integridad — el coste óptimo es 205, y se alcanza en dos vértices distintos:

$$x^* = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 25 \\ 10 & 10 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad x^{**} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 15 \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix},$$

los dos con todas sus componentes enteras, y con ellos todo el segmento que los une. Se comprueba que las filas suman 30 y 20, las columnas 15, 10 y 25, y que $4\cdot 5+5\cdot 25+2\cdot 10+4\cdot 10=205$ en el primero y $4\cdot 15+5\cdot 15+4\cdot 10+3\cdot 10=205$ en el segundo. Que el óptimo sea múltiple es compatible con la integridad de sus vértices: estos dos son enteros, aunque el segmento que los une también contenga óptimos fraccionarios. Las proposiciones siguientes explican por qué siempre se puede elegir un vértice óptimo entero.

5.2.2.2 *Las cuatro propiedades del problema del transporte*

Proposición (el relajado tiene óptimo finito)**.** El problema del transporte equilibrado y relajado tiene solución óptima finita.

Es factible: el reparto proporcional $x_{ij} = a_i b_j / \sum_k a_k$ cumple las dos familias de igualdades: por filas, $\sum_j x_{ij} = a_i \sum_j b_j / \sum_k a_k = a_i$, donde se usa el equilibrio $\sum_j b_j = \sum_k a_k$; y por columnas lo mismo con los papeles cambiados, $\sum_i x_{ij} = b_j \sum_i a_i / \sum_k a_k = b_j$, que además sale sin necesidad del equilibrio, porque el sumatorio del numerador y el del denominador ya son el mismo. Y es no negativo. Y está acotado inferiormente: cada variable cumple $0 \le x_{ij} \le \min\{a_i, b_j\}$, luego el conjunto factible es un politopo, es decir, cerrado y acotado; y una función continua sobre un conjunto compacto no vacío de $\mathbb{R}^n$ alcanza en él su máximo y su mínimo, que es el teorema de Weierstrass (apéndice F, sección «Análisis»; en la sección 6.1.2 se enuncia y se comenta con sus dos contraejemplos). La función objetivo es lineal, luego continua, y el mínimo se alcanza.

Proposición (el rango de la matriz)**.** $\operatorname{rango}(A) = m + n - 1$.

LA IDEA: UNA ECUACIÓN SOBRA PORQUE TODO LO QUE SALE, LLEGA

La matriz tiene $m + n$ filas pero solo $m + n - 1$ independientes, y la razón es transparente: sumar todas las ecuaciones de los orígenes da «el total que sale de todos los almacenes», y sumar todas las de los destinos da «el total que llega a todos los clientes». Como esas dos cantidades son la misma — lo que sale llega —, una cualquiera de las ecuaciones se deduce de las demás. Es la misma redundancia que hace falta suponer el problema equilibrado.

Paso 1: cota superior trivial. Como A tiene $m + n$ filas, $\operatorname{rango}(A) \le m + n$.
Paso 2: una dependencia lineal. La suma de las m primeras filas es el vector de todos unos de longitud mn, porque cada columna a_{ij} tiene exactamente un uno entre las m primeras posiciones. La suma de las n últimas filas es el mismo vector, por la misma razón. Luego las $m + n$ filas son dependientes y $\operatorname{rango}(A) \le m + n - 1$.
Paso 3: las $m + n - 1$ restantes son independientes (el núcleo). Eliminada la última fila, supóngase por reducción al absurdo que las restantes fueran linealmente dependientes: existirían α_i, $i = 1, \dots, m$, y β_j, $j = 1, \dots, n - 1$, no todos nulos, con

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, (a_k)_i + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \, (a_k)_{m+j} = 0 \qquad \text{para toda columna } a_k.$$

Tómese la columna a_{in}, la de la flecha que va del origen i al último destino. Sus únicas entradas no nulas están en la fila i y en la fila $m + n$, que se ha eliminado; luego la combinación se reduce a $\alpha_i = 0$. Como i es arbitrario, $\alpha_i = 0$ para todo i. Sustituyendo eso en la columna a_{1j} con $j \le n - 1$, cuyas entradas no nulas están en las filas 1 y $m + j$, queda $\beta_j = 0$. Luego todos los coeficientes son nulos, contra lo supuesto. Por tanto $\operatorname{rango}(A) = m + n - 1$.

Proposición (la matriz del transporte es totalmente unimodular)**.** La matriz A del problema

del transporte es TU. • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

Todas las entradas de A son 0 o 1, y cada columna tiene exactamente dos elementos no nulos, los dos iguales a 1: uno en la fila de su origen, entre las m primeras, y otro en la fila de su destino, entre las n últimas. Basta entonces el criterio de los dos elementos no nulos con la partición

$$Q_1 = \{1, \dots, m\} \text{ (los orígenes)}, \qquad Q_2 = \{m+1, \dots, m+n\} \text{ (los destinos)}.$$

Como los dos unos de cada columna tienen el mismo signo y están, uno en Q_1 y otro en Q_2, se cumple la condición i) del criterio, y no hay columnas con dos no nulos de signos distintos. Luego A es TU.

Proposición (la integridad sale gratis)**.** Si a_i y b_j son enteros para todos i, j, el problema del transporte relajado admite una solución óptima básica entera; esta resuelve también el problema entero.

Encadenando los tres resultados anteriores: A es TU. Para aplicar Hoffman-Kruskal a las igualdades se escriben como $Ax \leq b$ y $-Ax \leq -b$; la matriz que apila A y $-A$ sigue siendo TU, pues repetir filas o cambiarles el signo conserva esta propiedad. El conjunto factible es no vacío y los datos son enteros, luego es un **poliedro entero**; y el problema tiene óptimo finito, luego por la caracterización de los poliedros enteros el óptimo se alcanza en un punto extremo, que es entero.
Qué se rompe si se quita una hipótesis. Si alguna oferta o demanda no fuera entera, el teorema de Hoffman-Kruskal no dice nada: la unimodularidad total garantiza que B^{-1} es entera, pero $B^{-1}b$ solo es entero si b lo es. Y en efecto, con ofertas fraccionarias las soluciones básicas salen fraccionarias.

Observación (qué algoritmo se usa)**.** Los resultados anteriores dicen que el método del simplex, aplicado sin más al problema relajado, resuelve el problema del transporte y devuelve una respuesta entera. En la práctica existe una especialización del simplex para esta estructura — el llamado *algoritmo del transporte* — que aprovecha que la matriz es de ceros y unos para no almacenarla nunca y para hacer los pivotajes recorriendo ciclos del grafo bipartito. Así reduce el almacenamiento y aprovecha la estructura del problema en los pivotajes.

DE DÓNDE VIENE: DE LOS MONTONES DE TIERRA DE MONGE A LOS NOBEL

El problema es antiguo. En 1781 Gaspard Monge presentó a la Academia de Ciencias de París una *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*: dados unos montones de tierra y unos hoyos que hay que rellenar, ¿cómo se mueve la tierra con el menor trabajo? Monge no disponía de programación lineal y su versión del problema, con masas continuas, sigue siendo hoy un área de investigación viva bajo el nombre de *transporte óptimo*.
La versión discreta y lineal que estudia este apartado es de 1941, cuando Frank Hitchcock la publicó como «la distribución de un producto desde varias fuentes a numerosas localidades». Kantoróvich había desarrollado su enfoque de programación lineal en 1939 y publicó en 1942 un trabajo específico sobre el traslado de masas.[a] Kantoróvich y Tjalling Koopmans, que estudió el transporte marítimo durante la guerra, compartieron el Nobel de economía de 1975; el comité citó expresamente «la teoría de la asignación óptima de recursos», un campo más amplio del

que el transporte es un ejemplo.

[a] F. L. Hitchcock, *Journal of Mathematics and Physics* 20 (1941), pp. 224–230, doi:10.1002/sapm1941201224; L. Kantoróvich, «On the Translocation of Masses» (1942), traducción en *Management Science* 5 (1958), pp. 1–4, doi:10.1287/mnsc.5.1.1.

5.2.3 El problema de asignación

LA PREGUNTA

Hay que repartir n tareas entre n personas, una tarea por persona, sabiendo lo que cuesta cada emparejamiento. El número de repartos posibles es $n!$, que para $n = 20$ ya es del orden de 10^{18}. Y sin embargo la restricción «una y solo una» parece justamente el tipo de condición que obliga a decidir con variables 0 o 1. ¿Es este un problema combinatorio irremediable, o se puede resolver como si las variables fueran continuas?

El **problema de asignación** consiste en asignar n orígenes (individuos, instalaciones) a n destinos (tareas, localizaciones) optimizando alguna medida de eficacia. Sabiendo que el coste de asignar el origen i al destino j es c_{ij}, se formula

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{sujeto a:} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1,\dots,n, \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1,\dots,n, \\ & x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i,j, \end{aligned}$$

donde

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si al origen } i \text{ se le asigna el destino } j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En forma matricial, Min $c^T x$ sujeto a $Ax = \mathbf{1}$ y $x \in \{0,1\}^{n^2}$, con $A \in M_{2n\times n^2}$ cuyas columnas son $a_{ij} = e_i + e_{n+j}$.

Observación (es un transporte con todo a uno)**.** Comparando las dos formulaciones se ve que el problema de asignación es exactamente un problema de transporte con $m = n$ y con todas las ofertas y demandas iguales a 1. La matriz A es la misma, luego tiene las mismas propiedades: es totalmente unimodular, su rango es $2n - 1$ y el poliedro es entero. Y como además $0 \le x_{ij} \le \min\{a_i, b_j\} = 1$, las soluciones enteras son automáticamente 0 o 1.

Teorema (las soluciones básicas del problema de asignación son binarias)**.** Toda solución básica factible del problema de asignación tiene todas sus componentes x^*_{ij} iguales a 0 o a 1. En particular, **la restricción** $x_{ij} \in \{0,1\}$ **se puede sustituir por** $x_{ij} \ge 0$ **sin cambiar el valor óptimo**, y un vértice óptimo de la relajación proporciona una asignación binaria. • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

Por ser un caso particular del transporte con datos enteros, el poliedro es entero y toda solución básica factible tiene componentes enteras. Y por las restricciones, $0 \le x_{ij} \le 1$: de $\sum_j x_{ij} = 1$ con todos los sumandos no negativos se sigue $x_{ij} \le 1$. Un entero entre 0 y 1 es 0 o 1.

LA IDEA: EL POLIEDRO DE BIRKHOFF, Y POR QUÉ LA RESPUESTA ES SÍ

La respuesta a la pregunta que abre la sección es, pues, que **sí**: se resuelve como si las variables fueran continuas, y al elegir un vértice óptimo la respuesta sale binaria. Merece la pena decir qué objeto es ese, porque tiene nombre propio.

El conjunto de matrices $n \times n$ no negativas cuyas filas y columnas suman uno se llama conjunto de *matrices doblemente estocásticas*, y es un politopo en $\mathbb{R}^{n^2}$. El teorema anterior dice que sus vértices son exactamente las **matrices de permutación**, es decir, los $n!$ repartos posibles. Ese resultado se conoce como teorema de Birkhoff-von Neumann, y su lectura es preciosa: el poliedro continuo, que parece un objeto mucho más grande y más blando que el conjunto de las $n!$ permutaciones, tiene exactamente esas permutaciones como esquinas. Minimizar una función lineal sobre él es lo mismo que minimizarla sobre las permutaciones, y eso lo hace el simplex.

Dicho de otro modo: el problema tiene $n!$ candidatos, pero está *disfrazado* de problema continuo con n^2 variables y $2n$ restricciones, y el disfraz es fiel. La palabra técnica para esto es que la envolvente convexa de las soluciones enteras coincide con el poliedro de la relajación, y es la situación ideal de toda la programación entera. La sección 5.4 se dedica precisamente a acercarse a ella cuando no se da.

El caso $n = 2$, a mano. Con dos personas y dos tareas, las cuatro ecuaciones $x_{11} + x_{12} = 1$, $x_{21} + x_{22} = 1$, $x_{11} + x_{21} = 1$ y $x_{12} + x_{22} = 1$ tienen rango $3 = 2n - 1$, y dejan un solo grado de libertad. Llamando $t = x_{11}$, las otras tres quedan obligadas: $x_{12} = 1 - t$, $x_{21} = 1 - t$ y $x_{22} = t$. La relajación es, pues, el segmento de matrices

$$\begin{pmatrix} t & 1-t \\ 1-t & t \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le 1,$$

cuyos extremos son las dos permutaciones: $t = 1$ asigna cada persona a su tarea del mismo número, y $t = 0$ las cruza. Con costes $c_{11} = 4$, $c_{12} = 7$, $c_{21} = 3$ y $c_{22} = 5$, el coste de la matriz de parámetro t es

$$4t + 7(1-t) + 3(1-t) + 5t = 10 - t,$$

una función lineal de t. Su mínimo está en un extremo, $t = 1$, con coste 9, frente a 10 del otro reparto. Un punto interior, como $t = \frac{1}{2}$, es un reparto a medias que cuesta $\frac{19}{2}$: nunca mejora el mejor extremo. Es el teorema de Birkhoff-von Neumann en su versión más pequeña, un segmento con dos permutaciones por extremos.

Observación (degeneración, y por qué existen algoritmos mejores)**.** Una base del problema de asignación tiene $2n - 1$ variables básicas, porque ese es el rango de la matriz. Una solución básica factible es binaria y tiene exactamente n unos, uno por fila; por tanto las otras $n - 1$ variables básicas valen 0. Para $n \ge 2$, **toda solución básica factible es degenerada**. Esto permite que algunos pivotajes no cambien el punto ni mejoren el objetivo, como se vio en el capítulo 4.

Además del simplex, existen algoritmos que trabajan sobre el dual y aprovechan la estructura, como el **algoritmo húngaro**, introducido por Harold Kuhn en 1955. Sus versiones mejoradas resuelven el problema con $O(n^3)$ operaciones aritméticas; cuando los costes son enteros, pueden trabajar con aritmética entera. Kuhn le puso ese nombre por los resultados de los matemáticos húngaros Dénes Kőnig y Jenő Egerváry en los que se apoyó.[1] Aquí no se desarrolla este algoritmo.

5.2.4 Problemas de flujo

LA PREGUNTA

Un servicio de emergencias tiene que llevar una ambulancia de un punto a otro de una ciudad por la ruta más rápida. La respuesta debe ser una ruta: una sucesión de calles, cada una tomada o no tomada, sin medias calles. ¿Hay que resolver un problema con variables binarias, con todo lo que eso cuesta, o vuelve a ocurrir el milagro del apartado anterior?

Definición (grafo, red y matriz de incidencia)**.** Aquí se trabaja con un **grafo dirigido sin lazos**: un conjunto finito de **nodos** $V = \{1, \dots, n\}$ y un conjunto de **arcos** $E \subseteq \{(i,j) \in V \times V : i \neq j\}$.

- Una **cadena dirigida** entre i y j es una sucesión de arcos que los conecta siguiendo sus orientaciones; si no repite nodos, se llama **camino**.
- El arco (i,j) va *de i a j*; no presupone que exista el arco (j,i).
- Cuando los arcos llevan asociadas cantidades que representan alguna magnitud (flujos), al grafo se le llama **red**.
- La **matriz de incidencia** se construye asignando una fila a cada nodo y una columna a cada arco: en la columna del arco (i,j) se coloca un 1 en la fila del nodo i y un -1 en la del nodo j. Un grafo dirigido queda completamente representado por su matriz de incidencia.

El **problema del camino más corto** busca la cadena de longitud mínima entre un nodo origen y un nodo destino de una red dirigida. Supóngase $n \geq 2$ y que existe algún camino de 1 a n. Cada arco tiene una distancia finita $d_{ij} \geq 0$ (coste, tiempo, kilómetros); puede ocurrir $d_{ij} \neq d_{ji}$ cuando existen ambos arcos. Se introduce una variable solo para cada $(i,j) \in E$; para abreviar las sumas, se entiende $x_{ij} = 0$ cuando no hay arco. El modelo es

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \sum_{(i,j)\in E} d_{ij} x_{ij} \\
\text{sujeto a:} \quad & \sum_{j=2}^{n} x_{1j} - \sum_{k=2}^{n} x_{k1} = 1 && \text{(sale una unidad del origen)} \\
& \sum_{l\neq i} x_{il} - \sum_{k\neq i} x_{ki} = 0, \;\; i \neq 1, n && \text{(los intermedios ni crean ni destruyen)} \\
& \sum_{j=1}^{n-1} x_{nj} - \sum_{k=1}^{n-1} x_{kn} = -1 && \text{(llega una unidad al destino)} \\
& x_{ij} \in \{0,1\}, \quad (i,j) \in E.
\end{aligned}
$$

[1] H. W. Kuhn, «The Hungarian Method for the Assignment Problem», *Naval Research Logistics Quarterly* 2 (1955), pp. 83–97; A. Frank, «On Kuhn's Hungarian Method—A Tribute from Hungary», EGRES TR-2004-14, explica sus antecedentes y la cota de la versión original.

donde x_{ij} vale 1 si se toma el arco (i, j) y 0 en caso contrario. Las ecuaciones admiten también ciclos junto al camino; con distancias no negativas, eliminarlos nunca aumenta el coste.

LA IDEA: UNA UNIDAD DE ALGO QUE ENTRA POR UN SITIO Y SALE POR OTRO

El modelo parece complicado y es muy simple si se lee como un balance. Imagínese que se inyecta **una unidad de fluido** en el nodo origen y se extrae una unidad en el nodo destino, y que x_{ij} mide cuánto pasa por la calle (i, j). Las tres familias de restricciones dicen tres cosas evidentes: del origen sale una unidad neta; en cualquier nodo intermedio entra tanto como sale, porque el fluido no se acumula ni se pierde; y al destino llega una unidad neta. Minimizar $\sum d_{ij}x_{ij}$ es hacer que esa unidad recorra la menor distancia posible.
Al permitir $x_{ij} \geq 0$, el fluido puede repartirse entre varios caminos y circular por ciclos. Todo flujo factible se descompone en flujos por caminos de 1 a n, cuyas cantidades suman 1, y flujos por ciclos. Los ciclos tienen coste no negativo; los caminos aportan una media ponderada de sus longitudes. Por tanto algún camino cuesta como mucho lo que costaba el flujo completo. Se puede elegir un camino óptimo sin imponer variables binarias: la relajación conserva el valor mínimo, aunque tenga otras soluciones óptimas.

Proposición (la matriz de incidencia es totalmente unimodular)**.** La matriz de incidencia nodo-arco de un grafo dirigido es totalmente unimodular.

Sus entradas están en $\{0, 1, -1\}$ por construcción. Cada columna corresponde a un arco (i, j) y tiene exactamente dos elementos no nulos, un $+1$ en la fila i y un -1 en la fila j, cuya suma es cero. Aplicando el criterio de la suma nula, la matriz es TU.

Observación (la consecuencia, y el contraste con los grafos no dirigidos)**.** La unimodularidad total asegura que se puede elegir una solución óptima básica entera para la relajación. Al quitar los ciclos, un flujo entero de valor uno queda reducido a un camino, con componentes 0 o 1. Se puede así resolver el relajado con el simplex y recuperar una ruta óptima. Vale la pena subrayar el contraste con el ejercicio de las tres matrices de más arriba: si el grafo no está dirigido, su matriz de incidencia tiene dos unos *del mismo signo* por columna, y entonces es TU si y solo si el grafo es **bipartito**, es decir, si no tiene ciclos de longitud impar. Orientar los arcos convierte los dos unos en un $+1$ y un -1, y el problema desaparece.

En un grafo no bipartito, las restricciones de incidencia no bastan para describir el poliedro de emparejamientos. Eso exige otros argumentos y algoritmos, pero no significa que el emparejamiento deje de ser resoluble en tiempo polinómico: lo es mediante el algoritmo de Edmonds.[2]

CONEXIÓN CON EL CAPÍTULO DE DUALIDAD: EL CAMINO MÁS CORTO Y SUS POTENCIALES

El dual del problema del camino más corto tiene una lectura preciosa. Asignando una variable dual libre π_i a cada nodo, con signo opuesto al multiplicador del balance «salidas menos entradas», el dual de la relajación es

$$\text{Max } \pi_n - \pi_1 \qquad \text{sujeto a: } \pi_j - \pi_i \leq d_{ij} \text{ para todo arco } (i, j),$$

[2] J. Edmonds, «Paths, Trees, and Flowers», *Canadian Journal of Mathematics* 17 (1965), pp. 449–467, doi:10.4153/CJM-1965-045-4.

es decir: se busca asignar a cada nodo un *potencial* de modo que la diferencia de potencial entre dos nodos unidos por un arco nunca supere la longitud de ese arco, maximizando la diferencia entre el destino y el origen. Por dualidad fuerte, ese máximo es exactamente la longitud del camino más corto. Para un camino óptimo y unos potenciales duales óptimos, las holguras complementarias dicen que todo arco usado cumple la desigualdad con igualdad: es un arco *tenso*. El recíproco no vale: un arco tenso puede quedar sin usar. Es la misma imagen de los precios sombra del capítulo 4, con la distancia haciendo de precio.

Qué se ha ganado. La pregunta de la empresa de reparto tiene respuesta: sí, lo que garantiza de antemano la respuesta entera está en la forma de las restricciones. Si la matriz es totalmente unimodular y los datos son enteros, todos los vértices son enteros, y el simplex, que solo visita vértices, devuelve una respuesta entera sin que se le pida. La propiedad se reconoce con el criterio de los dos no nulos o con los cambios de signo que llevan a una incidencia de grafo dirigido. Se cumple en el transporte, en la asignación y en el camino más corto, y pasa al dual. Queda abierto el caso general. Basta un $-M$ de una ligadura, o los coeficientes 7 y 4 del ejemplo del redondeo, para perderla, y entonces la integridad no sale gratis: hacen falta los dos algoritmos que siguen.

5.3 Esquemas de ramificación y acotación

LA PREGUNTA

Un investigador tiene que buscar una aguja en un pajar de mil millones de briznas y no puede mirarlas una a una. Lo que sí puede hacer, con poco esfuerzo, es partir el pajar en dos mitades y *medir* rápidamente, sin abrirlas, una cota de lo buena que puede ser la mejor brizna de cada mitad. ¿Basta con eso para no tener que mirar casi ninguna? ¿Y cómo se sabe cuándo se puede tirar una mitad entera sin abrirla?

El punto de partida del método es una observación que no tiene nada de profunda. Si $z = \text{Min}\{c^T x : \ x \in X\}$ y el conjunto X se parte en trozos disjuntos $X = X_1 \cup \cdots \cup X_k$, y se llama $z_i = \text{Min}\{c^T x : \ x \in X_i\}$, entonces

$$z = \min_{i=1,\ldots,k} z_i.$$

Es decir: el mejor de todos es el mejor de los mejores de cada trozo. Sobre esa igualdad se construyen los *esquemas de ramificación y acotación*, que resuelven problemas lineales enteros, puros o mixtos.

LA IDEA: EL PAJAR SE PARTE Y SE PESA, NO SE MIRA

Toda la potencia del método está en combinar dos operaciones que por separado no valdrían nada.
Partir es fácil pero no ahorra nada: si el óptimo continuo dice $x_1 = 3{,}75$ y x_1 tiene que ser entera, ningún punto entero cumple $3 < x_1 < 4$; se puede exigir $x_1 \leq 3$ en un trozo y $x_1 \geq 4$ en el otro, y **no se pierde ninguna solución entera**, solo la franja prohibida. Partiendo y volviendo a partir se acaba enumerando, que es lo que se quería evitar.
Pesar es lo que ahorra. Cada trozo del pajar es un problema lineal entero, y su relajación

continua proporciona una **cota**: nada de lo que hay dentro puede ser mejor que ese número. Si además se guarda la mejor solución entera encontrada hasta ahora, se tiene un valor concreto que ya se ha conseguido. Y entonces la regla que hace funcionar el método se escribe sola:

> *si la promesa de un trozo es peor que lo que ya se tiene en la mano, ese trozo se tira entero sin abrirlo.*

Eso es la acotación, y es la respuesta a la pregunta. En un problema de mínimo se manejan dos números: una **cota superior** z_{UB}, que es el valor de la mejor solución entera ya encontrada — el óptimo no puede ser peor que ella —, y una **cota inferior global** z_{LB}, que debe cubrir todas las ramas aún abiertas. El valor relajado de un nodo solo acota su propia rama. Si todos los nodos abiertos ya tienen su cota z_i^*, una cota global es el mínimo entre ellas y z_{UB}. Cuando esta cota global alcanza una cota superior finita, queda certificada la optimalidad.

5.3.1 Las dos operaciones

Definición (ramificación)**.** Sea X el conjunto factible del problema relajado y supóngase que en su solución óptima la variable x_i, que debería ser entera, toma un valor $x_i^* \notin \mathbb{Z}$. Se parte el problema en dos subproblemas (P_1) y (P_2) con conjuntos factibles

$$X_1 = X \cap \{x : \ x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor\}, \qquad X_2 = X \cap \{x : \ x_i \geq \lfloor x_i^* \rfloor + 1\},$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota la parte entera.

Observación (la partición no pierde nada entero)**.** Los dos trozos no cubren todo X: falta la franja $\{x \in X : \ \lfloor x_i^* \rfloor < x_i < \lfloor x_i^* \rfloor + 1\}$, es decir,

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \{x \in X : \ x_i \in (\lfloor x_i^* \rfloor, \lfloor x_i^* \rfloor + 1)\}.$$

Pero esa franja es un intervalo abierto de longitud uno entre dos enteros consecutivos, y por tanto **no contiene ningún punto con x_i entera**. Lo que se ha quitado es exactamente lo que no interesaba, incluido el propio x^* del relajado. Además $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, así que los puntos que cumplen las condiciones de integridad quedan repartidos sin pérdida entre ambas ramas. La igualdad $z = \min\{z_1, z_2\}$ se aplica a sus *óptimos enteros*, no a los valores de las relajaciones.

Definición (acotación)**. Acotar** consiste en operar de manera que no sea necesario sondear explícitamente todas las ramificaciones. No hace falta seguir ramificando un subproblema cuando ocurre alguna de estas dos cosas:

(a) **el subproblema es infactible**: todos los que surjan de ramificarlo lo serán también, porque cada uno tiene menos puntos que él;
(b) **el valor óptimo de su relajación no es mejor** que el de una solución entera ya encontrada: ninguna solución entera de esa rama puede ser mejor que su propia relajación, luego ninguna mejorará lo que ya se tiene.

Algoritmo de ramificación y acotación (*branch and bound*). Este esquema se enuncia para un problema entero puro de **minimizar** cuya región relajada es acotada. Cada

nodo guarda la solución y el valor de su *relajación*.

Paso 1. Resolver la relajación original. Si es infactible, el problema entero también lo es y se termina. En otro caso, guardar $(x^0)^*, z_0^*$ en el nodo raíz y abrir la lista $\mathcal{A} = \{n_0\}$. Tomar $z_{UB} = +\infty$: aún no hay solución entera guardada.

Paso 2. Elegir un nodo $n_i \in \mathcal{A}$ y retirarlo de la lista.

- Si $z_i^* \geq z_{UB}$, podarlo: no puede mejorar la solución guardada.
- En otro caso, si $(x^i)^* \in \mathbb{Z}^n$, guardarla como mejor solución entera y actualizar $z_{UB} = z_i^*$. Ese nodo queda cerrado.
- Si $(x^i)^*$ no es entero, elegir una componente fraccionaria x_j^* y crear dos hijos, añadiendo respectivamente $x_j \leq \lfloor x_j^* \rfloor$ y $x_j \geq \lfloor x_j^* \rfloor + 1$. Resolver sus relajaciones; descartar las infactibles y añadir los demás hijos a $\mathcal{A}$ con sus soluciones y valores.

Paso 3. Si $\mathcal{A}$ está vacía, terminar: la solución guardada es óptima; si no se llegó a guardar ninguna, el problema entero es infactible. Si quedan nodos, calcular

$$z_{LB} = \text{mín}\big(\{z_{UB}\} \cup \{z_i^* : n_i \in \mathcal{A}\}\big).$$

Si z_{UB} es finito y $z_{LB} = z_{UB}$, la solución guardada es óptima y se termina. En otro caso, volver al paso 2. La igualdad con la cota de *una sola rama* no basta.

Observación (terminación, y los dos casos que hay que reajustar)**.** El algoritmo termina en un número finito de pasos: cada ramificación añade una cota entera a una variable, y en un problema acotado eso solo puede hacerse un número finito de veces antes de que el intervalo de esa variable se agote. Si se cierra el árbol sin encontrar ninguna solución entera, el problema entero es infactible. En otro caso, el mejor punto entero guardado es óptimo; puede haber otros con el mismo valor. La poda por igualdad busca un óptimo, sin necesidad de enumerarlos todos.

El esquema se ha escrito para un entero puro de minimizar. Para un problema de **maximizar** se intercambian los papeles de las dos cotas: z_{UB} pasa a ser la cota de la relajación y z_{LB} el valor de la mejor solución entera. Y para un problema **entero mixto**, la única diferencia es que solo se ramifica sobre las variables que deben ser enteras: que una variable continua salga fraccionaria no es un problema. Para el argumento de terminación basta acotar los rangos de las variables enteras, suponiendo que cada relajación factible tiene óptimo finito.

Observación (cómo se aprovecha la tabla del nodo padre)**.** Cada hijo añade una restricción que la solución óptima del padre incumple. Al incorporarla con una holgura básica, se conservan los costes reducidos y se pierde la factibilidad. Es la situación del paso 0 del simplex dual (sección 4.3): se puede reanudar desde esa tabla para recuperar la factibilidad o certificar que la rama es infactible. Esto permite aprovechar el trabajo del padre; el número de pivotajes necesarios depende del nodo y no está limitado a uno o dos.

5.3.2 Un árbol completo

Ejemplo. Resúelvase por ramificación y acotación el problema entero puro

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -8x_1 - 5x_2 \\ \text{sujeto a:} & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ enteras.} \end{array}$$

Nodo raíz. La relajación se resuelve con el simplex. Su región factible tiene vértices $(0,0)$, $(5,0)$, $\left(\frac{15}{4}, \frac{9}{4}\right)$ y $(0,6)$; el corte de las dos rectas se obtiene de $x_1 + x_2 = 6$ y $9x_1 + 5x_2 = 45$, que dan $4x_1 = 15$. El óptimo es

$$x^* = \left(\tfrac{15}{4},\ \tfrac{9}{4}\right), \qquad z^* = -\tfrac{165}{4} = -41{,}25,$$

que no es entero. Se toma $z_{LB} = -\frac{165}{4}$ y $z_{UB} = +\infty$, y se ramifica sobre x_1, cuya parte entera es 3:

$$(P_1):\ x_1 \leq 3, \qquad (P_2):\ x_1 \geq 4.$$

Nodo P_1 ($x_1 \leq 3$). Con $x_1 = 3$, la primera restricción da $x_2 \leq 3$ y la segunda $5x_2 \leq 18$, es decir, $x_2 \leq 3{,}6$; manda la primera. El óptimo es $(3,3)$ con $z_1^* = -24 - 15 = -39$. **Es entero**: nodo terminal, y se actualiza $z_{UB} = -39$. Para certificar que es óptimo en esta rama, obsérvese que $8x_1 + 5x_2 = 5(x_1 + x_2) + 3x_1 \leq 30 + 9 = 39$. Los multiplicadores 5 y 3 no salen de la nada: se eligen para que una combinación no negativa de las dos restricciones activas, $x_1 + x_2 \leq 6$ y $x_1 \leq 3$, reproduzca los coeficientes del objetivo, y entonces la misma combinación de los segundos miembros acota su valor. Es el certificado de la dualidad del capítulo 4, y esos dos números son los costos reducidos de las holguras s_1 y s_3 en la tabla de este nodo, que se calcula más abajo sin dibujo.

Nodo P_2 ($x_1 \geq 4$). Con $x_1 = 4$, la primera da $x_2 \leq 2$ y la segunda $5x_2 \leq 9$, es decir, $x_2 \leq \frac{9}{5}$; manda la segunda. El óptimo es $\left(4, \frac{9}{5}\right)$ con $z_2^* = -32 - 9 = -41$: $8x_1 + 5x_2 = (9x_1 + 5x_2) - x_1 \leq 45 - 4 = 41$. No es entero, y además $-41 < -39 = z_{UB}$: la rama promete mejorar, luego **no se puede podar por la cota** y hay que seguir. Se ramifica sobre x_2, con $\lfloor 9/5 \rfloor = 1$:

$$(P_3):\ x_2 \leq 1, \qquad (P_4):\ x_2 \geq 2.$$

Nodo P_3 ($x_1 \geq 4$, $x_2 \leq 1$). Con $x_2 = 1$, la segunda restricción da $9x_1 \leq 40$, o sea $x_1 \leq \frac{40}{9}$, y la primera da $x_1 \leq 5$; manda la segunda. El óptimo es $\left(\frac{40}{9}, 1\right)$ con $z_3^* = -\frac{320}{9} - 5 = -\frac{365}{9} \approx -40{,}56$. La cota $8x_1 + 5x_2 = \frac{8}{9}(9x_1 + 5x_2) + \frac{5}{9}x_2 \leq 40 + \frac{5}{9}$ certifica este óptimo. Se ha perdido la integridad de x_1, y como $-\frac{365}{9} < -39$, hay que seguir ramificando. Se ramifica sobre x_1, con $\lfloor 40/9 \rfloor = 4$:

$$(P_5):\ x_1 \leq 4, \qquad (P_6):\ x_1 \geq 5.$$

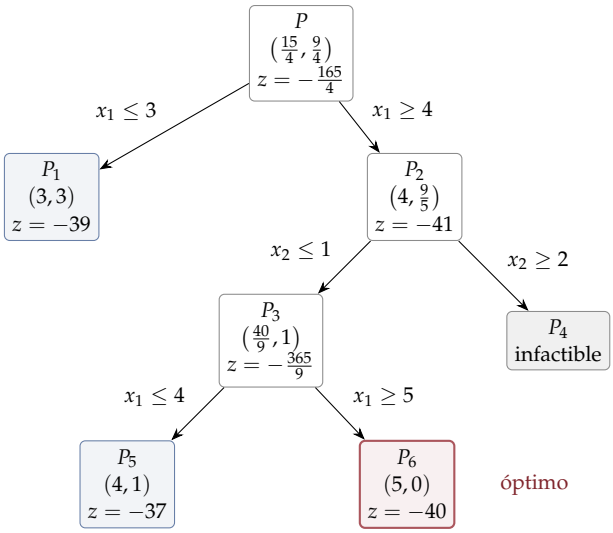
Nodo P_5 ($4 \leq x_1 \leq 4$, $x_2 \leq 1$). Queda $x_1 = 4$ y $x_2 \leq 1$, luego $(4,1)$ con $z_5^* = -32 - 5 = -37$. **Entero**: nodo terminal. Pero $-37 > -39$: no mejora la mejor solución que ya se tenía, así que z_{UB} no cambia.

Nodo P_6 ($x_1 \geq 5$, $x_2 \leq 1$). La segunda restricción da $9x_1 \leq 45 - 5x_2$; con $x_1 \geq 5$ hace falta $45 \leq 45 - 5x_2$, luego $x_2 = 0$ y $x_1 = 5$. El óptimo es $(5,0)$ con $z_6^* = -40$. **Entero** y mejor que -39: nodo terminal y se actualiza $z_{UB} = -40$.

Nodo P_4 ($x_1 \geq 4$, $x_2 \geq 2$). Es **infactible**: de $x_1 \geq 4$ y $x_2 \geq 2$ se sigue $9x_1 + 5x_2 \geq 36 + 10 = 46 > 45$. Rama cerrada.

Con eso el árbol está completo: todos los nodos son terminales, por solución entera o por infactibilidad. El mejor valor entero encontrado es

$$x^* = (5, 0), \qquad z^* = z_{UB} = -40.$$



Observación (cómo se lee el árbol, y qué nodo se explora primero)**.** Merece la pena rehacer el recorrido con las dos cotas delante, porque es donde está la inteligencia del método.

Tras cerrar P_1 se tiene $z_{UB} = -39$: existe una solución entera que vale -39. La rama de P_2 promete -41, que es mejor, así que hay que abrirla. Dentro de ella, P_3 promete $-\frac{365}{9} \approx -40{,}56$, que sigue siendo mejor que -39: se abre. Sus dos hijos dan -37 y -40, y el segundo mejora, luego z_{UB} baja a -40. Y *entonces* se vuelve a subir en el árbol para sondear P_4, que resultó infactible.

Obsérvese la política de exploración: se han visitado primero los descendientes de P_3 y después se ha vuelto a P_4. Es una búsqueda *en profundidad*. Otra posibilidad es escoger siempre el nodo abierto con mejor cota. Encontrar pronto una solución entera buena reduce z_{UB} y puede permitir más podas, pero ningún orden lo garantiza para todos los problemas. En este ejemplo, con las ramificaciones indicadas, cambiar el orden no añade nodos: las mismas hojas son enteras o infactibles.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: RAMIFICAR PARTIENDO POR LA MITAD, O POR UN CONJUNTO DE VARIABLES

La ramificación que se ha descrito parte el problema según el valor de *una* variable fraccionaria, y no es la única posible. Se podría partir según un conjunto de variables a la vez, exigiendo por ejemplo $\sum_{j \in S} x_j \leq k$ en una rama y $\geq k + 1$ en la otra, con $k \in \mathbb{Z}$ y todas las variables de S enteras. Una elección adecuada puede producir árboles más equilibrados en problemas con estructura combinatoria; eso se llama ramificar por restricciones y se usa de hecho en los resolvedores modernos. La ventaja de la versión simple es que la restricción añadida es una cota sobre una variable, y una cota sobre una variable no aumenta el tamaño de la tabla: se puede tratar como una modificación del rango de esa variable en lugar de como una fila nueva. Lo que hunde la versión general en un curso introductorio es que elegir bien el conjunto S es un arte, y elegirlo mal produce árboles peores que el simple.

Un nodo con la tabla, sin dibujo. En el ejemplo, cada nodo se ha resuelto mirando el plano. Con más de dos variables no hay plano que mirar, y cada hijo se resuelve desde la tabla final

del padre con el simplex dual, como anunciaba la observación sobre la tabla del nodo padre. Con holguras s_1 y s_2, la tabla óptima del nodo raíz es

	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_1	1	0	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{4}$
x_2	0	1	$\frac{9}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$
$c_j - z_j$	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{165}{4}$

El hijo P_1, con $x_1 \leq 3$. Se escribe $x_1 + s_3 = 3$ con una holgura nueva $s_3 \geq 0$. Así no sirve como fila de la tabla, porque tiene un 1 en la columna de x_1, que es básica. Se le resta la fila de x_1, y queda en las no básicas:

$$s_3 + \tfrac{5}{4}s_1 - \tfrac{1}{4}s_2 = 3 - \tfrac{15}{4} = -\tfrac{3}{4}.$$

El término independiente es negativo: el padre incumple la cota nueva, como tenía que ser. Sale s_3. La única entrada negativa de su fila es la de s_2, y entra s_2, con valor $\frac{3/4}{1/4} = 3$. El objetivo sube lo que cuesta esa entrada, el costo reducido por el valor: $-\frac{165}{4} + \frac{3}{4} \cdot 3 = -39$. Las básicas se mueven según su columna de s_2: $x_1 = \frac{15}{4} - \frac{1}{4} \cdot 3 = 3$ y $x_2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} \cdot 3 = 3$. Los costos reducidos nuevos, 5 para s_1 y 3 para s_3, son no negativos, así que la tabla es óptima con $(3, 3)$ y $z_1^* = -39$, lo mismo que en el plano y con un solo pivotaje.

El hijo P_2, con $x_1 \geq 4$. Ahora $x_1 - s_4 = 4$, con $s_4 \geq 0$ de exceso, y restando la fila de x_1 para quitar la básica, y cambiando el signo para que s_4 quede con coeficiente 1, resulta $s_4 - \frac{5}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 = -\frac{1}{4}$. Sale s_4; la única entrada negativa es la de s_1, que entra con valor $\frac{1/4}{5/4} = \frac{1}{5}$. El objetivo pasa a $-\frac{165}{4} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{5} = -41$, y las básicas a $x_1 = \frac{15}{4} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{5} = 4$ y $x_2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$: el punto $\left(4, \frac{9}{5}\right)$ del ejemplo. Los nietos se resuelven igual, cada uno desde la tabla de su padre.

Dos ahorros: empezar con una buena solución y redondear la cota. El árbol del ejemplo tiene siete nodos, y con dos observaciones se queda en cinco.

Primera: el simplex ya pasó por una solución entera. Desde el origen, el primer pivotaje hace entrar x_1, de costo reducido -8, y los cocientes 6 y $\frac{45}{9} = 5$ lo detienen en $x_1 = 5$: tras el primer pivotaje, el simplex está en el vértice $(5, 0)$, que es entero y vale -40. Si se guarda, el árbol empieza con $z_{UB} = -40$ en vez de $+\infty$.

Segunda: con costes enteros, la cota se redondea. Si todos los costes son enteros y todas las variables son enteras, el valor de cualquier solución entera es un número entero. Un nodo cuya relajación promete z_i^* solo contiene soluciones enteras de valor $\geq \lceil z_i^* \rceil$, y se puede podar en cuanto $\lceil z_i^* \rceil \geq z_{UB}$. En un problema de máximo, lo mismo con $\lfloor z_i^* \rfloor$.

Con las dos, el recorrido es este. La raíz promete $\lceil -41{,}25 \rceil = -41 < -40$, y se ramifica. P_1 promete $-39 \geq -40$ y se poda sin mirar si es entera. P_2 promete $-41 < -40$, y se ramifica. P_3 promete $\lceil -\frac{365}{9} \rceil = \lceil -40{,}56 \rceil = -40$, que no mejora -40, y se poda. P_4 es infactible. Quedan cinco relajaciones resueltas en vez de siete, y el óptimo es el mismo, $(5, 0)$ con $z^* = -40$. Cada ahorro por separado no basta: sin la solución de partida, P_3 se compara con -39 y hay que abrirlo; sin el redondeo, $-40{,}56 < -40$ y también. El problema de la sección E.6 es este mismo con los papeles de x_1 y x_2 intercambiados y en forma de máximo, y se cierra con los mismos dos ahorros.

Dónde se falla.

- *Las cotas al revés en un problema de máximo.* La relajación da la cota *superior*, la mejor solución entera la inferior, y se poda un nodo cuando su promesa no supera a la mejor entera.
- *Parar en la primera solución entera.* P_1 da $(3, 3)$, entero, y no es el óptimo.

- *Tratar la cota de un nodo como si fuera la de todo el árbol.* Solo acota su rama; la cota global es el mínimo sobre los nodos abiertos.
- *Pegar la fila de la cota sin quitar la básica.* La fila $x_1 + s_3 = 3$ tal cual rompe la forma de la tabla; hay que restarle la fila de x_1. Con $x_1 \geq 4$, el exceso entra con signo menos, y un signo cambiado da un término independiente positivo y ningún pivotaje.
- *Redondear sin permiso.* El redondeo exige costes enteros en todas las variables y que todas ellas sean enteras. Si una variable continua tiene coste no nulo, o algún coste vale $\frac{1}{2}$, la cota no se redondea.
- *Ramificar sobre la variable equivocada:* una continua de un problema mixto, o una que ya es entera.

Qué se ha ganado. La pregunta del pajar tiene respuesta: basta partir y pesar, y una mitad se tira sin abrirla cuando su promesa no mejora lo que ya se tiene en la mano. Cuántas mitades se tiran depende de dos cosas que ya han salido: la calidad de las promesas, que es cuestión de formulación, como se vio al final de la sección 5.1, y tener pronto una buena solución entera. Queda abierta una tercera vía, que es mejorar las promesas directamente recortando el poliedro sin partirlo. Es la sección siguiente.

5.4 Métodos de hiperplanos de corte

LA PREGUNTA

El problema continuo tiene la respuesta equivocada porque su región factible es demasiado grande: incluye puntos con coordenadas fraccionarias que no significan nada. La idea más natural del mundo sería recortar esa región hasta que sus esquinas cayeran exactamente sobre los puntos de coordenadas enteras, y entonces resolver el problema continuo de siempre. ¿Se puede recortar un poliedro de manera *garantizada*, sin dejar fuera por accidente ninguna solución entera, y con recortes que se calculen a partir de lo que ya se tiene en la tabla?

La respuesta es que sí, y el mecanismo se llama *hiperplano de corte*. Se parte de resolver el problema relajado y recortar su región factible hasta obtener un óptimo que cumpla las condiciones de integridad. No hace falta que todos los vértices lleguen a ser enteros. Los cambios deben hacerse de modo que los conjuntos factibles derivados sigan siendo poliedros convexos, y por eso lo que se añade son restricciones lineales: condiciones necesarias de integridad para las variables que deben serlo.

Un hiperplano de corte tiene que cumplir tres cosas, y conviene tenerlas presentes porque son la definición de trabajo:

1. **Deja fuera la solución óptima del problema relajado.** Si no la dejara fuera, no serviría de nada: la tabla seguiría siendo óptima y factible y no pasaría nada. Y como la deja fuera, la tabla pierde la factibilidad y hay que aplicar el **simplex dual**.
2. **Todas las soluciones factibles enteras del problema original siguen estando** en el nuevo conjunto factible. Esta es la condición que hace que el método sea correcto y no un atajo: si un corte eliminara un punto entero, podría eliminar precisamente el óptimo.
3. **Se mantiene la convexidad** del conjunto factible, lo que está garantizado porque añadir una desigualdad lineal es intersecar con un semiespacio.

Las dos primeras condiciones son la definición, y la tercera viene gratis por ser lineal:

Definición (corte)**.** Sea X el conjunto de soluciones factibles de un problema entero, puro o mixto, y sea x^* el óptimo de su relajación actual. Una desigualdad lineal $\pi^T x \geq \pi_0$ es un **corte** si

(i) la cumplen todos los puntos de X: es *válida*, no pierde ninguna solución del problema entero;

(ii) la incumple x^*: $\pi^T x^* < \pi_0$, es decir, *separa* el óptimo actual.

La validez es lo que hay que demostrar en cada familia de cortes; la separación es lo que la hace útil. Una desigualdad válida que no separa puede estrechar la relajación, pero no cambia la tabla: la solución actual la sigue cumpliendo.

LA IDEA: TALLAR EL POLIEDRO HASTA QUE LAS ESQUINAS CAIGAN EN LA RETÍCULA

La imagen es la de un escultor. El poliedro continuo es un bloque de piedra que contiene, en su interior, la figura que interesa: la envolvente convexa de los puntos enteros factibles. Esa figura también es un poliedro cuando los datos son racionales, como en los problemas de este apartado, y tiene la propiedad milagrosa de que *todos sus vértices son enteros*, porque son puntos enteros por construcción. Si se pudiera describir con desigualdades, el problema entero se resolvería con el simplex de siempre.
El problema es que describirla exige, en general, un número astronómico de desigualdades. Lo que hace el método de cortes es no describirla entera: **tallar solo por donde molesta**. Se mira dónde está el óptimo continuo, se comprueba que está fuera de la figura y se da un golpe de cincel que lo elimine sin tocar la figura. Se vuelve a resolver, sale otro óptimo continuo, y se repite. Cada golpe acerca el bloque a la figura por el sitio que importa, que es la esquina donde se apoya el objetivo.

La intuición falsa que conviene desmontar. Uno tiende a imaginar el corte como una recta trazada «a ojo» entre el óptimo fraccionario y los puntos enteros, y a temer que en dimensión alta eso sea imposible de hacer bien. Pero el corte de Gomory no se traza a ojo ni requiere saber dónde están los puntos enteros: **se lee directamente en una fila de la tabla del simplex**, tomando partes fraccionarias. Es puramente aritmético, y por eso funciona en cualquier dimensión.

5.4.1 Corte todo entero de Gomory (f-corte)

El f-corte requiere que **todas las variables de la tabla deban ser enteras**, incluidas las holguras. Para un problema puro escrito con desigualdades basta que sus coeficientes *y términos independientes* sean enteros: entonces las holguras son combinaciones enteras de datos y variables enteras. Si los datos son racionales, se pueden multiplicar las filas por denominadores comunes positivos antes de introducir las holguras. Sin esa preparación, imponer integridad a una holgura que puede ser fraccionaria eliminaría soluciones válidas. La demostración no exige que los coeficientes de la *tabla transformada* sean enteros; de hecho, utiliza sus partes fraccionarias.

El caso más simple: una variable. Sea Min $-x$ con $2x \leq 3$ y $x \in \mathbb{Z}_+$. Con holgura s, que es entera porque $s = 3 - 2x$ con datos enteros, la relajación da $x = \frac{3}{2}$, y su fila en la tabla óptima,

con s no básica, es

$$x + \tfrac{1}{2}s = \tfrac{3}{2}.$$

Se separa lo entero de lo fraccionario, $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2}$, y se reordena: $x - 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s$. El lado izquierdo es entero para cualquier solución entera; el derecho es como mucho $\frac{1}{2}$, y por tanto menor que 1. Un entero menor que 1 es como mucho 0:

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}s \le 0 \iff s \ge 1 \iff 3 - 2x \ge 1 \iff x \le 1.$$

El corte es $x \le 1 = \lfloor \frac{3}{2} \rfloor$: en dimensión uno, cortar es redondear hacia abajo la cota de la variable. Deja fuera el $\frac{3}{2}$ del relajado y dentro todos los enteros factibles, que son 0 y 1. En dimensión mayor, el corte de Gomory hace lo mismo con la combinación de restricciones que dicta una fila de la tabla, y eso es lo que formaliza lo que sigue.

Sea el problema en forma estándar, con conjunto factible $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \ge 0\}$, y sea x^* la solución óptima del relajado, con base óptima B. Supóngase que la variable básica x_i toma el valor $\bar{b}_i$, que **no es entero**. Para todo punto factible $x = (x_B, x_N)$ se tiene

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \qquad \Longrightarrow \qquad x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in NB} y_{ij}x_j, \qquad y_{ij} = (B^{-1}a_j)_i.$$

Descompónganse el término independiente y los coeficientes en parte entera y parte fraccionaria:

$$\bar{b}_i = \lfloor \bar{b}_i \rfloor + f_i, \qquad 0 < f_i < 1, \qquad y_{ij} = \lfloor y_{ij} \rfloor + f_{ij}, \qquad 0 \le f_{ij} < 1.$$

Teorema (validez del corte fraccional de Gomory)**.** Con la notación anterior, la desigualdad

$$f_i - \sum_{j \in NB} f_{ij}x_j \le 0 \qquad \text{equivalentemente} \qquad \sum_{j \in NB} f_{ij}x_j \ge f_i$$

la cumple toda solución entera factible del problema. Su validez utiliza que x_i y las variables no básicas x_j sean enteras; no basta imponer integridad solo a x_i. La restricción que se añade a la tabla, con variable de holgura h_i entera y no negativa, es

$$\boxed{h_i - \sum_{j \in NB} f_{ij}x_j = -f_i} \qquad \text{(corte fraccional o } f\text{-corte).}$$

• CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: UN NÚMERO ENTERO QUE ES MENOR QUE UNO TIENE QUE SER MENOR O IGUAL QUE CERO

Toda la demostración cabe en esa frase, y conviene verla venir.
La fila i de la tabla, reordenada, dice que cierta combinación de variables enteras con coeficientes enteros es igual a $f_i - \sum f_{ij}x_j$. Si todas las variables son enteras, el lado izquierdo es un número entero, luego el derecho también. Pero el derecho tiene una cota superior gratis: $f_i < 1$ y todo lo que se le resta es no negativo, luego es *estrictamente menor que uno*. Y un entero menor que uno es, como mucho, cero. Ahí está el corte.
Lo llamativo es que esa desigualdad **la incumple la solución actual**: en la tabla óptima todas las variables no básicas valen cero, luego $\sum f_{ij}x_j = 0$ y la condición pediría $0 \ge f_i > 0$, que es falso. Es decir, el corte hace exactamente lo que se le pide: deja fuera el óptimo fraccionario y deja dentro todos los puntos enteros.

Paso 1: separar las partes enteras. Sustituyendo las descomposiciones en la ecuación de la fila,

$$x_i = \lfloor \bar{b}_i \rfloor + f_i - \sum_{j \in NB} \big(\lfloor y_{ij} \rfloor + f_{ij} \big) x_j,$$

y pasando al miembro izquierdo todo lo que es entero por naturaleza,

$$\underbrace{x_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor + \sum_{j \in NB} \lfloor y_{ij} \rfloor \, x_j}_{(\star)} \;=\; f_i - \sum_{j \in NB} f_{ij} x_j.$$

Paso 2: el lado izquierdo es entero (el núcleo). En $(\star)$ todas las cantidades son enteras si el punto es una solución entera del problema: x_i y las x_j lo son por hipótesis, y $\lfloor \bar{b}_i \rfloor$ y los $\lfloor y_{ij} \rfloor$ lo son por ser partes enteras. Un número entero más una combinación entera de enteros es entero. Luego el miembro derecho, $f_i - \sum f_{ij} x_j$, **también es un número entero**.
Paso 3: acotarlo por arriba. Como $0 < f_i < 1$, y como $f_{ij} \geq 0$ y $x_j \geq 0$ para todo j, se tiene

$$f_i - \sum_{j \in NB} f_{ij} x_j \;\leq\; f_i \;<\; 1.$$

Paso 4: rematar. Un número entero estrictamente menor que 1 es menor o igual que 0. Por tanto

$$f_i - \sum_{j \in NB} f_{ij} x_j \leq 0,$$

que es la desigualdad del enunciado, y la cumple toda solución entera factible.
Paso 5: la holgura también es entera. Escribiendo la desigualdad como igualdad con holgura, $h_i = \sum_j f_{ij} x_j - f_i$, se ve que $h_i = -\big(f_i - \sum f_{ij} x_j\big)$, que por el paso 2 es un número entero, y por el paso 4 es no negativo. Eso justifica que se pueda seguir aplicando el método con la nueva variable como una variable entera más. La ecuación prueba su integridad aunque los coeficientes del corte sean fraccionarios. Lo que haría fallar el paso 2 sería tratar como entera una variable de la tabla que no tiene por qué serlo, por ejemplo una holgura original introducida sin comprobarlo.
Qué hace el corte con la solución actual. En la tabla óptima, $x_j = 0$ para todo $j \in NB$, luego la nueva fila da $h_i = -f_i < 0$: la solución básica actual deja de ser factible, que es justamente lo que se buscaba. Se resuelve con el simplex dual. Si se obtiene solución entera, se para; si no, se introduce otro corte. Y si en alguna iteración el simplex dual declara dual ilimitado, entonces **no existe solución factible entera**.
Para reconstruirla. Se pasa a la izquierda todo lo entero de la fila; el lado derecho, $f_i - \sum f_{ij} x_j$, resulta ser entero y estrictamente menor que uno; luego es ≤ 0.

Ejemplo. Resúelvase con cortes de Gomory

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 2x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a:} & 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+. \end{array}$$

Con holguras x_3 y x_4, la tabla óptima del relajado es

	2	1	0	0	
x_3	0	-3	1	-2	2
x_1	1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
$c_j - z_j$	0	-2	0	-1	5

(al ser un problema de máximo, la condición de optimalidad es $c_j - z_j \leq 0$). El óptimo continuo es $x^* = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$ con $z^* = 5$, y no es entero.

El corte. Se toma la fila de x_1, cuyo término independiente $\frac{5}{2}$ es fraccionario, con $f_i = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$. Las columnas no básicas son las de x_2 y x_4, con

$$y_{i2} = \tfrac{3}{2} = 1 + \tfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; f_{i2} = \tfrac{1}{2}, \qquad y_{i4} = \tfrac{1}{2} = 0 + \tfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; f_{i4} = \tfrac{1}{2}.$$

El corte es, por tanto,

$$h_1 - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_4 = -\tfrac{1}{2},$$

y se introduce en la tabla:

	2	1	0	0	0	
x_3	0	-3	1	-2	0	2
x_1	1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
h_1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
$c_j - z_j$	0	-2	0	-1	0	5

El pivotaje dual. Se ha perdido la factibilidad, con $\bar{b}_3 = -\frac{1}{2} < 0$: sale h_1. Su fila tiene entradas negativas en las columnas de x_2 y x_4, y como el problema es de máximo se toma el *mínimo* de los cocientes en valor absoluto:

$$\left|\frac{-2}{-1/2}\right| = 4, \qquad \left|\frac{-1}{-1/2}\right| = 2,$$

luego entra x_4. Pivotando sobre $-\frac{1}{2}$:

	2	1	0	0	0	
x_3	0	-1	1	0	-4	4
x_1	1	1	0	0	1	2
x_4	0	1	0	1	-2	1
$c_j - z_j$	0	-1	0	0	-2	4

El término independiente es no negativo y los costos reducidos son ≤ 0: óptima. La solución es

$$x^* = (2, 0), \qquad z^* = 4,$$

que es entera, de modo que un solo corte ha bastado. Se comprueba: $4 \cdot 2 = 8 \leq 12$, $2 \cdot 2 = 4 \leq 5$, y $2 \cdot 2 + 0 = 4$. La tabla óptima certifica que ningún punto que cumpla el corte puede mejorar ese valor; en particular, ningún punto entero factible.

Observación (qué recorta el corte, visto en el plano)**.** Conviene traducir el corte a las variables originales para ver qué ha hecho. De $x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2$ y de la fila de x_1 se obtiene, sustituyendo en $\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \geq \frac{1}{2}$:

$$x_2 + x_4 \geq 1 \iff x_2 + 5 - 2x_1 - 3x_2 \geq 1 \iff 2x_1 + 2x_2 \leq 4 \iff x_1 + x_2 \leq 2.$$

Esa es la desigualdad que se ha añadido, y en la figura 5.1 se ve que hace lo prometido: el óptimo continuo $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ la incumple, porque $\frac{5}{2} > 2$; y todos los puntos enteros factibles la cumplen: si fuera $x_1 + x_2 \geq 3$ con $x \geq 0$ entera, entonces $2x_1 + 3x_2 = 2(x_1 + x_2) + x_2 \geq 6 + x_2 \geq 6 > 5$, contra la segunda restricción. Un corte de Gomory es siempre una desigualdad válida de este tipo, deducida sin pensar en la geometría, solo con partes fraccionarias.

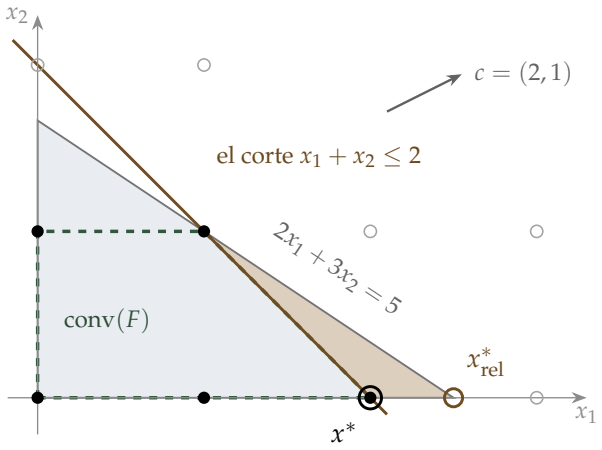


Figura 5.1: Qué recorta el corte, visto en el plano. La región gris clara más la ocre son el factible del relajado; los puntos negros son los cinco puntos enteros factibles, que forman el conjunto F, y los huecos, enteros que se quedan fuera. (La restricción $4x_1 + 3x_2 \leq 12$ no dibuja frontera: sobre esta región es redundante, y por eso no aparece.) El óptimo del relajado es $x^*_{\text{rel}} = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$, con $z = 5$, y no es entero. El corte $x_1 + x_2 \leq 2$ —que salió de la tabla tomando partes fraccionarias, sin mirar el dibujo— hace exactamente las dos cosas que se le pedían: **deja fuera** x^*_{rel}, arrancando del poliedro el triángulo ocre de vértices $(2,0)$, $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ y $(1,1)$, y **no toca ningún punto entero**, porque la parte eliminada cumple $x_1 + x_2 > 2$. Los puntos $(2,0)$ y $(1,1)$, que están sobre la recta del corte, permanecen incluidos. Lo que queda tiene ya por vértice óptimo el punto entero $x^* = (2,0)$, con $z = 4$: un solo corte ha bastado. Obsérvese además que la recta del corte contiene la arista de conv(F) que une $(2,0)$ con $(1,1)$; es decir, el cincel ha caído justo sobre la figura, que es lo más ajustado que un corte puede ser en esa dirección.

El f-corte, paso a paso. Sobre una tabla óptima del relajado, el mismo orden siempre:

1. *Comprobar que se puede.* Todas las variables de la tabla, holguras y excesos incluidos, tienen que ser enteras en toda solución entera. Con coeficientes y términos independientes enteros lo son; si no, se escalan las filas antes de poner las holguras.
2. *Elegir la fila.* La de una variable básica con término independiente fraccionario. Si no se indica cuál, una elección razonable, aunque no la única, es la de mayor f_i.
3. *Tomar partes fraccionarias por defecto.* $f(y) = y - \lfloor y \rfloor$, que está siempre en $[0,1)$. Para un positivo es lo que va detrás de la coma; para un negativo, no: $f\left(-\frac{5}{9}\right) = -\frac{5}{9} + 1 = \frac{4}{9}$ y $f\left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{7}{3} + 3 = \frac{2}{3}$. Las columnas con coeficiente entero, como 0 o -2, dan $f = 0$ y desaparecen del corte; las básicas no aparecen.
4. *Escribir la fila nueva,* $h_i - \sum_{j \in NB} f_{ij} x_j = -f_i$, con h_i básica. Su término independiente es negativo: la tabla deja de ser factible y sigue siendo óptima.
5. *Un paso del simplex dual.* Sale h_i, y entra la columna de menor cociente $|c_j - z_j| / |f_{ij}|$ entre las de entrada negativa en su fila. Se repite hasta recuperar la factibilidad.

6. *Comprobar.* El valor no mejora: en un máximo no sube y en un mínimo no baja. Y, traducido a las variables originales como en la observación anterior, el corte lo incumple el óptimo continuo y lo cumple algún punto entero factible que se tenga a mano.

Dónde se falla.

- *La parte fraccionaria de un negativo.* Es el error que más se repite, y el que hace el corte falso. Con Min x, $3x \geq 2$ y $x \in \mathbb{Z}_+$, el exceso $e = 3x - 2$ es entero y la tabla óptima tiene la fila $x - \frac{1}{3}e = \frac{2}{3}$. Con $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$, el corte es $\frac{2}{3}e \geq \frac{2}{3}$, es decir, $e \geq 1$, o sea, $x \geq 1$: correcto. Tomando $\frac{1}{3}$ se escribiría $\frac{1}{3}e \geq \frac{2}{3}$, es decir, $e \geq 2$, o sea, $x \geq \frac{4}{3}$, que deja fuera el óptimo entero $x = 1$.
- *Usar el f-corte con variables continuas.* Si alguna no básica de la fila no tiene por qué ser entera, el paso 2 de la demostración falla y el corte puede quitar soluciones válidas. Se usa el corte mixto de la subsección siguiente.
- *El signo de la fila nueva.* Si el término independiente no sale negativo, se ha escrito al revés: el corte tiene que dejar fuera la solución actual.
- *Cortar sobre una fila entera.* Con $f_i = 0$ el corte dice $0 \geq 0$.
- *Esperar que un corte baste.* A veces basta, y a veces no; los ejercicios de la sección 5.5 tienen de los dos casos.

5.4.2 Corte mixto de Gomory (m-corte)

El f-corte exige que *todas* las variables sean enteras, incluidas las holguras. El corte mixto levanta esa exigencia: solo pide que sea entera la variable x_i sobre la que se corta. Eso lo hace aplicable a problemas enteros mixtos, que son la mayoría de los que aparecen en la práctica.

Sea x^* la solución óptima del relajado y x_i una variable básica no entera que debería serlo. Para cualquier x factible,

$$x_i = \lfloor \bar{b}_i \rfloor + f_i - \sum_{j \in NB} y_{ij} x_j,$$

y se separan las columnas no básicas según el signo de su coeficiente:

$$J^+ = \{j \in NB : \ y_{ij} \geq 0\}, \qquad J^- = \{j \in NB : \ y_{ij} < 0\}.$$

Teorema (validez del corte mixto de Gomory)**.** Con la notación anterior, la desigualdad

$$\sum_{j \in J^+} y_{ij} x_j + \frac{f_i}{f_i - 1} \sum_{j \in J^-} y_{ij} x_j \ \geq \ f_i$$

es una condición necesaria para que x_i sea entera. La restricción que se añade, con holgura $h_i \geq 0$, es

$$\boxed{h_i - \sum_{j \in J^+} y_{ij} x_j - \frac{f_i}{f_i - 1} \sum_{j \in J^-} y_{ij} x_j = -f_i} \qquad \text{(corte mixto o } m\text{-corte).}$$

• CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: SOLO HAY DOS MANERAS DE QUE x_i SEA ENTERA, Y CADA UNA DA UNA DESIGUALDAD

La idea es una disyunción, y por eso el corte tiene dos bloques.
Llámese $k = x_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor$, que es un número entero si x_i lo es. La ecuación de la fila dice que $\sum_j y_{ij} x_j = f_i - k$. Ahora bien, k es entero, así que solo caben dos posibilidades:

- o bien $k \leq 0$, y entonces $f_i - k \geq f_i$: la suma $\sum_j y_{ij}x_j$ es **grande**, al menos f_i;
- o bien $k \geq 1$, y entonces $f_i - k \leq f_i - 1 < 0$: la suma es **muy negativa**, a lo sumo $f_i - 1$.

Cada una de las dos posibilidades produce una desigualdad, y lo que hace el corte es *escribir una sola desigualdad que se cumple en los dos casos*. Para eso mira quién puede ser responsable de cada situación: la suma solo puede ser grande gracias a los términos con $y_{ij} \geq 0$, y solo puede ser muy negativa gracias a los términos con $y_{ij} < 0$. De ahí la separación en J^+ y J^-, y de ahí el factor $\frac{f_i}{f_i - 1}$, que es exactamente lo que hay que multiplicar al segundo bloque para que la segunda desigualdad se convierta en la primera. El factor es negativo, porque $f_i > 0$ y $f_i - 1 < 0$; multiplicar por un número negativo es lo que da la vuelta a la desigualdad.

Paso 1: nombrar la parte entera. Sea x una solución factible con x_i entera, y póngase $k = x_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor \in \mathbb{Z}$. De la ecuación de la fila,

$$\sum_{j \in NB} y_{ij}x_j = f_i - k.$$

Paso 2: la disyunción (el núcleo de la prueba). Como k es entero, o bien $k \leq 0$ o bien $k \geq 1$. Se tratan los dos casos por separado.

Caso A: $k \leq 0$. Entonces $f_i - k \geq f_i$, luego $\sum_j y_{ij}x_j \geq f_i$. Como los términos de J^- son ≤ 0 (coeficiente negativo por variable no negativa), quitarlos solo puede aumentar la suma:

$$\sum_{j \in J^+} y_{ij}x_j \;\geq\; \sum_{j \in NB} y_{ij}x_j \;\geq\; f_i.$$

Y el segundo bloque del corte es no negativo, porque $\frac{f_i}{f_i - 1} < 0$ y $\sum_{J^-} y_{ij}x_j \leq 0$, de modo que su producto es ≥ 0. Sumando las dos cosas, la desigualdad del enunciado se cumple.

Caso B: $k \geq 1$. Entonces $f_i - k \leq f_i - 1 < 0$, luego $\sum_j y_{ij}x_j \leq f_i - 1$. Como los términos de J^+ son ≥ 0, quitarlos solo puede disminuir la suma:

$$\sum_{j \in J^-} y_{ij}x_j \;\leq\; \sum_{j \in NB} y_{ij}x_j \;\leq\; f_i - 1.$$

Multiplicando por $\frac{f_i}{f_i - 1}$, que es **negativo**, la desigualdad se invierte:

$$\frac{f_i}{f_i - 1} \sum_{j \in J^-} y_{ij}x_j \;\geq\; \frac{f_i}{f_i - 1}(f_i - 1) = f_i.$$

Y el primer bloque, $\sum_{J^+} y_{ij}x_j$, es ≥ 0. Sumando, se cumple otra vez la desigualdad del enunciado.

Paso 3: cerrar. En los dos casos posibles se cumple $\sum_{J^+} y_{ij}x_j + \frac{f_i}{f_i - 1} \sum_{J^-} y_{ij}x_j \geq f_i$, que es por tanto condición necesaria para que x_i sea entera. Escrita con holgura da la restricción del enunciado, y como en la tabla actual $x^*_j = 0$ para $j \in NB$, esa restricción da $h_i = -f_i < 0$: la solución actual es infactible y se aplica el simplex dual.

Dónde ha entrado cada hipótesis. Solo se ha usado que x_i es entera y que todas las variables son no negativas. En ningún momento se ha necesitado que las x_j no básicas sean enteras, y por eso el corte vale para problemas mixtos, a diferencia del f-corte.
Para reconstruirla. $\sum y_{ij}x_j = f_i - k$ con k entero; si $k \le 0$ la suma es al menos f_i y basta el bloque positivo; si $k \ge 1$ la suma es a lo sumo $f_i - 1$ y basta el bloque negativo multiplicado por $\frac{f_i}{f_i-1}$, que invierte el signo. Una sola desigualdad cubre los dos casos.

5.4.2.1 *El corte mixto mejorado*

El m-corte anterior no tiene en cuenta el hecho de que algunas variables x_j no básicas pueden tener también una condición de integridad. Al aprovecharla se obtiene un corte **al menos tan exigente**, que se denota m^*:

$$h_i = -f_i + \sum_{j\in NB} \lambda_j x_j, \quad h_i \ge 0, \qquad \lambda_j = \begin{cases} y_{ij} & \text{si } y_{ij} \ge 0 \text{ y } x_j \text{ es continua,} \\ \dfrac{f_i}{f_i-1}\, y_{ij} & \text{si } y_{ij} < 0 \text{ y } x_j \text{ es continua,} \\ f_{ij} & \text{si } x_j \text{ debe ser entera y } f_{ij} \le f_i, \\ \dfrac{f_i}{f_i-1}\,(f_{ij}-1) & \text{si } x_j \text{ debe ser entera y } f_{ij} > f_i. \end{cases}$$

LA IDEA: SUMAR UN ENTERO A UN COEFICIENTE CONSERVA LA DISYUNCIÓN

De dónde salen esos dos casos nuevos, que parecen arbitrarios, es fácil de contar y conviene hacerlo porque el mismo truco reaparece en toda la teoría moderna de cortes. Supóngase que x_j es una variable que debe ser entera. Entonces, en el argumento de la disyunción, el coeficiente y_{ij} se puede sustituir por $y_{ij} + t$ con t *cualquier entero*, porque el término $t\,x_j$ que se añade es entero y se absorbe dentro de k sin cambiar nada. Es decir: **cada variable entera regala una familia infinita de cortes válidos**, uno por cada entero t, y lo sensato es quedarse con el mejor.
El coeficiente que produce el m-corte a partir de $y_{ij} + t$ es $y_{ij} + t$ si ese número es ≥ 0, y $\frac{f_i}{f_i-1}(y_{ij} + t)$ si es < 0; y como interesa que el coeficiente sea lo *más pequeño posible* — la restricción es $\sum \lambda_j x_j \ge f_i$, y cuanto menores sean los λ_j más exigente es —, solo hay dos candidatos razonables: tomar t que deje $y_{ij} + t = f_{ij} \in [0, 1)$, o tomar el siguiente, que deja $y_{ij} + t = f_{ij} - 1 \in [-1, 0)$. Los dos valores resultantes son f_{ij} y $\frac{f_i}{f_i-1}(f_{ij} - 1)$, y una cuenta de una línea dice cuál es menor:

$$f_{ij} \le \frac{f_i}{f_i-1}(f_{ij}-1) = \frac{f_i(1-f_{ij})}{1-f_i} \iff f_{ij}(1-f_i) \le f_i(1-f_{ij}) \iff f_{ij} \le f_i.$$

De ahí los dos últimos casos de la fórmula, con el punto de corte exactamente en $f_{ij} = f_i$.

Ejemplo. Sea la tabla óptima de un problema relajado, en el que x_3 y x_4 deben ser enteras:

x_1	1	$-\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
x_3	0	$-\frac{4}{3}$	1	$\frac{11}{3}$	$\frac{7}{3}$
$c_j - z_j$	0	-5	0	-10	0

Constrúyanse el m-corte y el m^*-corte sobre la fila de x_3.

La fila de x_3 tiene $\bar{b}_i = \frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$, luego $f_i = \frac{1}{3}$, y las columnas no básicas son las de x_2 y x_4, con $y_{i2} = -\frac{4}{3} < 0$ y $y_{i4} = \frac{11}{3} \geq 0$. Por tanto $J^+ = \{4\}$ y $J^- = \{2\}$. El factor es

$$\frac{f_i}{f_i - 1} = \frac{1/3}{1/3 - 1} = \frac{1/3}{-2/3} = -\frac{1}{2}.$$

El m-corte:

$$h_3 - \frac{11}{3}x_4 - \Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{4}{3}\Big)x_2 = -\frac{1}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad h_3 - \frac{11}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_2 = -\frac{1}{3}.$$

El m^*-corte. Ahora se usa que x_4 es entera (y x_2, no).

- Para $j = 2$: $y_{i2} = -\frac{4}{3} < 0$ y x_2 no es entera, luego $\lambda_2 = \frac{f_i}{f_i - 1} y_{i2} = \big(-\frac{1}{2}\big)\big(-\frac{4}{3}\big) = \frac{2}{3}$.
- Para $j = 4$: x_4 *sí* es entera. Su parte fraccionaria es $f_{i4} = \frac{11}{3} - 3 = \frac{2}{3}$, y como $\frac{2}{3} > \frac{1}{3} = f_i$, corresponde el cuarto caso: $\lambda_4 = \frac{f_i}{f_i - 1}(f_{i4} - 1) = \big(-\frac{1}{2}\big)\big(\frac{2}{3} - 1\big) = \big(-\frac{1}{2}\big)\big(-\frac{1}{3}\big) = \frac{1}{6}$.

El corte queda

$$h_3 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{6}x_4 = -\frac{1}{3}.$$

Comparando los dos, el coeficiente de x_4 ha pasado de $\frac{11}{3}$ a $\frac{1}{6}$, y el de x_2 es el mismo. Como la restricción pide $\sum \lambda_j x_j \geq f_i$, un coeficiente *menor* hace la condición **más exigente**: el m^*-corte recorta más. En los dos casos se introduce la fila en la tabla y se resuelve con el simplex dual.

Cuando todo es entero: el m^*-corte frente al f-corte. Si todas las variables son enteras, los dos cortes son válidos y tienen el mismo término independiente, f_i. El f-corte pone f_{ij} en cada columna. El m^*-corte pone lo mismo cuando $f_{ij} \leq f_i$, y $\frac{f_i(1-f_{ij})}{1-f_i}$ cuando $f_{ij} > f_i$, que es menor que f_{ij} por la cuenta de la caja anterior. Coeficiente a coeficiente, el m^*-corte es igual o más exigente. En la fila de x_4 del primer ejercicio de la sección 5.5, con $f_i = \frac{2}{5}$ y partes fraccionarias $\frac{4}{5}$ y $\frac{3}{5}$ en las columnas de x_1 y x_5, el f-corte es $\frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_5 \geq \frac{2}{5}$, es decir, $4x_1 + 3x_5 \geq 2$. El m^*-corte cambia los dos coeficientes, porque los dos superan a $\frac{2}{5}$:

$$\lambda_1 = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{15}, \qquad \lambda_5 = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{15},$$

y el corte es

$$\tfrac{2}{15}x_1 + \tfrac{4}{15}x_5 \geq \tfrac{2}{5} \iff x_1 + 2x_5 \geq 3.$$

Con $x_1, x_5 \geq 0$, la segunda desigualdad implica la primera, y no al revés: $(1, 0)$ cumple $4x_1 + 3x_5 \geq 2$ e incumple $x_1 + 2x_5 \geq 3$.

Dónde se falla con el corte mixto.

- *Repartir J^+ y J^- por la parte fraccionaria.* Se reparten por el signo de y_{ij}, el coeficiente tal como está en la tabla.
- *El signo del factor.* $\frac{f_i}{f_i - 1}$ es negativo, y multiplicado por un y_{ij} negativo da un coeficiente positivo en la desigualdad $\geq$: en el ejemplo, $\frac{2}{3}$ para x_2.
- *Usar m^* sobre una variable continua.* Los dos casos nuevos de su fórmula son solo para las no básicas enteras; a una continua le toca la del m-corte.
- *Elegir la fila de una variable que no tiene que ser entera.* El corte mixto pide que lo sea la básica x_i de la fila; si es continua, su valor fraccionario no es un defecto.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: CORTAR HASTA EL FINAL, O CORTAR UN POCO Y RAMIFICAR

Gomory estableció un procedimiento finito para problemas enteros puros con datos racionales. La garantía exige reglas precisas de elección de cortes y de pivotaje lexicográfico; no basta añadir cualquier corte válido. Cuando el óptimo es finito, esa versión llega a una solución entera óptima o certifica que no hay puntos enteros factibles. La validez de los cortes que acabamos de demostrar, por sí sola, no prueba esta terminación.

En la práctica pueden hacer falta muchos cortes, la tabla va creciendo y los coeficientes pueden causar dificultades numéricas. La aritmética de coma flotante obliga a controlar los redondeos para conservar la validez de las desigualdades; la finitud teórica no garantiza rapidez ni estabilidad numérica.

En los años noventa se mostró la utilidad computacional de combinar cortes de Gomory con ramificación.[a] En *branch and cut* se refuerzan las relajaciones mediante cortes y se ramifica cuando conviene; también se pueden generar cortes dentro del árbol. Un corte obtenido usando restricciones de una rama puede ser válido solo en ella. Las dos técnicas se complementan: los cortes mejoran las cotas y la ramificación reparte los casos pendientes.

[a] E. Balas, S. Ceria, G. Cornuéjols y N. Natraj, «Gomory Cuts Revisited», *Operations Research Letters* 19 (1996), pp. 1–9, doi:10.1016/0167-6377(96)00007-7.

Qué se ha ganado. La pregunta del escultor tiene respuesta: sí se puede recortar el poliedro de manera garantizada, con desigualdades que se leen en una fila de la tabla sin mirar dónde están los puntos enteros. Hay tres, según lo que sea entero. Con todas las variables enteras sirven el f-corte y el m^*-corte, este igual o más exigente; con solo algunas, el corte mixto, que solo pide que lo sea la básica de la fila, y su versión m^*, que aprovecha las no básicas enteras. En dimensión uno, cortar es redondear la cota de la variable; en general, es redondear una combinación de restricciones. Cada corte empeora la promesa sin perder ningún punto entero, y el simplex dual lo absorbe desde la tabla que ya se tenía. Lo que no garantiza un corte aislado es terminar: los ejercicios que siguen muestran casos en que uno basta y casos en que hacen falta más.

5.5 Ejercicios de programación entera

Los cuatro ejercicios que siguen son de programación entera. Los dos primeros proceden de exámenes y empiezan con dos fases y terminan con un corte, de modo que recorren de golpe los capítulos 3, 4 y este; el tercero se resuelve enteramente con cortes; y el cuarto es un problema con parámetro que toca las cuatro secciones del capítulo.

Ejercicio 5.2. *Completar una tabla, el dual y un corte* R7.2, JUN 2018

$$\text{(P)}\qquad \begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 \\ \text{sujeto a:} & x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 3 \\ & -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 4 \\ & x_1, \ldots, x_5 \geq 0. \end{array}$$

Tras introducir las variables artificiales x_6 y x_7 en la primera y la segunda restricción y aplicar varios pivotajes de la fase I, se obtiene la tabla

(T)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
x_4	a	0	0	1	b	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$
x_2	$-\frac{8}{5}$	1	-1	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	c
	0	0	0	0	0	d	e	

(a) Determinar a, b, c, d y e.
(b) Aplicar la fase II e identificar el tipo de solución.
(c) Formular el dual, hallar su solución óptima y comprobar la holgura complementaria.
(d) Determinar el rango de c_2 que mantiene óptima la solución primal.
(e) Suponiendo que todas las variables deben ser enteras, aplicar un corte de Gomory e indicar cómo ha variado el valor objetivo.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Las incognitas se pueden rellenar sin pivotar. Las columnas de las artificiales* son B^{-1}*, porque las artificiales entraron como la identidad.*
2. *Con B^{-1} en la mano, cada columna de la tabla es $B^{-1}a_j$ y el término independiente es $B^{-1}b$.*

Resolución. *La idea.* Una tabla de fase I con huecos se completa sin pivotar, porque las columnas de las artificiales son B^{-1}. Con B^{-1} en la mano, todo lo demás se lee en la misma tabla: los huecos, la fase II, el dual como $c_B^T B^{-1}$, el rango de c_2 en la fila de x_2 y el corte en una fila con término independiente fraccionario. Solo el corte obliga a pivotar, y con el simplex dual.
(a) La base es $\{x_4, x_2\}$, y las columnas de x_6 y x_7 de la tabla son las columnas de B^{-1}, porque las artificiales aparecieron en el problema como la identidad:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Se comprueba: $B = (a_4, a_2) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ tiene determinante 5, y su inversa es $\frac{1}{5}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Con ella, cada incognita es una multiplicación:

$$a = \left(B^{-1}a_1\right)_1: \quad B^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{8}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow a = -\tfrac{1}{5},$$

$$b = \left(B^{-1}a_5\right)_1: \quad B^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow b = \tfrac{3}{5},$$

$$c = \left(B^{-1}b\right)_2: \quad B^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow c = \tfrac{6}{5}.$$

(La segunda componente de $B^{-1}a_1$ y de $B^{-1}a_5$ coincide con lo que ya trae la tabla, $-\frac{8}{5}$ y $-\frac{1}{5}$, lo que confirma que B^{-1} está bien leída.) Para d y e, en la fase I el vector de costos es $(0,0,0,0,0,1,1)$, luego $c_B = (0,0)$ y $z_j = 0$ para toda columna; por tanto los costos reducidos de las artificiales son

$$d = c_6 - z_6 = 1, \qquad e = c_7 - z_7 = 1.$$

Y el valor objetivo de la fase I es 0: las dos artificiales han salido de la base y el problema es factible.
(b) Se borran las columnas de las artificiales y se recalculan los costos reducidos con los costos verdaderos. Con $c_B = (c_4, c_2) = (-2, 3)$:

	-1	3	1	-2	-1	
x_4	$-\frac{1}{5}$	0	0	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{5}$
x_2	$-\frac{8}{5}$	1	-1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$
$c_j - z_j$	$\frac{17}{5}$	0	4	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$

Por ejemplo, $z_1 = (-2)\left(-\frac{1}{5}\right) + 3\left(-\frac{8}{5}\right) = -\frac{22}{5}$ y $c_1 - z_1 = -1 + \frac{22}{5} = \frac{17}{5}$. Los tres costos reducidos no básicos son *estrictamente* positivos y las dos componentes básicas también, luego la fase II no necesita ningún pivotaje y la solución es **óptima, única y no degenerada**:

$$x^* = \left(0,\ \tfrac{6}{5},\ 0,\ \tfrac{7}{5},\ 0\right), \qquad z^* = \tfrac{4}{5}.$$

(c) Como las restricciones del primal son igualdades, las variables duales son libres:

$$\begin{array}{lll} & \text{Max} & 3u_1 + 4u_2 \\ \text{(D)} & \text{sujeto a:} & u_1 - 2u_2 \le -1, \quad -u_1 + u_2 \le 3, \quad u_1 - u_2 \le 1, \\ & & 3u_1 + 2u_2 \le -2, \quad 2u_1 + u_2 \le -1, \quad u \text{ libre.} \end{array}$$

Su solución óptima es

$$(u^*)^T = c_B^T B^{-1} = (-2, 3) \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \left(-\tfrac{8}{5},\ \tfrac{7}{5}\right),$$

con valor $3\left(-\frac{8}{5}\right) + 4\left(\frac{7}{5}\right) = -\frac{24}{5} + \frac{28}{5} = \frac{4}{5} = z^*$. Comprobando las cinco restricciones duales:

$$-\tfrac{8}{5} - \tfrac{14}{5} = -\tfrac{22}{5} \le -1, \qquad \tfrac{8}{5} + \tfrac{7}{5} = 3 \le 3, \qquad -\tfrac{8}{5} - \tfrac{7}{5} = -3 \le 1,$$

$$-\tfrac{24}{5} + \tfrac{14}{5} = -2 \le -2, \qquad -\tfrac{16}{5} + \tfrac{7}{5} = -\tfrac{9}{5} \le -1.$$

Holgura complementaria: las variables primales positivas son x_2 y x_4, y son justamente las dos restricciones duales que se cumplen con *igualdad*; las tres variables primales nulas, x_1, x_3 y x_5, corresponden a las tres restricciones duales con holgura $\frac{17}{5}$, 4 y $\frac{4}{5}$, que son precisamente sus costos reducidos. La correspondencia es exacta, como tiene que ser.
(d) La variable x_2 es **básica**, en la segunda fila. Su fila sobre las columnas no básicas x_1, x_3, x_5 es $\left(-\frac{8}{5},\ -1,\ -\frac{1}{5}\right)$: las tres entradas son *negativas*, luego las tres imponen cota inferior y ninguna impone cota superior. Con $\delta \ge \text{Max}\{(c_j - z_j)/y_{rj}\}$,

$$\delta \ \ge\ \text{Max}\left\{\frac{17/5}{-8/5},\ \frac{4}{-1},\ \frac{4/5}{-1/5}\right\} = \text{Max}\left\{-\tfrac{17}{8},\ -4,\ -4\right\} = -\tfrac{17}{8},$$

de donde

$$c_2 \in \left[3 - \tfrac{17}{8},\ +\infty\right) = \left[\tfrac{7}{8},\ +\infty\right).$$

La tabla explica por qué aquí se puede encarecer x_2 sin límite: su fila da $x_2 = \frac{6}{5} + \frac{8}{5}x_1 + x_3 + \frac{1}{5}x_5$, de modo que ninguna solución factible usa menos x_2 que la actual. Al abaratarla, en

cambio, llega un punto en que conviene aumentar otras variables junto con ella: en $c_2 = \frac{7}{8}$ aparece el empate al entrar x_1.
(e) Se toma la fila de x_4, cuyo término independiente $\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5}$ es fraccionario, con $f_i = \frac{2}{5}$. Las columnas no básicas son x_1, x_3 y x_5, con coeficientes $-\frac{1}{5}$, 0 y $\frac{3}{5}$, cuyas partes fraccionarias son

$$f_{i1} = -\tfrac{1}{5} - \lfloor -\tfrac{1}{5} \rfloor = -\tfrac{1}{5} + 1 = \tfrac{4}{5}, \qquad f_{i3} = 0, \qquad f_{i5} = \tfrac{3}{5}.$$

(Obsérvese el detalle que más se falla: la parte fraccionaria de un número *negativo* se calcula con la parte entera *por defecto*, que para $-\frac{1}{5}$ es -1, no 0.) El corte es

$$h - \tfrac{4}{5}x_1 - \tfrac{3}{5}x_5 = -\tfrac{2}{5},$$

y añadido a la tabla deja $h = -\frac{2}{5} < 0$. Se aplica el simplex dual: sale h, y de las dos entradas negativas de su fila los cocientes son

$$\frac{17/5}{-4/5} = -\frac{17}{4}, \qquad \frac{4/5}{-3/5} = -\frac{4}{3},$$

cuyo máximo es $-\frac{4}{3}$: entra x_5. Pivotando sobre $-\frac{3}{5}$:

	-1	3	1	-2	-1	0	
x_4	-1	0	0	1	0	1	1
x_2	$-\frac{4}{3}$	1	-1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_5	$\frac{4}{3}$	0	0	0	1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$
$c_j - z_j$	$\frac{7}{3}$	0	4	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$

La tabla es factible y óptima. El valor objetivo ha pasado de $\frac{4}{5}$ a $\frac{4}{3}$, es decir, ha **empeorado** en $\frac{4}{3} - \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$, que es lo que tiene que ocurrir: un corte recorta el conjunto factible y el mínimo sobre un conjunto más pequeño no puede ser menor. La solución sigue sin ser entera ($x_2 = \frac{4}{3}$), de modo que harían falta más cortes; el enunciado pide solo uno.

Este problema deja dos cosas que se transfieren. La primera es que **las columnas de las artificiales de una tabla de fase I son** B^{-1}, y con B^{-1} se rellena cualquier hueco sin pivotar: es el modo de leer una tabla incompleta. La segunda es el detalle de la parte fraccionaria de un número negativo: usar truncamiento hacia cero en lugar de la parte entera por defecto produciría un corte distinto y podría invalidarlo.
Dónde se falla. En (a), en calcular d y e con los costes de la fase II: la tabla es de la fase I, cuyos costes son $(0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$. En (c), en poner $u \geq 0$: las restricciones del primal son igualdades y las duales son libres. En (d), en tratar c_2 como el coste de una no básica y mirar solo un costo reducido: x_2 es básica, y su rango sale de su fila entera. En (e), en tomar $f\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$, que no da el corte de Gomory; y en el simplex dual, en hacer entrar x_1, la de cociente mayor en valor absoluto: el costo reducido de x_5 pasaría a $\frac{4}{5} - \frac{17}{4} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{7}{4}$ y la tabla dejaría de ser óptima.

Ejercicio 5.3. *Qué recurso conviene ampliar* R7.3, JUN 2019

$$\text{(P)}\qquad \begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a:} & 2x_1 + x_2 \le 4 \\ & 2x_1 - 3x_2 \le 1 \\ & x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{array}$$

(a) Resolver por el método de las dos fases.
(b) A partir de la solución dual óptima, indicar cuál de los términos independientes conviene aumentar y determinar el máximo aumento que mantiene óptima la base.
(c) Introducir un corte entero de Gomory usando la fila asociada a la variable básica x_1.

Resolución. *La idea.* Las dos fases dan la tabla óptima, y desde ella se contesta todo lo demás sin volver a empezar. Los precios sombra se leen bajo las holguras y el exceso. Cuál conviene ampliar lo dice el signo del precio, y hasta dónde, la columna de la holgura de esa fila, que es la columna correspondiente de B^{-1}. El corte se escribe en la fila que indica el enunciado, y es legítimo porque todos los datos son enteros.
(a) Con holguras x_3 y x_4 en las dos primeras restricciones, exceso x_5 en la tercera y una artificial x_6 en esta última, la base inicial es $\{x_3, x_4, x_6\}$. La fase I minimiza x_6; su fila de costes reducidos es $(-1,-3,0,0,1,0)$ y su valor es 3. Entra x_2: los cocientes positivos son $4/1 = 4$ y $3/3 = 1$, luego sale x_6. Se obtiene

	0	0	0	0	0	1	
x_3	$\frac{5}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	3
x_4	3	0	0	1	-1	1	4
x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
$c_j - z_j$	0	0	0	0	0	1	0

La fase I termina con valor cero y la artificial fuera de la base. Para la fase II se elimina su columna y se recuperan los costes $(-1,2,0,0,0)$: los costes reducidos son $(-\frac{5}{3},0,0,0,\frac{2}{3})$ y el valor es 2. Entra x_1; los cocientes $3/(5/3) = \frac{9}{5}$, $4/3 = \frac{4}{3}$ y $1/(1/3) = 3$ hacen salir a x_4. Tras ese pivotaje y reordenando las filas queda la base $\{x_1, x_2, x_3\}$:

	-1	2	0	0	0	
x_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$
x_3	0	0	1	$-\frac{5}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{7}{9}$
$c_j - z_j$	0	0	0	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{9}$

Los dos costos reducidos no básicos son positivos: óptimo único,

$$x^* = \left(\tfrac{4}{3},\ \tfrac{5}{9}\right), \qquad z^* = -\tfrac{2}{9}.$$

Se comprueba: $2\cdot\frac{4}{3} + \frac{5}{9} = \frac{29}{9} \le 4$ (con holgura $x_3 = \frac{7}{9}$), $2\cdot\frac{4}{3} - 3\cdot\frac{5}{9} = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} = 1$ (activa), y $\frac{4}{3} + 3\cdot\frac{5}{9} = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3$ (activa); y $-\frac{4}{3} + 2\cdot\frac{5}{9} = -\frac{12}{9} + \frac{10}{9} = -\frac{2}{9}$.

(b) Los precios sombra son $(u^*)^T = c_B^T B^{-1}$, y se leen sin calcular nada nuevo: la columna de x_3 de la tabla es la primera columna de B^{-1}, la de x_4 es la segunda, y la de x_5 es *menos* la tercera, porque x_5 entró restando. Así,

$$u^* = \left(0,\ -\tfrac{5}{9},\ \tfrac{1}{9}\right).$$

Se interpreta con el teorema de la interpretación económica del capítulo 4: mientras la base se mantenga óptima, $u_i^* = \partial z / \partial b_i$. Como el problema es de **mínimo**, interesa la derivada más negativa, que es la de la segunda restricción:

- aumentar b_1 no cambia nada ($u_1^* = 0$), y en efecto esa restricción no es activa;
- aumentar b_2 mejora el objetivo en $\frac{5}{9}$ por unidad: **es la que conviene ampliar**;
- aumentar b_3 *empeora* el objetivo en $\frac{1}{9}$ por unidad, lo cual es coherente: la tercera restricción es una exigencia mínima, y exigir más encarece.

El máximo aumento se calcula con el análisis de sensibilidad del vector de recursos. Con $b = (4,\ 1+\Delta,\ 3)$, la solución básica es $\bar{b} + \Delta\,\bar{g}$ con $\bar{g} = B^{-1}e_2 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, -\frac{5}{9}\right)$, es decir, la columna de x_4:

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{9} \\ \frac{7}{9} \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} \\ -\frac{5}{9} \end{pmatrix} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta \geq -4, \qquad \Delta \leq 5, \qquad \Delta \leq \tfrac{7}{5},$$

y manda la última:

$$\boxed{\Delta_{\text{máx}} = \tfrac{7}{5}}$$

Al llegar a $\Delta = \frac{7}{5}$, la variable básica x_3 se anula: la primera restricción, que tenía holgura, pasa a ser activa, y a partir de ahí la base cambia. El objetivo habrá mejorado en $\frac{5}{9} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7}{9}$, pasando de $-\frac{2}{9}$ a -1.

Los apartados (a) y (b) en AMPL. El modelo de las prácticas antiguas `Relacion_5_Ej_6` es este problema continuo. Se reutiliza `lp.mod` (p. 170) con los datos `recursos.dat`; la tercera fila se multiplica por -1 para escribirla con $\leq$:

```
param n := 2;
param m := 3;
param a : 1 2 :=
1 2 1
2 2 -3
3 -1 -3;
param b := 1 4  2 1  3 -3;
param c := 1 -1  2 2;
```

El guion `recursos.run` consulta la solución, los precios y los rangos mediante los sufijos de CPLEX explicados en la página 233:

```
reset;
model lp.mod;
data recursos.dat;
option solver cplex;
option presolve 0;
option cplex_options 'sens=1';
```

```
solve;
display solve_result, x, z;
display x.rc, r.dual;
display x.sensobjlo, x.sensobj, x.sensobjhi;
display r.sensrhslo, b, r.sensrhshi;
```

Se obtienen $(4/3, 5/9)$, valor $-2/9$ y `r.dual` igual a $(0, -5/9, -1/9)$, salvo redondeo numérico. El signo del último precio corresponde a la fila *negada*: si el mínimo exigido original es b_3, el dato del código es $-b_3$. Por tanto, la derivada respecto al b_3 original es $+1/9$, como en (b).

Para la segunda fila, `r[2].sensrhshi` devuelve $12/5$. Su término independiente actual es 1, de modo que el aumento máximo es $12/5 - 1 = 7/5$. Estos son precios y rangos del problema *continuo*; imponer integridad cambia el problema y no permite interpretar esos sufijos como precios marginales del óptimo entero.

(c) Se vuelve a los datos originales, antes del aumento estudiado en (b). La fila de x_1 tiene término independiente $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$, con $f_i = \frac{1}{3}$, y coeficientes $\frac{1}{3}$ y $-\frac{1}{3}$ en las columnas no básicas x_4 y x_5. Sus partes fraccionarias son

$$f_{i4} = \tfrac{1}{3}, \qquad f_{i5} = -\tfrac{1}{3} - \lfloor -\tfrac{1}{3} \rfloor = -\tfrac{1}{3} + 1 = \tfrac{2}{3},$$

y el corte es

$$h - \tfrac{1}{3}x_4 - \tfrac{2}{3}x_5 = -\tfrac{1}{3}.$$

Es legítimo usar el f-corte porque todos los coeficientes de las restricciones y todos los términos independientes son enteros, de modo que las holguras x_3, x_4 y el exceso x_5 son enteros siempre que lo sean x_1 y x_2.

Añadido a la tabla, deja $h = -\frac{1}{3} < 0$. Se aplica el simplex dual: sale h, y de las dos entradas negativas los cocientes son $\frac{5/9}{-1/3} = -\frac{5}{3}$ y $\frac{1/9}{-2/3} = -\frac{1}{6}$; el máximo es $-\frac{1}{6}$, luego entra x_5. Pivotando sobre $-\frac{2}{3}$:

	-1	2	0	0	0	0	
x_1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_2	0	1	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_3	0	0	1	-1	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$c_j - z_j$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$

La tabla vuelve a ser factible y óptima, con valor $-\frac{1}{6}$, peor que $-\frac{2}{9}$ como corresponde. La solución sigue siendo fraccionaria, $x^* = \left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$, de modo que harían falta más cortes. (El óptimo entero verdadero es $(1, 1)$ con $z = 1$: recorriendo los pocos puntos enteros factibles se comprueba que no hay nada mejor.)

Este problema enseña a **comparar los efectos marginales de ampliar recursos**: no basta con saber cuál es el mayor, hay que mirar el signo y saber que en un mínimo la mejora está en los negativos; y no basta con saber cuál conviene ampliar, hay que saber *hasta dónde*, que es el rango de sensibilidad. Si ampliar los recursos tiene costes distintos, también hay que tenerlos en cuenta para convertir esos efectos marginales en una decisión de inversión.

Dónde se falla. En (b), en leer el precio de la tercera restricción como menos el costo reducido de x_5, igual que bajo una holgura: saldría $-\frac{1}{9}$ y se concluiría que exigir más mejora el

objetivo. Bajo un exceso el signo cambia, y $u_3^* = +\frac{1}{9}$. También en (b), en elegir el precio mayor en valor absoluto sin mirar su signo, y en buscar el aumento máximo en la fila de x_2: se busca en la columna de x_4, que es la de la segunda restricción. En (c), en tomar $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

Ejercicio 5.4. *Un entero puro resuelto solo con cortes* R7.4

Utilizando el método de los cortes de Gomory, resúelvase

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 - 3x_2 \\ \text{sujeto a:} & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+. \end{array}$$

Resolución. *La idea.* Con dos variables, la relajación se resuelve por vértices y se escribe su tabla. Todos los datos son enteros, así que el exceso y la holgura son enteros y el f-corte es legítimo. Tras el corte, un pivotaje del simplex dual, y al final se traduce el corte a las variables originales para ver qué ha recortado.
Paso 1: resolver la relajación. Con exceso x_3 en la primera restricción y holgura x_4 en la segunda, la región factible tiene vértices $(1,0)$, $(3,0)$, $(0,1)$ y $\left(0, \frac{3}{2}\right)$; evaluando $-x_1 - 3x_2$ en los cuatro, el mínimo es

$$x^* = \left(0, \tfrac{3}{2}\right), \qquad z^* = -\tfrac{9}{2},$$

con base $\{x_2, x_3\}$: la segunda restricción es activa y la primera tiene exceso $x_3 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$. La tabla óptima es

	-1	-3	0	0	
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_3	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$c_j - z_j$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{2}$

Paso 2: el primer corte. La fila de x_2 tiene $\bar{b} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$, luego $f = \frac{1}{2}$; sus coeficientes no básicos son $\frac{1}{2}$ (columna de x_1) y $\frac{1}{2}$ (columna de x_4), con partes fraccionarias $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$. El corte es

$$h_1 - \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}x_4 = -\tfrac{1}{2}.$$

Paso 3: restaurar la factibilidad. Sale h_1; las dos entradas negativas de su fila dan cocientes $\frac{1/2}{-1/2} = -1$ y $\frac{3/2}{-1/2} = -3$, y el máximo es -1: entra x_1. Pivotando se llega a

	-1	-3	0	0	0	
x_2	0	1	0	0	1	1
x_3	0	0	1	1	-1	1
x_1	1	0	0	1	-2	1
$c_j - z_j$	0	0	0	1	1	-4

El término independiente es no negativo, los costos reducidos también, y **la solución es entera**:

$$x^* = (1,1), \qquad z^* = -4.$$

Un solo corte ha bastado. Comprobación: $1+1=2\geq 1$, $1+2=3\leq 3$ (activa), y $-1-3=-4$. Y no hay nada mejor entre los puntos enteros: con $x_1+2x_2\leq 3$ y $x\geq 0$ enteras, los candidatos son $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$ y $(0,0)$, este último infactible; sus valores son -3, -4, -1, -2, -3, y el mejor es -4.
Qué hizo el corte, en el plano. La desigualdad $\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_4\geq\frac{1}{2}$ es $x_1+x_4\geq 1$, y sustituyendo $x_4=3-x_1-2x_2$ queda

$$x_1+3-x_1-2x_2\geq 1 \iff x_2\leq 1.$$

Es decir, el corte ha sido exactamente $x_2\leq 1$: la desigualdad que elimina el vértice fraccionario $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ sin tocar ningún punto entero, porque x_2 entera con $x_1+2x_2\leq 3$ obliga a $x_2\leq 1$. Un ser humano la habría escrito mirando el dibujo; el método la ha producido tomando partes fraccionarias.
Dónde se falla. En dudar del f-corte porque hay un exceso: $x_3=x_1+x_2-1$ es entero porque los datos lo son. En creer que la fila elegida decide el corte: la de x_3, con término $\frac{1}{2}$ y coeficientes $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$, da el mismo, porque $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. Y en el simplex dual, en elegir el cociente -3 en lugar del -1: entraría x_4 y el costo reducido de x_1 quedaría negativo.

Ejercicio 5.5. *Un parámetro, y las cuatro secciones del capítulo* R7.5

Sea el problema de optimización lineal

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & x_1+x_2-x_3\\ \text{sujeto a:} & \lambda x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4=\frac{5}{2}\\ & \lambda x_1-x_3+x_4=1\\ & x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0,\end{array}$$

donde λ es un número real.

1. ¿Para qué valores de λ es la matriz de restricciones totalmente unimodular?
2. ¿Para qué valores de λ es óptima la base formada por las dos primeras columnas? En tal caso, ¿cuál es la solución óptima del dual?
3. Para $\lambda=1$, resolver por ramificación y acotación el problema que resulta de imponer que las variables sean enteras.
4. Para $\lambda=\frac{1}{2}$, resolver con cortes de Gomory el problema que resulta de imponer que x_1 y x_2 sean enteras **y pares**.

Resolución. *La idea.* Cada apartado usa una sección del capítulo. El 1 se decide con el paso 1 del reconocimiento de matrices TU, mirando las entradas. El 2 es la optimalidad de una base con un parámetro: factibilidad de $B^{-1}b$ y signo de los costos reducidos. El 3 es un árbol con una rama infactible y otra que se resuelve con un pivotaje dual. El 4 traduce «par» como $x=2y$ y pide un corte mixto, porque x_3 y x_4 no tienen que ser enteras.
1. Para **ningún** valor de λ. Una matriz totalmente unimodular es, por definición, una matriz *entera* — sus submatrices 1×1 son sus propias entradas, y sus determinantes deben valer 0, 1 o -1 —, y aquí hay entradas iguales a $\frac{1}{2}$ sea cual sea λ. Multiplicar la primera fila por 2 tampoco produce una matriz TU: las columnas tercera y cuarta formarían la submatriz $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\-1&1\end{smallmatrix}\right)$, de determinante 2, independientemente de λ. La respuesta se decide ya con los

menores 1×1 de la matriz original.
2. Sea $B = (a_1, a_2) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{smallmatrix}\right)$, con $\det(B) = -\lambda^2$, que es no nulo si y solo si $\lambda \neq 0$; entonces

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = B^{-1} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} \\ \frac{5}{2\lambda} \end{pmatrix}.$$

La base es **factible** si y solo si $\lambda > 0$. Para la optimalidad se pasa el problema a mínimo, Min $-x_1 - x_2 + x_3$, con $c = (-1, -1, 1, 0)$ y $c_B = (-1, -1)$:

$$c_B^T B^{-1} = \left(-\tfrac{1}{\lambda},\, -\tfrac{1}{\lambda}\right), \qquad c_3 - z_3 = 1 - \frac{1}{2\lambda}, \qquad c_4 - z_4 = \frac{3}{2\lambda}.$$

La segunda es positiva siempre que $\lambda > 0$, y la primera es no negativa si y solo si $\lambda \geq \frac{1}{2}$. Por tanto la base es óptima exactamente para

$$\boxed{\lambda \in \left[\tfrac{1}{2},\, +\infty\right)}$$

y la solución óptima del dual del problema de mínimo es $(u^*)^T = c_B^T B^{-1} = \left(-\frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda}\right)$, con valor $-\frac{1}{\lambda}\left(\frac{5}{2} + 1\right) = -\frac{7}{2\lambda}$; para el problema de máximo original, el valor óptimo es $\frac{7}{2\lambda}$ y las variables duales cambian de signo. En $\lambda = \frac{1}{2}$ el costo reducido de x_3 se anula: hay óptimo múltiple.
3. Con $\lambda = 1$, el óptimo continuo es $x^* = \left(1, \frac{5}{2}, 0, 0\right)$ con $z^* = \frac{7}{2}$. La variable fraccionaria es x_2, y se ramifica sobre ella con $\lfloor 5/2 \rfloor = 2$.
Rama $x_2 \geq 3$. De la primera restricción, $x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}(x_3 + x_4)$, luego $x_2 \geq 3$ exige $x_3 + x_4 \leq -1$, imposible con $x \geq 0$: **infactible**.
Rama $x_2 \leq 2$. Se añade $x_2 \leq 2$ y se restaura la factibilidad con el simplex dual. En forma de mínimo, Min $-x_1 - x_2 + x_3$, la tabla óptima de la base $\{x_1, x_2\}$ tiene las filas $x_1 - x_3 + x_4 = 1$ y $x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{5}{2}$, con costos reducidos $\frac{1}{2}$ para x_3 y $\frac{3}{2}$ para x_4, y valor $-\frac{7}{2}$. La cota $x_2 + s = 2$, menos la fila de x_2, da

$$s - \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 = -\tfrac{1}{2}.$$

Sale s. Los cocientes son $\frac{1/2}{1/2} = 1$ para x_3 y $\frac{3/2}{1/2} = 3$ para x_4, y entra x_3 con valor 1. El objetivo pasa a $-\frac{7}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = -3$, y las básicas a $x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$ y $x_1 = 1 + 1 = 2$. Los costos reducidos nuevos son 1 para x_4 y 1 para s, así que la tabla es óptima. El resultado es

$$x^* = (2,\, 2,\, 1,\, 0), \qquad z^* = 3,$$

que es entero, luego nodo terminal. Comprobación: $x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ y $x_1 - x_3 + x_4 = 2 - 1 = 1$; y $z = 2 + 2 - 1 = 3$.
Como la otra rama era infactible, el árbol está completo y el óptimo entero es $(2, 2, 1, 0)$ con $z^* = 3$, frente al $\frac{7}{2}$ del continuo.

Otra vía (eliminando variables, que confirma el resultado sin árbol). De las dos igualdades se despeja $x_3 + x_4 = 5 - 2x_2$ y $x_1 = 1 + x_3 - x_4$, y el objetivo se reescribe

$$z = x_1 + x_2 - x_3 = (1 + x_3 - x_4) + x_2 - x_3 = 1 + x_2 - x_4.$$

Hay que maximizar $1 + x_2 - x_4$ con $x_4 \geq 0$, luego conviene $x_4 = 0$; entonces $x_3 = 5 - 2x_2 \geq 0$ obliga a $x_2 \leq \frac{5}{2}$, y siendo entera, $x_2 \leq 2$. Con $x_2 = 2$ sale $x_3 = 1$, $x_1 = 2$ y $z = 3$. El resultado coincide, y de paso se ve por qué la rama $x_2 \geq 3$ tenía que ser infactible.

4. Imponer que x_1 y x_2 sean *pares* se traduce escribiendo $x_1 = 2y_1$ y $x_2 = 2y_2$ con $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}_+$. Con $\lambda = \frac{1}{2}$ el problema queda

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 2y_1 + 2y_2 - x_3 \\ \text{sujeto a:} & 2y_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ & y_1 - x_3 + x_4 = 1 \\ & y_1, y_2 \in \mathbb{Z}_+, \quad x_3, x_4 \geq 0. \end{array}$$

La base $\{y_1, y_2\}$ tiene $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $\bar{b} = (1, \frac{5}{2})$: la tabla es óptima con valor 7, pero $y_2 = \frac{5}{2}$ no es entera.

	-2	-2	1	0	
y_1	1	0	-1	1	1
y_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
$c_j - z_j$	0	0	0	3	-7

Y aquí hay que elegir bien el corte. Las variables no básicas x_3 y x_4 **no están obligadas a ser enteras**: el enunciado solo lo exige de x_1 y x_2. Por tanto *no* se puede usar el f-corte, que da por supuesto que todas las variables son enteras; hay que usar el **corte mixto**. Con $f_i = \frac{1}{2}$ en la fila de y_2, y como los dos coeficientes $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$ son no negativos, $J^+ = \{x_3, x_4\}$ y $J^- = \emptyset$:

$$h - \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 = -\tfrac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_3 + x_4 \;\geq\; 1.$$

El pivotaje dual. Sale h; las dos entradas negativas dan cocientes $\frac{0}{-1/2} = 0$ y $\frac{3}{-1/2} = -6$, y el máximo es 0: entra x_3. Pivotando:

	-2	-2	1	0	0	
y_1	1	0	0	2	-2	2
y_2	0	1	0	0	1	2
x_3	0	0	1	1	-2	1
$c_j - z_j$	0	0	0	3	0	-7

Factible y óptima, con $y_1 = y_2 = 2$, es decir,

$$x^* = (4, 4, 1, 0), \qquad z^* = 7.$$

Comprobación en el problema original con $\lambda = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ y $\frac{1}{2} \cdot 4 - 1 + 0 = 1$; y $z = 4 + 4 - 1 = 7$.

El detalle más instructivo del apartado es que **el valor objetivo no ha cambiado**: la relajación valía 7 y el óptimo entero también vale 7. Eso no es contradictorio con nada; simplemente, en este problema la relajación tenía óptimos múltiples y entre ellos había soluciones enteras pares. Lo que el corte ha hecho no es empeorar el valor sino *elegir*, dentro de la cara óptima, un vértice que cumple la condición de paridad. Es la situación ideal de la programación

entera, la que se da siempre en los problemas de transporte con ofertas y demandas enteras y en asignación (sección 5.2): salto de integridad nulo.
Y el problema entero deja una advertencia que vale para todo el capítulo: antes de escribir un corte hay que mirar **qué variables están obligadas a ser enteras**. Con todas enteras, f-corte; con solo algunas, corte mixto. Usar el f-corte cuando hay variables continuas puede eliminar soluciones factibles, y entonces el resultado sería sencillamente falso.
Dónde se falla. En 1, en multiplicar la primera fila por 2 y dar la matriz por TU: la submatriz de las columnas tercera y cuarta tiene determinante 2. En 2, en mirar solo los costos reducidos: una base óptima tiene que ser además factible, y aquí la factibilidad es la condición $\lambda > 0$, que hay que escribir aunque luego la contenga $\lambda \geq \frac{1}{2}$. En 3, en dar por infactible la rama $x_2 \geq 3$ sin comprobarlo, o en cerrar el árbol al encontrar la primera solución entera sin haber mirado la otra rama. En 4, en usar el f-corte, y en esperar que el corte empeore el valor: aquí no lo hace.

REPASO INTERCALADO

Primera ronda: recordar. Al día siguiente de terminar el capítulo, a libro cerrado.

1. Define poliedro entero y matriz totalmente unimodular. ¿Cuál de las dos es una propiedad de la matriz sola?
2. Enuncia el teorema de Hoffman-Kruskal. ¿Por qué en la vuelta hace falta que la hipótesis valga para *todo* b entero?
3. Escribe la matriz del problema del transporte y di por qué su rango es $m + n - 1$.
4. ¿Qué dos operaciones combina la ramificación y acotación, y qué permite tirar una rama entera sin explorarla?
5. Escribe el f-corte de Gomory y di en una línea de dónde sale.
6. (Capítulo 4.) ¿Por qué cada nodo de un árbol de ramificación y cada corte de Gomory permiten reanudar con el simplex *dual* desde la tabla anterior?
7. (Capítulo 2.) Enuncia el teorema de representación de poliedros. ¿Qué parte permite elegir un vértice óptimo cuando el valor es finito y el poliedro factible no contiene rectas?

Segunda ronda: aplicar. Dos o tres días después.

1. Decide si $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ es totalmente unimodular. Si no lo es, exhibe la submatriz que lo impide.
2. Un problema de transporte tiene ofertas $(20, 30)$ y demandas $(15, 15, 15)$. ¿Está equilibrado? Si no, arréglalo y di qué significa el destino que has añadido.
3. En una tabla óptima de un problema en el que todas las variables, incluidas las holguras, deben ser enteras, la fila de una variable básica es $\left(1, 0, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2} \mid \frac{7}{2}\right)$. Escribe el f-corte.
4. Con la misma fila, pero suponiendo ahora que la variable de la tercera columna no tiene que ser entera, escribe el m-corte y compara los dos coeficientes.
5. Un nodo de un árbol de ramificación da $z_i^* = -17{,}4$ y ya se tiene una solución entera con valor -18. ¿Se ramifica o se cierra? ¿Y si el problema fuera de máximo?
6. El modelo Min $10y + x$ con $x = 3$, $x \leq My$ e $y \in \{0, 1\}$ es correcto con $M = 100$ y con $M = 3$. ¿Cuánto promete su relajación en cada caso? ¿Cuál de los dos conviene,

y por qué no se nota comprobándolo con puntos enteros?

7. En un problema de mínimo con todos los costes y todas las variables enteros, la mejor solución entera vale -40 y un nodo promete $-40{,}56$. ¿Se poda? ¿Y si el problema tuviera una variable continua con coste no nulo?

Tercera ronda: subir el nivel. Al terminar el capítulo de programación no lineal.

1. Explica, sin fórmulas, por qué la unimodularidad total es una propiedad de la matriz y la integridad del poliedro depende además de b, y por qué el teorema de Hoffman-Kruskal no es entonces una tautología.
2. La matriz de incidencia de un grafo *no* dirigido es TU si y solo si el grafo es bipartito. Explica con el triángulo por qué los ciclos impares lo impiden, y por qué orientar las aristas lo arregla.
3. (Capítulo 4.) Se añade un corte de Gomory y se reoptimiza con el simplex dual hasta obtener una tabla factible y óptima. ¿En qué sentido puede cambiar el valor óptimo, y por qué no en el contrario? ¿Tiene que cambiar estrictamente?
4. Si la envolvente convexa de las soluciones enteras coincidiera con el poliedro de la relajación, ¿qué harían los dos algoritmos de este capítulo? Da un ejemplo de familia donde eso ocurre y otro donde no.
5. (Anticipo del capítulo 6.) Si el objetivo fuera no lineal, ¿por qué un mínimo local de la relajación no bastaría para podar una rama? ¿Podría mantenerse la ramificación y acotación si se dispusiera de cotas globales válidas? ¿Qué parte de la deducción de los cortes a partir de la tabla del simplex dejaría de aplicarse?

CAPÍTULO 6

Programación no lineal sin restricciones

ANTES DE LEER

Cinco preguntas antes de leer. No hace falta acertarlas; hace falta intentarlas.

1. Estás en una ladera, de noche y con niebla espesa. Solo puedes palpar la pendiente del suelo justo bajo tus pies. ¿Qué haces para bajar? ¿Y cómo sabrás, si llegas a un sitio llano, si estás en el fondo del valle o en un collado entre dos cumbres?
2. Una función de una variable tiene derivada nula en un punto. Escribe tres funciones distintas para las que ese punto sea, respectivamente, un mínimo, un máximo y ninguna de las dos cosas.
3. En los problemas lineales en forma estándar, si existe óptimo, alguno es un vértice. Por eso el simplex podía limitarse a recorrer vértices. ¿Por qué esa estrategia deja de servir en cuanto la función objetivo deja de ser lineal? ¿Dónde puede estar ahora el mínimo?
4. Si sabes que una función de dos variables tiene un único punto con gradiente nulo, ¿puedes concluir que ahí está el mínimo? ¿Qué información adicional te bastaría?
5. Bajar por la línea de máxima pendiente parece lo más rápido. Dibuja un valle muy estrecho y muy alargado, como una zanja, y sigue con el dedo lo que hace alguien que en cada paso se mueve exactamente en la dirección de máxima pendiente. ¿Va derecho al fondo?

Mapa del capítulo. Tres bloques, en este orden. El primero plantea el problema no lineal en general, se pregunta si tiene solución, distingue el mínimo local del global y demuestra que la convexidad borra esa distinción. El segundo es el corazón teórico: las condiciones de optimalidad, necesaria y suficiente, de primer y de segundo orden, que traducen la geometría de «no se puede bajar desde aquí» al álgebra del gradiente y de la hessiana. El tercero convierte esa teoría en algoritmos: direcciones de descenso, método del gradiente, reglas de paso y método de Newton. Todos los resultados van demostrados, paso a paso.

Y una advertencia sobre el lugar de este capítulo en el libro. Los cinco capítulos anteriores han estudiado problemas con objetivo y restricciones lineales, con variables continuas o enteras. En las relajaciones continuas, el teorema fundamental de la programación lineal reducía, bajo sus hipótesis, una búsqueda sobre un conjunto infinito a una búsqueda sobre una lista finita de vértices. Aquí se acaba el regalo. La función objetivo se curva, el mínimo puede estar en cualquier sitio, y hay que volver a la herramienta que sirve cuando no se dispone de esa reducción: el cálculo diferencial, que solo ve lo que pasa muy cerca de un punto.

6.1 Introducción

La pregunta

El primer día de 1801 un astrónomo siciliano observó un objeto nuevo, lo siguió durante unas seis semanas y después dejó de verlo. Quedaban unas pocas decenas de mediciones, todas con error, y la pregunta era dónde volver a mirar meses después. Ninguna órbita pasa exactamente por todas las mediciones, porque los errores no lo permiten. ¿Qué quiere decir entonces «la órbita que mejor se ajusta a los datos», y cómo se encuentra sin ir probándolas una a una?

Una forma de plantear el ajuste es minimizar la suma de los cuadrados de los errores. Así, las mediciones dan una función de varias variables: los parámetros de la órbita. Si esos parámetros entran de forma no lineal en las predicciones, el objetivo puede tener varios mínimos locales. Dentro de un dominio abierto de parámetros, el problema sirve de ejemplo de optimización sin restricciones: buscar el punto más bajo de una superficie que ya no es un plano.

La idea: todo el capítulo es una pelota en una montaña

Conviene fijar de entrada la imagen que sostiene el tema entero, porque de ella salen, una por una, todas las definiciones y todos los teoremas.
Imagine un paisaje montañoso: en cada punto x del suelo, la altura es $f(x)$. Minimizar f es encontrar el punto más bajo del paisaje. Ahora imponga la condición que de verdad define este capítulo: *usted está dentro del paisaje, con niebla, y solo puede medir cosas locales*. Puede medir la pendiente bajo sus pies, que es el **gradiente**; y, si se molesta, puede medir cómo cambia esa pendiente al moverse un poco, que es la **hessiana**.
La imagen orienta las preguntas que formalizaremos:

- Si el suelo está inclinado, no está usted en el fondo: baste caminar cuesta abajo. Eso será la **condición necesaria de primer orden**, $\nabla f(x^*) = 0$.
- Que el suelo esté llano no basta. Puede estar en el fondo de un valle, en lo alto de una cumbre o en un **collado**, que es llano y sin embargo baja en una dirección y sube en otra. La **condición de segundo orden** usa la curvatura para distinguirlos cuando esta no degenera; si degenera, puede hacer falta estudiar términos de orden mayor.

- Aunque esté en el fondo de *un* valle, puede haber otro valle más hondo al otro lado de la sierra, y usted, con niebla, no tiene forma de saberlo. Esa es la diferencia entre **mínimo local** y **mínimo global**. La **convexidad** garantiza que todo mínimo local sea global; puede haber varios puntos que alcancen ese mismo valor.
- Y si en vez de decidir dónde está el mínimo quiere usted *llegar* a él, no le queda más remedio que caminar: dar un paso en una dirección que baje, medir otra vez y repetir. Eso es el **método del gradiente**.

Todo el capítulo es esa caminata, contada con precisión.

6.1.1 El problema general de la programación no lineal

Un problema de programación no lineal se formula así:

$$\text{(PNL)} \qquad \begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeto a:} && h(x) = 0 \\ &&& g(x) \leq 0 \\ &&& x \in S \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$. Al conjunto de puntos que cumplen todas las condiciones lo llamaremos X, el **conjunto de puntos factibles**.

Merece la pena leer despacio lo que esta formulación tiene y lo que ha perdido respecto de los capítulos anteriores.

Lo que tiene. Es la formulación más general posible dentro de la programación matemática: absorbe todo lo visto hasta ahora. Un problema lineal es el caso en que f es $c^T x$, las h y las g son afines y $S = \mathbb{R}^n$. Un problema entero es el caso $S = \mathbb{Z}^n$, o $S = \{0, 1\}^n$ para el binario. El conjunto S es la vía por la que entran las condiciones que se prefieren expresar directamente, como la integralidad.

Lo que ha perdido. Tres cosas, y las tres eran justamente lo que hacía funcionar el simplex.

1. **El conjunto factible ya no tiene por qué ser convexo.** Una sola restricción no lineal basta para romperlo: $g(x) = 1 - x_1^2 - x_2^2 \leq 0$ describe el exterior de un disco, que es todo lo contrario de un convexo.
2. **El óptimo ya no tiene por qué estar en la frontera.** En programación lineal, si $c \neq 0$, moverse en la dirección $-c$ mejoraba mientras se siguiera en la región factible, y por eso había que empujar hasta chocar con el borde. Con f curvada, el mínimo puede caer cómodamente en el interior, y de hecho todo este capítulo se dedica a ese caso.
3. **No queda ninguna lista finita de candidatos.** El teorema fundamental de la programación lineal permitía mirar solo los vértices, que son finitos. Aquí no hay una reducción general a una lista finita de vértices. Los candidatos pueden formar un conjunto finito o infinito; las condiciones locales ayudan a identificarlos.

CONEXIÓN: POR QUÉ SE EMPIEZA POR EL PROBLEMA LINEAL

Podría parecer que lo natural sería empezar por lo general y bajar después a lo particular: primero el problema no lineal, luego el lineal como caso fácil. El curso hace lo contrario, y no es una casualidad pedagógica sino una consecuencia de la materia. En el mundo lineal existe una teoría *global* — el teorema fundamental, la dualidad, las holguras complementarias — que dice

cosas ciertas sobre el problema entero, no solo alrededor de un punto. Esa teoría se apoya en el análisis convexo del capítulo 2, en la estructura poliédrica del conjunto factible y en el lema de Farkas. En el caso no lineal se pierde la reducción a vértices. La convexidad y la separación siguen siendo útiles: permiten obtener conclusiones globales, y la dualidad reaparecerá en el capítulo 7.

En este capítulo nos ocuparemos del caso **sin restricciones**:

$$(\text{PNL}) \qquad \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a:} & x \in S \subseteq \mathbb{R}^n. \end{array}$$

Han desaparecido h y g, y queda solo la pertenencia a S. Se verá en la sección 6.2 que, además, se pedirá a S que sea *abierto*, y por una razón muy concreta que conviene no adelantar.

6.1.2 ¿Existe solución? El teorema de Weierstrass

Antes de buscar un mínimo hay que preguntarse si existe. La respuesta clásica es el teorema de Weierstrass, y es por donde empieza el capítulo. Viene del cálculo de varias variables, y el apéndice F, sección «Análisis», lo recoge con la equivalencia de Heine-Borel y la lectura sucesional de la compacidad, que aquí no hacen falta pero conviene tener localizadas.

Teorema (de Weierstrass)**.** Si f es continua y X es compacto (cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$) y no vacío, entonces existe solución del problema, es decir, existe $x^* \in X$ con $f(x^*) \leq f(x)$ para todo $x \in X$.

LA IDEA: DOS AGUJEROS POR LOS QUE SE ESCAPA UN MÍNIMO

Para una función continua sobre un conjunto no vacío, la compacidad evita dos formas habituales de perder el mínimo.
Por arriba, si el conjunto no está acotado, el ínfimo puede alcanzarse «en el infinito» y por tanto no alcanzarse nunca. Piense en $f(x) = e^{-x}$ sobre $X = \mathbb{R}$. El ínfimo es 0 y no hay ningún punto donde f valga 0: la función baja indefinidamente sin tocar fondo. Es el paisaje de una ladera infinita que desciende para siempre.
Por los bordes, si el conjunto no es cerrado, el mínimo puede caer justo en el punto que falta. Piense en $f(x) = x$ sobre $X = (0, 1]$. El ínfimo es 0, se acerca uno cuanto quiera, y el punto 0 no está en X. Es el paisaje de un valle al que le han recortado el fondo.
Cerrar y acotar tapa los dos agujeros a la vez, y la continuidad impide un tercer fallo: que la función dé un salto justo donde iba a alcanzar su mínimo.

Ahora bien, Weierstrass tiene una limitación que hay que decir con claridad, porque marca todo lo que sigue: es un teorema de *existencia pura*. Garantiza que el mínimo está ahí, pero no dice dónde, ni da un procedimiento para encontrarlo, ni permite reconocerlo cuando uno lo tiene delante. Y por si fuera poco, sus hipótesis fallan en el caso más común de este capítulo, que es $X = \mathbb{R}^n$, un conjunto que no está acotado.

Por eso el capítulo desarrolla condiciones *locales* obtenidas del cálculo diferencial y métodos iterativos que usan esa información. Para asegurar que un mínimo local es global harán falta hipótesis adicionales, como la convexidad que se estudia a continuación.

6.1.3 Mínimo local y mínimo global

Definición. Un punto $x^* \in X$ es un **mínimo local** o **relativo** si existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x) \geq f(x^*)$ para todo $x \in X$ con $\|x - x^*\| < \epsilon$.

Diremos que x^* es un **mínimo global** si $f(x) \geq f(x^*)$ para todo $x \in X$.

Si las desigualdades son estrictas (para $x \neq x^*$) se dicen mínimos **estrictos**, locales o globales.

La diferencia entre las dos definiciones cabe en una palabra: el mínimo local solo compite contra sus vecinos, dentro de una bola de radio ϵ que puede ser tan pequeña como haga falta; el global compite contra todo el mundo. Todo mínimo global es local, y el recíproco es falso.

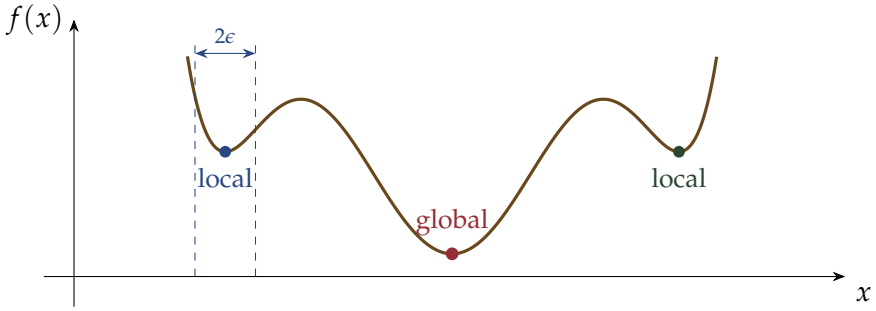


Figura 6.1: Los tres puntos marcados son mínimos locales; solo el central es global. La banda señala un entorno del mínimo de la izquierda: dentro de ella no hay un punto más bajo, aunque sí lo hay fuera.

La pendiente y la curvatura en un punto no bastan, en general, para decidir si un mínimo es global. Se puede conservar la función en todo un entorno y añadir lejos un valle más profundo, sin cambiar ninguno de esos datos locales. Una hipótesis como la convexidad impide esa situación: conecta lo que ocurre cerca con el resto del dominio.

6.1.4 Funciones convexas

En el capítulo 2 se estudiaron los conjuntos convexos. Aquí hace falta la noción paralela para funciones.

Definición. Diremos que la función f es **convexa** en X convexo si para todo $x_1, x_2 \in X$,

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \;\leq\; \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \qquad \forall \lambda \in [0,1].$$

Si la desigualdad es estricta para $x_1 \neq x_2$ y $\lambda \in (0,1)$, diremos que f es **estrictamente convexa**. Diremos que f es (estrictamente) **cóncava** si $-f$ es (estrictamente) convexa.

LA IDEA: LA CUERDA VA POR ENCIMA

La desigualdad dice exactamente esto: *tome dos puntos cualesquiera de la gráfica y tense una cuerda entre ellos; la cuerda queda por encima de la gráfica*. El lado izquierdo, $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$, es la altura de la *función* en un punto intermedio; el lado derecho, $\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$, es la altura de la *cuerda* en ese mismo punto, porque la cuerda es el segmento que une $(x_1, f(x_1))$ con $(x_2, f(x_2))$ y se recorre con el mismo parámetro λ.

De esa imagen se lee sin cuentas todo lo que la convexidad da:

- Un paisaje convexo **no tiene cumbres interiores estrictas**: dos puntos cercanos a ambos lados de una cumbre dejarían una cuerda por debajo de ella.
- Si hay dos puntos de mínimo global, **todo el segmento que los une también minimiza**. La cuerda entre sus alturas es horizontal y la gráfica no puede subir por encima de ella ni bajar del valor mínimo.
- Por eso la convexidad permite pasar de un mínimo local a uno global. La **unicidad** requiere más, y **converger** hasta un mínimo depende también del algoritmo y de que el mínimo exista.

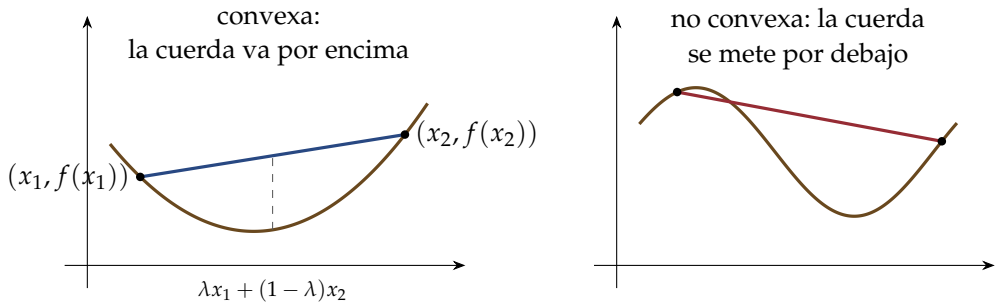


Figura 6.2: La definición de convexidad, leída como una cuerda. A la derecha, un paisaje con una loma: en parte del intervalo, la gráfica queda por encima de la cuerda, y eso contradice la desigualdad de convexidad.

Hay también una formulación equivalente con un número cualquiera de puntos, que es la que se usa cuando hay que mezclar más de dos cosas:

Proposición. f es convexa en X convexo si y solo si para todo $x_1, \dots, x_k \in X$ y todo $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ con $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ se tiene

$$f\Big(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i\Big) \;\leq\; \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_i).$$

La implicación interesante se prueba por inducción sobre k, agrupando los $k-1$ primeros puntos en uno solo. Si $\lambda_k = 1$, los demás pesos son cero, la combinación es x_k y los dos lados valen $f(x_k)$. Si $\lambda_k < 1$, escribiendo $\mu = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i = 1 - \lambda_k$ y $y = \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i/\mu) x_i$, que está en X por ser combinación convexa de puntos de X, se tiene $\sum_i \lambda_i x_i = \mu y + \lambda_k x_k$, y la definición con dos puntos seguida de la hipótesis de inducción aplicada a y dan

$$f\big(\mu y + \lambda_k x_k\big) \;\leq\; \mu f(y) + \lambda_k f(x_k) \;\leq\; \mu \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu} f(x_i) + \lambda_k f(x_k) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_i).$$

La recíproca es el caso $k = 2$.

CONEXIÓN: CON LOS CONJUNTOS CONVEXOS DEL CAPÍTULO 2

Las dos nociones de convexidad, la de conjuntos y la de funciones, no son parecidas: son *la misma*. El **epigrafo** de f es el conjunto de puntos que quedan por encima de su gráfica,

$$\operatorname{epi}(f) = \{(x, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \; x \in X,\; s \geq f(x)\},$$

y se comprueba directamente que f *es convexa si y solo si* epi(f) *es un conjunto convexo*. En un sentido: si $s \geq f(x)$ y $s' \geq f(x')$, entonces $\lambda s + (1-\lambda)s' \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x') \geq f(\lambda x + (1-\lambda)x')$, luego la mezcla sigue en el epigrafo. En el otro, basta tomar $s = f(x)$ y $s' = f(x')$ y leer la pertenencia al epigrafo del punto mezclado. Todo el arsenal del capítulo 2 — separación, hiperplanos de apoyo — se aplica por tanto a funciones convexas sin más que aplicarlo a su epigrafo; el hiperplano de apoyo del epigrafo en un punto de la gráfica, si se escribe como $s = f(x_0) + v^T(x - x_0)$, determina un *subgradiente* v. En un punto interior diferenciable, $v = \nabla f(x_0)$ y ese hiperplano es el tangente.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: DEFINIR LA CONVEXIDAD CON LA SEGUNDA DERIVADA

La definición de arriba es incómoda de comprobar: exige verificar una desigualdad para todos los pares de puntos y todos los λ. Sería mucho más cómodo definir «convexa» como «con segunda derivada no negativa», que es una condición puntual y se comprueba derivando.
Qué ventaja tendría. Es operativa. Para $f(x) = x^4$ uno deriva dos veces, ve $12x^2 \geq 0$ y termina en diez segundos.
Qué la hunde. Que dejaría fuera funciones que son convexas en el sentido que importa. La función $f(x) = |x|$ es convexa — sus cuerdas van por encima, y es el ejemplo central de la regresión robusta y del problema del centro de una nube de puntos — y no es derivable en el origen, así que la definición por la segunda derivada ni siquiera podría formularse. Lo mismo pasa con el máximo de dos funciones lineales, que es la función objetivo de un problema minimax con dos funciones lineales. La definición por cuerdas no pide derivabilidad ninguna, y por eso es la buena.
Y sin embargo. La equivalencia sí vale *cuando* hay dos derivadas, y es exactamente el lema que se probará en la sección 6.2.6: si f es dos veces diferenciable en un abierto convexo, entonces f es convexa si y solo si su hessiana es semidefinida positiva en todo punto. Así que no se pierde la comodidad: se gana como teorema, con sus hipótesis explícitas, en lugar de imponerla como definición. Ese es el puente que convierte una comprobación global — todas las cuerdas de la gráfica — en una cuenta local, y por el que la hessiana acaba apareciendo en las condiciones de optimalidad global; el apéndice F, sección «La convexidad que se usa, y de dónde viene», separa las dos convexidades — la de conjuntos y la de funciones — y dice dónde se construye cada una.

Y ahora el resultado que justifica todo el rodeo por la convexidad.

Teorema. Si X es convexo y f es convexa en X, entonces todo mínimo local es mínimo global de f en X. • CONVIENE SABER DEMOSTRARLA

LA IDEA: NO SE PUEDE BAJAR SIN HABER SUBIDO ANTES

El enunciado dice, en la imagen de la montaña, que *en un paisaje convexo no hay valles secundarios*. Pero conviene ver por qué tiene que ser verdad, porque la razón es muy concreta y es la que se convierte en la demostración.
Suponga que x^* es el fondo de un valle local y que existe, en algún lugar lejano, un punto $\hat{x}$ más bajo. Tienda una cuerda desde x^* hasta $\hat{x}$. Como f es convexa, la gráfica va por debajo de la cuerda; y la cuerda, que empieza en la altura $f(x^*)$ y termina más abajo, baja desde el primer instante. Luego la gráfica también baja desde el primer instante: **caminando desde x^* hacia $\hat{x}$ se empieza a descender inmediatamente**.
Y ahí está la contradicción, porque x^* era mínimo local: había una bola de radio ϵ alrededor suyo en la que nada bajaba. Basta con **no salir de la bola**: se avanza hacia $\hat{x}$

un trecho tan corto que uno siga dentro, y ya se ha bajado. El paisaje no convexo se salva de este argumento porque allí la gráfica puede subir primero — la loma entre los dos valles — y bajar después, de modo que dentro de la bola no se baja nada.
Toda la demostración consiste en *elegir bien de qué trecho estamos hablando*, es decir, en elegir el λ que a la vez haga bajar y no saque de la bola.

Por reducción al absurdo. Se construye un punto que está a la vez dentro de la bola de la minimalidad local (luego no puede bajar) y sobre la cuerda hacia un punto más bajo (luego tiene que bajar).
Paso 1: escribir las dos hipótesis. Que x^* sea mínimo local significa que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$x \in X, \quad \|x - x^*\| < \epsilon \implies f(x) \geq f(x^*). \tag{i}$$

Y suponemos, para llegar a un absurdo, que x^* *no* es mínimo global: existe $\hat{x} \in X$, $\hat{x} \neq x^*$, con

$$f(\hat{x}) < f(x^*). \tag{ii}$$

Paso 2: la convexidad hace bajar la cuerda entera. Para cualquier $\lambda \in (0,1)$, el punto $\lambda\hat{x} + (1-\lambda)x^*$ pertenece a X, porque X es convexo. Aplicando la definición de función convexa y después (ii):

$$f\big(\lambda\hat{x} + (1-\lambda)x^*\big) \leq \lambda f(\hat{x}) + (1-\lambda)f(x^*) < \lambda f(x^*) + (1-\lambda)f(x^*) = f(x^*). \tag{iii}$$

Obsérvese que la desigualdad estricta del centro vale para *todo* $\lambda \in (0,1)$, por pequeño que sea: la cuerda baja desde el primer momento. Este es el contenido geométrico de la convexidad y es lo único que se le pide.
Paso 3: elegir λ para no salir de la bola (el núcleo de la prueba). El paso anterior vale en toda la cuerda, pero (i) solo se puede invocar dentro de la bola. Se necesita por tanto un λ que cumpla las dos cosas. Basta tomar

$$\lambda \in \Big(0,\ \text{mín}\Big\{1,\ \tfrac{\epsilon}{\|\hat{x} - x^*\|}\Big\}\Big),$$

que es un intervalo no vacío porque $\hat{x} \neq x^*$ hace que $\|\hat{x} - x^*\| > 0$. Con esa elección,

$$\big\|\big(\lambda\hat{x} + (1-\lambda)x^*\big) - x^*\big\| = \big\|\lambda(\hat{x} - x^*)\big\| = \lambda\|\hat{x} - x^*\| < \epsilon.$$

La cuenta del medio es el corazón de todo: al mezclar con peso λ, la distancia al punto de partida se multiplica exactamente por λ, así que la distancia se controla a voluntad sin tocar la desigualdad del paso 2.
Paso 4: el choque. El punto $\lambda\hat{x} + (1-\lambda)x^*$ está en X y a distancia menor que ϵ de x^*, luego (i) obliga a

$$f\big(\lambda\hat{x} + (1-\lambda)x^*\big) \geq f(x^*),$$

y (iii) obliga a que sea estrictamente menor que $f(x^*)$. Las dos cosas no pueden ser. El absurdo viene de suponer (ii), luego no existe tal $\hat{x}$ y x^* es mínimo global.

Observación. *Dónde ha entrado cada hipótesis, y qué se rompe al quitarla.*

La **convexidad de** X se usa una sola vez, en el paso 2, para poder afirmar que el punto mezclado sigue siendo factible. Si X no fuera convexo, la cuerda podría salirse del conjunto y no habría nada que evaluar: con $X = \{-1\} \cup \{1\} \subseteq \mathbb{R}$ y $f(x) = x$, el punto $x^* = 1$ es mínimo local (es un punto aislado, cualquier bola pequeña solo lo contiene a él) y no es global.

La **convexidad de** f se usa también una sola vez, en el paso 2, y es la que garantiza que se baja *desde el primer instante* y no solo al final del trayecto. La figura 6.1 muestra el contraejemplo: los dos valles están separados por una loma, y al salir del valle secundario en dirección al principal lo primero que se hace es subir.

Y no se ha usado en ningún momento que f sea diferenciable ni continua siquiera: el teorema es puramente de convexidad. Esa es su fuerza y la razón de que se enuncie aquí, antes de introducir ninguna derivada.

Observación. Si f es *estrictamente* convexa, el mínimo global, cuando existe, es además **único**. En efecto, si $x_1 \neq x_2$ fueran los dos mínimos globales con el mismo valor m, el punto medio cumpliría $f\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) < \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m = m$, lo que contradice que m sea el mínimo. La convexidad estricta, entonces, no solo prohibe los valles secundarios: prohibe también los fondos planos.

DE DÓNDE VIENE: POR QUÉ MÍNIMOS CUADRADOS Y NO OTRA COSA

La pregunta que abre la sección tiene fecha y nombres. El objeto observado en 1801 por Giuseppe Piazzi desde Palermo fue Ceres, y quien calculó dónde volver a mirar fue Carl Friedrich Gauss, con veinticuatro años. El método de mínimos cuadrados lo publicó por primera vez Adrien-Marie Legendre en 1805, en un apéndice sobre la determinación de órbitas de cometas; Gauss lo publicó en 1809 afirmando que lo usaba desde 1795, y la disputa de prioridad entre ambos fue larga y agria.

¿Por qué usar cuadrados y no valores absolutos? Con residuos afines en los parámetros, la suma de cuadrados es diferenciable y convexa, y la condición de gradiente nulo da las ecuaciones normales, un sistema lineal. Los valores absolutos conservan la convexidad, pero exigen tratar los puntos donde falta derivabilidad. Con residuos no lineales, como puede ocurrir al ajustar una órbita, la suma de cuadrados no tiene por qué ser convexa.

La justificación estadística requiere sus propias hipótesis: con errores normales, independientes, centrados y de varianza común, minimizar la suma de cuadrados equivale a maximizar la verosimilitud. Así se conecta este criterio de ajuste con la inferencia; otros modelos de error pueden conducir a criterios distintos.[a]

[a] Sobre el argumento de Gauss, J. R. Magnus, *Gauss on least-squares and maximum-likelihood estimation*, Archive for History of Exact Sciences (2022), doi:10.1007/s00407-022-00291-w.

Qué se ha ganado. La pregunta de la órbita tiene ya un marco, aunque todavía no una respuesta. «La que mejor se ajusta» es el mínimo de una función de los parámetros, y antes de buscarlo hay tres cosas que decidir sobre él. Si existe: Weierstrass lo garantiza en un compacto, pero no en $\mathbb{R}^n$ entero, que es el caso de este capítulo. Si el que se encuentre es el bueno: un mínimo local solo compite con sus vecinos, y puede haber un valle más hondo lejos. Y cuándo esa duda desaparece: si el dominio y la función son convexos, todo mínimo local es global, y los mínimos forman un conjunto convexo. Queda abierto lo principal, que es cómo se reconoce un mínimo cuando se tiene delante sin comparar con todos los puntos. La sección siguiente lo responde con el gradiente y la hessiana, que se calculan en el propio punto.

6.2 Condiciones de optimalidad sin restricciones

La pregunta

Un fabricante regula seis mandos de una máquina buscando que el producto salga lo más barato posible. Prueba una combinación, mide el coste, corrige, vuelve a medir. Llega un momento en que ningún retoque pequeño mejora nada. ¿Puede concluir de ahí que ha terminado? Y si no puede, ¿qué tendría que medir, además del coste, para estar seguro?

Esta sección responde a esa pregunta con tres teoremas. El primero dice qué le pasa *obligatoriamente* a la función en un mínimo: es la **condición necesaria**, y sirve para *descartar* candidatos. El segundo da una propiedad que, si se cumple, *garantiza* el mínimo: es la **condición suficiente**, y sirve para *certificar*. Y el tercero dice bajo qué forma del paisaje el certificado local vale además como certificado global.

Los tres son la versión en $\mathbb{R}^n$, y con demostración, de lo que el lector trae del cálculo de varias variables: gradiente nulo en un extremo, hessiana semidefinida positiva si es mínimo, hessiana definida positiva como certificado, y el hueco entre las dos últimas donde el segundo orden no decide. Esa versión de partida, en dimensión dos y con el criterio del determinante y la traza, está reenunciada en el apéndice F, sección «Análisis»; conviene leerla antes que esta sección, porque aquí se generaliza y se usa sin volver a contarla desde el principio.

Recordemos el problema, ya sin restricciones de igualdad ni de desigualdad:

$$(\text{PNL}) \qquad \begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeto a:} && x \in S \subseteq \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

y a partir de aquí, y durante todo el tema, S **será un abierto no vacío**.

La idea: por qué S tiene que ser abierto

La hipótesis no es un tecnicismo: es la que hace que el capítulo se llame «sin restricciones». Que S sea abierto significa que *todo punto de S tiene sitio a su alrededor*: alrededor de cada $x \in S$ cabe una bola entera contenida en S, así que desde cualquier punto se puede uno mover un poco en *cualquier* dirección sin salirse.

Y eso es exactamente lo que van a explotar todas las demostraciones. El argumento será siempre el mismo: «si en x^* pasara tal cosa, podría moverme un poco en tal dirección y bajaría; luego x^* no era mínimo». Ese razonamiento necesita que el movimiento sea posible; en un punto de la frontera puede estar bloqueado: en $S = [0, 1]$ el punto $x^* = 0$ es mínimo de $f(x) = x$ y sin embargo $f'(0) = 1 \neq 0$, porque desde 0 no se puede ir hacia la izquierda. El borde bloquea la salida y rompe la condición necesaria.

Dicho de otro modo: **en un abierto, el único obstáculo para bajar es la propia función**. Cuando aparezcan restricciones — y aparecen en el tema siguiente al de este capítulo — habrá un segundo obstáculo, la frontera, y la condición $\nabla f = 0$ se sustituirá por otra que reparte la culpa entre los dos. Aquí no: aquí toda la culpa es de f.

6.2.1 Las dos herramientas: los desarrollos de primer y segundo orden

Todas las demostraciones de la sección se apoyan en dos igualdades del cálculo diferencial. Van aquí juntas, numeradas (1) y (2), y conviene tenerlas delante, porque no se usará ninguna otra cosa.

Observación (Las dos herramientas)**.** *Primer orden.* Si f es diferenciable en S, para cualquier $x^* \in S$ existe una función $\alpha(x^*, \cdot) : S \to \mathbb{R}$ con $\lim_{x \to x^*} \alpha(x^*, x) = 0$ tal que

$$f(x) = f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*) + \|x - x^*\| \, \alpha(x^*, x) \qquad \forall x \in S. \tag{1}$$

Equivalentemente, para todo $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, y todo $\lambda \in \mathbb{R}$ con $x^* + \lambda d \in S$,

$$f(x^* + \lambda d) = f(x^*) + \lambda \nabla f(x^*)^T d + |\lambda| \, \|d\| \, \alpha(x^*, x^* + \lambda d), \qquad \lim_{\lambda \to 0} \alpha(x^*, x^* + \lambda d) = 0.$$

Segundo orden. Aquí, 2-diferenciable significa que la primera derivada es diferenciable; no basta con que existan todas las derivadas parciales segundas. Si f es 2-diferenciable en S, para cualquier $x^* \in S$ existe $\beta(x^*, \cdot) : S \to \mathbb{R}$ con $\lim_{x \to x^*} \beta(x^*, x) = 0$ tal que

$$f(x) = f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*) + \tfrac{1}{2}(x - x^*)^T \nabla^2 f(x^*)(x - x^*) + \|x - x^*\|^2 \beta(x^*, x) \quad \forall x \in S. \tag{2}$$

Equivalentemente, en la versión por direcciones,

$$f(x^* + \lambda d) = f(x^*) + \lambda \nabla f(x^*)^T d + \tfrac{\lambda^2}{2} d^T \nabla^2 f(x^*) d + \lambda^2 \|d\|^2 \beta(x^*, x^* + \lambda d),$$
$$\text{con} \quad \lim_{\lambda \to 0} \beta(x^*, x^* + \lambda d) = 0.$$

LA IDEA: QUÉ SON DE VERDAD α Y β

Las dos fórmulas dicen lo mismo con distinta precisión: *cerca de x^*, la función se parece a un polinomio*. La (1) dice que se parece a un plano (el plano tangente); la (2), que se parece a una cuadrática (el paraboloide que mejor la imita). Lo que hay que entender es el papel del último sumando, que es donde vive todo el rigor.
En (1), el error cometido al sustituir f por su plano tangente es $\|x - x^*\|\alpha$. Está escrito como un producto a propósito: $\|x - x^*\|$ es el tamaño del desplazamiento y α es un factor que *tiende a cero*. Así que el error no solo es pequeño: es pequeño **comparado con el propio desplazamiento**. Esa es la definición de diferenciabilidad y es lo único que se va a usar.
En (2) pasa lo mismo un escalón más arriba: el error es $\|x - x^*\|^2\beta$, con $\beta \to 0$, o sea, pequeño comparado con $\|x - x^*\|^2$. El término cuadrático de Taylor puede anularse en alguna dirección. Y ahí está la clave de todas las demostraciones que vienen: **al dividir por λ o por λ^2 y hacer tender λ a cero, los términos de error desaparecen y sobrevive exactamente el término que interesa**. Todas las pruebas de esta sección consisten en montar el cociente adecuado y mirar qué queda.
Una imagen para retenerlo: usted mira el paisaje con una lupa cada vez más potente centrada en x^*. Con poco aumento ve el terreno tal cual. Con más, ve un plano inclinado, y las irregularidades han desaparecido: eso es (1). Si el plano resulta ser horizontal y sigue usted aumentando, aparece un cuenco, o una silla de montar: eso es (2). La sección entera consiste en leer lo que se ve con cada aumento.

CONEXIÓN: CON DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Las dos igualdades son la fórmula de Taylor con resto infinitesimal, de primer y de segundo orden, y se dan allí con estas hipótesis. Conviene recordar dos cosas que se usarán sin avisar. La primera es quiénes son los objetos: $\nabla f(x^*)$ es el vector columna de las derivadas parciales $(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$ evaluadas en x^*, y $\nabla^2 f(x^*)$ es la matriz $n \times n$ de las derivadas segundas $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$. La segunda es que $\nabla^2 f(x^*)$ **es simétrica** cuando las derivadas segundas son continuas, por el teorema de Schwarz; esa simetría es la que permite hablar de sus autovalores reales y de que sea definida o semidefinida positiva. La segunda derivada también es simétrica bajo la hipótesis de diferenciabilidad de la primera derivada que usamos aquí.
Y una tercera, que es de vocabulario y se usa a partir de aquí sin volver a decirla: una matriz simétrica H es **definida positiva** si $d^T H d > 0$ para todo $d \neq 0$, y **semidefinida positiva** si $d^T H d \geq 0$; por ser simétrica, eso equivale a que sus autovalores sean, respectivamente, todos positivos o todos no negativos. El gradiente, la hessiana, el desarrollo de Taylor y el criterio del signo por autovalores están reunidos, con un ejemplo de cada caso y con la comprobación rápida en dimensión dos por el determinante y la traza, en el apéndice F, sección «Análisis».

6.2.2 La condición necesaria de optimalidad

Teorema (Condición necesaria de optimalidad)**.**

i) Sea f diferenciable en S y x^* un mínimo local. Entonces $\nabla f(x^*) = 0$.

ii) Si f es 2-diferenciable en S y x^* es un mínimo local, entonces $\nabla^2 f(x^*)$ es semidefinida positiva.

• CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: SI EL SUELO ESTÁ INCLINADO, TODAVÍA SE PUEDE BAJAR

Qué dice, en palabras de andar por casa. Que en el fondo de un valle pasan dos cosas: el suelo está horizontal, y además se curva hacia arriba (o al menos no se curva hacia abajo) en todas las direcciones.
Por qué tiene que ser verdad la primera parte. Si el suelo estuviera inclinado, habría una dirección cuesta abajo, y bastaría dar un paso en ella. ¿Cuál es esa dirección? La propia pendiente, cambiada de signo: $d = -\nabla f(x^*)$. Con ella, el término lineal del desarrollo (1) vale

$$\nabla f(x^*)^T d = -\nabla f(x^*)^T \nabla f(x^*) = -\|\nabla f(x^*)\|^2,$$

que es estrictamente negativo en cuanto el gradiente no sea nulo. Es decir: **el gradiente, si no es cero, señala siempre una dirección de bajada, la suya cambiada de signo**. Un mínimo local no puede permitirse eso, porque en su bola nada baja.
Por qué tiene que ser verdad la segunda parte. Supuesta ya nula la pendiente, el desarrollo (2) deja como término dominante $\frac{\lambda^2}{2} d^T \nabla^2 f(x^*) d$. Su coeficiente $d^T \nabla^2 f(x^*) d$ es la segunda derivada de $\lambda \mapsto f(x^* + \lambda d)$ en 0. Si fuera negativo en alguna dirección, el terreno bajaría en ella como una parábola invertida, y otra vez el mínimo local sería imposible. Luego la curvatura tiene que ser ≥ 0 en todas las direcciones, y eso es exactamente lo que significa que $\nabla^2 f(x^*)$ sea semidefinida positiva.
La intuición falsa que hay que desmontar antes. Se piensa a menudo que este teorema *caracteriza* los mínimos, es decir, que gradiente nulo y hessiana semidefinida positiva equivalen a ser mínimo local. Es falso, y el contraejemplo cabe en una línea: $f(x) = x^3$ en $x^* = 0$ tiene $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$, que es semidefinida positiva por los pelos,

y sin embargo 0 no es mínimo de nada, porque f toma valores negativos justo a su izquierda. El teorema **solo sirve para descartar**: da una criba, no un certificado. Lo que hace es reducir la búsqueda de un continuo de puntos a la lista de soluciones de $\nabla f(x) = 0$, que es un sistema de n ecuaciones con n incógnitas y puede tener infinitas soluciones; después se afina el conjunto de candidatos con el signo de la curvatura.
El corazón, en una frase. Toda la demostración consiste en poner en conflicto dos cosas que no pueden convivir: **el desarrollo de Taylor, que dice que se baja**, y **la minimalidad local, que dice que no se baja**. El único trabajo técnico es garantizar que las dos hablan del mismo punto, es decir, elegir un paso lo bastante corto para no salir de la bola.

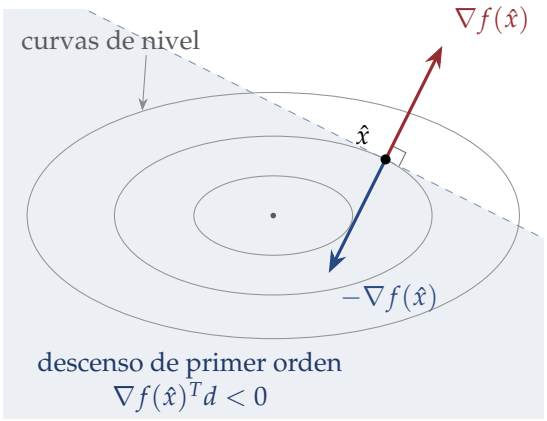


Figura 6.3: Curvas de nivel de $f(x_1, x_2) = x_1^2/4 + x_2^2$. En $\hat{x} = (\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, el gradiente es perpendicular a la curva de nivel y señala el máximo crecimiento entre direcciones de igual norma euclídea. El sombreado representa los extremos $\hat{x} + d$ de los vectores con $\nabla f(\hat{x})^T d < 0$: dan descenso para pasos positivos suficientemente pequeños. Entre ellos está $-\nabla f(\hat{x})$; por eso $\hat{x}$ no puede ser un mínimo.

La primera parte obtiene una contradicción al comparar Taylor con la minimalidad local. La segunda pasa al límite en cocientes no negativos.

Parte i): el gradiente se anula.
Paso 1: escribir qué significa ser mínimo local. Como S es abierto, podemos elegir $\epsilon > 0$ con $B(x^*, \epsilon) \subset S$ y tal que

$$x \in S, \quad \|x - x^*\| < \epsilon \implies f(x) \geq f(x^*). \tag{H}$$

Suponemos, para llegar a un absurdo, que $\nabla f(x^*) \neq 0$.
Paso 2: elegir la dirección que baja. Tomamos $d = -\nabla f(x^*)$, que es un vector no nulo. Sustituyendo en la versión por direcciones de (1), con $\lambda > 0$:

$$f\big(x^* - \lambda \nabla f(x^*)\big) = f(x^*) - \lambda\, \nabla f(x^*)^T \nabla f(x^*) + \lambda\, \|\nabla f(x^*)\|\, \alpha\big(x^*, x^* - \lambda \nabla f(x^*)\big).$$

(Se ha usado $|\lambda| = \lambda$ porque $\lambda > 0$, y $\|d\| = \|\nabla f(x^*)\|$.)

Paso 3: pasar al límite y quedarse con el término dominante (el núcleo de la prueba). Restamos $f(x^*)$, dividimos por λ y hacemos $\lambda \to 0^+$:

$$\frac{f\big(x^* - \lambda\nabla f(x^*)\big) - f(x^*)}{\lambda} = -\|\nabla f(x^*)\|^2 + \|\nabla f(x^*)\|\,\alpha\big(x^*, x^* - \lambda\nabla f(x^*)\big)$$
$$\xrightarrow[\lambda\to 0^+]{} -\|\nabla f(x^*)\|^2,$$

porque el límite de α es cero. Y $-\|\nabla f(x^*)\|^2 < 0$ por la suposición del paso 1. Aquí está todo el peso del argumento: *el término de error se ha ido, y lo que sobrevive es estrictamente negativo*. Como el límite de un cociente es negativo, el cociente mismo es negativo cerca de 0: existe $\delta > 0$ tal que

$$\lambda \in (0,\delta) \implies \frac{f\big(x^* - \lambda\nabla f(x^*)\big) - f(x^*)}{\lambda} < 0 \implies f\big(x^* - \lambda\nabla f(x^*)\big) < f(x^*). \quad (*)$$

Paso 4: no salirse de la bola. La desigualdad (H) solo se puede invocar dentro de la bola de radio ϵ. Ahora bien, si $\lambda \in \big(0, \epsilon/\|\nabla f(x^*)\|\big)$, entonces

$$\big\|\big(x^* - \lambda\nabla f(x^*)\big) - x^*\big\| = \lambda\|\nabla f(x^*)\| < \epsilon,$$

y (H) obliga a

$$f\big(x^* - \lambda\nabla f(x^*)\big) \geq f(x^*). \quad (**)$$

Paso 5: el choque. Basta tomar $\lambda \in \big(0, \min\{\delta,\ \epsilon/\|\nabla f(x^*)\|\}\big)$, que es un intervalo no vacío, para que $(*)$ y $(**)$ valgan a la vez. Esto es imposible, luego la suposición era falsa y $\nabla f(x^*) = 0$.

Parte ii): la hessiana es semidefinida positiva.
Hay que probar que $d^T\nabla^2 f(x^*)d \geq 0$ para todo $d \in \mathbb{R}^n$. Aquí no hace falta reducción al absurdo: sale directamente del desarrollo de segundo orden.
Paso 1: fijar una dirección y desarrollar. Sea $d \in \mathbb{R}^n$ arbitrario, que podemos suponer no nulo (para $d = 0$ la desigualdad que hay que probar es $0 \geq 0$). Por (2) en su versión por direcciones,

$$f(x^* + \lambda d) = f(x^*) + \lambda \underbrace{\nabla f(x^*)^T d}_{=0 \text{ por la parte i)}} + \tfrac{\lambda^2}{2} d^T\nabla^2 f(x^*)d + \lambda^2\|d\|^2\beta(x^*, x^* + \lambda d).$$

El término lineal se anula *gracias a la parte i)*, que ya está probada: sin ella este argumento no arrancaría, porque el término de primer orden dominaría al de segundo.
Paso 2: montar el cociente por λ^2 y pasar al límite (el núcleo). Restando $f(x^*)$ y dividiendo por $\lambda^2 > 0$,

$$\frac{f(x^* + \lambda d) - f(x^*)}{\lambda^2} = \tfrac{1}{2} d^T\nabla^2 f(x^*)d + \|d\|^2\beta(x^*, x^* + \lambda d) \xrightarrow[\lambda\to 0]{} \tfrac{1}{2} d^T\nabla^2 f(x^*)d. \quad (\star)$$

Obsérvese la elección del divisor: dividir por λ habría dado 0 y no habría dicho nada; dividir por λ^2 es lo que pone la curvatura en primer plano.
Paso 3: usar la minimalidad para acotar el cociente. Si $|\lambda| < \epsilon/\|d\|$, entonces $\|(x^* + \lambda d) - x^*\| = |\lambda|\|d\| < \epsilon$, luego por (H) se tiene $f(x^* + \lambda d) \geq f(x^*)$ y por tanto

$$\frac{f(x^* + \lambda d) - f(x^*)}{\lambda^2} \geq 0 \qquad \text{para todo } \lambda \text{ con } 0 < |\lambda| < \epsilon/\|d\|.$$

> *Paso 4: concluir.* Un límite de cantidades no negativas es no negativo. Aplicado a $(\star)$, esto da $\frac{1}{2}d^T\nabla^2 f(x^*)d \geq 0$, es decir, $d^T\nabla^2 f(x^*)d \geq 0$. Como d era arbitrario, $\nabla^2 f(x^*)$ es semidefinida positiva.

Observación. *Dónde ha entrado cada hipótesis.*

Que S **sea abierto** se usa en los pasos 4 de la parte i) y 3 de la parte ii), sin nombrarlo: es lo que permite afirmar que los puntos $x^* - \lambda\nabla f(x^*)$ y $x^* + \lambda d$ siguen estando en S para λ pequeño, y por tanto que f está definida ahí y que (H) se les aplica. Si S tuviera frontera y x^* estuviera en ella, el argumento se cae: en $S = [0, 1]$ y $f(x) = x$, el mínimo está en $x^* = 0$ con $f'(0) = 1 \neq 0$.

Que x^* sea **mínimo local** y no global se usa exactamente igual: lo único que se necesita es una bola, por pequeña que sea. Por eso el teorema no distingue entre los tres puntos de la figura 6.1. Que las condiciones no son suficientes lo muestra, por ejemplo, $f(x) = x^3$ en el origen.

Que f sea **diferenciable** es imprescindible y no es una comodidad. La función $f(x) = |x|$ tiene un mínimo global estricto en 0 y no tiene gradiente ahí. El teorema no dice nada falso sobre ella: simplemente no se le aplica. Y conviene retenerlo, porque muchos problemas reales de optimización — el ajuste por desviaciones absolutas, los problemas minimax — son exactamente de ese tipo y exigen herramientas distintas.

En esta demostración, la parte ii) **usa la parte i)** para eliminar el término lineal.

Lo que hay que llevarse para poder reconstruirla. Tres cosas y nada más. Una, que la dirección que se ensaya es $d = -\nabla f(x^*)$, porque con ella el término lineal vale $-\|\nabla f(x^*)\|^2$ y es negativo sin discusión. Dos, que se divide por λ en la primera parte y por λ^2 en la segunda, y que al pasar al límite los términos de error se van porque α y β tienden a cero. Tres, que la contradicción solo se puede montar dentro de la bola, y por eso el λ se elige menor que ϵ dividido por la norma de la dirección. Con esas tres ideas la demostración se rehace entera.

La versión para máximos, sin rehacer nada. El capítulo habla de mínimos, pero la misma pregunta se hace a menudo sobre máximos, y no hace falta un teorema nuevo. Si x^* es máximo local de f, entonces $f(x) \leq f(x^*)$ en una bola, que es lo mismo que $-f(x) \geq -f(x^*)$: x^* es *mínimo* local de $-f$. Se aplica el teorema a $-f$, cuyo gradiente es $-\nabla f$ y cuya hessiana es $-\nabla^2 f$:

$$-\nabla f(x^*) = 0 \qquad \text{y} \qquad d^T\big(-\nabla^2 f(x^*)\big)d \geq 0 \ \ \forall d,$$

es decir, $\nabla f(x^*) = 0$ y $d^T\nabla^2 f(x^*)d \leq 0$ para todo d: la hessiana es **semidefinida negativa**. En palabras: en la cumbre el suelo también está horizontal, pero se curva hacia abajo, o al menos no hacia arriba, en todas las direcciones. Lo mismo vale para la condición suficiente que viene después: gradiente nulo y hessiana *definida negativa* dan un máximo local estricto. La tabla completa es corta:

	mínimo local	**máximo local**
necesaria	$\nabla f = 0$, hessiana semidefinida positiva	$\nabla f = 0$, hessiana semidefinida negativa
suficiente	$\nabla f = 0$, hessiana definida positiva	$\nabla f = 0$, hessiana definida negativa

Un caso concreto: $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_1$ tiene gradiente $(-2x_1 + 2,\ -2x_2)^T$, que solo se anula en $(1, 0)$, y hessiana $\mathrm{diag}(-2, -2)$, definida negativa. Luego $(1, 0)$ es máximo local estricto, con $f(1, 0) = 1$. Y de hecho es global, porque $1 - f(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \geq 0$ en todo el plano.

Dónde se falla al escribir la demostración.

- *Dividir por λ sin fijar su signo.* En la parte i) se toma $\lambda > 0$; si λ pudiera ser negativo, dividir por él daría la vuelta a la desigualdad. En la parte ii) no hay problema porque se divide por $\lambda^2 > 0$, y por eso ahí λ puede tener cualquier signo.
- *Pasar al límite con desigualdades estrictas.* De «el cociente es ≥ 0 cerca de 0» sale «el límite es ≥ 0», nunca «> 0». Por eso la parte ii) da semidefinida y no definida, y por eso la condición necesaria no puede pedir más.
- *Olvidar la bola.* (H) solo habla de puntos a distancia menor que ϵ. Una prueba que no elige λ menor que $\epsilon / \|d\|$ compara f en puntos donde la minimalidad local no dice nada.
- *Dividir por λ en la parte ii).* El cociente vale $\nabla f(x^*)^T d = 0$ en el límite y no dice nada sobre la hessiana. El divisor tiene que ser λ^2, el orden del primer término que no se ha anulado.
- *En la versión para máximos, cambiar de signo solo una cosa.* Pasar a $-f$ cambia el signo del gradiente *y* el de la hessiana; lo que queda es «semidefinida negativa», no «semidefinida positiva de f».

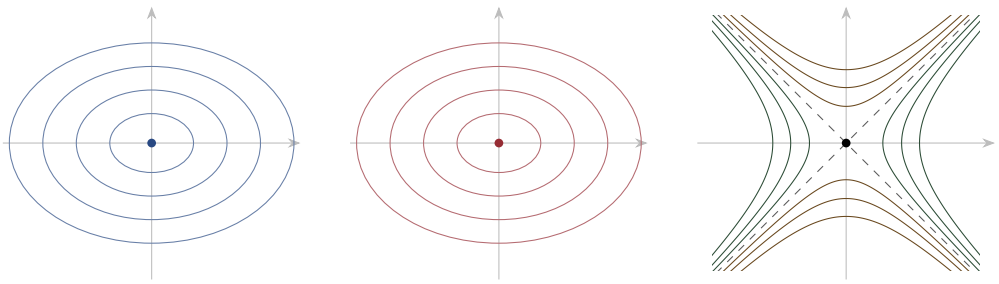
6.2.3 Puntos críticos, sillas y lo que la condición necesaria no ve

A los puntos donde se anula el gradiente se les llama **puntos críticos** o **estacionarios**. La condición necesaria dice que el mínimo, si existe y si f es diferenciable, está entre ellos. Lo que no dice es cuál, ni siquiera si alguno lo es.

Para ver lo que puede pasar basta con la función cuadrática más simple de dos variables,

$$f(x_1, x_2) = a\,x_1^2 + b\,x_2^2,$$

que, si a y b son no nulos, tiene el origen como único punto crítico. Su hessiana es la matriz diagonal constante $\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$. Según los signos de a y b salen los tres comportamientos posibles.



$a > 0, b > 0$
mínimo: hessiana definida positiva

$a < 0, b < 0$
máximo: hessiana definida negativa

$a = -b > 0$
punto de silla: hessiana indefinida

Figura 6.4: Tres tipos de punto crítico en funciones cuadráticas, vistos por sus curvas de nivel. En los dos primeros las curvas de nivel son elipses cerradas alrededor del punto; en el tercero son hipérbolas de $x_1^2 - x_2^2$, y las dos rectas discontinuas son las direcciones a lo largo de las cuales la función no cambia. El collado es el caso peligroso: el gradiente es nulo y sin embargo se baja en dos de los cuatro sectores.

LA IDEA: POR QUÉ LA SILLA ES EL CASO QUE SE ESCAPA

El máximo se detecta fácilmente y nadie lo confunde con un mínimo. El caso peligroso es el tercero, el **punto de silla** o **collado**, y merece la pena ver por qué.

Piense en un puerto de montaña entre dos cumbres. Si camina por la carretera, de un valle al otro, el puerto es el punto más *alto* del trayecto. Si camina por la cresta, de cumbre a cumbre, el puerto es el punto más *bajo*. Es a la vez máximo en una dirección y mínimo en la perpendicular. En este modelo suave, las derivadas en ambas direcciones se anulan: por eso el gradiente es nulo. No hay una pendiente que cancele a la otra.

La consecuencia práctica es seria. Un algoritmo que solo mire el gradiente se para en un collado y anuncia que ha terminado, porque efectivamente $\nabla f = 0$; y sin embargo bastaba moverse un poco por la carretera hacia un valle para seguir bajando. Distinguir el fondo del valle del collado es lo que hace el segundo orden cuando no degenera: la hessiana definida positiva certifica un mínimo; la indefinida proporciona direcciones de curvatura positiva y negativa. Si es semidefinida pero no definida, puede hacer falta estudiar términos de orden mayor.

Conviene ver también el caso en que la hessiana no decide nada. En una variable:

- $f(x) = x^4$ tiene en 0 un mínimo global estricto, y sin embargo $f''(0) = 0$: la hessiana es semidefinida positiva pero **no** definida positiva. La condición suficiente que viene a continuación no se le aplica, aunque el punto sea un mínimo.
- $f(x) = -x^4$ tiene en 0 un máximo, y sin embargo $f''(0) = 0$ otra vez: los mismos datos de primer y segundo orden que en el caso anterior, y la conclusión contraria.
- $f(x) = x^3$ tiene en 0 un punto de inflexión, ni máximo ni mínimo, y otra vez $f'(0) = f''(0) = 0$.

Las tres funciones tienen exactamente la misma información de primer y segundo orden en el origen — gradiente nulo y hessiana nula, que es semidefinida positiva — y las tres se comportan de manera distinta. Con eso queda claro de una vez que la condición necesaria no puede ser suficiente: hay un hueco entre las dos, y ese hueco es exactamente el caso en que la hessiana es semidefinida pero no definida.

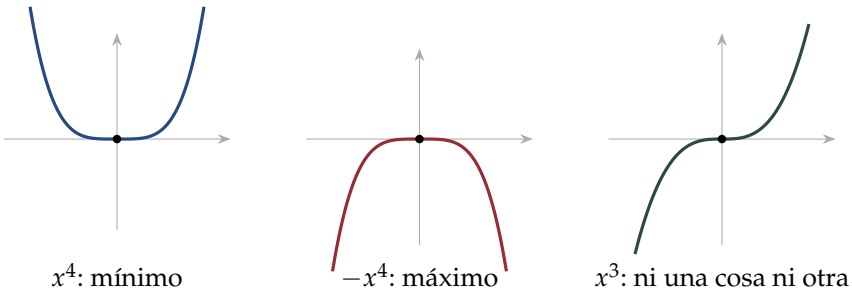


Figura 6.5: Tres funciones con $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$. La información de segundo orden es la misma en las tres y el comportamiento es distinto: ahí está el hueco entre la condición necesaria y la suficiente.

6.2.4 La condición suficiente de optimalidad local

Para cerrar el hueco basta con exigir a la curvatura que sea estrictamente positiva en todas las direcciones, y no solo no negativa.

Teorema (Condición suficiente de optimalidad local)**.** Sea f dos veces diferenciable en S abierto no vacío. Supongamos que $x^* \in S$ es tal que $\nabla f(x^*) = 0$ y $\nabla^2 f(x^*)$ es definida positiva. Entonces x^* es un mínimo local estricto.

De hecho, existen $\gamma > 0$ y $\delta > 0$ tales que

$$f(x) \geq f(x^*) + \gamma \|x - x^*\|^2 \qquad \forall x \in S \text{ tal que } \|x - x^*\| < \delta.$$

• CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: UN CUENCO DE VERDAD, CON PAREDES QUE NO SE PUEDEN APLANAR

Qué dice. Que si el suelo está horizontal y además se curva hacia arriba en todas las direcciones, entonces se está en el fondo de un cuenco. Y dice algo más fuerte, que es la segunda mitad del enunciado: no solo se sube al alejarse, sino que se sube *al menos como una parábola*, con un coeficiente γ fijo. A eso se le llama **crecimiento cuadrático**, y es mucho más informativo que el simple «$f(x) > f(x^*)$».

Por qué hace falta que sea definida positiva y no basta semidefinida. Este es el punto delicado. «Definida positiva» significa $d^T \nabla^2 f(x^*) d > 0$ para todo $d \neq 0$; parece que la diferencia con «≥ 0» es un detalle, y no lo es. La razón es que hay infinitas direcciones, y un ínfimo de cantidades positivas puede valer cero. Lo que salva la situación es un hecho de álgebra lineal: para una matriz simétrica definida positiva, al restringir a $\|d\| = 1$, ese ínfimo *no* es cero, sino el menor autovalor, que es estrictamente positivo. Esa es la pieza que convierte una colección de desigualdades estrictas, dirección a dirección, en una única cota uniforme válida para todas a la vez. **Sin uniformidad no hay teorema**, porque el término de error del desarrollo de Taylor hay que dominarlo de una sola vez, no dirección a dirección.
La imagen. Un cuenco cuya pared, en la peor de las direcciones, sube todavía con pendiente creciente. La función x^4 también tiene un mínimo, pero su cuenco es *plano hasta segundo orden* en el fondo: no hay ninguna parábola que quepa por debajo de ella cerca del origen, y por eso no cumple el enunciado aunque el punto sí sea mínimo. La condición es suficiente, no necesaria, y x^4 es la prueba.
El corazón, en una frase. **La curvatura da un término de tamaño $\frac{\alpha}{2}\|x - x^*\|^2$ y el error de Taylor es de tamaño $\varepsilon\|x - x^*\|^2$ con ε tan pequeño como se quiera; se elige $\varepsilon < \alpha/2$ y la curvatura gana.** Toda la prueba cabe ahí.

Antes de la demostración, la pieza de álgebra lineal que se acaba de mencionar, enunciada y probada para no dejar agujeros.

Lema. Sea A una matriz simétrica $n \times n$ definida positiva y sea $\alpha > 0$ su menor autovalor. Entonces $d^T A d \geq \alpha \|d\|^2$ para todo $d \in \mathbb{R}^n$.

Por el teorema espectral — toda matriz simétrica real se diagonaliza en una base ortonormal de autovectores, y sus autovalores son reales —, existe Q ortogonal ($Q^T Q = I$) y $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ con $A = Q \Lambda Q^T$, y los λ_i son positivos por ser A definida positiva. Es esa simetría, garantizada por el teorema de Schwarz cuando las derivadas segundas son continuas, la que permite hablar del signo de la hessiana por sus autovalores (apéndice F, sección «Análisis»). Escribiendo $y = Q^T d$,

$$d^T A d = d^T Q \Lambda Q^T d = y^T \Lambda y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \;\geq\; \alpha \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \alpha \|y\|^2 = \alpha \|d\|^2,$$

donde la última igualdad vale porque las matrices ortogonales conservan la norma: $\|Q^T d\|^2 = d^T Q Q^T d = d^T d = \|d\|^2$.

(De la condición suficiente.) La idea, en una línea: *escribir el desarrollo de segundo orden, acotar por abajo el término cuadrático con el menor autovalor y elegir el radio de la bola lo bastante pequeño para que el error de Taylor no se coma esa cota*.
Paso 1: la cota uniforme de la curvatura. Sea $\alpha > 0$ el menor autovalor de $\nabla^2 f(x^*)$, que es positivo porque la matriz es definida positiva. Por el lema del menor autovalor,

$$d^T \nabla^2 f(x^*) d \;\geq\; \alpha \|d\|^2 \qquad \forall d \in \mathbb{R}^n. \tag{$*$}$$

Este paso es el que convierte «positiva en cada dirección» en «positiva con un mismo coeficiente en todas las direcciones».
Paso 2: el desarrollo de segundo orden con el término lineal ya muerto. Por (2), y usando $\nabla f(x^*) = 0$, para todo $x \in S$:

$$f(x) = f(x^*) + \tfrac{1}{2}(x - x^*)^T \nabla^2 f(x^*)(x - x^*) + \|x - x^*\|^2 \beta(x^*, x).$$

Aplicando $(*)$ con $d = x - x^*$,

$$f(x) - f(x^*) \;\geq\; \tfrac{\alpha}{2}\|x - x^*\|^2 + \|x - x^*\|^2 \beta(x^*, x) = \Big(\tfrac{\alpha}{2} + \beta(x^*, x)\Big)\|x - x^*\|^2. \quad (**)$$

Paso 3: ahogar el error de Taylor (el núcleo de la prueba). El paréntesis de $(**)$ tiene un término fijo y positivo, $\alpha/2$, y otro, $\beta(x^*, x)$, que tiende a cero cuando $x \to x^*$ pero cuyo signo no controlamos. Se trata de acercarse lo bastante a x^* para que el segundo no pueda anular al primero. Formalmente: como $\lim_{x \to x^*} \beta(x^*, x) = 0$, dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - x^*\| < \delta \implies |\beta(x^*, x)| < \varepsilon, \quad \text{es decir} \quad -\varepsilon < \beta(x^*, x) < \varepsilon.$$

Elegimos ese ε nosotros, y lo elegimos estrictamente menor que $\alpha/2$: por ejemplo $\varepsilon = \alpha/4$. Con esa elección, para $\|x - x^*\| < \delta$,

$$\tfrac{\alpha}{2} + \beta(x^*, x) \;>\; \tfrac{\alpha}{2} - \varepsilon \;>\; 0.$$

Paso 4: bautizar la constante y concluir. Llamando $\gamma := \frac{\alpha}{2} - \varepsilon > 0$, la desigualdad $(**)$ se convierte en

$$f(x) - f(x^*) \;\geq\; \gamma\|x - x^*\|^2 \qquad \text{para todo } x \in S \text{ con } \|x - x^*\| < \delta,$$

que es la segunda afirmación del enunciado. Y de ella sale la primera de inmediato: si $x \neq x^*$ entonces $\|x - x^*\|^2 > 0$ y por tanto $f(x) > f(x^*)$, luego x^* es mínimo local estricto.

Observación. *Dónde ha entrado cada hipótesis, y qué se rompe al quitarla.*

La hipótesis $\nabla f(x^*) = 0$ se usa en el paso 2 y no se puede debilitar: sin ella sobreviviría el término lineal, que es de orden $\|x - x^*\|$ y domina al cuadrático cerca del punto; entonces manda el signo del gradiente y no el de la hessiana.

La hipótesis de que $\nabla^2 f(x^*)$ sea **definida** positiva, y no solo semidefinida, se usa en el paso 1: es lo que hace $\alpha > 0$. Con $\alpha = 0$ la cota $(*)$ se queda en $d^T \nabla^2 f(x^*) d \geq 0$, el paso 3 no se puede dar — no hay nada positivo con lo que ahogar a β — y el teorema se cae. Que se cae de verdad, y no solo la demostración, lo prueba $f(x) = x^3$ en 0.

Que S **sea abierto** se usa, otra vez sin nombrarlo, para poder tomar la bola de radio δ alrededor de x^* dentro de S.

Y una asimetría que conviene subrayar: la condición necesaria pide semidefinida positiva y la suficiente pide definida positiva. Entre las dos queda la franja de las hessianas semidefinidas pero no definidas, y en esa franja el teorema no dice nada: puede haber mínimo (x^4), máximo ($-x^4$) o ninguna de las dos cosas (x^3). Ahí hay que mirar términos de orden superior o estudiar directamente el signo de $f(x) - f(x^*)$ cerca del punto.

Lo que hay que llevarse para poder reconstruirla. Que el menor autovalor α de la hessiana da la cota uniforme $d^T \nabla^2 f(x^*) d \geq \alpha \|d\|^2$; que con ella el desarrollo de segundo orden queda $f(x) - f(x^*) \geq (\frac{\alpha}{2} + \beta)\|x - x^*\|^2$; y que como $\beta \to 0$ se puede escoger el radio δ de modo que $|\beta| < \alpha/4$, con lo que el paréntesis se queda por encima de $\gamma = \alpha/4 > 0$. La constante γ del enunciado no es mágica: es lo que sobra de $\alpha/2$ después de pagarle el peaje al error de Taylor.

El teorema con números. Las constantes α, ε, δ y γ de la prueba parecen abstractas hasta que se calculan en un caso. Sea $f(x) = x^2 - x^3$ en $S = \mathbb{R}$ y $x^* = 0$. Es $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 2$: la hessiana es la matriz 1×1 (2), definida positiva, y su menor autovalor es $\alpha = 2$. El desarrollo de segundo orden no hace falta estimarlo, porque aquí es exacto:

$$f(x) = f(0) + \tfrac{1}{2} \cdot 2\, x^2 + x^2 \beta(0, x) \qquad \text{con} \qquad \beta(0, x) = -x.$$

El error de Taylor es el término $-x^3$; dividido por x^2 deja $\beta = -x$, que tiende a cero, como debe, y que es negativo para $x > 0$, que es justo el signo que la prueba no controla. El paso 3 con $\varepsilon = \alpha/4 = \frac{1}{2}$ pide $|\beta(0, x)| = |x| < \frac{1}{2}$, así que sirve $\delta = \frac{1}{2}$. El paso 4 da $\gamma = \alpha/2 - \varepsilon = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, y el enunciado queda

$$x^2 - x^3 \;\geq\; \tfrac{1}{2}\, x^2 \qquad \text{para } |x| < \tfrac{1}{2}.$$

Se comprueba a mano: $x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 = x^2\big(\frac{1}{2} - x\big)$, que es ≥ 0 en cuanto $x \leq \frac{1}{2}$. En palabras: la parábola $\frac{1}{2}x^2$ cabe por debajo de f en toda la bola, y es la mitad de la parábola x^2 que daría la curvatura sola; la otra mitad es el peaje que se le ha pagado al término $-x^3$. Fuera de la bola la cota puede romperse: en $x = 0{,}6$ es $f(0{,}6) = 0{,}144$, mientras que $\frac{1}{2}(0{,}6)^2 = 0{,}18$. Y el teorema no promete más de lo que da: $f(1) = 0 = f(0)$ y $f(2) = -4 < f(0)$. El origen es mínimo local estricto y no global, porque el término cúbico, que cerca del origen es un error pequeño, lejos de él manda.

Dónde se falla al aplicarla.

- *Leer «semidefinida» donde el teorema dice «definida».* Con hessiana solo semidefinida el teorema no se aplica, y la conclusión puede ser falsa. La función $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^4$ tiene gradiente nulo en el origen y hessiana $\operatorname{diag}(2, 0)$, semidefinida positiva, y el origen no es mínimo: $f(0, t) = -t^4 < 0$.
- *Concluir lo contrario cuando el teorema no se aplica.* Que la hessiana no sea definida positiva no prueba que el punto no sea mínimo: $x_1^2 + x_2^4$ tiene en el origen la misma hessiana $\operatorname{diag}(2, 0)$, y el origen es su mínimo global estricto. Lo que descarta un mínimo es la condición necesaria, es decir, una hessiana con algún autovalor *negativo*.
- *Mirar solo la hessiana.* Una hessiana definida positiva en un punto donde el gradiente no se anula no dice nada. La función $2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1 + 2$ tiene hessiana $\operatorname{diag}(4, 6)$ en todo el plano, y sin embargo $(1, 1)$ no es mínimo local, porque $\nabla f(1, 1) = (0, 6)^T \neq 0$: bajando un poco x_2 la función baja. Su único mínimo es $(1, 0)$, donde el gradiente sí se anula.
- *Estudiar la hessiana como fórmula y no en el punto.* Salvo en las cuadráticas, la hessiana cambia de un punto a otro, y lo que decide es su signo *en* x^*. En el ejemplo de la sección siguiente, la misma fórmula $\operatorname{diag}(6x_1, 2)$ da un mínimo en $(1, 0)$ y un punto de silla en $(-1, 0)$.
- *Tomar el mínimo local estricto por global.* Es el caso de $x^2 - x^3$: el teorema habla de una bola, y lo que pasa fuera hay que estudiarlo aparte.

6.2.5 Cómo se reconoce en la práctica una hessiana definida positiva

Los dos teoremas anteriores dejan un trabajo concreto: dada una matriz simétrica, decidir si es definida positiva, semidefinida positiva o indefinida. Hay tres caminos, y conviene tenerlos los tres porque cada uno gana en un caso distinto.

1. **Autovalores.** A simétrica es definida positiva si y solo si todos sus autovalores son estrictamente positivos, y semidefinida positiva si y solo si todos son ≥ 0. Es el criterio conceptualmente más claro — los autovalores *son* los valores de la forma cuadrática en sus direcciones principales unitarias — pero exige resolver el polinomio característico.
2. **Menores principales dominantes (criterio de Sylvester).** A simétrica es definida positiva si y solo si los n menores principales dominantes

$$\Delta_1 = a_{11}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \Delta_n = \det A$$

   son todos estrictamente positivos. Es el más rápido a mano, y para 2×2 se reduce a $a_{11} > 0$ y $\det A > 0$.
3. **Completar cuadrados.** Escribir directamente $d^T A d$ como suma de cuadrados. Es el más informativo cuando la matriz no es definida positiva, porque el cuadrado que sale con signo negativo *exhibe* la dirección de descenso.

CONEXIÓN: CON ÁLGEBRA LINEAL, Y UN AVISO SOBRE EL CRITERIO DE SYLVESTER

El criterio de los menores dominantes se usa aquí tal cual, así que conviene tenerlo escrito. *Sea A simétrica $n \times n$ y sea Δ_i el determinante de la submatriz formada por sus i primeras filas y sus i primeras columnas — el i-ésimo **menor dominante** —. Entonces A es definida positiva si y solo si $\Delta_i > 0$ para $i = 1, \ldots, n$, y es definida negativa si y solo si los Δ_i alternan de signo empezando por $\Delta_1 < 0$.* Para $n = 2$ eso es la comprobación que se aprende primero: $\det A > 0$ con $a_{11} > 0$, definida positiva; $\det A > 0$ con $a_{11} < 0$, definida negativa; $\det A < 0$, indefinida. El criterio equivalente por autovalores, con esa misma lectura en dimensión dos y con un ejemplo de cada caso, está en el apéndice F, sección «Análisis».

Y ahora la trampa, que cuesta cara: **para caracterizar las matrices *semi*definidas positivas no basta con pedir $\Delta_i \geq 0$ a los menores dominantes**. El contraejemplo estándar es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

cuyos menores dominantes son $\Delta_1 = 0 \geq 0$ y $\Delta_2 = 0 \geq 0$, y que sin embargo no es semidefinida positiva: con $d = (0,1)^T$ sale $d^T A d = -1 < 0$. La caracterización correcta para el caso semidefinido exige que sean ≥ 0 *todos* los menores principales, los $2^n - 1$, no solo los dominantes. Como en este capítulo el caso semidefinido aparece continuamente — es el de la condición necesaria y el del lema de convexidad —, conviene no aplicar Sylvester ahí y usar autovalores.

Completar cuadrados, con números. El tercer camino es el que más se usa a mano y el que menos se explica. Se hace como con $ax^2 + bx + c$ en una variable: se reúne en un cuadrado todo lo que lleva la primera variable, se descuenta lo que ese cuadrado añade de más, y se repite con la siguiente.

Un caso definido positivo. Para $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$,

$$d^T A d = 2d_1^2 - 4d_1 d_2 + 4d_2^2 = 2(d_1 - d_2)^2 + 2d_2^2.$$

El cuadrado $2(d_1 - d_2)^2$ produce los dos términos con d_1, que son $2d_1^2 - 4d_1d_2$, y además un $2d_2^2$ que se descuenta de los $4d_2^2$ que había; lo que sobra ya solo depende de d_2. Los dos coeficientes son positivos, así que $d^T A d \geq 0$, y la suma vale 0 solo si $d_2 = 0$ y $d_1 = d_2$, es decir, solo si $d = 0$. La matriz es definida positiva.

Un caso indefinido, y la dirección que lo delata. Para $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$d^T B d = d_1^2 + 4d_1d_2 + d_2^2 = (d_1 + 2d_2)^2 - 3d_2^2.$$

Ha salido un cuadrado con signo menos. Para ver un valor negativo basta anular el cuadrado positivo, $d_1 = -2d_2$: con $d = (-2, 1)^T$ sale $d^T B d = -3 < 0$, y con $d = (1, 0)^T$ sale $1 > 0$. La matriz es indefinida. Sylvester diría lo mismo con $\Delta_2 = -3 < 0$, pero no diría hacia dónde se baja. La función $f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2)$, cuya hessiana es B, tiene un punto crítico en el origen, y sobre la recta $x = t(-2, 1)^T$ vale $f(-2t, t) = -\frac{3}{2}t^2 < 0$: el origen es un punto de silla, y el cuadrado negativo ha dado la dirección por la que se desciende.

Un caso 3×3. La función $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3$ tiene hessiana constante

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

con menores dominantes $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 3$ y $\Delta_3 = 4$, todos positivos: por Sylvester, C es definida positiva, y el origen, único punto crítico de f, es mínimo local estricto. Completando cuadrados, primero en d_1 y después en d_2,

$$d^T C d = 2d_1^2 + 2d_2^2 + 2d_3^2 - 2d_1d_2 - 2d_2d_3 = 2\Big(d_1 - \tfrac{d_2}{2}\Big)^2 + \tfrac{3}{2}\Big(d_2 - \tfrac{2d_3}{3}\Big)^2 + \tfrac{4}{3}\,d_3^2.$$

Tres coeficientes positivos, y la suma solo se anula si $d_3 = 0$, después $d_2 = 0$ y después $d_1 = 0$.

Por qué funciona Sylvester, visto desde aquí. Los coeficientes que han salido delante de los cuadrados son 2, $\frac{3}{2}$ y $\frac{4}{3}$, y los menores dominantes son 2, 3 y 4: cada coeficiente es el cociente de dos menores consecutivos, Δ_1, Δ_2/Δ_1 y Δ_3/Δ_2. En el primer ejemplo, 2 y 2 son $\Delta_1 = 2$ y $\Delta_2/\Delta_1 = 4/2$; en el segundo, 1 y -3 son $\Delta_1 = 1$ y $\Delta_2/\Delta_1 = -3/1$. No es casualidad. Completar cuadrados es hacer eliminación gaussiana sobre la matriz sin intercambiar filas, y los coeficientes son los pivotes. Sumar a una fila múltiplos de las anteriores no cambia ningún menor dominante, y al final de la eliminación la matriz es triangular con los pivotes en la diagonal; así que Δ_k es el producto de los k primeros pivotes. Por eso «todos los menores dominantes positivos» equivale a «todos los coeficientes positivos», que equivale a «definida positiva». Y por eso mismo Sylvester no sirve en el caso semidefinido: si un pivote sale cero, el cociente siguiente no está definido y la eliminación se atasca.

Dos consecuencias que ahorran cuentas. Si al terminar ningún coeficiente es negativo y alguno es cero, la matriz es semidefinida y no definida: $d_1^2 + 2d_1d_2 + d_2^2 = (d_1 + d_2)^2$ se anula en $d = (1, -1)^T$. Y si un elemento de la diagonal es cero, $a_{ii} = 0$, pero su fila tiene otro elemento $a_{ij} \neq 0$, la matriz es indefinida sin más cálculo, porque con $d = t\,e_i + e_j$ la forma vale $2t\,a_{ij} + a_{jj}$, que es una recta en t con pendiente no nula y toma los dos signos.

Ejemplo. Estudiemos los puntos críticos de $f(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1 + x_2^2$ en $S = \mathbb{R}^2$, que es abierto y no vacío.

Puntos críticos. El gradiente es $\nabla f(x) = (3x_1^2 - 3,\ 2x_2)^T$, y anularlo da $x_1^2 = 1$, $x_2 = 0$: hay dos puntos críticos, $P_1 = (1, 0)$ y $P_2 = (-1, 0)$.

Hessiana. $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, ya diagonal, así que sus autovalores son $6x_1$ y 2 y no hay que calcular nada.

En $P_1 = (1,0)$: autovalores 6 y 2, los dos positivos, luego la hessiana es definida positiva y por la condición suficiente de optimalidad local el punto es un mínimo local estricto.

En $P_2 = (-1,0)$: autovalores -6 y 2, de signos distintos, luego la hessiana es indefinida. Aquí no hace falta ningún teorema adicional: la propia condición necesaria descarta el mínimo, porque la hessiana no es semidefinida positiva. Además, desde P_2, moverse en x_2 aumenta f, mientras que moverse un poco en x_1 la disminuye: $f(-1+t,0) - f(-1,0) = -3t^2 + t^3 < 0$ para $0 < |t| < 1$. Es un punto de silla.

¿Y es global el mínimo de P_1*?* No. La función no está acotada inferiormente: haciendo $x_1 \to -\infty$ con $x_2 = 0$ se tiene $f \to -\infty$. Así que el problema no tiene mínimo global, y P_1 es solo un mínimo local. Esto ilustra hasta dónde llegan las condiciones de esta sección: certifican lo local, y para lo global hace falta otra cosa.

6.2.6 De lo local a lo global: la convexidad otra vez

El ejemplo anterior deja la pregunta abierta: ¿cuándo un punto crítico es mínimo *global*? La respuesta ya se anticipó en la sección 6.1.4: cuando el paisaje es convexo. Lo que falta es traducir «convexo» al lenguaje de la hessiana, que es lo que se puede calcular.

Teorema (Condición suficiente de optimalidad global)**.** Sea f dos veces diferenciable y $\nabla^2 f(x)$ semidefinida positiva en S abierto, convexo y no vacío. Si $x^* \in S$ cumple $\nabla f(x^*) = 0$, entonces x^* es un mínimo global de f en S. • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: LA GRÁFICA SE QUEDA POR ENCIMA DE SU PLANO TANGENTE

El salto que hay entre este teorema y el anterior es exactamente el salto entre *un punto* y *todo el conjunto*. Antes se pedía curvatura positiva en x^* y salía una conclusión válida cerca de x^*. Ahora se pide curvatura no negativa *en todo* S y sale una conclusión válida en todo S. Cambiar la conclusión de local a global cuesta, en este criterio, añadir una hipótesis sobre todo el dominio convexo.

La imagen que lo predice es esta: **una función con curvatura no negativa en todas partes se queda siempre por encima de cualquiera de sus planos tangentes**. Siéntese en un punto cualquiera de la gráfica y apoye ahí un plano; la superficie sube por todos lados o se queda pegada, pero nunca cae por debajo. Piense en una parábola y en cualquiera de sus tangentes.

Con esa imagen el teorema se lee en tres líneas. Apoye el plano tangente en x^*. Como $\nabla f(x^*) = 0$, ese plano es *horizontal*, a altura $f(x^*)$. Y como la gráfica va por encima de sus tangentes, se tiene $f(x) \geq f(x^*)$ para todo x de S: eso es ser mínimo global. Toda la demostración consiste en probar la frase en negrita, y para eso se usa el teorema del valor medio.

> Se prueba primero la desigualdad del plano tangente, para dos puntos cualesquiera, y después se particulariza en x^*.

Paso 1: el desarrollo de Taylor con resto de Lagrange. Sean $x_1, x_2 \in S$. Se usa aquí el **teorema del valor medio de segundo orden**, que conviene tener enunciado: *si f es dos veces diferenciable en un abierto que contiene al segmento de extremos x_2 y x_1, existe un punto $\hat{x}$ de ese segmento tal que* $f(x_1) = f(x_2) + \nabla f(x_2)^T(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^T \nabla^2 f(\hat{x})(x_1 - x_2)$. Es la versión con resto exacto de la fórmula (2) de la sección 6.2, y sale de aplicar el valor medio de una variable a $\varphi(t) = f\big(x_2 + t(x_1 - x_2)\big)$ en $[0,1]$. Aplicado a f sobre el segmento que une x_2 con x_1 da un punto intermedio $\hat{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, con algún $\lambda \in [0,1]$, tal que

$$f(x_1) = f(x_2) + \nabla f(x_2)^T(x_1 - x_2) + \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2)^T \nabla^2 f(\hat{x})(x_1 - x_2).$$

A diferencia de (1) y (2), aquí no hay término de error: el resto es exacto, a costa de que la hessiana se evalúe en un punto intermedio desconocido.
Paso 2: el punto intermedio sigue estando en S (aquí entra la convexidad). El punto $\hat{x}$ es una combinación convexa de x_1 y x_2, que están en S; como S es convexo, $\hat{x} \in S$, y por hipótesis $\nabla^2 f(\hat{x})$ es semidefinida positiva. Esto es lo único para lo que se usa la convexidad de S, y es imprescindible: no sabemos *dónde* cae $\hat{x}$, solo que está en el segmento, así que necesitamos que la hipótesis valga en todo el segmento.
Paso 3: la desigualdad del plano tangente (el núcleo). Por ser $\nabla^2 f(\hat{x})$ semidefinida positiva, el término cuadrático del paso 1 es ≥ 0, y se puede tirar:

$$f(x_1) \;\geq\; f(x_2) + \nabla f(x_2)^T(x_1 - x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in S. \tag{†}$$

Esta desigualdad es el contenido geométrico entero del teorema: el lado derecho es la altura, en x_1, del plano tangente a la gráfica en x_2.
Paso 4: particularizar. Tomando $x_2 = x^*$ y $x_1 = x$ arbitrario en S, y usando $\nabla f(x^*) = 0$:

$$f(x) \;\geq\; f(x^*) + \underbrace{\nabla f(x^*)^T(x - x^*)}_{=0} \;=\; f(x^*).$$

Como $x \in S$ era arbitrario, x^* es mínimo global de f en S.

Lo que hay que llevarse para poder reconstruirla. Taylor con resto exacto entre x^* y un x cualquiera, $f(x) = f(x^*) + \nabla f(x^*)^T(x - x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^T \nabla^2 f(\hat{x})(x - x^*)$, con $\hat{x}$ en el segmento. La convexidad de S mete $\hat{x}$ en S, donde la hessiana es semidefinida positiva, así que el último término es ≥ 0; el gradiente nulo mata el del medio; queda $f(x) \geq f(x^*)$. Tres ingredientes, y cada uno se usa una vez. Y un detalle que explica por qué aquí se usa un desarrollo distinto del de la condición suficiente local: el resto de (2), $\|x - x^*\|^2\beta$, solo se controla cerca de x^*, y para una conclusión válida a cualquier distancia hace falta un resto exacto, aunque sea en un punto $\hat{x}$ desconocido.

La desigualdad (†) que ha aparecido en el paso 3 es más importante que el propio teorema: es la caracterización de las funciones convexas diferenciables, y es la que permite cerrar el círculo con la sección 6.1.4. Conviene recogerlo, además, en un resultado más general.

Lema. Sea f dos veces diferenciable en S abierto, convexo y no vacío. Entonces $\nabla^2 f(x)$ es semidefinida positiva para todo $x \in S$ si y solo si f es convexa en S. • CONVIENE SABER DEMOSTRARLA

LA IDEA: CURVATURA NO NEGATIVA Y CUERDAS POR ENCIMA SON LO MISMO

El lema dice que las dos maneras de decir «esto no se abomba hacia arriba» coinciden: la de las cuerdas, que es la definición, y la de la curvatura, que es lo que se calcula. En una variable es el hecho de bachillerato «$f'' \geq 0$ implica convexa», y aquí es su versión en n variables, con la hessiana en el papel de la segunda derivada.
Y hay un puente intermedio que es la pieza real: la desigualdad del plano tangente $(\dagger)$. Las tres condiciones — cuerdas por encima, gráfica por encima de sus tangentes, curvatura no negativa — son equivalentes, y la demostración recorre el ciclo pasando por la de en medio.

Implicación ⇒ (curvatura no negativa ⇒ convexa).
Paso 1: partir de la desigualdad del plano tangente. Es exactamente $(\dagger)$, ya probada en los pasos 1 a 3 de la demostración anterior con las mismas hipótesis: $f(x') \geq f(x'') + \nabla f(x'')^T(x' - x'')$ para todos $x', x'' \in S$.
Paso 2: aplicarla dos veces con el mismo punto de apoyo (el núcleo). Fijemos $x_1, x_2 \in S$ y $\lambda \in [0,1]$, y llamemos $z = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, que está en S por convexidad. La idea es apoyar el plano tangente *en el punto mezclado* z y mirar desde ahí a los dos extremos. Con $x'' = z$ y $x' = x_1$, y usando $x_1 - z = (1-\lambda)(x_1 - x_2)$:

$$f(x_1) \;\geq\; f(z) + (1-\lambda)\nabla f(z)^T(x_1 - x_2).$$

Con $x'' = z$ y $x' = x_2$, y usando $x_2 - z = -\lambda(x_1 - x_2)$:

$$f(x_2) \;\geq\; f(z) - \lambda\,\nabla f(z)^T(x_1 - x_2).$$

Paso 3: combinar con los pesos que cancelan. Multiplicamos la primera por $\lambda \geq 0$ y la segunda por $1 - \lambda \geq 0$ — multiplicar por un número no negativo no cambia el sentido de una desigualdad — y sumamos:

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \;\geq\; f(z) + \underbrace{\big[\lambda(1-\lambda) - (1-\lambda)\lambda\big]\nabla f(z)^T(x_1 - x_2)}_{=\,0}.$$

Los dos términos del gradiente son idénticos y de signo contrario, y se van. Queda $\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$, que es la definición de función convexa. *La elección de los pesos es todo el truco*: se han escogido precisamente los que hacen desaparecer el gradiente, que era el único obstáculo.

Implicación ⇐ (convexa ⇒ curvatura no negativa).
Paso 1: de la convexidad a la desigualdad del plano tangente. Sean $x_1, x_2 \in S$ y $\lambda \in (0,1]$. Escribiendo $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = x_2 + \lambda(x_1 - x_2)$, la convexidad dice

$$f\big(x_2 + \lambda(x_1 - x_2)\big) \;\leq\; \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Y por (1) aplicada en x_2 con dirección $d = x_1 - x_2$ y paso $\lambda > 0$, el lado izquierdo vale

$$f(x_2) + \lambda \nabla f(x_2)^T(x_1 - x_2) + \lambda \|x_1 - x_2\|\, \alpha\big(x_2, x_2 + \lambda(x_1 - x_2)\big).$$

Igualando, restando $f(x_2)$ y dividiendo por $\lambda > 0$:

$$\nabla f(x_2)^T(x_1 - x_2) + \|x_1 - x_2\|\, \alpha\big(x_2, x_2 + \lambda(x_1 - x_2)\big) \;\leq\; f(x_1) - f(x_2).$$

Haciendo $\lambda \to 0^+$, el término con α desaparece y queda otra vez (†): $f(x_1) - f(x_2) \geq \nabla f(x_2)^T(x_1 - x_2)$.
Paso 2: de la desigualdad del plano tangente a la hessiana (el núcleo). Sean ahora $x \in S$ y $d \in \mathbb{R}^n$ cualesquiera. Como S es abierto, $x + \lambda d \in S$ para λ pequeño. Aplicando (†) con $x_1 = x + \lambda d$ y $x_2 = x$:

$$f(x + \lambda d) \;\geq\; f(x) + \lambda \nabla f(x)^T d. \tag{‡}$$

Por otro lado, el desarrollo (2) en x con dirección d da

$$f(x + \lambda d) - f(x) - \lambda \nabla f(x)^T d = \tfrac{\lambda^2}{2} d^T \nabla^2 f(x) d + \lambda^2 \|d\|^2 \beta(x, x + \lambda d).$$

El lado izquierdo es ≥ 0 por (‡), luego dividiendo por $\lambda^2 > 0$:

$$0 \;\leq\; \tfrac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x) d + \|d\|^2 \beta(x, x + \lambda d).$$

Paso 3: pasar al límite. Haciendo $\lambda \to 0$ se anula el término con β y queda $0 \leq \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x) d$, es decir, $d^T \nabla^2 f(x) d \geq 0$. Como $x \in S$ y $d \in \mathbb{R}^n$ eran arbitrarios, $\nabla^2 f$ es semidefinida positiva en todo S.

Con el lema, la condición suficiente de optimalidad global se puede reescribir en el lenguaje de la convexidad, que es como se suele enunciar y como se recuerda mejor.

Teorema (Condición suficiente de optimalidad global)**.** Sea f convexa y diferenciable en S abierto, convexo y no vacío, y sea $x^* \in S$ tal que $\nabla f(x^*) = 0$. Entonces x^* es un mínimo global de f en S. • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

La convexidad y la diferenciabilidad dan la desigualdad del plano tangente (†), como se probó en el paso 1 del sentido convexa ⇒ curvatura no negativa; ese paso solo usa el desarrollo de primer orden. Con $\nabla f(x^*) = 0$ queda $f(x) \geq f(x^*)$ para todo $x \in S$. No se necesita una segunda derivada.

La misma prueba, escrita sin remitir a otra. La demostración anterior se apoya en un paso de otra prueba; escrita de corrido tiene tres pasos y una imagen. *La imagen*: sobre el segmento que va de x^* a un x cualquiera, f es una función convexa de una variable que sale de x^* con pendiente cero; una función convexa nunca baja de su tangente, y esa tangente es horizontal, a altura $f(x^*)$.

- *Paso 1: la cuerda por encima.* Para $\lambda \in (0, 1]$, el punto $x^* + \lambda(x - x^*) = \lambda x + (1 - \lambda)x^*$ está en S porque S es convexo, y la convexidad de f da $f\big(x^* + \lambda(x - x^*)\big) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(x^*)$. Restando $f(x^*)$ y dividiendo por $\lambda > 0$,

$$\frac{f\big(x^* + \lambda(x - x^*)\big) - f(x^*)}{\lambda} \;\leq\; f(x) - f(x^*).$$

- *Paso 2: el límite (el núcleo).* Cuando $\lambda \to 0^+$, el cociente de la izquierda tiende a la derivada direccional $\nabla f(x^*)^T(x - x^*)$: es la fórmula (1) con $d = x - x^*$. Una desigualdad $\leq$ sobrevive al paso al límite, así que $\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \leq f(x) - f(x^*)$.
- *Paso 3: el gradiente nulo.* El lado izquierdo es 0, luego $f(x) \geq f(x^*)$.

La convexidad de S y la de f entran en el paso 1, la diferenciabilidad en el paso 2, y solo en x^*, y el gradiente nulo en el paso 3. Lo que hay que llevarse es la cadena: *cuerda por encima, dividir por λ, el límite es la derivada direccional, y esa derivada es cero.*

Observación. Merece la pena juntar en una frase lo que dicen los cinco resultados de la sección, porque el esquema es limpio y se olvida fácilmente:

En el punto x^*	**En todo S**	**Conclusión**
x^* es mínimo local	—	$\nabla f(x^*) = 0$ y $\nabla^2 f(x^*)$ semidefinida positiva
$\nabla f(x^*) = 0$ y $\nabla^2 f(x^*)$ definida positiva	—	mínimo local *estricto*, con crecimiento cuadrático
$\nabla f(x^*) = 0$	$\nabla^2 f$ semidefinida positiva, S convexo	mínimo *global*
$\nabla f(x^*) = 0$	f convexa, S convexo	mínimo *global*

La lectura de la tabla es la siguiente. La primera fila deduce condiciones necesarias a partir de la minimalidad: es la criba. La segunda certifica localmente, y para ello exige más en el punto (definida, no semidefinida). Las dos últimas certifican globalmente, y para ello exigen la hipótesis *en todo el conjunto*, no solo en el punto. Esa hipótesis permite concluir la optimalidad global.

Ejemplo. Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_2$ en $S = \mathbb{R}^2$.

Puntos críticos. $\nabla f(x) = (2x_1 - 2x_2,\ 4x_2 - 2x_1 - 2)^T$. Igualando a cero, la primera ecuación da $x_1 = x_2$, y sustituyendo en la segunda, $4x_2 - 2x_2 - 2 = 0$, o sea $x_2 = 1$. El único punto crítico es $x^* = (1, 1)$, donde $f(x^*) = 1 + 2 - 2 - 2 = -1$.

Hessiana. $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, constante. Por Sylvester, $\Delta_1 = 2 > 0$ y $\Delta_2 = 8 - 4 = 4 > 0$: es definida positiva. Y como no depende de x, lo es en todo $\mathbb{R}^2$, que es abierto y convexo.

Conclusión. Por la condición suficiente de optimalidad local, x^* es mínimo local estricto. Y por la condición suficiente de optimalidad global, siendo la hessiana semidefinida positiva (lo es, pues es incluso definida) en todo $\mathbb{R}^2$, es además mínimo global. El valor mínimo es -1.

La lectura geométrica. La función es una cuadrática, luego su gráfica es un paraboloide; que la hessiana sea definida positiva significa que es un paraboloide elíptico abierto hacia arriba, y un cuenco así tiene un único fondo. El término cruzado $-2x_1x_2$ es el que inclina los ejes del cuenco respecto de los ejes coordenados; los autovalores de la hessiana, que son $3 \pm \sqrt{5}$, miden lo estrechas que son las dos direcciones principales, y su cociente $\kappa = \left(3 + \sqrt{5}\right) / \left(3 - \sqrt{5}\right) \approx 6{,}85$ compara esas curvaturas. El cociente entre los semiejes de una curva de nivel es $\sqrt{\kappa}$. Ese número volverá a aparecer en la sección 6.3, porque influye en la velocidad del método del gradiente.

El método en pasos: hallar los puntos críticos, clasificarlos y decidir si hay mínimo global. Los resultados de esta sección casi nunca se usan sueltos. Sobre una función concreta se encadenan siempre en el mismo orden, y conviene tenerlo escrito:

1. *Mirar el dominio.* Comprobar que S es abierto: si no lo es, el mínimo puede estar en el borde con gradiente no nulo, como $f(x) = x$ en $[0, 1]$, y este método no lo ve. Anotar si S es convexo, porque hará falta en el paso 5.

2. *Resolver $\nabla f(x) = 0$ entero.* Es un sistema, casi siempre no lineal. Se factoriza en vez de dividir: de $2x_2(1+x_1)^3 = 0$ salen dos ramas, $x_2 = 0$ y $x_1 = -1$, y hay que seguir las dos. Se quedan las soluciones reales. El resultado es la lista completa de candidatos, y por la condición necesaria fuera de ella no hay ningún mínimo local.
3. *Calcular la hessiana como función de x y evaluarla en cada candidato.*
4. *Clasificar cada candidato por el signo de su hessiana*, con autovalores, Sylvester o cuadrados:
   - definida positiva: mínimo local estricto;
   - definida negativa: máximo local estricto;
   - indefinida: ni mínimo ni máximo, es un punto de silla, y el cuadrado negativo o el autovector del autovalor negativo dicen por dónde se baja;
   - semidefinida con algún autovalor nulo: se descarta lo que descarte la condición necesaria, y lo que quede se decide mirando directamente el signo de $f(x^* + d) - f(x^*)$ para d pequeño, sobre todo en las direcciones d en las que la hessiana se anula.
5. *Decidir si hay mínimo global*, con una de estas tres herramientas:
   - *convexidad*: si S es convexo y la hessiana es semidefinida positiva en todo S, y no solo en los candidatos, todo punto crítico es mínimo global;
   - *una dirección por la que se escapa*: si sobre alguna recta o curva f tiende a $-\infty$, no hay mínimo global, por buenos que sean los mínimos locales;
   - *una cota inferior*: si se prueba $f \geq m$ en todo S y un candidato vale m, ese candidato es mínimo global. Cuando la cota no se ve a simple vista, la da el criterio de coercividad del párrafo siguiente.

Los ejemplos del capítulo cubren las tres salidas del paso 5: la convexidad, el ejemplo que se acaba de resolver y el ejercicio de la cuadrática general; la dirección que se escapa, el ejemplo de $x_1^3 - 3x_1 + x_2^2$ y los ejercicios de la cúbica y del único punto crítico; la cota, los ejercicios de la cuártica y de Rosenbrock.

Weierstrass en $\mathbb{R}^n$, rescatado por la coercividad. Se dice que f es **coerciva** en $\mathbb{R}^n$ si $f(x) \to +\infty$ cuando $\|x\| \to \infty$, es decir, si para cada M hay un radio R tal que $f(x) > M$ siempre que $\|x\| > R$. *Si f es continua y coerciva en $\mathbb{R}^n$, tiene mínimo global; y si además es diferenciable, ese mínimo es un punto crítico, así que está en la lista del paso 2 y es el candidato de menor valor.* La prueba es Weierstrass aplicado a un compacto bien elegido. Se toma un punto cualquiera x^0 y el conjunto de subnivel $K = \{x : f(x) \leq f(x^0)\}$, que no es vacío porque contiene a x^0. Es cerrado, porque f es continua, y es acotado, porque la coercividad con $M = f(x^0)$ da un R fuera de cuya bola $f > f(x^0)$, luego K está dentro de esa bola. Weierstrass da un mínimo x^* de f en K. Fuera de K la función vale más que $f(x^0)$, que es $\geq f(x^*)$; luego x^* es mínimo en todo $\mathbb{R}^n$. Y como $\mathbb{R}^n$ es abierto, la condición necesaria lo obliga a ser punto crítico. Esto tapa el agujero «por arriba» de la sección 6.1.2: la función no puede escaparse bajando hacia el infinito si en el infinito sube.

Ejemplo. Estudiar $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 2(x_1 - x_2)^2$ en $S = \mathbb{R}^2$.

Paso 1. $S = \mathbb{R}^2$ es abierto y convexo.

Paso 2. $\nabla f(x) = \big(4x_1^3 - 4(x_1 - x_2),\ 4x_2^3 + 4(x_1 - x_2)\big)^T$. Sumando las dos ecuaciones sale $x_1^3 + x_2^3 = 0$, es decir, $x_2 = -x_1$, porque $t \mapsto t^3$ es inyectiva en $\mathbb{R}$. Sustituyendo en la primera, $4x_1^3 - 8x_1 = 4x_1(x_1^2 - 2) = 0$: hay tres candidatos,

$$P_0 = (0,0), \qquad P_1 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), \qquad P_2 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Paso 3. $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12x_2^2 - 4 \end{pmatrix}$.

Paso 4. En P_1 y en P_2 la hessiana es $\begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$, con $\Delta_1 = 20$ y $\Delta_2 = 384$, positivos: mínimos locales estrictos, con $f = 4 + 4 - 2 \cdot 8 = -8$. En P_0 la hessiana es $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, con autovalores -8 y 0: es el caso degenerado. El autovalor -8 basta para que la condición necesaria descarte el mínimo. Para descartar el máximo, el segundo orden no alcanza, porque la hessiana es semidefinida negativa, y se mira f en la dirección del autovalor nulo, $d = (1, 1)$: $f(t, t) = 2t^4 > 0 = f(P_0)$. Y en la del autovalor negativo, $d = (1, -1)$: $f(t, -t) = 2t^4 - 8t^2 < 0$ para $0 < |t| < 2$. El origen es un punto de silla.

Paso 5. La hessiana no es semidefinida positiva en todo $\mathbb{R}^2$ (en P_0 ya falla), así que la convexidad no sirve. Se busca una cota. Como $x_1^4 + x_2^4 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)^2 = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)^2 \geq 0$ y $2(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 \geq 0$, llamando $r = \|x\|$,

$$f(x) \;\geq\; \tfrac{1}{2}r^4 - 4r^2 \;=\; \tfrac{1}{2}\big(r^2 - 4\big)^2 - 8 \;\geq\; -8.$$

La primera desigualdad dice que f es coerciva, porque $\frac{1}{2}r^4 - 4r^2 \to \infty$; así que hay mínimo global y es el candidato de menor valor, que es -8. La segunda da lo mismo sin coercividad: $f \geq -8$ en todo el plano y P_1 y P_2 alcanzan esa cota. Hay exactamente dos mínimos globales, con valor -8.

La lectura. Dos hoyos simétricos y un collado entre ellos, como en la cuártica de los ejercicios; lo nuevo es que el collado es degenerado, y el segundo orden solo lo resuelve a medias. La dirección del autovalor nulo, en la que la hessiana no ve nada, es precisamente la que hay que mirar a mano.

Dónde se falla.

- *Perder candidatos.* Dividir el sistema $\nabla f = 0$ por una variable que puede ser cero, o quedarse con una sola rama de un producto nulo. De $x_1 = x_1^4$ salen $x_1 = 0$ y $x_1 = 1$; dividiendo por x_1 se pierde el origen.
- *Pedir la hipótesis de convexidad solo en el candidato.* La condición suficiente global quiere la hessiana semidefinida positiva en todo S. Para $f(x) = x^2 - x^3$ es $f''(0) = 2 > 0$, pero $f''(x) = 2 - 6x < 0$ para $x > 1/3$, y en efecto 0 no es mínimo global.
- *Comprobar «semidefinida en todo S» con los menores dominantes.* Es la trampa de Sylvester de la caja de más arriba, y aquí cuesta más porque la matriz depende de x. En 2×2 hay que pedir $h_{11} \geq 0$, $h_{22} \geq 0$ y $\det \geq 0$, los tres menores principales. La función $(x_1 - x_2)^2 + x_2^4$ tiene hessiana $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 + 12x_2^2 \end{pmatrix}$, con los tres menores ≥ 0 en todo el plano: es convexa, su único punto crítico, el origen, es mínimo global, y eso aunque en el origen la hessiana sea solo semidefinida y la condición suficiente local no se aplique.
- *Olvidar que S tiene que ser convexo.* La convexidad de S es la que mete el punto intermedio de Taylor dentro de S. En $S = (-2, -1) \cup (1, 2)$, con $f(x) = (x - \frac{3}{2})^2$ en el trozo de la derecha y $f(x) = -1$ en el de la izquierda, la segunda derivada es ≥ 0 en todo S y $x^* = \frac{3}{2}$ es punto crítico, pero $f(-\frac{3}{2}) = -1 < 0 = f(\frac{3}{2})$: el segmento que une los dos puntos se sale de S.

- *Deducir la globalidad de «un solo punto crítico, y es mínimo local».* En una variable funciona; en dos o más no, y el ejercicio del único punto crítico es el contraejemplo.

CONEXIÓN: CON INFERENCIA ESTADÍSTICA, Y CON EL PROBLEMA DEL ASTRÓNOMO

Estos criterios se usan también al calcular estimadores por máxima verosimilitud. Dado un modelo $f(x;\theta)$ y una muestra $x_1,\dots,x_n$, el estimador máximo verosímil minimiza $\ell(\theta) = -\log L(\theta)$ sobre el espacio paramétrico. En los puntos interiores donde ℓ es diferenciable, las *ecuaciones de verosimilitud* son $\nabla\ell(\theta) = 0$, es decir, la condición necesaria de primer orden; y la comprobación de que la solución es un máximo de L y no un mínimo o un punto de silla es exactamente la condición de segundo orden aplicada a ℓ. La matriz $\nabla^2\ell(\theta)$ se llama allí *información observada*, y su esperanza, bajo las condiciones de regularidad habituales, es la *información de Fisher*. En un punto estacionario, que la hessiana de ℓ sea definida positiva garantiza un máximo local estricto de L. Bajo las hipótesis asintóticas del modelo, la inversa de la información de Fisher proporciona la aproximación a la covarianza del estimador.
En el caso lineal, el ajuste por mínimos cuadrados de un modelo lineal $A\theta \approx b$ consiste en minimizar $f(\theta) = \|A\theta - b\|^2$, cuyo gradiente es $2A^T(A\theta - b)$ y cuya hessiana es $2A^TA$, constante y semidefinida positiva siempre (porque $d^TA^TAd = \|Ad\|^2 \geq 0$). Anular el gradiente da las *ecuaciones normales* $A^TA\theta = A^Tb$; y como la hessiana es semidefinida positiva en todo $\mathbb{R}^n$, que es convexo, la condición suficiente de optimalidad global garantiza que cualquier solución de esas ecuaciones es un mínimo *global*. Si además las columnas de A son linealmente independientes, A^TA es definida positiva, el mínimo es único y vale $\theta = (A^TA)^{-1}A^Tb$. Esa fórmula es solución del ajuste lineal. En un modelo no lineal, como un ajuste orbital, las linealizaciones sucesivas pueden producir subproblemas de esta forma; resolver uno no equivale a resolver de una vez el problema original.

Qué se ha ganado. La pregunta del fabricante de los seis mandos tiene ya respuesta. Lo que tendría que medir, además del coste, son las pendientes y las curvaturas en el punto, es decir, el gradiente y la hessiana. Que las pendientes sean nulas es lo mínimo que tiene que pasar en un mínimo: la condición necesaria. Que la curvatura sea positiva en todas las direcciones certifica que está en el fondo de un cuenco, y además con un crecimiento cuadrático medible: la condición suficiente. Y si la curvatura es negativa en alguna dirección, esa dirección es un retoque que no había probado y que baja. Esto último no es un escrúpulo: la función $\frac{1}{2}(x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2)$, la del ejemplo indefinido de completar cuadrados, sube si en el origen se mueve solo el primer mando, $\frac{1}{2}t^2$, y sube si se mueve solo el segundo, también $\frac{1}{2}t^2$; y sin embargo baja si se mueven los dos a la vez en la proporción $(-2, 1)$. Quien retoque los mandos de uno en uno puede creerse en un mínimo estando en un collado.

Para decir «he terminado» del todo no basta con mirar el punto: hace falta saber algo del paisaje entero. Que sea convexo, que el coste suba sin límite al alejarse, o una cota inferior que el punto alcance. Queda abierta la otra mitad del problema, porque estos teoremas reconocen un mínimo pero no lo buscan. Con muchas variables, resolver $\nabla f = 0$ a mano deja de ser posible, y la sección siguiente cambia de estrategia: en lugar de resolver, bajar.

6.3 Métodos iterados tipo gradiente

LA PREGUNTA

Un ingeniero tiene que ajustar cuarenta parámetros de un proceso para que el coste sea mínimo. Sabe que en el óptimo la derivada respecto de cada parámetro vale cero, pero eso es un sistema de cuarenta ecuaciones no lineales que nadie sabe resolver. Lo único que puede hacer es fijar unos valores, medir el coste y medir cómo cambia al mover cada parámetro un poco. ¿Basta con eso para llegar al mínimo, o hace falta algo más?

La sección anterior dio una condición que el mínimo cumple: $\nabla f(x^*) = 0$. Eso convierte la búsqueda de candidatos interiores en la resolución de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas; después hay que clasificarlos. El inconveniente es que ese sistema es, en general, tan poco resoluble como el problema de partida.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: RESOLVER DIRECTAMENTE EL SISTEMA $\nabla f(x) = 0$

La vía obvia, y la que uno intenta primero, es tomar la condición necesaria como lo que parece ser: un sistema de ecuaciones, y resolverlo.
Qué ventaja tiene. Cuando funciona es imbatible: da *todos* los puntos críticos a la vez, en forma exacta, sin aproximaciones y sin criterios de parada. Es lo que se ha hecho en los ejemplos de la sección anterior, y es lo que hay que hacer siempre que se pueda.
Qué la hunde. Que casi nunca se puede. El sistema $\nabla f(x) = 0$ es lineal solo cuando f es cuadrática; en cuanto f tiene un exponencial, un logaritmo o un cociente, es un sistema no lineal, y para los sistemas no lineales no existe nada parecido a la eliminación gaussiana. Ya con $n = 2$ y $f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2} + x_1^4 + x_2^2$ aparecen ecuaciones que mezclan exponenciales y polinomios; la eliminación lineal no las resuelve. Aunque se encontraran todas las soluciones, quedaría el segundo problema: habría que clasificar cada raíz mirando la hessiana, y decidir cuál de los mínimos locales es el bueno.
Y sin embargo. La alternativa no desaparece: reaparece transformada. Aplicar el método de Newton-Raphson al sistema $\nabla f(x) = 0$ es *exactamente* el método de Newton para optimización que se verá al final de esta sección. Es decir, la vía directa, cuando se hace numéricamente en vez de simbólicamente, se convierte en uno de los métodos iterativos. No se descartó la idea: se descartó resolverla de un golpe.

Un **método iterativo de descenso** parte de un punto x^1 y construye una sucesión $x^1, x^2, x^3, \ldots$ procurando que cada paso disminuya el objetivo, con la esperanza de acercarse al mínimo. Para dar un paso hay que decidir dos cosas: **hacia dónde** y **cuánto**. Las dos primeras subsecciones se ocupan del hacia dónde y las dos últimas del cuánto.

6.3.1 Direcciones de descenso

Definición. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Diremos que $d \in \mathbb{R}^n$ es una **dirección de descenso** de f en $\hat{x}$ si existe $\delta > 0$ tal que

$$f(\hat{x} + \lambda d) < f(\hat{x}) \qquad \forall \lambda \in (0, \delta).$$

La definición es exigente en un punto y generosa en otro, y conviene notar cuál es cuál. Es generosa porque no pide que se baje siempre, sino solo *al principio*: basta con que exista un tramo inicial, por corto que sea, en el que la función descienda. Y es exigente porque en ese tramo pide descenso *estricto* en todos los puntos, no solo en el límite.

La pregunta práctica es cómo reconocer una dirección de descenso sin tener que evaluar f en un tramo entero. La respuesta es que basta un producto escalar.

Proposición. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\hat{x}$ con $\nabla f(\hat{x}) \neq 0$. Entonces $d \in \mathbb{R}^n$ es dirección de descenso siempre que $\nabla f(\hat{x})^T d < 0$. Recíprocamente, si d es de descenso, entonces $\nabla f(\hat{x})^T d \leq 0$. • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: EL ÁNGULO CON EL GRADIENTE DECIDE

El número $\nabla f(\hat{x})^T d$ es la **derivada direccional** de f en $\hat{x}$ según d: mide a qué ritmo cambia la función si uno se mueve en la dirección d. Que sea negativo es literalmente decir «por ahí se baja».
Y como el producto escalar es $\|\nabla f(\hat{x})\|\|d\| \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre el gradiente y la dirección, la condición se lee geométricamente sin cuentas: **toda dirección que forma ángulo obtuso con el gradiente da descenso para pasos suficientemente pequeños**. Son las del semiespacio abierto dibujado en la figura 6.3, y son la mitad de todas. La otra mitad sube, y el borde — las direcciones perpendiculares al gradiente, que son las tangentes a la curva de nivel — es el caso dudoso, y ahora se verá por qué.
El mismo producto escalar aparece en la proyección sobre un convexo del capítulo 2: si p es la proyección de y sobre C, entonces $(p-y)^T(x-p) \geq 0$ para todo $x \in C$. Como $2(p-y)$ es el gradiente de $\|p-y\|^2$ respecto de p, ninguna de esas direcciones factibles tiene derivada direccional negativa.

Se prueba la implicación que se usa en los algoritmos, que es la que va de la desigualdad a la dirección de descenso, y después se examina la recíproca.
Paso 1 (de la desigualdad al descenso): escribir el desarrollo de primer orden. Supongamos $\nabla f(\hat{x})^T d < 0$; en particular $d \neq 0$. Por (1) en su versión por direcciones, con $\lambda > 0$,

$$\frac{f(\hat{x}+\lambda d) - f(\hat{x})}{\lambda} = \nabla f(\hat{x})^T d + \|d\|\,\alpha(\hat{x}, \hat{x}+\lambda d).$$

Paso 2: pasar al límite (el núcleo). Como $\alpha \to 0$ cuando $\lambda \to 0$, el segundo sumando se va y

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(\hat{x}+\lambda d) - f(\hat{x})}{\lambda} = \nabla f(\hat{x})^T d < 0.$$

Un cociente cuyo límite es estrictamente negativo es estrictamente negativo en un entorno del 0: existe $\delta > 0$ tal que para $\lambda \in (0, \delta)$ el cociente es < 0, y como $\lambda > 0$, eso equivale a $f(\hat{x}+\lambda d) < f(\hat{x})$. Luego d es dirección de descenso.
Paso 3 (del descenso a la desigualdad). Si d es dirección de descenso, el cociente anterior es < 0 para $\lambda \in (0, \delta)$, y tomando límite cuando $\lambda \to 0^+$ se obtiene

$$\nabla f(\hat{x})^T d \;\leq\; 0.$$

El límite de cantidades estrictamente negativas es menor o igual que cero, no necesariamente menor: al pasar al límite la desigualdad estricta se debilita, y eso es exactamente lo que ocurre aquí.

Observación. La hoja original enuncia una equivalencia con la desigualdad estricta; aquí se

ha corregido porque el paso 3 solo permite concluir la desigualdad no estricta. **La implicación «d de descenso $\Rightarrow \nabla f(\hat{x})^T d < 0$» no es cierta en general**, y el contraejemplo es sencillo:

$$f(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2, \qquad \hat{x} = (0,0), \qquad d = (1,0).$$

Aquí $\nabla f(x) = (-2x_1, 1)^T$, luego $\nabla f(0,0) = (0,1)^T \neq 0$ y se cumple la hipótesis de la proposición. Sin embargo $\nabla f(\hat{x})^T d = 0$, y a pesar de ello $f(\lambda, 0) = -\lambda^2 < 0 = f(0,0)$ para todo $\lambda \neq 0$: la dirección d *sí* es de descenso. Lo que ocurre es que d es tangente a la curva de nivel, la función no cambia en primer orden al moverse en esa dirección, y quien decide es la curvatura, que aquí es negativa.

El enunciado correcto y completo es entonces este:

$$\nabla f(\hat{x})^T d < 0 \implies d \text{ es dirección de descenso} \implies \nabla f(\hat{x})^T d \leq 0.$$

La primera implicación es la que usan todos los algoritmos, porque es la que permite *fabricar* direcciones de descenso, y es completa. La segunda dice qué se puede afirmar en el otro sentido. Y la lección geométrica es que el caso $\nabla f(\hat{x})^T d = 0$ — moverse en una dirección tangente a la curva de nivel, sin seguir necesariamente la curva — no lo decide el gradiente: hay que mirar el segundo orden y, si también se anula, términos superiores o el signo directo del incremento.

Lo que hay que llevarse para poder reconstruirla. Todo pasa por un solo objeto, el cociente incremental $\big(f(\hat{x} + \lambda d) - f(\hat{x})\big)/\lambda$, cuyo límite cuando $\lambda \to 0^+$ es la derivada direccional $\nabla f(\hat{x})^T d$. En un sentido: si el límite es negativo, el cociente es negativo para λ pequeño, y como $\lambda > 0$ eso es bajar. En el otro: si se baja, el cociente es negativo, y su límite es ≤ 0; la desigualdad estricta se pierde al pasar al límite, y $x_2 - x_1^2$ en el origen con $d = (1,0)$ muestra que se pierde de verdad.

6.3.2 La dirección de máximo descenso

El semiespacio $\nabla f(\hat{x})^T d < 0$ proporciona direcciones que bajan. La pregunta natural es cuál baja más deprisa.

Teorema. Sea f diferenciable en S abierto, no vacío, y sea $\hat{x} \in S$ con $\nabla f(\hat{x}) \neq 0$. Entonces

$$\bar{d} = -\frac{\nabla f(\hat{x})}{\|\nabla f(\hat{x})\|}$$

es la única dirección de norma euclídea uno que minimiza la derivada direccional en $\hat{x}$. •

CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN

LA IDEA: LA PREGUNTA HAY QUE HACERLA BIEN, O NO TIENE RESPUESTA

Antes de demostrar nada hay que precisar la pregunta, y esa precisión es la mitad del resultado. «¿Qué dirección baja más?» no está bien planteada tal cual: si se admite cualquier d, basta multiplicarla por un número grande para que la derivada direccional $\nabla f(\hat{x})^T d$ sea tan negativa como se quiera. Eso no es bajar más deprisa; es dar un paso más largo, que es otra cosa y se decide aparte.

La pregunta correcta compara *a igualdad de longitud*: entre todas las direcciones de norma uno, ¿cuál hace más negativa la derivada direccional? Es decir, se resuelve

$$\text{Min } \nabla f(\hat{x})^T d \qquad \text{sujeto a} \qquad \|d\| = 1.$$

Y así planteada, la respuesta la da la desigualdad de Cauchy-Schwarz en una línea: para $\|d\| = 1$ se tiene $|\nabla f(\hat{x})^T d| \leq \|\nabla f(\hat{x})\|$, luego el producto escalar no puede bajar de $-\|\nabla f(\hat{x})\|$, y ese valor se alcanza exactamente cuando los dos vectores apuntan en sentidos opuestos. Luego $\bar{d}$ tiene que ser el gradiente cambiado de signo y normalizado.
La intuición física. El gradiente apunta en la dirección de máximo crecimiento y es perpendicular a la curva de nivel; su opuesto es, por tanto, la línea de máxima pendiente del terreno en este modelo. El flujo ideal $\dot{x} = -\nabla f(x)$ lo sigue continuamente y cumple $\frac{d}{dt} f(x(t)) = -\|\nabla f(x(t))\|^2 \leq 0$. Una canica real tiene inercia y no tiene por qué seguir esa trayectoria.
Y una advertencia que se verá más adelante, porque cuesta cara. Que sea la dirección de *máximo descenso local* no significa que sea el mejor camino hacia el mínimo. Lo mejor a corto plazo no tiene por qué ser lo mejor a largo plazo, y en un valle estrecho y alargado no lo es en absoluto.

Se trata de resolver $\text{Min}\{\nabla f(\hat{x})^T d : \|d\| = 1\}$ y ver que el mínimo se alcanza en $\bar{d}$ y solo en $\bar{d}$.
Paso 1: acotar por abajo con Cauchy-Schwarz (el núcleo). Para todo d con $\|d\| = 1$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz dice $|\nabla f(\hat{x})^T d| \leq \|\nabla f(\hat{x})\| \|d\| = \|\nabla f(\hat{x})\|$, y en particular

$$\nabla f(\hat{x})^T d \;\geq\; -\|\nabla f(\hat{x})\|.$$

Es decir, ninguna dirección unitaria puede dar una derivada direccional más negativa que $-\|\nabla f(\hat{x})\|$. Ese número es la cota, y solo falta ver que se alcanza.
Paso 2: comprobar que $\bar{d}$ la alcanza. Es una cuenta:

$$\|\bar{d}\| = \frac{\|\nabla f(\hat{x})\|}{\|\nabla f(\hat{x})\|} = 1,$$

$$\nabla f(\hat{x})^T \bar{d} = -\frac{\nabla f(\hat{x})^T \nabla f(\hat{x})}{\|\nabla f(\hat{x})\|} = -\frac{\|\nabla f(\hat{x})\|^2}{\|\nabla f(\hat{x})\|} = -\|\nabla f(\hat{x})\|.$$

Luego $\bar{d}$ es factible y alcanza la cota: es óptima.
Paso 3: es la única. La igualdad en Cauchy-Schwarz se da si y solo si los dos vectores son proporcionales, y para que el producto sea negativo la constante de proporcionalidad ha de ser negativa; junto con $\|d\| = 1$ eso fija $d = \bar{d}$. Así que la dirección de máximo descenso es única.
Y además es de descenso. Por la caracterización de las direcciones de descenso, como $\nabla f(\hat{x})^T \bar{d} = -\|\nabla f(\hat{x})\| < 0$ (aquí se usa la hipótesis $\nabla f(\hat{x}) \neq 0$), $\bar{d}$ es efectivamente una dirección de descenso.

Lo que hay que llevarse para poder reconstruirla. Primero se plantea bien la pregunta:

comparar direcciones de norma uno, porque sin esa restricción no hay mínimo. Cauchy-Schwarz da la cota $\nabla f(\hat{x})^T d \geq -\|\nabla f(\hat{x})\|$; el gradiente cambiado de signo y normalizado la alcanza; y la igualdad en Cauchy-Schwarz exige proporcionalidad, con constante negativa para que el producto sea negativo, lo que deja una sola dirección. Con números: para $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2$ en $\hat{x} = (4,1)$ es $\nabla f(\hat{x}) = (8,8)^T$. Las direcciones unitarias $(-1,0)$ y $(0,-1)$ dan derivada direccional -8, y $\bar{d} = -(1,1)^T/\sqrt{2}$ da $-8\sqrt{2} \approx -11{,}31$, que es exactamente $-\|\nabla f(\hat{x})\|$: ninguna dirección unitaria baja más deprisa.

DE DÓNDE VIENE: CAUCHY, 1847, Y UN PROBLEMA DE ASTRONOMÍA

El método de bajar siguiendo el gradiente lo propuso Augustin-Louis Cauchy en una nota de 1847 a la Academia de Ciencias de París titulada «Método general para la resolución de sistemas de ecuaciones simultáneas». El origen es el mismo del que salió el capítulo: cálculos de órbitas que producían sistemas de ecuaciones demasiado grandes para resolverlos por eliminación.

La idea de Cauchy fue darle la vuelta al problema. En vez de resolver el sistema $u_1(x) = \cdots = u_n(x) = 0$, consideró la función $f = u_1^2 + \cdots + u_n^2$, que es no negativa y vale cero exactamente en las soluciones del sistema, y se propuso *minimizarla* bajando por su gradiente. Es decir, convirtió un problema de resolver ecuaciones en un problema de optimización, que es justo el camino contrario al que se ha descrito más arriba, y las dos traducciones siguen usándose hoy en las dos direcciones según convenga.

6.3.3 El método del gradiente

El esquema general es tan simple como parece.

Método del gradiente. Es un procedimiento iterativo que parte de un punto inicial x^1 y construye las sucesivas iteraciones mediante

$$x^{k+1} = x^k + d^k,$$

donde d^k es un paso de descenso cuya longitud se ha elegido de modo que $x^{k+1} \in S$ y $f(x^{k+1}) < f(x^k)$. Que un vector sea una dirección de descenso solo garantiza la mejora al multiplicarlo por un paso suficientemente pequeño.

Todo el diseño de un método consiste, entonces, en decir cómo se fabrica d^k. La propuesta del tema es tomarlo de la forma

$$d^k = -D_k \nabla f(x^k),$$

donde D_k es una matriz simétrica definida positiva. Esto asegura una dirección de descenso; su longitud todavía debe controlarse. La justificación es de una línea:

Proposición. Si D_k es simétrica definida positiva y $\nabla f(x^k) \neq 0$, entonces $d^k = -D_k \nabla f(x^k)$ es una dirección de descenso en x^k.

Basta comprobar el signo del producto escalar que garantiza el descenso:

$$\nabla f(x^k)^T d^k = -\nabla f(x^k)^T D_k \nabla f(x^k) < 0,$$

donde la desigualdad estricta es exactamente la definición de matriz definida positiva aplicada al vector $\nabla f(x^k)$, que es no nulo por hipótesis.

LA IDEA: D_k ES UN CAMBIO DE FORMA ANTES DE MIRAR LA PENDIENTE

La fórmula $d^k = -D_k \nabla f(x^k)$ puede parecer una generalización gratuita, pero tiene una lectura muy concreta y vale la pena entenderla, porque es lo que separa los dos métodos del tema.
Bajar por $-\nabla f$ es lo mejor *si se mide la longitud con la distancia euclídea ordinaria*. Pero cuando las variables son de naturalezas distintas — una temperatura en grados y una presión en pascales — la distancia euclídea entre dos configuraciones no significa gran cosa, y la dirección de máxima pendiente cambia si uno cambia las unidades. Multiplicar por D_k es, precisamente, *deformar el espacio antes de mirar la pendiente*: es elegir otra manera de medir. Que D_k sea definida positiva es lo que garantiza $\nabla f^T D_k \nabla f > 0$ cuando el gradiente no es nulo: al cambiar el signo se obtiene una derivada direccional negativa.
Las dos elecciones del tema son los dos extremos. Con $D_k = \alpha_k I$ no se deforma nada: se baja por la pendiente tal cual, y se llama *máximo descenso*. Con $D_k = \left(\nabla^2 f(x^k)\right)^{-1}$ se deforma el espacio usando la propia curvatura de la función, si esa hessiana es definida positiva: el modelo cuadrático local se vuelve redondo en las coordenadas adaptadas. Esa es la idea de *Newton*.

6.3.4 Primera opción: $D_k = \alpha_k I$, y las tres reglas de paso

Tomando $D_k = \alpha_k \,\mathrm{Id}$ con $\alpha_k > 0$, la iteración queda

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k \nabla f(x^k),$$

que es el método del gradiente en su forma más pura: se camina siempre por la línea de máxima pendiente. Lo único que queda por decidir es la **longitud de paso** α_k, y esa decisión importa más de lo que parece: con pasos demasiado cortos el método tarda una eternidad, y con pasos demasiado largos se pasa de largo y puede acabar subiendo. Hay tres reglas.

6.3.4.1 Regla de máximo descenso

Si el mínimo se alcanza, se toma como α_k una solución óptima de

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f\left(x^k - \alpha \nabla f(x^k)\right) \\ \text{sujeto a:} & \alpha \geq 0, \quad x^k - \alpha \nabla f(x^k) \in S. \end{array}$$

Es decir: fijada la dirección, se busca el punto más bajo de la semirrecta dentro del dominio. Se le llama también *búsqueda lineal exacta*, y tiene una propiedad geométrica que la delata. La existencia del paso óptimo no es automática: para $f(x) = e^{-x}$ la función sigue bajando indefinidamente sobre la semirrecta de descenso.

LA IDEA: DOS PASOS CONSECUTIVOS SON PERPENDICULARES, Y ESO ES EL PROBLEMA

Sea $\varphi(\alpha) = f\left(x^k - \alpha \nabla f(x^k)\right)$. Si $\nabla f(x^k) \neq 0$ y la búsqueda alcanza un mínimo interior $\alpha_k > 0$, se tiene $\varphi'(\alpha_k) = 0$. Aplicando la regla de la cadena,

$$\varphi'(\alpha) = -\nabla f\left(x^k - \alpha \nabla f(x^k)\right)^T \nabla f(x^k),$$

y evaluando en α_k, donde el punto de dentro es precisamente x^{k+1}:

$$\nabla f(x^{k+1})^T \nabla f(x^k) = 0.$$

Mientras los gradientes no se anulen, las dos direcciones consecutivas son perpendiculares. Esa es a la vez la elegancia y la ruina del método: obligado a girar noventa grados en cada paso, en un valle estrecho y alargado el camino se convierte en un zigzag que rebota de pared a pared y avanza muy poco hacia el fondo. El resultado no es un defecto de implementación: es una consecuencia inevitable de haber sido óptimo en cada paso por separado.

La medida de cuánto se sufre es el **número de condición** de la hessiana, es decir, el cociente $\kappa = \lambda_{\text{máx}}/\lambda_{\text{mín}}$ entre sus autovalores extremos, que mide lo aplastado que está el valle. Para una cuadrática con hessiana definida positiva, el error en el valor de la función satisface la cota

$$f(x^{k+1}) - f(x^*) \le \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\right)^2 \big(f(x^k) - f(x^*)\big).$$

Es una cota del peor caso: algunos puntos de partida permiten avanzar más deprisa. Con $\kappa = 1$ se llega en un solo paso; con $\kappa = 100$ el factor vale aproximadamente 0,9608, y esta cota requiere 58 iteraciones para reducir el error a la décima parte.

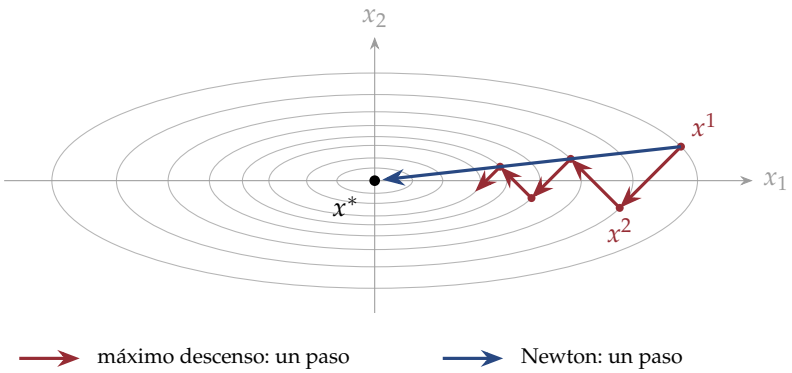


Figura 6.6: Minimizando $f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + 9x_2^2)$ desde $x^1 = (9, 1)$. En granate, el método del gradiente con la regla de máximo descenso: cada paso es perpendicular al anterior y el camino zigzaguea, reduciendo el valor de f en un factor 0,64 por iteración. En azul, el método de Newton, que llega al óptimo en un único paso porque la función es cuadrática.

Ejemplo. Comprobemos las cuentas de la figura. Sea $f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + 9x_2^2)$, con $\nabla f(x) = (x_1, 9x_2)^T$, y partamos de $x^1 = (9, 1)$, donde $f(x^1) = \frac{1}{2}(81 + 9) = 45$.

Dirección. $-\nabla f(x^1) = (-9, -9)^T$: la línea de máxima pendiente en $(9, 1)$ apunta en la diagonal, no hacia el origen.

Paso óptimo. Hay que minimizar $\varphi(\alpha) = f\big((9,1) - \alpha(9,9)\big) = \frac{1}{2}\big(81(1-\alpha)^2 + 9(1-9\alpha)^2\big)$. Derivando e igualando a cero,

$$\varphi'(\alpha) = -81(1-\alpha) - 81(1-9\alpha) = 0 \implies (1-\alpha) + (1-9\alpha) = 0 \implies \alpha_1 = \tfrac{1}{5}.$$

Nuevo punto. $x^2 = (9,1) - \frac{1}{5}(9,9) = (7{,}2,\ -0{,}8)$, con $f(x^2) = \frac{1}{2}(51{,}84 + 5{,}76) = 28{,}8$. La

reducción es $28{,}8/45 = 0{,}64$, que es exactamente $\left(\frac{9-1}{9+1}\right)^2 = 0{,}8^2$, el factor anunciado con $\kappa = 9$.

Y la perpendicularidad. $\nabla f(x^2) = (7{,}2,\ -7{,}2)^T$, y en efecto $\nabla f(x^2)^T \nabla f(x^1) = 7{,}2 \cdot 9 + (-7{,}2) \cdot 9 = 0$. El segundo paso irá en la diagonal contraria, y así sucesivamente: la sucesión es $(9, 1) \to (7{,}2, -0{,}8) \to (5{,}76,\ 0{,}64) \to (4{,}608,\ -0{,}512) \to \cdots$, que converge al origen alternando de lado y multiplicando cada coordenada por 0,8 en valor absoluto. Convergente sí, pero lentamente y dando tumbos.

6.3.4.2 *Regla de la serie divergente*

Se toma de antemano una sucesión $\{\alpha_k\}$ que cumpla las dos condiciones

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty,$$

con $\alpha_k > 0$ para $k \geq 1$; por ejemplo, $\alpha_k = 1/k$.

LA IDEA: ACORTAR EL PASO SIN AGOTAR DEMASIADO PRONTO EL AVANCE

α_k es el factor que multiplica al gradiente: la longitud real del desplazamiento es $\alpha_k \|\nabla f(x^k)\|$. Por eso $\sum \alpha_k$ no es la longitud del camino.

Por qué se pide $\alpha_k \to 0$ en esta regla. Los factores se reducen para hacer menos bruscos los cambios sin resolver una búsqueda lineal. No es una condición necesaria para cualquier método: sobre $f(x) = x^2/2$, el paso constante $\alpha = 1/2$ produce $x^{k+1} = x^k/2$ y converge al mínimo.

Por qué se evita una suma finita. Los pasos podrían agotarse antes de llegar a un punto estacionario. En la misma función, tomando $x^1 = 1$ y $\alpha_k = 2^{-k}$,

$$x^{k+1} = \prod_{j=1}^{k} (1 - 2^{-j}).$$

Este producto decrece, pero queda separado de cero: como $\log(1 - t) \geq -2t$ para $0 \leq t \leq 1/2$, su logaritmo es al menos $-2\sum_{j=1}^{k} 2^{-j} \geq -2$. Así, $x^k \geq e^{-2} > 0$: el algoritmo se estabiliza sin alcanzar el mínimo.

La serie armónica evita ese agotamiento y permite fijar los pasos de antemano, sin evaluaciones adicionales de f. Las dos condiciones de la regla, por sí solas, no garantizan convergencia para cualquier función; hacen falta hipótesis sobre el problema.

6.3.4.3 *Regla de Armijo*

Es el término medio entre las dos anteriores: no resuelve un problema de minimización, pero tampoco ignora la función. Se prueban pasos cada vez más cortos hasta que uno de ellos baje *lo bastante*.

Se seleccionan $\epsilon > 0$ y $\beta, \gamma \in (0, 1)$ y se toma

$$\alpha_k = \epsilon\, \beta^{m_k},$$

donde m_k es el menor entero no negativo para el que el punto de prueba pertenece a S y se cumple la condición de descenso suficiente

$$f(x^k) \;\geq\; f\big(x^k - \epsilon\beta^{m_k}\nabla f(x^k)\big) + \gamma\,\epsilon\beta^{m_k}\,\nabla f(x^k)^T\nabla f(x^k),$$

es decir, escribiéndolo con $\alpha = \epsilon\beta^{m_k}$ y despejando,

$$f(x^k) - f\big(x^k - \alpha\nabla f(x^k)\big) \;\geq\; \gamma\,\alpha\,\|\nabla f(x^k)\|^2.$$

Observación. Para una dirección d^k con $\nabla f(x^k)^T d^k < 0$, no necesariamente $-\nabla f(x^k)$, la condición de Armijo se escribe

$$f(x^k) - f\big(x^k + \alpha d^k\big) \;\geq\; -\gamma\,\alpha\,\nabla f(x^k)^T d^k,$$

y el lado derecho es positivo porque $\nabla f(x^k)^T d^k < 0$. Al particularizar $d^k = -\nabla f(x^k)$ se tiene $\nabla f(x^k)^T d^k = -\|\nabla f(x^k)\|^2$, y los dos signos menos se cancelan dejando la versión de arriba, con signo $+$ delante de γ.

Conviene tenerlo presente porque, escrita con un signo $-$ en ese lugar, la desigualdad pediría $f(x^k) - f(x^k - \alpha\nabla f(x^k)) \geq -\gamma\alpha\|\nabla f(x^k)\|^2$, cuyo lado derecho es *negativo* y que por tanto admitiría pasos que *aumentan* la función. Seguiría rechazando algunos pasos, pero perdería la garantía de descenso. Ese es el motivo por el que el signo importa.

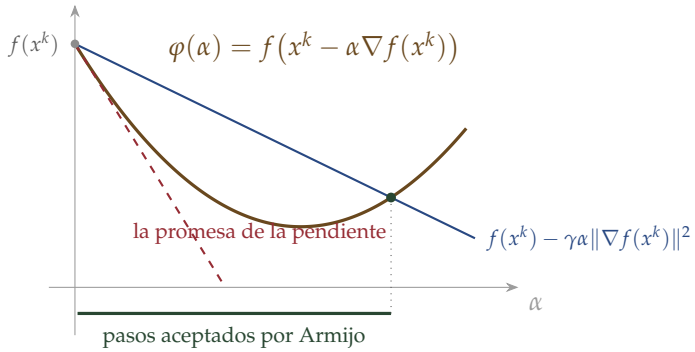


Figura 6.7: La regla de Armijo sobre la recta de búsqueda. La curva es el valor de f al avanzar un paso α; la recta discontinua es lo que prometía la pendiente, y la recta continua es esa promesa rebajada por el factor γ. Se aceptan los pasos en los que la curva queda por debajo de la recta continua, es decir, los que bajan al menos una fracción γ de lo prometido. El extremo derecho de ese intervalo es lo que impide aceptar pasos muy largos que apenas mejoran.

LA IDEA: NO BASTA CON BAJAR, HAY QUE BAJAR LO QUE PROMETÍA LA PENDIENTE

La condición de Armijo compara lo que se ha bajado de verdad con lo que la pendiente prometía bajar.
La pendiente en x^k en la dirección $-\nabla f(x^k)$ vale $-\|\nabla f(x^k)\|^2$. Si la función fuese exactamente su plano tangente, al avanzar un paso α bajaría $\alpha\|\nabla f(x^k)\|^2$. Como no lo es, exigir esa bajada entera sería demasiado. Lo que se exige es una **fracción** γ de la promesa, con $\gamma \in (0,1)$ pequeño en la práctica.
¿Y por qué no basta con exigir simplemente que f baje? Porque se puede bajar una miseria infinitas veces y no llegar nunca: una sucesión estrictamente decreciente puede

converger a un valor que no sea el mínimo. Armijo exige un descenso proporcional a la pendiente y al paso. Además, tomar el primer paso aceptable evita acortarlo arbitrariamente; la convergencia requiere también hipótesis sobre f, no solo esta desigualdad.

Cómo se busca m_k en la práctica. Se empieza con $m = 0$, es decir, con el paso más largo $\alpha = \epsilon$; si la condición falla, se prueba $m = 1$, o sea $\alpha = \epsilon\beta$, que es más corto porque $\beta < 1$; y así sucesivamente. Como se toma el *menor* entero que la cumple, se está eligiendo el paso más largo de la lista que sea aceptable. A ese procedimiento se le llama *backtracking*: se retrocede desde un paso ambicioso hasta uno aceptable. Si f es diferenciable en el punto interior x^k y $\nabla f(x^k) \neq 0$, el proceso termina: el desarrollo de primer orden y $\gamma < 1$ garantizan la desigualdad para todo $\alpha > 0$ suficientemente pequeño. Si el gradiente es nulo, se detiene la búsqueda y se clasifica el punto estacionario.

Ejemplo. Apliquemos la regla a la misma función $f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + 9x_2^2)$ desde $x^1 = (9, 1)$, con los parámetros $\epsilon = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$ y $\gamma = \frac{1}{10}$.

Se tiene $f(x^1) = 45$, $\nabla f(x^1) = (9, 9)^T$ y $\|\nabla f(x^1)\|^2 = 162$. La condición que hay que comprobar es $45 - f\big((9,1) - \alpha(9,9)\big) \geq \frac{1}{10}\,\alpha \cdot 162 = 16{,}2\,\alpha$.

- $m = 0$, $\alpha = 1$. El punto de prueba es $(0, -8)$ y $f = \frac{1}{2}(0 + 9 \cdot 64) = 288$. El descenso es $45 - 288 = -243$, que ni siquiera es positivo: el paso es tan largo que la función *sube*. Falla.
- $m = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$. El punto es $(4{,}5,\ -3{,}5)$ y $f = \frac{1}{2}(20{,}25 + 110{,}25) = 65{,}25$. El descenso es $45 - 65{,}25 = -20{,}25 < 8{,}1$. Falla otra vez, y por lo mismo.
- $m = 2$, $\alpha = \frac{1}{4}$. El punto es $(6{,}75,\ -1{,}25)$ y $f = \frac{1}{2}(45{,}5625 + 14{,}0625) = 29{,}8125$. El descenso es $45 - 29{,}8125 = 15{,}1875$, y el listón es $16{,}2 \cdot \frac{1}{4} = 4{,}05$. Se cumple.

Luego $m_1 = 2$ y $\alpha_1 = \frac{1}{4}$, con $x^2 = (6{,}75,\ -1{,}25)$.

Qué enseña la comparación. La búsqueda exacta daba $\alpha_1 = \frac{1}{5}$ y llegaba a $f = 28{,}8$; Armijo da $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ y llega a $f = 29{,}8125$, un poco peor. A cambio, la búsqueda exacta ha necesitado resolver un problema de minimización en una variable y Armijo solo ha evaluado la función tres veces. La conveniencia de ese intercambio depende del coste de las evaluaciones y de la dificultad de la minimización exacta.

DE DÓNDE VIENE: UNA REGLA DE PASO CON CONDICIONES DE CONVERGENCIA

Larry Armijo analizó esta regla en un artículo de 1966 del *Pacific Journal of Mathematics*.[a] El interés está en relacionar una prueba sencilla de descenso con un resultado de convergencia. Su teorema no exige solo un gradiente lipschitziano: supone también que f está acotada inferiormente y que, dentro del subnivel inicial, la norma del gradiente queda separada de cero al mantenerse a distancia positiva del mínimo. La regla permite elegir el paso sin conocer de antemano la constante de Lipschitz.

[a] L. Armijo, *Minimization of functions having Lipschitz continuous first partial derivatives*, 16 (1966), pp. 1–3, doi:10.2140/pjm.1966.16.1.

6.3.5 Segunda opción: el método de Newton

La otra elección de D_k que propone el tema es

$$D_k = \left(\nabla^2 f(x^k)\right)^{-1},$$

siempre que esa matriz sea definida positiva, y da lugar al **método de Newton**.

LA IDEA: EN VEZ DE UN PLANO, IMITAR LA FUNCIÓN CON UN CUENCO

El método del gradiente usa solo la primera derivada, es decir, aproxima la función por su plano tangente. Si el gradiente no es nulo, ese plano no tiene mínimo: por eso hay que decidir aparte cuánto se avanza, y por eso aparece el problema de la longitud de paso.
La idea de Newton es aproximar mejor. Si f es dos veces diferenciable, cerca de x^k se parece a la cuadrática

$$q(x) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T(x - x^k) + \tfrac{1}{2}(x - x^k)^T \nabla^2 f(x^k)(x - x^k),$$

que *sí* tiene mínimo cuando $\nabla^2 f(x^k)$ es definida positiva, porque entonces es un paraboloide abierto hacia arriba. Y el mínimo de un paraboloide se calcula exactamente, de una vez, resolviendo un sistema *lineal*. Así que el método consiste en saltar directamente al fondo del cuenco que mejor imita a f en el punto donde uno está, y repetir desde allí.
La diferencia de fondo con el método del gradiente. El gradiente pregunta «¿hacia dónde baja?» y no sabe cuánto avanzar. Newton pregunta «¿dónde estaría el fondo si el valle fuese exactamente esta parábola?» y la respuesta le da la dirección *y* la longitud de una vez. Por eso en el método de Newton no hay α_k: el paso completo es $-\left(\nabla^2 f(x^k)\right)^{-1}\nabla f(x^k)$.
Y la ventaja geométrica que resuelve el zigzag. Multiplicar por la inversa de la hessiana equivale a estirar el espacio en las direcciones en que el valle es estrecho hasta dejarlo redondo. En un valle redondo la línea de máxima pendiente apunta al fondo, y no hay zigzag posible. Por eso en la figura 6.6 Newton llega en un solo paso: para una cuadrática, el cuenco que imita a f *es* f, y la imitación es exacta.

La deducción. Derivando la cuadrática q se obtiene

$$\nabla q(x) = \nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k)(x - x^k), \qquad \nabla^2 q(x) = \nabla^2 f(x^k),$$

donde la segunda igualdad dice que la curvatura del modelo es constante y coincide con la de f en x^k, que es lo que se le pedía.

Si $\left(\nabla^2 f(x^k)\right)^{-1}$ es definida positiva, también lo es $\nabla^2 f(x^k)$ — porque los autovalores de la inversa son los inversos de los autovalores, y el inverso de un número positivo es positivo —, luego por la *condición suficiente* de optimalidad local los puntos con $\nabla q(x) = 0$ son mínimos locales de q; y como q es convexa por tener hessiana constante semidefinida positiva, son de hecho mínimos globales de q por la condición suficiente de optimalidad global. Resolviendo,

$$\nabla q(x) = \nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k)(x - x^k) = 0 \xrightarrow{\cdot\,(\nabla^2 f(x^k))^{-1}} \left(\nabla^2 f(x^k)\right)^{-1}\nabla f(x^k) + (x - x^k) = 0,$$

de donde $x = x^k - \left(\nabla^2 f(x^k)\right)^{-1} \nabla f(x^k)$. Por lo que en el método de Newton

$$\boxed{x^{k+1} = x^k - \left(\nabla^2 f(x^k)\right)^{-1} \nabla f(x^k)}$$

Observación. Dos precisiones sobre esta deducción que conviene no pasar por alto.

La primera es de atribución: quien garantiza que los puntos con $\nabla q(x) = 0$ son mínimos locales es la condición *suficiente* de segundo orden — gradiente nulo más hessiana definida positiva —, y no la necesaria. La condición necesaria va en el sentido contrario: de mínimo a gradiente nulo, y con ella sola no se podría concluir nada sobre x^{k+1}.

La segunda es práctica: para calcular el paso se suele **resolver el sistema** $\nabla^2 f(x^k)\, s = -\nabla f(x^k)$ y tomar $x^{k+1} = x^k + s$, en vez de formar la inversa. Se obtiene el mismo paso matemático, evitando operaciones innecesarias. La inversa en la fórmula es una comodidad de notación.

Ejemplo. Sobre la función de la figura 6.6, $f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + 9x_2^2)$, se tiene $\nabla f(x) = (x_1, 9x_2)^T$ y $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, constante y definida positiva. Su inversa es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/9 \end{pmatrix}$, y el paso de Newton desde cualquier punto $x = (x_1, x_2)$ vale

$$x - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 9x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Un solo paso, desde donde sea. La razón es que la cuadrática que Newton usa como modelo coincide con la función, así que el fondo del modelo es el fondo de verdad. Y esto vale para cualquier función cuadrática con hessiana definida positiva: **Newton resuelve las cuadráticas en una iteración**, que es otra manera de decir que resuelve el sistema lineal $\nabla^2 f\, x = -$ (término lineal) de un tirón.

Sobre una cuadrática Newton acierta a la primera, y eso no dice nada de cómo se comporta sobre las demás funciones. Hace falta un caso en el que el modelo cuadrático sea solo una aproximación.

Ejemplo. Sea $f(x) = e^x - 2x$ en $\mathbb{R}$. Es $f'(x) = e^x - 2$ y $f''(x) = e^x > 0$, así que f es convexa y su único punto crítico, $x^* = \ln 2 \approx 0{,}693147$, es su mínimo global. En una variable la iteración de Newton es $x^{k+1} = x^k - f'(x^k)/f''(x^k)$, que aquí queda

$$x^{k+1} = x^k - \frac{e^{x^k} - 2}{e^{x^k}} = x^k - 1 + 2e^{-x^k}.$$

Desde $x^1 = 0$ salen $x^2 = 1$, $x^3 = 2/e \approx 0{,}7358$, $x^4 \approx 0{,}6940$ y $x^5 \approx 0{,}693148$. Para comparar, el método del gradiente con paso fijo $\alpha = \frac{1}{4}$, que es $x^{k+1} = x^k - \frac{1}{4}\left(e^{x^k} - 2\right)$, desde el mismo punto:

k	gradiente, $\alpha = \frac{1}{4}$	error	Newton	error
1	0	0,6931	0	0,6931
2	0,2500	0,4431	1	0,3069
3	0,4290	0,2642	0,7358	0,0426
4	0,5451	0,1481	0,6940	0,0009
5	0,6139	0,0793	0,693148	$4 \cdot 10^{-7}$

El gradiente divide el error aproximadamente por dos en cada paso: es convergencia **lineal**. Newton lo eleva aproximadamente al cuadrado, $0{,}31 \to 0{,}043 \to 0{,}0009 \to 4 \cdot 10^{-7}$, y el número de cifras correctas se duplica en cada paso: es convergencia **cuadrática**. Las dos cosas se explican en una línea cada una.

El gradiente. Cerca de x^* es $f'(x) \approx f''(x^*)(x - x^*)$, luego $x^{k+1} - x^* \approx \big(1 - \alpha f''(x^*)\big)(x^k - x^*)$, y aquí $1 - \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$. El factor sería cero con $\alpha = 1/f''(x^*)$, que es justamente el paso de Newton: Newton es el método del gradiente con el paso que pide la curvatura.

Newton. Taylor de f' alrededor de x^k, con resto de Lagrange, da $0 = f'(x^*) = f'(x^k) + f''(x^k)(x^* - x^k) + \frac{1}{2} f'''(\xi)(x^* - x^k)^2$ para algún ξ entre x^k y x^*. Dividiendo por $f''(x^k)$ y reordenando,

$$x^{k+1} - x^* = \frac{f'''(\xi)}{2f''(x^k)} \left(x^k - x^*\right)^2.$$

En palabras: el error nuevo es el cuadrado del anterior por un factor que depende de la tercera derivada, que es lo que el modelo cuadrático no ve. Aquí $f''' = f'' = e^x$ y el factor tiende a $\frac{1}{2}$; en la tabla, $0{,}0009/0{,}0426^2 \approx 0{,}49$ y $4 \cdot 10^{-7}/0{,}0009^2 \approx 0{,}50$. Y la misma fórmula dice cuándo esto no sirve de nada: si el error es grande, su cuadrado es todavía mayor. La convergencia cuadrática es una propiedad de *cerca* del mínimo.

Observación. *Dónde es débil el método de Newton*, que hay que decirlo con la misma claridad con la que se han dicho sus ventajas.

1. **Exige la hessiana.** Hay que calcular $n(n+1)/2$ derivadas segundas en cada iteración y resolver un sistema lineal $n \times n$. Con n grande eso puede costar más que todas las iteraciones que el método del gradiente necesitaría para compensarlo.
2. **Exige que la hessiana sea definida positiva, y no siempre lo es.** Si en x^k la hessiana es indefinida — por ejemplo, si el método pasa cerca de un punto de silla —, entonces D_k no es definida positiva, el argumento que garantizaba el descenso no se aplica y *la dirección de Newton puede no ser de descenso*. El método puede entonces subir, o dirigirse hacia un máximo, porque lo único que hace es buscar puntos con gradiente nulo sin distinguir de qué tipo son.
3. **Es local.** La aproximación cuadrática solo es buena cerca de x^k; si el punto de partida está lejos del óptimo, el salto al fondo del modelo puede caer en cualquier sitio. Por eso en la práctica se usa el paso de Newton como *dirección* y se le añade una longitud de paso con la regla de Armijo, combinando lo mejor de los dos.

El gradiente requiere menos información por iteración; Newton aprovecha la curvatura, pero necesita más cálculo y control del paso. Los métodos cuasi-Newton buscan un equilibrio aproximando la hessiana a partir de los gradientes ya calculados.

Las debilidades, con números. La función $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ tiene dos mínimos globales en ± 1, con valor $-\frac{1}{4}$, y un máximo local en 0. Es $f'(x) = x^3 - x$ y $f''(x) = 3x^2 - 1$, y Newton es $x^{k+1} = x^k - \big((x^k)^3 - x^k\big) / \big(3(x^k)^2 - 1\big)$. Según dónde se suelte, se ven su virtud y las debilidades segunda y tercera de la lista.

- *Desde* $x^1 = 2$, con $f''(2) = 11 > 0$: 1,4545; 1,1510; 1,0253; 1,0009; 1,0000012. Convergencia cuadrática al mínimo, como en el ejemplo anterior.
- *Desde* $x^1 = 0{,}3$, con $f''(0{,}3) = -0{,}73 < 0$: $-0{,}0740$; $0{,}0008$; $-1 \cdot 10^{-9}$. Converge, y deprisa, al *máximo*. Newton buscaba un cero de f' y lo ha encontrado; que sea un máximo no entra en su cuenta.

- *Desde* $x^1 = 0{,}6$, con $f''(0{,}6) = 0{,}08$, positiva pero pequeña: el modelo es una parábola casi plana, su fondo está lejos, y el primer paso lleva a $x^2 = 5{,}4$. Desde allí vuelve, 3,64; 2,49; 1,75; 1,31; 1,08, y solo al final, ya cerca de 1, recupera la convergencia cuadrática.

El remedio de la práctica es el de la lista, y los números muestran por qué funciona. En $x = 0{,}3$ la dirección de Newton, $d = -f'(0{,}3)/f''(0{,}3) \approx -0{,}374$, ni siquiera es de descenso, porque $f'(0{,}3)\, d \approx 0{,}102 > 0$; se comprueba antes de dar el paso, y en ese caso se cambia de dirección, por ejemplo a $-f'$. En $x = 0{,}6$ la dirección sí es de descenso, $d = 4{,}8$, pero el paso completo sube f de $-0{,}1476$ a 198,0. Usada como dirección con la regla de Armijo, con $\epsilon = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$ y $\gamma = \frac{1}{10}$, se rechazan $\alpha = 1$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$, que llevan a 5,4, 3 y 1,8, y se acepta $\alpha = \frac{1}{8}$, que lleva a $x = 1{,}2$ con $f = -0{,}2016$: ya cerca del mínimo, donde el paso completo de Newton vuelve a funcionar.

CONEXIÓN: CON LA RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES

La fórmula $x^{k+1} = x^k - \left(\nabla^2 f(x^k)\right)^{-1} \nabla f(x^k)$ es literalmente el método de Newton-Raphson aplicado al sistema $F(x) = \nabla f(x) = 0$, cuya matriz jacobiana es $JF(x) = \nabla^2 f(x)$. En una variable esto se reduce a la fórmula de bachillerato $x^{k+1} = x^k - f'(x^k)/f''(x^k)$, que es Newton-Raphson para $f' = 0$.

Ahí se ve también, de golpe, de dónde viene su virtud y de dónde su defecto. Newton-Raphson busca *ceros* de ∇f, y los ceros del gradiente son los mínimos, los máximos y las sillas por igual: el método no los distingue, y por eso puede converger a un máximo si se le suelta cerca de uno. Es el precio de haber sustituido el problema «minimizar» por el problema «resolver $\nabla f = 0$», que era la alternativa descartada al principio de esta sección. Reaparece útil, pero con su defecto a cuestas.

El método en pasos, con criterio de parada. Juntando las piezas, un método de descenso completo es este. Los datos son f, su gradiente (y su hessiana si se usa Newton), un punto inicial x^1 y una tolerancia $\varepsilon > 0$.

1. *Mirar si ya se ha llegado.* Calcular $g^k = \nabla f(x^k)$. Si $\|g^k\| \le \varepsilon$, parar: x^k es, aproximadamente, un punto estacionario.
2. *Elegir la dirección.* $d^k = -D_k g^k$ con D_k simétrica definida positiva: $D_k = I$ en el método del gradiente; $D_k = \left(\nabla^2 f(x^k)\right)^{-1}$ en Newton, si esa hessiana es definida positiva, y $d^k = -g^k$ si no lo es. Comprobar que $(g^k)^T d^k < 0$.
3. *Elegir la longitud* α_k, con búsqueda exacta, con Armijo o con la serie divergente; en Newton, $\alpha_k = 1$ si el paso completo cumple Armijo.
4. *Avanzar.* $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$, y volver al paso 1.

En una cuadrática $f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x$, con Q definida positiva, la búsqueda exacta sobre $-g^k$ tiene fórmula cerrada. Como $g^k = Qx^k - b$,

$$\varphi(\alpha) = f\left(x^k - \alpha g^k\right) = f(x^k) - \alpha\, (g^k)^T g^k + \tfrac{1}{2}\alpha^2\, (g^k)^T Q g^k,$$

una parábola en α cuyo mínimo está en

$$\alpha_k = \frac{(g^k)^T g^k}{(g^k)^T Q g^k}.$$

En palabras: lo que se baja por unidad de paso dividido por lo que curva la función en esa dirección. En el ejemplo del zigzag, con $g^1 = (9, 9)^T$ y $Q = \operatorname{diag}(1, 9)$, da $162/810 = \frac{1}{5}$, el mismo paso que allí se obtuvo derivando.

Por qué se para con la norma del gradiente, y no con otra cosa. Lo que se quiere que sea cero es el gradiente: es la condición necesaria. Los otros criterios que se usan, un desplazamiento $\|x^{k+1} - x^k\|$ pequeño o una mejora $|f(x^{k+1}) - f(x^k)|$ pequeña, dicen que el método ha dejado de moverse, no que haya llegado. Con los pasos $\alpha_k = 2^{-k}$ de la regla de la serie divergente sobre $x^2/2$, los desplazamientos se hacen tan pequeños como se quiera y el método se queda parado por encima de e^{-2}, donde la derivada no es cero. Esos criterios, y un número máximo de iteraciones, sirven de salvaguarda, pero no certifican nada. Y ni siquiera la parada buena certifica un mínimo: da un punto casi estacionario, que después se clasifica con la sección anterior.

Qué se ha ganado: la justificación de los métodos, de corrido. La pregunta del ingeniero de los cuarenta parámetros tiene respuesta, y esa respuesta es la justificación de todos los métodos de la sección. Medir el coste y cómo cambia al mover cada parámetro es medir f y ∇f, y con eso basta para bajar. Toda dirección que forme ángulo obtuso con el gradiente baja durante un tramo: es el criterio de descenso. La que baja más deprisa por unidad de longitud es $-\nabla f$: es Cauchy-Schwarz. Y cualquier $-D_k \nabla f$ con D_k definida positiva sigue bajando, lo que permite deformar el espacio sin perder la garantía. Lo que la dirección no dice es cuánto avanzar, y de ahí las reglas de paso: la búsqueda exacta, óptima en cada paso y por eso en zigzag; la serie divergente, que no mira la función; y Armijo, que exige bajar una fracción de lo que prometía la pendiente y así descarta tanto los pasos que suben como los que bajan una miseria. Newton cambia el plano tangente por el cuenco que mejor imita a la función y obtiene dirección y longitud de una vez, con convergencia cuadrática cerca del mínimo y sin garantías lejos de él. Quedan dos matices. Lo que se alcanza es un punto donde el gradiente casi se anula, y para saber si es un mínimo hay que clasificarlo. Y la velocidad depende de la forma del valle, medida por el número de condición: eso decide cuántas de esas mediciones harán falta.

6.4 Ejercicios

Ejercicio 6.1. *Clasificar los puntos críticos de una cúbica en dos variables*

Halle y clasifique los puntos críticos de

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$$

en $S = \mathbb{R}^2$. Diga si alguno es mínimo global.

Resolución. *La idea.* Es el método en pasos de la sección 6.2.6, entero. El sistema $\nabla f = 0$ se resuelve por sustitución, porque cada ecuación despeja una variable en función de la otra; cada candidato se clasifica con su hessiana; y para la globalidad se busca una recta por la que la función se desplome, cosa que un término cúbico casi siempre permite.
Primer movimiento: el gradiente. Se calcula y se anula, porque la condición necesaria dice que el mínimo, de haberlo, está entre las soluciones:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - 3x_2 \\ 3x_2^2 - 3x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_2 = x_1^2, \\ x_1 = x_2^2. \end{cases}$$

Sustituyendo la primera en la segunda, $x_1 = x_1^4$, es decir, $x_1(x_1^3 - 1) = 0$, que en los reales da $x_1 = 0$ o $x_1 = 1$. Los puntos críticos son $P_1 = (0,0)$ y $P_2 = (1,1)$.
Segundo movimiento: la hessiana.

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 & -3 \\ -3 & 6x_2 \end{pmatrix}.$$

En $P_1 = (0,0)$: $\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, con determinante $-9 < 0$. Una matriz simétrica 2×2 con determinante negativo tiene autovalores de signos contrarios (el determinante es su producto), luego es indefinida. Por la condición necesaria, P_1 no puede ser mínimo local: es un punto de silla. Se puede ver directamente sin hessiana, que es lo más convincente: $f(t,t) = 2t^3 - 3t^2 < 0$ para $t > 0$ pequeño, mientras que $f(t,-t) = t^3 - t^3 + 3t^2 = 3t^2 > 0$. Desde el origen se baja por la diagonal y se sube por la antidiagonal.
En $P_2 = (1,1)$: $\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. Menores dominantes: $\Delta_1 = 6 > 0$ y $\Delta_2 = 36 - 9 = 27 > 0$, luego es definida positiva y P_2 es mínimo local estricto, con $f(1,1) = 1 + 1 - 3 = -1$.
¿Global? No. Sobre el eje $x_2 = 0$ se tiene $f(x_1, 0) = x_1^3 \to -\infty$ cuando $x_1 \to -\infty$: la función no está acotada inferiormente y el problema no tiene mínimo global. Obsérvese que esto no contradice nada: la condición suficiente global exige la hessiana semidefinida positiva *en todo* $\mathbb{R}^2$, y aquí no lo es (en $(0,0)$ ya falla).
La imagen. La superficie tiene un cuenco en $(1,1)$ y un collado en el origen, y más allá del collado se desploma. Es el paisaje típico de una función no convexa, y explica por qué todo el capítulo insiste en separar lo local de lo global.
Dónde se falla.

- *Perder el origen.* De $x_1 = x_1^4$, dividir por x_1 deja $x_1^3 = 1$ y se pierde P_1. Hay que factorizar: $x_1(x_1^3 - 1) = 0$. Y de $x_1^3 - 1 = (x_1 - 1)(x_1^2 + x_1 + 1)$ solo sale la raíz real $x_1 = 1$, porque el segundo factor no tiene raíces reales.
- *Descartar* P_1 *por la razón equivocada.* «$\Delta_1 = 0$, luego no es definida positiva, luego no es mínimo» es un razonamiento falso: no ser definida positiva no descarta nada. Lo que descarta el mínimo es $\det < 0$, que obliga a un autovalor negativo.
- *Dar* $(1,1)$ *por mínimo global* porque es el único mínimo local. La recta $x_2 = 0$ lo desmiente.

Ejercicio 6.2. *Una cuártica con dos mínimos globales*

Halle y clasifique los puntos críticos de $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 4x_1x_2$ en $\mathbb{R}^2$, y determine el mínimo global.

Resolución. *La idea.* Los pasos 2 a 4 del método son los del ejercicio anterior. Lo nuevo está en el paso 5: la función no es convexa, pero lejos del origen manda $x_1^4 + x_2^4$, que crece más deprisa que cualquier término cuadrático. Eso asegura que hay mínimo global, y entonces basta comparar los valores de los candidatos, o encontrar una cota inferior que alguno alcance.

Puntos críticos. $\nabla f(x) = (4x_1^3 - 4x_2,\ 4x_2^3 - 4x_1)^T$, y anularlo da $x_2 = x_1^3$ y $x_1 = x_2^3$. Sustituyendo, $x_1 = x_1^9$, o sea $x_1(x_1^8 - 1) = 0$, con soluciones reales $x_1 \in \{0, 1, -1\}$. Los puntos críticos son

$$P_1 = (0,0), \qquad P_2 = (1,1), \qquad P_3 = (-1,-1).$$

Hessiana. $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 & -4 \\ -4 & 12x_2^2 \end{pmatrix}$.

En P_1: $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, determinante $-16 < 0$, indefinida: punto de silla. En P_2 y en P_3: $\begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$, con $\Delta_1 = 12 > 0$ y $\Delta_2 = 144 - 16 = 128 > 0$: definida positiva, luego los dos son mínimos locales estrictos, con

$$f(1,1) = f(-1,-1) = 1 + 1 - 4 = -2.$$

Global. Aquí sí lo es, y hay que argumentarlo, porque la condición suficiente global no se aplica (f no es convexa: su hessiana es indefinida en el origen). Buscaremos una cota inferior que se alcance. Por un lado, $4x_1x_2 \le 2(x_1^2 + x_2^2)$, porque $2(x_1 - x_2)^2 \ge 0$; por otro, $t^4 \ge 2t^2 - 1$ para todo t real, porque $t^4 - 2t^2 + 1 = (t^2 - 1)^2 \ge 0$. Combinando,

$$f(x) \ \ge\ (2x_1^2 - 1) + (2x_2^2 - 1) - 2(x_1^2 + x_2^2) \ =\ -2.$$

Es decir, $f(x) \ge -2$ en todo $\mathbb{R}^2$, y ese valor se alcanza en P_2 y en P_3. Luego los dos son mínimos globales, y hay exactamente dos.

Lo que enseña. Que el mínimo global no tiene por qué ser único si f no es estrictamente convexa, y que para probar la globalidad, cuando la convexidad falla, hay que buscar otro argumento, como esta cota. La simetría $f(x_1, x_2) = f(-x_1, -x_2)$ empareja los mínimos no nulos; el origen, que es fijo por esa simetría, ya se ha descartado.

Otra vía (por coercividad). Sin buscar la cota a ojo. Como $4x_1x_2 \le 2(x_1^2 + x_2^2)$ y $x_1^4 + x_2^4 \ge \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)^2$, llamando $r = \|x\|$ se tiene $f(x) \ge \frac{1}{2}r^4 - 2r^2$, que tiende a infinito: f es coerciva. Por el criterio de la sección 6.2.6, hay mínimo global, es punto crítico y es el candidato de menor valor. Entre $f(P_1) = 0$ y $f(P_2) = f(P_3) = -2$, son P_2 y P_3. Y la misma cota da el valor sin comparar, porque $\frac{1}{2}r^4 - 2r^2 = \frac{1}{2}(r^2 - 2)^2 - 2 \ge -2$.

Dónde se falla.

- *Perder P_3.* De $x_1^8 = 1$ salen dos raíces reales, 1 y -1; quedarse con la positiva pierde uno de los dos mínimos globales.
- *Invocar la convexidad.* La hessiana en el origen es indefinida, así que f no es convexa y la condición suficiente global no se aplica. La globalidad hay que probarla de otra manera.
- *Anunciar «el» mínimo global.* Hay dos, con el mismo valor: sin convexidad estricta nada obliga a que sea único.

Ejercicio 6.3. *La cuadrática general, y de dónde salen las ecuaciones normales*

Sea Q una matriz simétrica $n \times n$ definida positiva, $b \in \mathbb{R}^n$ y

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\, x^T Q x - b^T x.$$

1. Calcule ∇f y $\nabla^2 f$.
2. Pruebe que f tiene un único mínimo global y calcúlelo.
3. Deduzca de ahí que el problema de mínimos cuadrados Min $\|Ax - b\|^2$, con A de rango máximo por columnas, tiene solución única $x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$.

Resolución. *La idea.* Todo sale de dos derivadas: el gradiente es $Qx - b$ y la hessiana es Q, la misma en todas partes. Una hessiana constante y definida positiva hace el trabajo de los pasos 4 y 5 del método a la vez: el único punto crítico es mínimo global. Y mínimos cuadrados es este mismo problema con $Q = 2A^T A$.
(1) Las derivadas. Escribiendo $x^T Q x = \sum_{i,j} q_{ij} x_i x_j$ y derivando respecto de x_k, cada x_k aparece en los términos con $i = k$ y en los que tienen $j = k$, luego

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(x^T Q x) = \sum_j q_{kj} x_j + \sum_i q_{ik} x_i = 2 \sum_j q_{kj} x_j,$$

donde la última igualdad usa la simetría $q_{ik} = q_{ki}$. En forma vectorial, $\nabla(x^T Q x) = 2Qx$, y como $\nabla(b^T x) = b$,

$$\nabla f(x) = Qx - b, \qquad \nabla^2 f(x) = Q.$$

Merece la pena retener el resultado: **la hessiana de $\frac{1}{2} x^T Q x - b^T x$ es Q y no depende del punto**. El factor $\frac{1}{2}$ es el que cancela el 2 de la derivación. Por eso las cuadráticas son el laboratorio natural de este capítulo: en ellas la curvatura es la misma en todas partes.
(2) El mínimo. Como Q es definida positiva, es invertible (ningún autovalor es cero), luego $\nabla f(x) = 0$ tiene la única solución $x^* = Q^{-1} b$. Y como $\nabla^2 f(x) = Q$ es definida positiva en todo $\mathbb{R}^n$, que es abierto y convexo, la condición suficiente de optimalidad global garantiza que x^* es mínimo global. Es el único, porque es el único punto crítico y todo mínimo lo es. El valor óptimo se calcula sustituyendo:

$$f(x^*) = \tfrac{1}{2} b^T Q^{-1} Q Q^{-1} b - b^T Q^{-1} b = \tfrac{1}{2} b^T Q^{-1} b - b^T Q^{-1} b = -\tfrac{1}{2}\, b^T Q^{-1} b.$$

(3) Mínimos cuadrados. Se desarrolla la norma al cuadrado:

$$\|Ax - b\|^2 = (Ax - b)^T (Ax - b) = x^T A^T A x - 2 b^T A x + b^T b.$$

Salvo la constante $b^T b$, que no afecta al minimizador, esto es la función del apartado anterior con $Q = 2A^T A$ y con $2A^T b$ en el papel de b. Ahora bien, $A^T A$ es siempre semidefinida positiva, porque $d^T A^T A d = \|Ad\|^2 \geq 0$; y es definida positiva exactamente cuando A tiene rango máximo por columnas, porque entonces $Ad = 0$ obliga a $d = 0$. Así que el apartado (2) se aplica y da

$$2A^T A x^* = 2A^T b \implies A^T A x^* = A^T b \implies x^* = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

Otra vía (geométrica). El mismo resultado se lee sin derivar nada, con el teorema de la proyección del capítulo 2. Minimizar $\|Ax - b\|$ es buscar el punto del subespacio $\mathrm{Im}(A) =$

$\{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$ más cercano a b, es decir, la *proyección ortogonal* de b sobre ese subespacio: el único punto Ax^* del subespacio tal que $b - Ax^*$ es perpendicular a todo el subespacio (apéndice F, sección «Álgebra lineal», donde está también la matriz P que la realiza y su lectura como «quitar la parte que se sale»). La caracterización de la proyección dice que el vector error $Ax^* - b$ debe ser ortogonal al subespacio, o sea, ortogonal a todas las columnas de A:

$$A^T(Ax^* - b) = 0 \iff A^T Ax^* = A^T b.$$

Las mismas ecuaciones normales, obtenidas por geometría en lugar de por cálculo. Y no es casualidad: la condición de ortogonalidad *es* la condición de gradiente nulo, escrita con vectores en vez de con derivadas.

Lo que se lleva el lector de este ejercicio es la traducción completa entre los dos lenguajes: $\nabla f = Qx - b$, $\nabla^2 f = Q$, mínimo en $Q^{-1}b$; y que el ajuste por mínimos cuadrados es un caso particular de esa fórmula, con la proyección ortogonal como lectura geométrica.

Dónde se falla. En derivar $x^T Mx$ como si diera $2Mx$ con una matriz M que no es simétrica: la derivada es $(M + M^T)x$, y solo coincide con $2Mx$ si $M = M^T$. Con $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es $x^T Mx = x_1 x_2$, cuyo gradiente es $(x_2, x_1)^T = (M + M^T)x$, y no $2Mx = (2x_2, 0)^T$. Por eso una forma cuadrática se escribe siempre con su matriz simétrica, aquí $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Y en el apartado (3), en poner el factor 2 en un lado y no en el otro: con $Q = 2A^T A$ y $2A^T b$ en el papel de b los dos doses se cancelan, y si se escribe solo uno sale la solución multiplicada o dividida por 2.

Ejercicio 6.4. *La función de Rosenbrock: un valle curvo y estrecho*

Sea $f(x_1, x_2) = 100\,(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$.

1. Pruebe que tiene un único punto crítico y que es mínimo global.
2. Calcule la hessiana en ese punto y su número de condición.
3. Explique qué le ocurre al método del gradiente sobre esta función.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *Empiece por la derivada respecto de x_2: es la más sencilla y despeja una relación entre las dos variables.*
2. *Para la globalidad no hace falta ninguna hessiana: mire el signo de los dos sumandos.*
3. *Para el número de condición, use que para una matriz simétrica 2×2 la traza es la suma de los autovalores y el determinante su producto.*

Resolución. *(1) El punto crítico.* Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -400\,x_1(x_2 - x_1^2) - 2(1 - x_1), \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 200\,(x_2 - x_1^2).$$

La segunda se anula si y solo si $x_2 = x_1^2$. Sustituyendo eso en la primera, el término con el paréntesis desaparece y queda $-2(1 - x_1) = 0$, es decir, $x_1 = 1$ y por tanto $x_2 = 1$. El único punto crítico es $x^* = (1, 1)$.

Que es mínimo global se ve sin derivar. La función es suma de dos cuadrados, luego $f(x) \geq 0$ para todo x; y $f(1, 1) = 100 \cdot 0 + 0 = 0$. Un valor que alcanza la cota inferior es el mínimo

global, y además es estricto, porque $f(x) = 0$ obliga a $x_2 = x_1^2$ y $x_1 = 1$ a la vez.
(2) La hessiana en el óptimo. Derivando otra vez,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -400(x_2 - x_1^2) + 800x_1^2 + 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -400x_1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 200.$$

En $(1, 1)$ el primer paréntesis vale cero y queda

$$\nabla^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{pmatrix},$$

con traza 1002 y determinante $802 \cdot 200 - 400^2 = 160\,400 - 160\,000 = 400$. Los dos autovalores suman 1002 y multiplican 400, luego son las raíces de $\lambda^2 - 1002\lambda + 400 = 0$:

$$\lambda = \frac{1002 \pm \sqrt{1002^2 - 1600}}{2} = \frac{1002 \pm \sqrt{1\,002\,404}}{2} \approx 1001{,}6006 \text{ y } 0{,}3994.$$

Los dos son positivos, lo que confirma por la vía de la condición suficiente lo que ya se sabía. (Comprobación rápida: su producto debe dar el determinante, y en efecto $1001{,}6006 \cdot 0{,}3994 \approx 400$.) Y el número de condición es

$$\kappa = \frac{\lambda_{\text{máx}}}{\lambda_{\text{mín}}} \approx \frac{1001{,}6006}{0{,}39936} \approx 2508.$$

(3) Qué le pasa al método del gradiente. Dos cosas, y conviene distinguirlas.
La primera es el mal condicionamiento cerca del mínimo. En el modelo cuadrático local, con $\kappa \approx 2508$, la cota del factor de reducción del error vale aproximadamente 0,9984: en el peor caso de ese modelo harían falta unas 1444 iteraciones para reducir el error a la décima parte. No es el factor exacto de cada iteración sobre Rosenbrock, cuya hessiana cambia con el punto. La elipse del modelo tiene razón de semiejes $\sqrt{\kappa} \approx 50$.
La segunda es que el valle es *curvo*: para cada x_1, la sección vertical se minimiza en $x_2 = x_1^2$. No basta con orientarse bien una vez; hay que ir corrigiendo el rumbo. Newton aprovecha la curvatura local, pero tampoco tiene garantizado un buen paso desde cualquier punto: en $(0, 1)$ la hessiana es $\operatorname{diag}(-398, 200)$, indefinida. Por eso se emplean controles del paso o modificaciones de la hessiana.
Por qué esta función. Reúne un valle estrecho y curvo en solo dos variables, lo que permite comparar cómo los distintos métodos se adaptan a esa geometría.

Ejercicio 6.5. *Un único punto crítico que es mínimo local y no global*

Considere $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2(1 + x_1)^3$ en $\mathbb{R}^2$.
1. Compruebe que su único punto crítico es el origen y que es mínimo local estricto.
2. Compruebe que f no está acotada inferiormente.

Concluya que «único punto crítico y mínimo local» no implica «mínimo global».

Resolución. *La idea.* Los pasos 2 a 4 del método dan un único candidato, que resulta ser mínimo local estricto. El paso 5 se decide buscando por dónde se escapa la función: el factor

$(1+x_1)^3$ cambia de signo en $x_1=-1$, y más allá el término $x_2^2(1+x_1)^3$ es negativo y crece sin límite con x_2.
(1) Puntos críticos. El gradiente es

$$\nabla f(x)=\begin{pmatrix}2x_1+3x_2^2(1+x_1)^2\\ 2x_2(1+x_1)^3\end{pmatrix}.$$

La segunda componente se anula si $x_2=0$ o si $x_1=-1$.
Si $x_2=0$, la primera queda $2x_1=0$, luego $x_1=0$: sale el origen. Si $x_1=-1$, la primera queda $2(-1)+3x_2^2\cdot 0=-2\neq 0$: no hay solución por ahí.
Luego el único punto crítico es $(0,0)$, con $f(0,0)=0$.
Es mínimo local estricto. Las derivadas segundas son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=2+6x_2^2(1+x_1),\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=6x_2(1+x_1)^2,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=2(1+x_1)^3,$$

y en el origen $\nabla^2 f(0,0)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$, que es definida positiva. Por la condición suficiente de optimalidad local, $(0,0)$ es mínimo local estricto.
(2) No hay mínimo global. Basta evaluar sobre la recta $x_1=-2$:

$$f(-2,t)=4+t^2(1-2)^3=4-t^2\ \xrightarrow[t\to\infty]{}\ -\infty.$$

La función baja sin límite, luego no tiene mínimo global.
Lo que enseña, y es lo importante. La tentación natural, al encontrar un solo punto crítico y comprobar que es mínimo local, es concluir que es el mínimo global. En una variable esa conclusión sería correcta para una función derivable en todo $\mathbb{R}$; en dos o más, es falsa, y este es el contraejemplo. El motivo geométrico es que en el plano se puede «escapar por el infinito» rodeando el cuenco sin tener que cruzar ningún otro punto crítico: la función baja hacia $-\infty$ por una región lejana ($x_1<-1$) a la que se llega sin pasar por ningún collado. En dimensión uno no hay sitio para rodear nada.
Obsérvese qué hipótesis rescata la situación: la de la condición suficiente de optimalidad global, que exige la hessiana semidefinida positiva *en todo* S. Aquí, en $x_1=-2$ y $x_2=1$ se tiene $\partial^2 f/\partial x_2^2=2(-1)^3=-2<0$, así que la hessiana no es semidefinida positiva y la hipótesis falla. El teorema no se equivoca; es que no se le puede aplicar.
Dónde se falla.

- *Seguir una sola rama.* De $2x_2(1+x_1)^3=0$ salen $x_2=0$ y $x_1=-1$. La segunda no da ningún punto crítico, pero hay que mirarla para poder decir que el origen es el único.
- *Buscar la bajada solo en los ejes.* Sobre ellos la función parece un cuenco: $f(x_1,0)=x_1^2$ y $f(0,x_2)=x_2^2$. La escapatoria está en una recta que no pasa por el origen, $x_1=-2$, al otro lado de donde $(1+x_1)^3$ cambia de signo.
- *Concluir la globalidad del «único punto crítico».* Es exactamente la conclusión que el ejercicio desmiente.

Ejercicio 6.6. *Dos pasos completos del método del gradiente*

Aplique el método del gradiente con la regla de máximo descenso a $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2$ partiendo de $x^1 = (4, 1)$. Calcule x^2 y x^3, compruebe la perpendicularidad de dos direcciones consecutivas y compare con el paso de Newton.

Resolución. *La idea.* Cada paso es una búsqueda en una sola variable: la dirección es $-\nabla f$, el valor de f sobre la semirrecta es una parábola en α, y el paso es su mínimo. Como f es cuadrática, ese mínimo tiene fórmula, $\alpha_k = (g^k)^T g^k / (g^k)^T Q g^k$ con $Q = \nabla^2 f$, y derivar φ sirve de comprobación.

Preparación. $\nabla f(x) = (2x_1,\, 8x_2)^T$ y $\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, constante y definida positiva; el mínimo global es el origen, con $f = 0$. En $x^1 = (4, 1)$: $f(x^1) = 16 + 4 = 20$ y $\nabla f(x^1) = (8, 8)^T$.
Primer paso. Hay que minimizar

$$\varphi(\alpha) = f\big((4,1) - \alpha(8,8)\big) = (4 - 8\alpha)^2 + 4(1 - 8\alpha)^2.$$

Derivando: $\varphi'(\alpha) = -16(4 - 8\alpha) - 64(1 - 8\alpha) = -64 + 128\alpha - 64 + 512\alpha = -128 + 640\alpha$, que se anula en $\alpha_1 = \frac{128}{640} = \frac{1}{5}$. Entonces

$$x^2 = (4,1) - \tfrac{1}{5}(8,8) = \left(\tfrac{12}{5},\, -\tfrac{3}{5}\right) = (2{,}4,\ -0{,}6),$$

con $f(x^2) = 5{,}76 + 4 \cdot 0{,}36 = 5{,}76 + 1{,}44 = 7{,}2$.
Segundo paso. $\nabla f(x^2) = (4{,}8,\ -4{,}8)^T$. La perpendicularidad se comprueba de inmediato:

$$\nabla f(x^2)^T \nabla f(x^1) = 4{,}8 \cdot 8 + (-4{,}8) \cdot 8 = 0.$$

Minimizando ahora $\varphi(\alpha) = (2{,}4 - 4{,}8\alpha)^2 + 4(-0{,}6 + 4{,}8\alpha)^2$ se obtiene, por la misma cuenta, $\alpha_2 = \frac{1}{5}$, y

$$x^3 = (2{,}4,\ -0{,}6) - \tfrac{1}{5}(4{,}8,\ -4{,}8) = (1{,}44,\ 0{,}36), \qquad f(x^3) = 2{,}0736 + 0{,}5184 = 2{,}592.$$

El patrón. Los valores van $20 \to 7{,}2 \to 2{,}592$, con cociente constante $7{,}2/20 = 0{,}36$. Y en efecto, el número de condición de la hessiana es $\kappa = 8/2 = 4$, con lo que $\left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right)^2 = (3/5)^2 = 0{,}36$: la cota se alcanza exactamente para este punto de partida. El método converge al origen, pero geométricamente y dando tumbos de un lado a otro del valle.
Newton, por comparación. $\left(\nabla^2 f\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}$, y el paso desde x^1 vale

$$(4,1) - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = (4,1) - (4,1) = (0,0).$$

Una sola iteración. En esta cuadrática, la hessiana permite resolver el problema exactamente; el gradiente con búsqueda exacta conserva el zigzag.
Comprobación con la fórmula del paso. Con $Q = \operatorname{diag}(2, 8)$: en el primer paso, $g^1 = (8, 8)^T$ da $128/(2 \cdot 64 + 8 \cdot 64) = 128/640 = \frac{1}{5}$; en el segundo, $g^2 = (4{,}8, -4{,}8)^T$ da $46{,}08/230{,}4 = \frac{1}{5}$. Los dos pasos iguales no son casualidad: g^2 es g^1 con la segunda componente cambiada de signo y multiplicado por 0,6, y con Q diagonal la fórmula no ve ni ese signo ni esa escala.
Dónde se falla.

- *El signo de la dirección.* El paso es $x^k - \alpha \nabla f(x^k)$; con el signo $+$ se sube.

- *Esperar que $-\nabla f$ apunte al mínimo.* En $(4,1)$ apunta según $-(1,1)$, y el mínimo está según $-(4,1)$. Solo apunta al mínimo cuando el valle es redondo, o cuando se parte de uno de sus ejes: desde $(4,0)$ el paso exacto es $\alpha = \frac{1}{2}$ y lleva al origen en una iteración.
- *Usar la fórmula del paso fuera de las cuadráticas.* Para una f cualquiera la semirrecta no da una parábola, y hay que minimizar φ de verdad, o usar Armijo.

Ejercicio 6.7. *Aplicar la regla de Armijo*

Sobre la misma función $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2$ y desde $x^1 = (4,1)$, determine el paso que selecciona la regla de Armijo con $\epsilon = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$ y $\gamma = \frac{1}{4}$.

Resolución. *La idea.* Se prueban $\alpha = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ y se acepta el primero que baje al menos $\gamma\alpha\|\nabla f(x^1)\|^2$. En cada prueba hay una evaluación de f y una comparación con un listón que, como α, se reduce a la mitad cada vez.
Se tiene $f(x^1) = 20$, $\nabla f(x^1) = (8,8)^T$ y $\|\nabla f(x^1)\|^2 = 128$. La condición que hay que comprobar, para $\alpha = \beta^m$, es

$$20 - f\big((4,1) - \alpha(8,8)\big) \;\geq\; \tfrac{1}{4} \cdot 128 \cdot \alpha = 32\alpha.$$

$m = 0$, $\alpha = 1$. El punto es $(4,1) - (8,8) = (-4,-7)$, con $f = 16 + 4 \cdot 49 = 212$. El descenso es $20 - 212 = -192$, que es negativo: el paso es tan largo que se sube por la otra ladera. Falla.
$m = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$. El punto es $(0,-3)$, con $f = 0 + 36 = 36$. El descenso es $20 - 36 = -16$, y el listón es 16. Falla.
$m = 2$, $\alpha = \frac{1}{4}$. El punto es $(2,-1)$, con $f = 4 + 4 = 8$. El descenso es $20 - 8 = 12$, y el listón es $32 \cdot \frac{1}{4} = 8$. Como $12 \geq 8$, se cumple.
Luego $m_1 = 2$, $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ y $x^2 = (2,-1)$, con $f(x^2) = 8$.
Comparación con la búsqueda exacta. El ejercicio anterior daba $\alpha_1 = \frac{1}{5}$ y $f = 7{,}2$. Armijo da $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ y $f = 8$: un poco peor en valor, a cambio de tres evaluaciones de la función en lugar de una minimización unidimensional. Obsérvese también que Armijo ha aceptado un paso *más largo* que el óptimo, cosa perfectamente posible: la regla no busca el mejor paso, sino uno suficientemente bueno, y con γ pequeño es generosa.
Qué pasaría con otro γ. Si se exigiera $\gamma = \frac{1}{2}$, el listón en $\alpha = \frac{1}{4}$ sería $64 \cdot \frac{1}{4} = 16 > 12$ y el paso se rechazaría, pasando a $\alpha = \frac{1}{8}$: punto $(3,0)$, $f = 9$, descenso 11, listón $64 \cdot \frac{1}{8} = 8$, aceptado. Un γ mayor endurece la condición y puede hacer que se seleccione un paso más corto; con un γ menor se admiten al menos los mismos pasos. Ese es todo el papel del parámetro.
Dónde se falla.

- *El signo del listón.* Escrita con $-\gamma\alpha\|\nabla f\|^2$, la condición en $\alpha = \frac{1}{2}$ sería $20 - 36 = -16 \geq -16$, que se cumple: se aceptaría un paso que sube f de 20 a 36. Es el aviso de la observación sobre el signo, con números.
- *Quedarse con el paso más corto que cumple.* La regla toma el *menor* m, es decir, el paso más largo de la lista que sea aceptable; $\alpha = \frac{1}{8}$ también cumple, y no es el que se elige.
- *Olvidar el cuadrado o el α del listón.* El listón es $\gamma\alpha\|\nabla f\|^2$: proporcional al paso y al cuadrado de la norma del gradiente, porque es una fracción de lo que prometía la pendiente al avanzar α.

Ejercicio 6.8. *El conjunto de mínimos de una función convexa*

Sea f convexa en un convexo X. Pruebe que el conjunto $M = \{x \in X : \ f(x) \leq f(y)\ \forall y \in X\}$ de sus mínimos globales es convexo. Deduzca que si f es estrictamente convexa, M tiene a lo sumo un punto.

Resolución. *Primer movimiento: escribir quién es M de la manera más útil.* Si M es vacío, es convexo por convenio y no hay nada que probar. Si no lo es, sea m el valor mínimo, de modo que $M = \{x \in X : \ f(x) = m\}$, y observemos que esto es lo mismo que $M = \{x \in X : \ f(x) \leq m\}$, porque nadie puede bajar de m. Escrito así, M es un *conjunto de nivel inferior* de f, y lo que hay que probar es que esos conjuntos son convexos.
Segundo movimiento: la desigualdad de la cuerda hace el trabajo. Sean $x_1, x_2 \in M$ y $\lambda \in [0,1]$. El punto $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ está en X por ser X convexo, y por la convexidad de f,

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \ \leq \ \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) = \lambda m + (1-\lambda)m = m.$$

Luego $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in M$, y M es convexo.
Tercer movimiento: la unicidad con convexidad estricta. Si f fuese estrictamente convexa y hubiera dos mínimos distintos $x_1 \neq x_2$, tomando $\lambda = \frac{1}{2}$ la desigualdad anterior sería *estricta*:

$$f\big(\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2\big) < \tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{2}m = m,$$

lo que contradice que m sea el valor mínimo. Luego no puede haber dos.
La imagen. En un paisaje convexo el fondo puede ser un punto, pero también un segmento o una región plana entera; lo que no puede ser es un conjunto con dos trozos separados, porque entre ellos habría que subir. La convexidad estricta prohíbe además dos mínimos distintos; si el mínimo existe, se reduce a un punto. Es exactamente lo que decía el teorema de que todo mínimo local es global, visto ahora desde el conjunto en lugar de desde el punto.

Ejercicio 6.9. *Suma de convexas, y la regularización de un ajuste*

1. Pruebe que si f y g son convexas en un convexo X y $\mu, \nu \geq 0$, entonces $\mu f + \nu g$ es convexa.
2. Aplicando lo anterior, pruebe que para todo $\lambda > 0$ la función $h(x) = \|Ax - b\|^2 + \lambda\|x\|^2$ es estrictamente convexa en $\mathbb{R}^n$, y calcule su único mínimo global.

Resolución. *La idea.* El apartado (1) es la desigualdad de la cuerda aplicada a cada sumando. El (2) se decide con la hessiana: $2A^TA$ puede tener autovalores nulos, pero sumarle $2\lambda I$ los sube todos en 2λ, y una hessiana definida positiva en todo el espacio da un único mínimo, que se obtiene anulando el gradiente.
(1) Sale de la definición en dos líneas, y lo único que hay que cuidar es el signo de los coeficientes. Para $x_1, x_2 \in X$ y $\lambda \in [0,1]$, aplicando la desigualdad de la cuerda a cada sumando y multiplicando por $\mu \geq 0$ y $\nu \geq 0$, que no cambian el sentido:

$$(\mu f + \nu g)\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leq \mu\big[\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)\big] + \nu\big[\lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2)\big],$$

y reagrupando los términos en λ y en $1-\lambda$ sale exactamente $\lambda(\mu f + \nu g)(x_1) + (1-\lambda)(\mu f +$

$\nu g)(x_2)$. Si uno de los dos coeficientes fuera negativo, la conclusión ya no estaría garantizada: por ejemplo, $f(x) = x^2$ es convexa y $-f(x) = -x^2$ no lo es.
(2) Por el ejercicio de la cuadrática general, $\|Ax - b\|^2$ tiene hessiana $2A^TA$, semidefinida positiva siempre, luego es convexa por el lema que identifica convexidad y hessiana semidefinida positiva. Y $\|x\|^2$ tiene hessiana $2I$, definida positiva, luego es estrictamente convexa. La suma con coeficientes 1 y $\lambda > 0$ es convexa por el apartado (1), y de hecho estrictamente, porque su hessiana es

$$\nabla^2 h(x) = 2A^TA + 2\lambda I,$$

y para $d \neq 0$ se tiene $d^T\nabla^2 h(x)d = 2\|Ad\|^2 + 2\lambda\|d\|^2 \geq 2\lambda\|d\|^2 > 0$: definida positiva *sea cual sea el rango de* A. Ese es el punto de todo el ejercicio.
El mínimo se obtiene anulando el gradiente, $\nabla h(x) = 2A^TAx - 2A^Tb + 2\lambda x = 0$, es decir,

$$x^* = (A^TA + \lambda I)^{-1}A^Tb,$$

y la inversa existe porque la matriz es definida positiva. Por la condición suficiente de optimalidad global es mínimo global, y es único por la convexidad estricta.
Lo que se lleva el lector. Que el término $\lambda\|x\|^2$ no está ahí por capricho: cuando A no tiene rango máximo por columnas, A^TA es singular y las ecuaciones normales del ajuste ordinario no tienen solución única, es decir, el fondo del valle es una región plana entera. Sumar λI a A^TA aumenta sus autovalores en λ (los de la hessiana aumentan en 2λ) y convierte ese fondo plano en un cuenco con un único punto más bajo. Es la traducción exacta, en el lenguaje de este capítulo, de por qué la regularización estabiliza un ajuste mal planteado.

Ejercicio 6.10. *Enunciar y demostrar las condiciones de segundo orden*

Enuncie y demuestre la condición necesaria de optimalidad y la condición suficiente de optimalidad local para el problema de programación no lineal sin restricciones. Como aplicación, decida si el origen es mínimo local de $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3$.

Resolución. Los enunciados y las demostraciones son los de las secciones 6.2.2 y 6.2.4, y no se repiten aquí; el ejercicio consiste en reproducirlos y en aplicarlos, que es donde suele verse si se han entendido.
La idea: el esqueleto de las dos pruebas. Las dos se escriben con los desarrollos (1) y (2) y un paso al límite, y conviene tener el esqueleto antes de redactar.

- *Necesaria, parte i).* Si $\nabla f(x^*)^T d < 0$ para algún d, el cociente $\big(f(x^* + \lambda d) - f(x^*)\big)/\lambda$ sería negativo para $\lambda > 0$ pequeño y se bajaría desde x^*. Aplicado a $d = -\nabla f(x^*)$, obliga a $\nabla f(x^*) = 0$.
- *Necesaria, parte ii).* Con el gradiente nulo, (2) da $\big(f(x^* + \lambda d) - f(x^*)\big)/\lambda^2 = \frac{1}{2}d^T\nabla^2 f(x^*)d + \|d\|^2\beta$, que es ≥ 0 cerca de 0. En el límite, $d^T\nabla^2 f(x^*)d \geq 0$: semidefinida, y no más, porque el límite no conserva la desigualdad estricta.
- *Suficiente.* El menor autovalor $\alpha > 0$ da $d^T\nabla^2 f(x^*)d \geq \alpha\|d\|^2$; con eso (2) da $f(x) - f(x^*) \geq (\frac{\alpha}{2} + \beta)\|x - x^*\|^2$, y se elige la bola en la que $|\beta| < \alpha/4$.

Los errores de redacción más frecuentes están recogidos tras cada demostración: dividir por λ sin fijar su signo o por λ en vez de λ^2, pasar al límite conservando la desigualdad estricta, y no justificar que la bola cabe en S.

La aplicación. $\nabla f(x) = (2x_1,\, 3x_2^2)^T$, que se anula solo en el origen, y

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6x_2 \end{pmatrix}, \qquad \nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esa matriz es semidefinida positiva (autovalores 2 y 0) pero **no** definida positiva. Así que la condición necesaria se cumple y no descarta nada, y la condición suficiente *no se puede aplicar*. Estamos en el hueco entre las dos, y hay que decidir a mano.
Se decide en una línea: sobre el eje $x_1 = 0$ la función vale $f(0, x_2) = x_2^3$, que es negativa para $x_2 < 0$ y tan cerca del origen como se quiera. Luego en cualquier bola alrededor del origen hay puntos con $f < 0 = f(0,0)$, y el origen **no** es mínimo local.
Por qué este ejemplo es el que hay que tener a mano. Porque exhibe con toda claridad los dos errores que se cometen con estas condiciones. El primero es leer la condición necesaria como si fuera suficiente: aquí se cumple entera y el punto no es mínimo. El segundo es concluir que, como la condición suficiente no se aplica, el punto no es mínimo: eso también sería un error, y $f(x) = x^4$ lo demuestra, porque allí la condición suficiente tampoco se aplica y el punto sí es mínimo. Cuando la hessiana es semidefinida y no definida, los dos teoremas callan y hay que mirar la función.

REPASO INTERCALADO

Primera ronda: recordar. Al día siguiente de terminar el capítulo, a libro cerrado.

1. Escribe la definición de mínimo local y la de mínimo global. ¿Qué hipótesis hace que coincidan?
2. Enuncia la condición necesaria de optimalidad en sus dos partes. ¿Cuál de las dos usa a la otra en su demostración?
3. Enuncia la condición suficiente de optimalidad local. ¿En qué se diferencia su hipótesis sobre la hessiana de la de la condición necesaria, y por qué esa diferencia es imprescindible?
4. ¿Por qué se exige que S sea abierto durante todo el tema? Da un ejemplo de qué falla si no lo es.
5. Define «dirección de descenso» y di cómo se reconoce una con el gradiente. ¿Cuál es la dirección de máximo descenso, y qué desigualdad la produce?
6. Escribe las tres reglas de longitud de paso y di, de cada una, qué información de la función usa.
7. Escribe la iteración del método de Newton y di de dónde sale la fórmula.
8. (Capítulo 2.) ¿Qué relación hay entre que una función sea convexa y que su epigrafo sea un conjunto convexo?

Segunda ronda: aplicar. Dos o tres días después.

1. Clasifica los puntos críticos de $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2$ y di si hay mínimo global.
2. Da un ejemplo de función de una variable con $f'(0) = f''(0) = 0$ que tenga en 0 un mínimo, otro con un máximo y otro con ninguna de las dos cosas.
3. Da un paso del método del gradiente con la regla de máximo descenso sobre $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2$ desde $(1, 1)$, y comprueba que el gradiente en el punto nuevo

es perpendicular al del punto de partida.

4. Una matriz simétrica 2×2 tiene traza 5 y determinante -6. ¿Es definida positiva? ¿Semidefinida? ¿Qué tipo de punto crítico produce?
5. Aplica el método en pasos a $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^2 - 4x_1x_2$: halla los puntos críticos, clasifícalos y decide si hay mínimo global. Para el último paso, prueba que f es coerciva acotando $4|x_1x_2|$ por una suma de cuadrados.
6. (Capítulo 3.) En programación lineal el gradiente de la función objetivo es el vector constante c. ¿Qué dice entonces la condición necesaria de este capítulo, y por qué no contradice que el simplex encuentre óptimos?
7. (Capítulo 2.) Comprueba que el conjunto de nivel $\{x : f(x) \leq c\}$ de una función convexa es convexo, y da un ejemplo de función no convexa cuyos conjuntos de nivel sí lo sean todos.

Tercera ronda: subir el nivel. Una semana después, o al repasar el libro entero.

1. Explica por qué las condiciones de segundo orden necesaria y suficiente dejan un caso sin decidir. ¿Qué cambia si la hessiana del punto crítico es invertible?
2. El método del gradiente con búsqueda exacta produce direcciones consecutivas perpendiculares. Demuéstralo y explica por qué esa propiedad, que parece buena, es la causa del zigzag.
3. (Capítulos 2 y 4.) La caracterización de la proyección p de y sobre un convexo cerrado C cumple $(p - y)^T(x - p) \geq 0$ para todo $x \in C$. Relaciónala con la derivada direccional de $f(p) = \|p - y\|^2$ y explica por qué la convexidad convierte esa condición necesaria en suficiente.
4. Una función tiene hessiana definida positiva en un punto crítico x^* y además es convexa en una bola alrededor de x^*, pero no en todo $\mathbb{R}^n$. ¿Qué se puede concluir y qué no? Construye un ejemplo.
5. (Capítulo 5.) La relajación lineal de un problema entero se resuelve con el simplex porque el objetivo es lineal. Si el objetivo fuera cuadrático convexo y las restricciones lineales, ¿seguiría estando el óptimo en un vértice? Justifica la respuesta con un ejemplo en el plano.
6. El método de Newton busca ceros del gradiente y no distingue mínimos de máximos. Construye una función de una variable y un punto de partida desde el cual el método converja a un máximo, y di qué hipótesis del texto se está violando.
7. Completa cuadrados en $d^T Ad$ con $A = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ y comprueba que los coeficientes que salen son Δ_1, Δ_2/Δ_1 y Δ_3/Δ_2. Explica con esa cuenta por qué el criterio de Sylvester no puede decidir si una matriz es semidefinida.

CAPÍTULO 7

Programación no lineal con restricciones

Notación. En este capítulo, $u \geq 0$ significa que todas sus componentes son no negativas, incluido el vector nulo; equivale al $u \geqq 0$ del capítulo 2. Cuando se excluya el vector nulo se escribirá $u \neq 0$ expresamente.

ANTES DE LEER

Cinco preguntas antes de leer. No hace falta acertarlas; hace falta intentarlas.

1. Está usted otra vez en la ladera con niebla del capítulo 6, pero ahora hay una valla y no puede cruzarla. Llega a un punto de la valla y comprueba que el suelo sigue bajando *hacia el otro lado*. ¿Está usted en el punto más bajo de la parte permitida? ¿Qué tendría que medir para saberlo?
2. En el capítulo 6 una condición necesaria de mínimo interior era $\nabla f(x^*) = 0$. Si el mínimo cae sobre una valla, esa igualdad falla casi siempre. Escriba, sin fórmulas, qué cree que debería sustituirla.
3. Un almacén tiene un tope de 100 toneladas y la solución óptima usa 60. ¿Cuánto pagaría usted por una tonelada más de almacén? ¿Y si la solución usara las 100?
4. En el capítulo 4 cada restricción de un problema lineal tenía un precio, y el precio valía cero si la restricción sobraba. ¿Cree que eso es una peculiaridad de lo lineal o el caso particular de algo más general?
5. Tiene usted un problema con una restricción incómoda. Se le ocurre borrarla y, en su lugar, sumar al objetivo un castigo proporcional a lo que se la incumpla. ¿Qué gana con eso? ¿Y qué cree que puede salir mal?

Mapa del capítulo. Tres bloques, y son tres respuestas a la misma pregunta.
El primero, la **teoría de las condiciones de optimalidad**, traduce al álgebra la frase «desde aquí no se puede mejorar sin salirse». La traducción se hace en dos tiempos: primero en lenguaje de conjuntos, diciendo que en un mínimo no hay ninguna dirección que baje y sea admisible a la vez; después en lenguaje de ecuaciones, con el lema de Farkas del capítulo 2 como única herramienta. El resultado son las condiciones de

Karush-Kuhn-Tucker. Se verá que son necesarias solo bajo una hipótesis técnica sobre la forma del conjunto factible, que un contraejemplo de dos líneas obliga a poner, y que son suficientes cuando el problema es convexo.
El segundo, los **métodos de gradiente proyectado y reducido**, convierte esa teoría en dos algoritmos. Los dos hacen lo mismo con vocabularios distintos: caminar cuesta abajo sin salirse, corrigiendo la dirección de máximo descenso para que respete las restricciones que en ese momento aprietan. El segundo de ellos, el gradiente reducido, resulta ser el método del símplex del capítulo 3 con la función objetivo curvada, y esa identificación es lo que lo hace fácil de entender.
El tercero, la **teoría lagrangiana**, cambia el punto de vista. En vez de buscar el mínimo del problema, construye a su lado un segundo problema — el dual — cuyas soluciones acotan por debajo al primero. Ahí aparecen tres cosas: que el dual de un problema lineal, el del capítulo 4, es un caso particular de esta construcción; que los multiplicadores son los precios sombra de siempre; y que cuando el problema no es convexo puede quedar un hueco entre los dos valores, el salto de dualidad, que es exactamente lo que explota la relajación lagrangiana de la programación entera del capítulo 5.

Una advertencia sobre lo que este capítulo hereda. Del capítulo 6 se usa todo: gradiente, hessiana, desarrollos de Taylor, direcciones de descenso, convexidad de funciones y la condición de que un mínimo local de una función convexa es global. Del capítulo 2 se usa una sola pieza, pero es la que sostiene el capítulo entero: el lema de Farkas. Conviene tenerlo fresco antes de llegar a la sección 7.1.3.

7.1 Condiciones de optimalidad

LA PREGUNTA

Un cargamento tiene que repartirse entre camiones que no pueden exceder cierto peso, y el reparto más barato resulta llenar tres de ellos justo hasta el tope. Quien organiza el reparto sabe que, si le levantaran el tope, seguiría abaratando: el coste sigue bajando en la dirección prohibida. ¿Cómo puede convencerse entonces de que su reparto es el mejor de los permitidos, si en el punto donde está el terreno sigue en pendiente? ¿Qué es lo que hay que mirar para distinguir «ya no se puede mejorar» de «todavía se puede, pero no por ahí»?

La respuesta corta, y conviene tenerla delante durante toda la sección, es esta: hay que dejar de mirar el gradiente solo y empezar a mirarlo *en relación con* los gradientes de las restricciones que aprietan. En el capítulo 6, una condición necesaria de mínimo interior era que el gradiente se anulara: un gradiente no nulo daría una dirección de descenso. Su anulación, por sí sola, no descartaba descensos de orden superior. Aquí el punto está apoyado contra una pared, las direcciones disponibles son menos, y basta con que las direcciones de bajada hayan quedado todas fuera de las disponibles.

LA IDEA: LA PELOTA APOYADA CONTRA LA PARED

La imagen del capítulo anterior era una pelota en un paisaje montañoso, buscando el fondo del valle. Aquí hay lo mismo, con vallas.
Una pelota en reposo en campo abierto exige que el suelo esté horizontal: cualquier inclinación la haría rodar. Pero una pelota apoyada contra una pared puede estar en reposo con el suelo inclinado, siempre que la inclinación empuje *contra* la pared. La condición de reposo ya no es «el suelo está horizontal» sino «la fuerza de la gravedad la aguanta la pared».
Para traducir esa imagen, supongamos paredes regulares $g_i(x) \leq 0$ y ausencia de igualdades. $\nabla g_i(x^*)$ es la normal que apunta hacia fuera, de modo que el empuje de la pared hacia dentro es $-u_i \nabla g_i(x^*)$, con $u_i \geq 0$. El equilibrio con la fuerza $-\nabla f(x^*)$ se escribe

$$-\nabla f(x^*) - \sum_i u_i \nabla g_i(x^*) = 0, \qquad \text{es decir,} \qquad -\nabla f(x^*) = \sum_i u_i \nabla g_i(x^*).$$

Esa es la condición de Karush-Kuhn-Tucker, y no dice otra cosa. Falta un detalle, y es el que da la tercera pieza: una pared que la pelota ni siquiera toca no puede empujar, luego su multiplicador tiene que ser cero. Eso es la holgura complementaria.

7.1.1 El problema, y qué restricciones cuentan en cada punto

El problema que se estudia es el general del capítulo 6, ahora con las restricciones puestas:

$$\text{(P)} \qquad \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a:} & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, l \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, m \\ & x \in S, \end{array}$$

con $f, g_1, \ldots, g_l$ y $h_1, \ldots, h_m$ funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. El conjunto factible es

$$X = \{x \in S : \ g_i(x) \leq 0 \ \ \forall i, \quad h_j(x) = 0 \ \ \forall j\}.$$

Tres comentarios sobre la formulación, antes de seguir.

Por qué S abierto. Es la misma razón que en el capítulo 6: todo lo que sigue son cuentas con desarrollos de Taylor alrededor de un punto, y para poder moverse un poco en cualquier dirección desde x^* hace falta que x^* tenga una bola entera dentro de S. Las condiciones que de verdad limitan el movimiento son las g_i y las h_j, que sí se tratan explícitamente; S es solo el dominio donde las funciones están definidas y son derivables.

Por qué todas las desigualdades en la forma ≤ 0. Una restricción $g(x) \geq 0$ se escribe $-g(x) \leq 0$, y una $g(x) \leq c$ se escribe $g(x) - c \leq 0$. Fijar un sentido único no es una manía de notación: los signos de los multiplicadores dependen de él, y el error más frecuente al aplicar estas condiciones consiste en mezclar los dos sentidos y quedarse con un multiplicador negativo que en realidad era positivo.

Qué pasa con la no negatividad de las variables. La condición $x \geq 0$, que en los capítulos 3 a 5 era parte del mobiliario, aquí no tiene ningún estatuto especial: son n restricciones de desigualdad, $-x_k \leq 0$, con gradiente $-e_k$. Se tratan como todas las demás y producen sus

propios multiplicadores. Se verá en la sección 7.3.4 que esos multiplicadores son exactamente los costos reducidos del símplex.

Pasar un problema a la forma (P)**, en pasos.** Todo lo que sigue en el capítulo, las condiciones de optimalidad, los signos de los multiplicadores y los algoritmos, está escrito para esta forma y solo para ella. Un problema que llega escrito de otra manera se traduce antes de hacer ninguna cuenta, y la traducción tiene siempre los mismos cuatro pasos:

1. *El objetivo, a mínimo.* Maximizar F es minimizar $f = -F$: el mismo punto óptimo, con el valor cambiado de signo. Con el objetivo cambia de signo su gradiente, y es lo primero que se olvida.
2. *Cada desigualdad, a la forma* $g(x) \leq 0$. Se pasa todo al lado del «menor»: la restricción izquierda $\geq$ derecha se escribe $g(x) =$ derecha $-$ izquierda ≤ 0, y la restricción izquierda $\leq$ derecha se escribe $g(x) =$ izquierda $-$ derecha ≤ 0.
3. *Las condiciones de signo de las variables, como restricciones más.* Cada $x_k \geq 0$ es $g(x) = -x_k \leq 0$, con gradiente $-e_k$. Una variable que no lleva condición de signo no produce ninguna restricción.
4. *Las igualdades, a la forma* $h(x) = 0$, pasando todo a un lado. Aquí el orden da igual: escribir h o $-h$ solo cambia el signo de su multiplicador, que es libre.

Hecho eso, se escribe la lista de gradientes, una línea por restricción. Por ejemplo,

$$\text{Maximizar } x_1x_2 \quad \text{sujeto a:} \quad x_1 + 2x_2 \geq 2, \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 5, \quad x_1 = x_2 + 1, \quad x_2 \geq 0$$

se convierte en

$$\begin{aligned}
&f(x) = -x_1x_2, && \nabla f = (-x_2,\, -x_1)^T,\\
&g_1(x) = 2 - x_1 - 2x_2 \leq 0, && \nabla g_1 = (-1,\, -2)^T,\\
&g_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 5 \leq 0, && \nabla g_2 = (2x_1,\, 2x_2)^T,\\
&g_3(x) = -x_2 \leq 0, && \nabla g_3 = (0,\, -1)^T,\\
&h_1(x) = x_1 - x_2 - 1 = 0, && \nabla h_1 = (1,\, -1)^T,
\end{aligned}$$

y x_1, que no lleva condición de signo, no aporta nada. Esa tabla es con lo que se trabaja después. (El óptimo, por cierto, se ve sustituyendo $x_1 = x_2 + 1$: hay que maximizar $x_2(x_2 + 1)$, que crece con $x_2 \geq 0$, y lo que frena a x_2 es $(x_2 + 1)^2 + x_2^2 \leq 5$, que da $x_2 \leq 1$. El óptimo es $(2, 1)$, con valor 2.)

Dónde se falla.

- *Escribir una restricción «$\geq$» como «$\leq$» sin darle la vuelta.* En $\text{Min}\{x_1^2 + x_2^2 : x_1 + x_2 \geq 4\}$ la forma correcta es $g = 4 - x_1 - x_2 \leq 0$, y en el óptimo $(2, 2)$ la estacionariedad $(4, 4) + u(-1, -1) = 0$ da $u = 4 \geq 0$. Quien escriba $g = x_1 + x_2 - 4$ obtiene en el mismo punto $u = -4$ y concluye, con toda la lógica del mundo, que el óptimo no cumple las condiciones. La teoría no se ha equivocado: se le ha dado la restricción al revés.
- *Maximizar sin cambiar de signo el objetivo.* El efecto es el mismo que el anterior, pero en todos los multiplicadores a la vez: salen todos con el signo contrario.
- *Olvidar la no negatividad.* Las $x_k \geq 0$ son restricciones como las demás. Si el óptimo está en $x_k = 0$, su multiplicador es imprescindible para equilibrar el gradiente, y sin él el sistema no tiene solución.
- *Inventar una restricción de signo.* Una variable libre, como x_1 en el ejemplo, no lleva multiplicador. Ponerle uno añade una pared que no existe.

Definición. Sea $\hat{x} \in X$. El **conjunto de restricciones activas** en $\hat{x}$ es

$$I(\hat{x}) = \{i \in \{1, \dots, l\} : \ g_i(\hat{x}) = 0\}.$$

Una restricción $i \notin I(\hat{x})$ se dice **inactiva** en $\hat{x}$, y entonces $g_i(\hat{x}) < 0$. Las restricciones de igualdad se consideran siempre activas.

Esta definición es el primer ingrediente de todo el capítulo y merece dos frases de comentario, porque su papel se entiende mal si se lee deprisa.

Lo que hace es **localizar el problema**. Si $g_i(\hat{x}) < 0$, la continuidad de g_i garantiza que g_i sigue siendo negativa en toda una bola alrededor de $\hat{x}$: hay un $\epsilon > 0$ tal que $g_i(x) < 0$ para todo x con $\|x - \hat{x}\| < \epsilon$. Dicho de otro modo, dentro de esa bola la restricción i *no existe*: se puede uno mover libremente en cualquier dirección sin violarla. Como toda la teoría de esta sección es local — habla de mínimos locales y de desarrollos de Taylor —, las restricciones inactivas quedan fuera de ella. Solo cuentan las que uno está tocando.

Lo que **no** hace es fijarse de una vez. El conjunto $I(\hat{x})$ cambia de un punto a otro, y esa es la fuente de casi toda la dificultad algorítmica de la sección 7.2: un algoritmo que camine por el conjunto factible tiene que ir actualizando qué restricciones aprietan, y decidir en cada paso cuáles suelta.

Ejemplo. En el problema

$$\text{Minimizar } \ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \quad \text{sujeto a:} \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 5, \quad x_1 + 2x_2 \leq 4, \quad x_1, x_2 \geq 0,$$

en el punto $\hat{x} = (2, 1)$ se tiene $x_1^2 + x_2^2 = 5$ y $x_1 + 2x_2 = 4$: las dos primeras restricciones están activas. En cambio $x_1 = 2 > 0$ y $x_2 = 1 > 0$, de modo que las dos de no negatividad están inactivas. Así que $I(\hat{x}) = \{1, 2\}$. En el punto $(0, 0)$, en cambio, las dos primeras están inactivas ($0 < 5$ y $0 < 4$) y las dos de no negatividad activas: el conjunto de índices activos ha cambiado por completo.

7.1.2 Direcciones factibles y direcciones de descenso

En el capítulo 6 una **dirección de descenso** de f en $\hat{x}$ era un vector $d \neq 0$ tal que $f(\hat{x} + \lambda d) < f(\hat{x})$ para todo λ suficientemente pequeño y positivo, y se demostró allí que si $\nabla f(\hat{x})^T d < 0$ entonces d es de descenso. Se llamará

$$F_0(\hat{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n : \ \nabla f(\hat{x})^T d < 0\}$$

al **cono de direcciones de descenso de primer orden**. Es un cono abierto y convexo: si d lo cumple, también lo cumple λd para todo $\lambda > 0$, y la suma de dos vectores con producto escalar negativo contra $\nabla f(\hat{x})$ vuelve a tenerlo negativo.

Hace falta ahora la noción paralela para el conjunto factible.

Definición. Sea $\hat{x} \in X$. Un vector $d \neq 0$ es una **dirección factible** en $\hat{x}$ si existe $\delta > 0$ tal que $\hat{x} + \lambda d \in X$ para todo $\lambda \in (0, \delta)$. Al conjunto de direcciones factibles se le llamará $D(\hat{x})$.

Es decir: d es factible si uno puede echar a andar en esa dirección, aunque sea un tramo cortísimo, sin salirse del conjunto.

Teorema (condición geométrica de optimalidad)**.** Si $\hat{x}$ es un mínimo local de (P), entonces

$$F_0(\hat{x}) \cap D(\hat{x}) = \emptyset.$$

LA IDEA

El enunciado dice lo que diría cualquiera que estuviera en el sitio: si desde donde estoy hubiera una dirección que a la vez *baja* y *está permitida*, daría un paso corto en ella y mejoraría. Como no se puede mejorar, esa dirección no existe: las que bajan están prohibidas y las permitidas no bajan.
Esta condición todavía exige describir las direcciones factibles, algo que puede resultar difícil cuando las restricciones se curvan. Buscaremos condiciones expresadas con sus gradientes y multiplicadores, que permitan trabajar con un sistema finito de ecuaciones y desigualdades. Serán condiciones de primer orden: por sí solas no resolverán todos los casos de optimalidad.

Paso 1: suponer que la intersección no es vacía y fabricar un punto mejor (el núcleo de la prueba). Sea $d \in F_0(\hat{x}) \cap D(\hat{x})$. Que $d \in D(\hat{x})$ da un $\delta_1 > 0$ con $\hat{x} + \lambda d \in X$ para $\lambda \in (0, \delta_1)$: los puntos de ese trocito de semirrecta son factibles. Que $d \in F_0(\hat{x})$ da, por el resultado del capítulo 6 que garantiza el descenso con derivada direccional negativa, un $\delta_2 > 0$ con $f(\hat{x} + \lambda d) < f(\hat{x})$ para $\lambda \in (0, \delta_2)$.
Paso 2: elegir el paso. Tome $\lambda_0 = \frac{1}{2}\,\mín\{\delta_1, \delta_2\}$, que es positivo y menor que los dos. El punto $y = \hat{x} + \lambda_0 d$ cumple las dos cosas a la vez: es factible y tiene $f(y) < f(\hat{x})$.
Paso 3: contradecir la minimalidad local. Que $\hat{x}$ sea mínimo local significa que hay un $\epsilon > 0$ con $f(x) \geq f(\hat{x})$ para todo $x \in X$ con $\|x - \hat{x}\| < \epsilon$. Si el λ_0 del paso 2 no cumpliera $\lambda_0 \|d\| < \epsilon$, se reduce todavía más: se toma $\lambda_0' = \mín\{\lambda_0,\ \epsilon/(2\|d\|)\}$, que sigue siendo positivo y sigue estando en los dos intervalos, porque los intervalos son de la forma $(0, \delta)$. Con ese λ_0', el punto y es factible, dista de $\hat{x}$ menos que ϵ y tiene $f(y) < f(\hat{x})$, en contra de la minimalidad local. Luego la intersección es vacía.

EXPLÍCATE. *El paso 3 usa que los tres conjuntos de valores admisibles de λ son intervalos que empiezan en 0. Escriba por qué eso permite quedarse con el menor de los tres extremos sin perder ninguna de las tres propiedades.*

El teorema es el punto de partida, pero la caracterización de $D(\hat{x})$ que hace falta para usarlo no la da la definición, que habla de puntos, sino una versión con gradientes.

Lema (direcciones factibles de primer orden)**.** Sea $\hat{x} \in X$ y sean las g_i diferenciables en $\hat{x}$, con g_i continua en $\hat{x}$ para $i \notin I(\hat{x})$. Se define

$$G_0(\hat{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n,\ d \neq 0 :\ \nabla g_i(\hat{x})^T d < 0 \ \text{ para todo } i \in I(\hat{x})\}.$$

Si el problema no tiene restricciones de igualdad, entonces $G_0(\hat{x}) \subseteq D(\hat{x})$.

Observación. La condición $d \neq 0$ importa si no hay desigualdades activas: en ese caso las desigualdades que definen G_0 no imponen nada, pero D excluye el vector nulo.

Sea $d \in G_0(\hat{x})$. Hay que ver que un paso corto en la dirección d no viola ninguna restricción, y las restricciones se parten en dos grupos que se tratan por motivos distintos.
Paso 1: las inactivas, por continuidad. Si $i \notin I(\hat{x})$, entonces $g_i(\hat{x}) < 0$. Por continuidad de g_i en $\hat{x}$ existe $\delta_i > 0$ tal que $g_i(\hat{x} + \lambda d) < 0$ para todo $\lambda \in (0, \delta_i)$. Estas restricciones

no imponen ninguna condición sobre d: sea cual sea la dirección, un paso lo bastante corto las respeta.
Paso 2: las activas, por el signo de la derivada direccional (el núcleo). Si $i \in I(\hat{x})$, entonces $g_i(\hat{x}) = 0$ y, por definición de diferenciabilidad,

$$g_i(\hat{x} + \lambda d) = g_i(\hat{x}) + \lambda\, \nabla g_i(\hat{x})^T d + \lambda \|d\|\, \alpha_i(\lambda) = \lambda \Big(\nabla g_i(\hat{x})^T d + \|d\|\, \alpha_i(\lambda) \Big),$$

donde $\alpha_i(\lambda) \to 0$ cuando $\lambda \to 0$. El paréntesis tiende a $\nabla g_i(\hat{x})^T d$, que es estrictamente negativo por hipótesis; luego existe $\delta_i' > 0$ tal que el paréntesis sigue siendo negativo para $\lambda \in (0, \delta_i')$, y como $\lambda > 0$, se concluye $g_i(\hat{x} + \lambda d) < 0$.
Paso 3: un solo δ. Como S es abierto, hay un $\delta_S > 0$ que mantiene $\hat{x} + \lambda d$ dentro de S para $0 < \lambda < \delta_S$. Tomando el mínimo de δ_S y los δ_i, δ_i' existentes, se tiene $\hat{x} + \lambda d \in X$ para todo $\lambda \in (0, \delta)$, es decir, $d \in D(\hat{x})$.

Observación. La inclusión va en un solo sentido, y conviene saber por qué. Puede haber direcciones factibles que no estén en $G_0(\hat{x})$: por ejemplo, con la restricción $g(x) = x_2 \leq 0$ en el punto $\hat{x} = (0,0)$, la dirección $d = (1,0)$ es factible y sin embargo $\nabla g(\hat{x})^T d = (0,1)^T(1,0) = 0$, que no es estrictamente negativo. Lo que ocurre ahí es que d camina *a lo largo* de la restricción en vez de separarse de ella, y para decidir si eso es admisible basta aquí la ecuación afín de la restricción. En una restricción curva, la derivada direccional nula puede exigir estudiar términos superiores. Exigir la desigualdad estricta es lo que hace que el paso 2 funcione con solo el desarrollo de primer orden.

Juntando el teorema y el lema sale la versión utilizable de la condición geométrica.

Corolario (condición de optimalidad de primer orden)**.** Si $\hat{x}$ es mínimo local del problema $\text{Min}\{f(x) : g_i(x) \leq 0,\ x \in S\}$ y las hipótesis de diferenciabilidad del lema se cumplen, entonces

$$F_0(\hat{x}) \cap G_0(\hat{x}) = \emptyset,$$

es decir, **no existe** ningún $d \in \mathbb{R}^n$ con

$$\nabla f(\hat{x})^T d < 0 \qquad \text{y} \qquad \nabla g_i(\hat{x})^T d < 0 \ \text{ para todo } i \in I(\hat{x}).$$

Por el lema, $G_0(\hat{x}) \subseteq D(\hat{x})$. Si hubiera un d en $F_0(\hat{x}) \cap G_0(\hat{x})$, ese mismo d estaría en $F_0(\hat{x}) \cap D(\hat{x})$, que es vacío por el teorema anterior.

El corolario, con números. Vuelva al ejemplo de las restricciones activas, en el punto $\hat{x} = (2,1)$, que resultará ser el óptimo. Allí

$$\nabla f(\hat{x}) = (-2,-2)^T, \qquad \nabla g_1(\hat{x}) = (4,2)^T, \qquad \nabla g_2(\hat{x}) = (1,2)^T,$$

y el corolario afirma que ningún d cumple a la vez $-2d_1 - 2d_2 < 0$, $4d_1 + 2d_2 < 0$ y $d_1 + 2d_2 < 0$. Se puede probar suerte. La dirección $d = (1,1)$, hacia el mínimo libre $(3,2)$, baja: $\nabla f(\hat{x})^T d = -4$; pero $\nabla g_1(\hat{x})^T d = 6 > 0$, así que sale del círculo. La dirección $d = (-1,0)$ entra en las dos restricciones, con -4 y -1; pero $\nabla f(\hat{x})^T d = 2 > 0$, así que sube. Ninguna de las dos sirve, y no es casualidad: se comprueba en una línea que

$$\tfrac{1}{3}\nabla g_1(\hat{x}) + \tfrac{2}{3}\nabla g_2(\hat{x}) = \tfrac{1}{3}(4,2) + \tfrac{2}{3}(1,2) = (2,2) = -\nabla f(\hat{x}),$$

luego para *todo* d se tiene $\nabla f(\hat{x})^T d = -\frac{1}{3}\nabla g_1(\hat{x})^T d - \frac{2}{3}\nabla g_2(\hat{x})^T d$. Si los dos productos de la derecha fueran negativos, el de la izquierda sería positivo. Esos dos números, $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$, son un *certificado* de que el sistema no tiene solución, y son exactamente los multiplicadores que el ejemplo resuelto de la sección 7.1.7 encontrará en este punto. Lo que falta por demostrar es que un certificado de este tipo existe siempre que el sistema no tiene solución, y eso es lo que hace el teorema de alternativa que viene. Con una salvedad que dará trabajo: el certificado general lleva también un coeficiente delante de ∇f, y ese coeficiente puede salir cero.

Este corolario es el momento decisivo del capítulo, aunque no lo parezca. La condición ha dejado de hablar del conjunto factible X, que puede tener cualquier forma, y habla solo de un puñado de vectores: $\nabla f(\hat{x})$ y los $\nabla g_i(\hat{x})$ con i activo. Y lo que dice de ellos es que cierto sistema de desigualdades estrictas **no tiene solución**. Un enunciado de esa forma — «este sistema no tiene solución» — es exactamente lo que un teorema de alternativa convierte en «este otro sí la tiene». Y el teorema de alternativa del capítulo 2 es el lema de Farkas.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: DESPEJAR LAS RESTRICCIONES EN VEZ DE MULTIPLICARLAS

Antes de seguir por el camino de los multiplicadores conviene mirar el otro, que es el que a cualquiera se le ocurre primero y que en los cursos de cálculo se usa constantemente.
Cuál era. Si el conjunto factible viene dado por igualdades, $h_1(x) = \cdots = h_m(x) = 0$, se despejan m variables en función de las otras $n - m$ y se sustituyen en f. Queda un problema *sin restricciones* en $n - m$ variables, al que se le aplica sin más la teoría del capítulo 6: gradiente nulo y hessiana semidefinida positiva.
Qué ventaja tenía. Es honesta y no necesita teoría nueva. Cuando el despeje sale — y en los ejercicios de libro sale a menudo — es el camino más corto, y el **teorema de la función implícita** garantiza que el despeje existe localmente siempre que la matriz jacobiana de las h_j tenga rango m. Ese teorema, que aparece tres veces en este capítulo, dice esto: si $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es de clase $\mathcal{C}^1$, $h(\hat{x}) = 0$ y la submatriz de $Dh(\hat{x})$ formada por m columnas es invertible, entonces esas m variables se despejan en un entorno como función $\mathcal{C}^1$ de las otras $n - m$. Está enunciado entero, con la fórmula de la derivada y un ejemplo, en el apéndice F.
Sus límites. El teorema de la función implícita garantiza un despeje local, pero no siempre una fórmula explícita cómoda. Aun así, permite calcular derivadas y resolver numéricamente el problema reducido. Las desigualdades requieren además decidir cuáles están activas: no se eliminan como si todas fueran igualdades. Los multiplicadores ofrecen una formulación conjunta y muestran directamente la sensibilidad a las restricciones; con un despeje también se puede estudiar esa sensibilidad, pero hace falta conservar cómo intervienen sus parámetros.
El método sigue usándose, y con razón, cuando el despeje es explícito y cómodo: la sustitución de una restricción de suma constante $\sum x_k = 1$ es el ejemplo de todos los días.

7.1.3 De la geometría al álgebra: las condiciones de Fritz John

Antes del enunciado hay que recordar la herramienta, entera, porque de ella sale todo lo demás.

Teorema (de Gordan, capítulo 2)**.** Sea A una matriz de orden $p \times n$. Uno y solo uno de los dos sistemas siguientes tiene solución:
(I) $Ad < 0$ para algún $d \in \mathbb{R}^n$ (todas las componentes estrictamente negativas);
(II) $A^T y = 0$ para algún $y \in \mathbb{R}^p$ con $y \geq 0$, $y \neq 0$.

La demostración está en la sección 2.2, obtenida del lema de Farkas añadiendo una columna de unos para convertir la desigualdad estricta en una no estricta. Se reproduce aquí solo el enunciado porque es literalmente la pieza que falta.

LA IDEA: QUÉ DICE GORDAN EN UNA FRASE

Los dos sistemas de Gordan son dos maneras de mirar una familia de vectores, las filas de A. El sistema (I) pregunta si hay una dirección d que forme ángulo obtuso estricto con *todas* ellas a la vez: un vector que «huya» de todas. El sistema (II) pregunta si el vector cero se puede escribir como combinación de esas filas con coeficientes no negativos y no todos nulos: si las filas se estorban entre ellas hasta cancelarse.
Y la alternativa dice que pasa una cosa o la otra, nunca las dos ni ninguna. Si los vectores apuntan todos «hacia el mismo lado» en sentido amplio, hay una dirección que huye de todos; si están tan repartidos que se cancelan, no la hay. Ver que las dos no pueden pasar a la vez es una línea de álgebra: si $Ad < 0$ y $A^T y = 0$ con $y \geq 0$, $y \neq 0$, entonces $0 = (A^T y)^T d = y^T (Ad)$, y ahí hay una suma de términos $y_k (Ad)_k$ todos ≤ 0 y al menos uno < 0, luego la suma es estrictamente negativa y no puede valer 0. Lo que cuesta es la otra mitad, y esa es la que se demostró en el capítulo 2.

Con esto, el corolario de la p. 383 se traduce solo.

Teorema (condiciones necesarias de Fritz John)**.** Sea $\hat{x}$ un mínimo local de $\operatorname{Min}\{f(x) : g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, l,\ x \in S\}$, con S abierto, f y las g_i con $i \in I(\hat{x})$ diferenciables en $\hat{x}$, y las g_i con $i \notin I(\hat{x})$ continuas en $\hat{x}$. Entonces existen escalares $u_0, u_1, \ldots, u_l$ tales que

$$u_0 \nabla f(\hat{x}) + \sum_{i \in I(\hat{x})} u_i \nabla g_i(\hat{x}) = 0, \qquad u_i g_i(\hat{x}) = 0 \quad (i = 1, \ldots, l),$$

$$u_0 \geq 0, \quad u_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, l), \qquad (u_0, u_1, \ldots, u_l) \neq 0.$$

Paso 1: escribir la condición geométrica como un sistema. Por el corolario de la p. 383, no existe d con $\nabla f(\hat{x})^T d < 0$ y $\nabla g_i(\hat{x})^T d < 0$ para todo $i \in I(\hat{x})$. Sea A la matriz cuyas filas son $\nabla f(\hat{x})^T$ y los $\nabla g_i(\hat{x})^T$ con $i \in I(\hat{x})$; tiene $1 + |I(\hat{x})|$ filas. Lo que se acaba de decir es que el sistema (I) de Gordan, $Ad < 0$, no tiene solución.
Paso 2: aplicar la alternativa (el núcleo). Por el teorema de Gordan, entonces el sistema (II) sí la tiene: existe $y \geq 0$, $y \neq 0$, con $A^T y = 0$. Escribiendo las componentes de y como u_0 (la que corresponde a la fila de f) y u_i con $i \in I(\hat{x})$, eso es exactamente

$$u_0 \nabla f(\hat{x}) + \sum_{i \in I(\hat{x})} u_i \nabla g_i(\hat{x}) = 0,$$

con todos los coeficientes no negativos y no todos nulos.

Paso 3: completar con las inactivas. Para $i \notin I(\hat{x})$ se define $u_i = 0$. Con eso, las restricciones inactivas no intervienen en la suma, y las condiciones $u_i\, g_i(\hat{x}) = 0$ se cumplen todas: si i es activo, $g_i(\hat{x}) = 0$ y el producto es cero por ese factor; si es inactivo, $u_i = 0$ y el producto es cero por el otro.

EXPLÍCATE. *El paso 3 introduce las restricciones inactivas con multiplicador nulo. Explique con sus palabras por qué eso no es un truco de notación sino la traducción exacta de que una restricción que sobra no puede influir en el óptimo.*

Para reconstruirla. Tres pasos y una sola herramienta. En un mínimo no hay dirección que baje y entre a la vez en todas las activas (corolario de la p. 383); eso es decir que el sistema $Ad < 0$, con las filas $\nabla f(\hat{x})^T$ y $\nabla g_i(\hat{x})^T$ activas, no tiene solución; y Gordan lo convierte en una combinación no negativa y no nula de esas filas que da cero. Las inactivas entran con multiplicador cero. En el punto $(2,1)$ del ejemplo, la combinación es $3\nabla f + 1 \cdot \nabla g_1 + 2\nabla g_2 = 3(-2,-2) + (4,2) + 2(1,2) = (0,0)$, o cualquier múltiplo positivo de $(u_0, u_1, u_2) = (3,1,2)$: la condición no fija el tamaño del vector de multiplicadores, porque si uno sirve, cualquier múltiplo positivo suyo también. Por eso se puede normalizar dividiendo por u_0 cuando no es cero, y por eso el caso $u_0 = 0$ es el único que estorba.

Observación (el defecto de Fritz John, y por qué hay que arreglarlo)**.** El teorema es correcto y no pide ninguna hipótesis adicional, lo cual es su virtud. Pero tiene un agujero grande, y es el que motiva todo lo que viene a continuación: **permite** $u_0 = 0$.

Si $u_0 = 0$, la condición se reduce a

$$\sum_{i \in I(\hat{x})} u_i\, \nabla g_i(\hat{x}) = 0, \qquad u \geq 0,\ u \neq 0,$$

donde $\nabla f(\hat{x})$ ha desaparecido. Es decir: la condición se cumple *diga lo que diga la función objetivo*. Un punto donde los gradientes de las restricciones activas se cancelan entre sí satisface las condiciones de Fritz John aunque el objetivo sea absurdo, y por tanto esas condiciones no criban nada en él. Todo el trabajo que queda consiste en encontrar hipótesis que garanticen $u_0 > 0$; entonces se divide toda la igualdad por u_0 y aparece la condición de Karush-Kuhn-Tucker, con $\nabla f(\hat{x})$ con coeficiente 1.

DE DÓNDE VIENE: TRES NOMBRES Y TREINTA Y SIETE AÑOS

La atribución de estas condiciones es un caso conocido de resultado descubierto tres veces. Harold KUHN y Albert TUCKER las publicaron en 1951, en las actas del segundo simposio de Berkeley sobre estadística matemática y probabilidad, en un trabajo titulado *Nonlinear programming*. Esa es la fuente de la que salió el nombre y la que puso el resultado en circulación. Fritz JOHN había publicado en 1948, en el volumen de homenaje a Courant, la versión con el multiplicador u_0 delante del objetivo, dentro de un trabajo sobre problemas extremales con desigualdades como condiciones subsidiarias. Es la forma más general y es la que se acaba de demostrar.

Y William KARUSH las había obtenido antes que los dos, en 1939, en su tesis de máster en la Universidad de Chicago, dirigida dentro de la escuela de cálculo de variaciones de esa universidad. La tesis no se publicó entonces y tuvo poca difusión. Fue el propio Kuhn quien, en una nota histórica de 1976 sobre el desarrollo de la programación no lineal, reconoció la prioridad de Karush. El nombre triple recoge esa prioridad. Por eso el resultado se llama de

Karush-Kuhn-Tucker y no de Kuhn-Tucker, y por eso conviene no extrañarse al encontrar las dos denominaciones en textos distintos: la forma corta sigue apareciendo en numerosos libros. El trabajo de Karush procede del cálculo de variaciones: del problema de Lagrange con restricciones de desigualdad, que Valentine había estudiado en 1937 y que es de donde toma Karush la técnica.

7.1.4 Las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker

Definición. Un punto $\hat{x} \in X$ satisface las **condiciones de Karush-Kuhn-Tucker** del problema (P) si existen $u \in \mathbb{R}^l$ y $v \in \mathbb{R}^m$ tales que

$$\begin{aligned}
&\text{(estacionariedad)} && \nabla f(\hat{x}) + \sum_{i \in I(\hat{x})} u_i \nabla g_i(\hat{x}) + \sum_{j=1}^{m} v_j \nabla h_j(\hat{x}) = 0, \\
&\text{(holgura complementaria)} && u_i\, g_i(\hat{x}) = 0, \qquad i = 1, \dots, l, \\
&\text{(signo)} && u_i \geq 0, \qquad i = 1, \dots, l, \\
&\text{(factibilidad)} && g_i(\hat{x}) \leq 0, \quad h_j(\hat{x}) = 0.
\end{aligned}$$

A los u_i y v_j se les llama **multiplicadores de Lagrange** del problema, y al punto $\hat{x}$ que las cumple, **punto KKT** o punto estacionario del problema con restricciones.

Antes de comentarlo, conviene leer el sistema en palabras, porque escrito con sumatorios parece más complicado de lo que es. Dice cuatro cosas sobre el punto $\hat{x}$, y en este orden: que está dentro del conjunto factible; que las restricciones que no toca no le cobran nada; que las que toca le cobran un precio no negativo; y que, con esos precios, la pendiente del objetivo queda exactamente compensada por la suma de los empujes de las restricciones, de modo que desde $\hat{x}$ no hay ninguna dirección factible con derivada direccional negativa. Comparado con la condición del capítulo 6, que pedía que la pendiente fuera nula, aquí se pide que la pendiente sea *explicable* por las paredes que sujetan el punto.

Cuatro observaciones sobre el sistema, en orden de importancia.

La estacionariedad es la ley de equilibrio. Reescrita como $-\nabla f(\hat{x}) = \sum u_i \nabla g_i(\hat{x}) + \sum v_j \nabla h_j(\hat{x})$, dice que la fuerza que tira del punto cuesta abajo se descompone como combinación de las normales a las restricciones que lo sujetan. Sin restricciones activas, todas las sumas son cero y queda $\nabla f(\hat{x}) = 0$, que es la condición del capítulo 6: esta teoría contiene a aquella como caso particular.

El signo distingue igualdades de desigualdades, y no es un capricho. Los u_i de las desigualdades son no negativos; los v_j de las igualdades son libres de signo. La razón es física: una pared solo empuja hacia dentro, mientras que una vía sujeta al punto por los dos lados. Si una restricción $g_i(x) \leq 0$ tuviera multiplicador negativo, el «empuje» iría hacia fuera del conjunto factible y no representaría la reacción de esa pared. Una solución de estacionariedad con algún $u_i < 0$ no satisface KKT; si los multiplicadores no son únicos, todavía podría existir otra solución con los signos correctos. Esa lectura del signo es la que gobierna los algoritmos de la sección 7.2.

La holgura complementaria es la que localiza. Dice que $u_i = 0$ para toda restricción inactiva, de modo que en la suma de estacionariedad solo intervienen de hecho los gradientes de las restricciones que el punto está tocando. La condición $u_i\, g_i(\hat{x}) = 0$ es una manera compacta de escribir «o $u_i = 0$ o $g_i(\hat{x}) = 0$», y como $u_i \geq 0$ y $g_i(\hat{x}) \leq 0$, también se puede escribir en

bloque como $u^T g(\hat{x}) = 0$: una suma de términos todos ≤ 0 que vale cero solo si todos son cero.

Es un sistema de ecuaciones, y por eso sirve. Contando: n ecuaciones de estacionariedad, l de holgura complementaria y m de factibilidad en igualdad, con $n + l + m$ incógnitas. Es resoluble a mano en los casos pequeños, con la salvedad de que la holgura complementaria no es lineal y obliga a distinguir casos: para cada i, o bien $u_i = 0$, o bien $g_i(\hat{x}) = 0$. Ese árbol de casos, con 2^l ramas en el peor de los casos, es la parte laboriosa de resolver un sistema KKT a mano, y la manera de reducirlo es descartar ramas por el signo en cuanto se puede.

7.1.5 Por qué hace falta una cualificación: la cúspide

Fritz John vale siempre. Karush-Kuhn-Tucker, no. La diferencia está en el u_0, y el ejemplo que sigue muestra que el problema es real y no una precaución teórica.

Ejemplo (el óptimo que no cumple KKT)**.** Considere el problema

$$\text{Minimizar } f(x_1, x_2) = x_1 \qquad \text{sujeto a:} \qquad g(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^3 \leq 0.$$

Cuál es el óptimo. La restricción obliga a $x_1^3 \geq x_2^2 \geq 0$, luego $x_1 \geq 0$ en todo punto factible; y el punto $(0, 0)$ es factible, con $f(0, 0) = 0$. Así que $\hat{x} = (0, 0)$ es el mínimo global, y además es el único: cualquier otro punto factible tiene $x_1 > 0$.

KKT falla. Los gradientes son

$$\nabla f(x) = (1,\, 0)^T, \qquad \nabla g(x) = (-3x_1^2,\, 2x_2)^T, \qquad \text{luego} \qquad \nabla g(0, 0) = (0,\, 0)^T.$$

La restricción está activa en $(0, 0)$, porque $g(0, 0) = 0$. La condición de estacionariedad pediría

$$(1, 0)^T + u\,(0, 0)^T = (0, 0)^T,$$

es decir $(1, 0)^T = (0, 0)^T$, que es falso para todo valor de u. No hay multiplicador que funcione: el mínimo global del problema **no** es un punto KKT.

Fritz John, en cambio, se cumple. Basta tomar $u_0 = 0$ y $u_1 = 1$:

$$0 \cdot (1, 0)^T + 1 \cdot (0, 0)^T = (0, 0)^T,$$

con $(u_0, u_1) = (0, 1) \neq 0$ y ambos no negativos. Y ahí se ve, en un caso concreto, el defecto que se anunció: las condiciones de Fritz John se satisfacen sin usar la función objetivo para nada.

LA IDEA: POR QUÉ FALLA, Y QUÉ TIENE DE RARO ESTE CONJUNTO

El conjunto factible $X = \{(x_1, x_2) : x_2^2 \leq x_1^3\}$ es la región interior a una curva con una **cúspide** en el origen: dos ramas, $x_2 = \pm x_1^{3/2}$, que se juntan en $(0, 0)$ tangentes al eje x_1 y con tangente común. Vista desde el origen, la región factible es infinitamente afilada: se abre más despacio que cualquier cuña de ángulo positivo.

La consecuencia es que la aproximación de primer orden de la restricción *no ve* el conjunto. Linealizando g en el origen se obtiene la función nula, cuyo conjunto $\{d : \nabla g(0, 0)^T d \leq 0\}$ es todo $\mathbb{R}^2$: el modelo lineal dice que desde el origen se puede ir en cualquier dirección, cuando en verdad desde el origen solo se puede ir «hacia la derecha» por dentro de la cúspide. El modelo lineal miente, y KKT es una condición

construida enteramente sobre el modelo lineal.
Dicho al revés, y esta es la frase que conviene retener: **una cualificación de restricciones permite deducir las condiciones KKT necesarias a partir de la geometría local.** No exige que el conjunto coincida con su linealización: controla la información de primer orden que se necesita en esa deducción. Sin esa garantía, como aquí, el óptimo puede no cumplir KKT.
Y conviene subrayar qué es lo que *no* falla: la geometría. La condición $F_0(\hat{x}) \cap D(\hat{x}) = \emptyset$ se cumple en el origen sin ningún problema, porque las direcciones que bajan son las de primera componente negativa y ninguna de ellas es factible. Lo que falla es el paso de la geometría al álgebra.

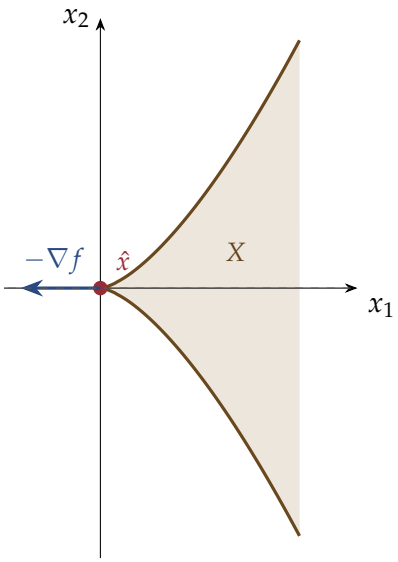


Figura 7.1: La cúspide del ejemplo de la p. 388. La región sombreada es el conjunto factible; el óptimo está en la punta. La dirección de descenso $-\nabla f = (-1, 0)$ apunta hacia fuera; todo punto factible tiene $x_1 \geq 0$, lo que certifica el óptimo. Como $\nabla g(\hat{x}) = 0$ no hay ningún vector con el que equilibrarla, y las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker no se pueden satisfacer.

7.1.6 Cualificaciones de restricciones

Hay varias hipótesis que garantizan la existencia de multiplicadores KKT. Algunas permiten normalizar directamente Fritz John; otras, como las restricciones afines, se tratan con Farkas. Veremos tres casos.

Definición. Sea $\hat{x} \in X$.

1. **Independencia lineal.** Se dice que en $\hat{x}$ se cumple la cualificación de independencia lineal si los vectores
$$\{\nabla g_i(\hat{x}) : i \in I(\hat{x})\} \cup \{\nabla h_j(\hat{x}) : j = 1, \ldots, m\}$$
son linealmente independientes.

2. **Condición de Slater.** Se dice que el problema cumple la condición de Slater si S es convexo, las g_i son convexas en S, las h_j afines, y existe $\bar{x} \in S$ con $g_i(\bar{x}) < 0$ para todo i y $h_j(\bar{x}) = 0$ para todo j.
3. **Restricciones afines.** Si todas las g_i y todas las h_j son afines, no hace falta ninguna hipótesis adicional.

Teorema (necesidad de KKT bajo independencia lineal)**.** Sea $\hat{x}$ un mínimo local de (P), con S abierto, f y las g_i activas diferenciables en $\hat{x}$, las g_i inactivas continuas en $\hat{x}$ y las h_j de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno de $\hat{x}$. Si en $\hat{x}$ se cumple la cualificación de independencia lineal, entonces $\hat{x}$ es un punto KKT: existen $u \geq 0$ y v con

$$\nabla f(\hat{x}) + \sum_{i \in I(\hat{x})} u_i \nabla g_i(\hat{x}) + \sum_{j=1}^{m} v_j \nabla h_j(\hat{x}) = 0, \qquad u_i\, g_i(\hat{x}) = 0.$$

La idea

La demostración completa en presencia de igualdades necesita el teorema de la función implícita — enunciado en el apéndice F: con h de clase $\mathcal{C}^1$ y $Dh(\hat{x})$ de rango m, las $h_j = 0$ definen localmente una superficie parametrizable, y es sobre ella donde se hace variar el punto —. Primero probaremos el caso de solo desigualdades y después reduciremos el caso general a ese. La idea cabe en una línea: **Fritz John ya da la combinación; la independencia lineal es exactamente lo que impide que el coeficiente del objetivo sea cero.**
Por qué lo impide: si u_0 fuera cero, la igualdad de Fritz John quedaría en una combinación de los gradientes de las restricciones activas, con coeficientes no todos nulos, que da el vector cero. Eso es, palabra por palabra, la definición de que esos gradientes son linealmente *dependientes*. Si se ha supuesto que son independientes, tal cosa no puede pasar y por tanto $u_0 > 0$.

Paso 1: aplicar Fritz John. Por el teorema de la p. 385, existen $u_0, u_1, \ldots, u_l$ no negativos y no todos nulos con

$$u_0 \nabla f(\hat{x}) + \sum_{i \in I(\hat{x})} u_i \nabla g_i(\hat{x}) = 0,$$

donde ya se ha usado que $u_i = 0$ para $i \notin I(\hat{x})$.
Paso 2: descartar $u_0 = 0$ (el núcleo). Suponga $u_0 = 0$. Entonces la igualdad anterior queda

$$\sum_{i \in I(\hat{x})} u_i \nabla g_i(\hat{x}) = 0,$$

con los u_i, $i \in I(\hat{x})$, no todos nulos: en efecto, como el vector completo $(u_0, u_1, \ldots, u_l)$ no es cero y $u_0 = 0$ y los inactivos son cero, alguno de los activos tiene que ser distinto de cero. Pero esa igualdad dice que la familia $\{\nabla g_i(\hat{x}) : i \in I(\hat{x})\}$ admite una combinación lineal no trivial igual al vector nulo, es decir, que es linealmente dependiente. Contradice la hipótesis. Por tanto $u_0 > 0$.
Paso 3: normalizar. Divida toda la igualdad del paso 1 por $u_0 > 0$ y llame $\tilde{u}_i = u_i/u_0$. Los $\tilde{u}_i$ siguen siendo no negativos, porque son cocientes de números no negativos por uno positivo, y siguen cumpliendo la holgura complementaria, porque $\tilde{u}_i\, g_i(\hat{x}) =$

$(u_i/u_0)\, g_i(\hat{x}) = 0$. Y la igualdad queda

$$\nabla f(\hat{x}) + \sum_{i \in I(\hat{x})} \tilde{u}_i \, \nabla g_i(\hat{x}) = 0,$$

que es la estacionariedad de KKT en ausencia de igualdades.
Paso 4: incorporar las igualdades. Por la función implícita, escribimos localmente $x = \psi(z)$ sobre $h(x) = 0$, con $\psi(\hat{z}) = \hat{x}$ y $\operatorname{Im} D\psi(\hat{z}) = \ker Dh(\hat{x})$. En estas coordenadas se minimiza $f \circ \psi$ sujeto solo a $g_i \circ \psi \leq 0$. Los gradientes activos de estas funciones reducidas son independientes: si $D\psi(\hat{z})^T \sum_i a_i \nabla g_i(\hat{x}) = 0$, entonces $\sum_i a_i \nabla g_i(\hat{x})$ pertenece a $(\ker Dh(\hat{x}))^\perp = \operatorname{Im} Dh(\hat{x})^T$. La independencia conjunta de los gradientes de g_i y h_j obliga a que todos los a_i sean cero. Aplicando los pasos anteriores al problema reducido se obtienen $u_i \geq 0$ con

$$D\psi(\hat{z})^T \left(\nabla f(\hat{x}) + \sum_{i \in I(\hat{x})} u_i \nabla g_i(\hat{x}) \right) = 0.$$

El vector entre paréntesis pertenece, por tanto, a $\operatorname{Im} Dh(\hat{x})^T$; existen coeficientes v_j que lo cancelan y dan la estacionariedad completa. La holgura complementaria se conserva al volver a x. Si $m = n$, las igualdades fijan localmente el punto y sus gradientes forman una base: basta tomar $u = 0$ y elegir v para cancelar $\nabla f(\hat{x})$.

Para reconstruirla. Sin igualdades son tres líneas: Fritz John da $u_0 \nabla f + \sum u_i \nabla g_i = 0$ con coeficientes no negativos y no todos nulos; si u_0 fuera cero, quedaría una combinación nula no trivial de gradientes activos, que la independencia prohíbe; luego $u_0 > 0$ y se divide por él. Con igualdades se añade un rodeo: se usan las igualdades para bajar a coordenadas en las que no existen (función implícita), se aplica ahí lo anterior, y al volver, lo que sobra del gradiente es perpendicular a todas las direcciones tangentes, es decir, está en el espacio generado por los $\nabla h_j(\hat{x})$, y esos son los v_j.

Observación (la cúspide, otra vez)**.** Compruebe el lector que el ejemplo de la p. 388 incumple la cualificación de independencia lineal, y que la incumple de la manera más tosca posible: la única restricción activa tiene gradiente $\nabla g(0,0) = (0,0)$, y una familia formada por un solo vector es linealmente independiente si y solo si ese vector no es el nulo. La hipótesis del teorema falla en el sitio exacto en el que hace falta.

Teorema (necesidad de KKT bajo Slater)**.** Sea el problema convexo $\operatorname{Min}\{f(x) : g_i(x) \leq 0,\ x \in S\}$ con f y las g_i convexas y diferenciables y S abierto y convexo. Si se cumple la condición de Slater, es decir, si existe $\bar{x} \in S$ con $g_i(\bar{x}) < 0$ para todo i, entonces todo mínimo local $\hat{x}$ es un punto KKT.

La idea. El esquema es el del teorema anterior: descartar $u_0 = 0$. Lo que cambia es el arma. Si u_0 fuera cero, habría una combinación no negativa y no nula de gradientes activos igual al vector nulo. Pero la convexidad dice que *todos* esos gradientes forman ángulo obtuso con la flecha que va de $\hat{x}$ al punto de Slater, y una suma de números negativos con pesos no negativos, alguno positivo, no puede dar cero. La prueba es esa frase con las cuentas puestas.

Paso 1: Fritz John. Como antes, existen $u_0 \geq 0$ y $u_i \geq 0$ con $i \in I(\hat{x})$, no todos nulos, tales que $u_0 \nabla f(\hat{x}) + \sum_{i \in I(\hat{x})} u_i \nabla g_i(\hat{x}) = 0$.
Paso 2: usar el punto de Slater contra la hipótesis $u_0 = 0$ (el núcleo). Suponga $u_0 = 0$. Multiplique escalarmente la igualdad por el vector $\bar{x} - \hat{x}$:

$$\sum_{i \in I(\hat{x})} u_i \, \nabla g_i(\hat{x})^T (\bar{x} - \hat{x}) = 0.$$

Ahora entra la convexidad de cada g_i. La desigualdad del gradiente para funciones convexas diferenciables, demostrada en el capítulo 6, dice que

$$g_i(\bar{x}) \;\geq\; g_i(\hat{x}) + \nabla g_i(\hat{x})^T (\bar{x} - \hat{x}),$$

y como $g_i(\hat{x}) = 0$ para i activo, eso es $\nabla g_i(\hat{x})^T (\bar{x} - \hat{x}) \leq g_i(\bar{x}) < 0$, donde la última desigualdad estricta es justamente lo que aporta el punto de Slater.
Paso 3: contar signos. La suma del paso 2 tiene todos sus términos de la forma $u_i \cdot$ (algo estrictamente negativo) con $u_i \geq 0$, luego todos ≤ 0; y como algún u_i con $i \in I(\hat{x})$ es estrictamente positivo (porque $u_0 = 0$ y no todos son nulos), ese término es estrictamente negativo. La suma vale entonces menos que cero, y habíamos deducido que valía cero. Contradicción, luego $u_0 > 0$, y se normaliza como en el teorema anterior.

Para reconstruirla. Tres ingredientes, uno por paso: Fritz John da la combinación; la desigualdad del gradiente de las funciones convexas, evaluada en el punto de Slater, da $\nabla g_i(\hat{x})^T (\bar{x} - \hat{x}) \leq g_i(\bar{x}) < 0$ para cada activa; y al multiplicar la combinación por $\bar{x} - \hat{x}$ el signo de la suma contradice $u_0 = 0$. De las hipótesis, la convexidad es la que permite comparar el gradiente en $\hat{x}$ con el valor en un punto lejano, y el punto de Slater es el que pone un «<» donde la convexidad solo daría «≤».

LA IDEA: SLATER PROPORCIONA UNA DIRECCIÓN HACIA EL INTERIOR

Sin igualdades, un punto estrictamente factible tiene una bola factible alrededor, por continuidad. Slater implica así interior no vacío, pero no es equivalente a ello: la restricción $g(x) \equiv 0 \leq 0$ admite todo el espacio y nunca es estricta.
Lo que usa la prueba es más preciso que la imagen del grosor. La convexidad permite tomar el vector $\bar{x} - \hat{x}$ hacia el punto de Slater y obtener $\nabla g_i(\hat{x})^T (\bar{x} - \hat{x}) < 0$ para todas las activas a la vez. Ese vector impide una combinación no negativa no trivial de gradientes activos que se anule. En la cúspide hay puntos estrictamente factibles, pero falta convexidad y esa deducción no funciona. Con igualdades afines, la holgura se pide dentro del subespacio afín que ellas definen.
Un caso donde Slater falla de verdad: el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 0\}$, que es el único punto $\{(0,0)\}$. La función es convexa, pero no hay ningún punto con desigualdad estricta, porque una suma de cuadrados nunca es negativa. Y en ese punto, en efecto, $\nabla g(0,0) = (0,0)$ y KKT vuelve a fallar para el problema Min$\{x_2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 0\}$.

Teorema (restricciones afines)**.** Si todas las restricciones son afines, $g_i(x) = a_i^T x - b_i$ y $h_j(x) =$

$e_j^T x - f_j$, entonces todo mínimo local $\hat{x}$ de (P), con f diferenciable en $\hat{x}$ y S abierto, es un punto KKT, sin ninguna cualificación adicional.

La clave es que con restricciones afines la inclusión del lema de la sección 7.1.2 se puede mejorar hasta la igualdad con desigualdades no estrictas.
Paso 1: caracterizar las direcciones factibles exactamente. Sea $\hat{x}$ factible y sea d con $a_i^T d \le 0$ para todo $i \in I(\hat{x})$ y $e_j^T d = 0$ para todo j. Para $\lambda > 0$,

$$g_i(\hat{x} + \lambda d) = a_i^T \hat{x} + \lambda a_i^T d - b_i = g_i(\hat{x}) + \lambda\, a_i^T d.$$

Si i es activo, $g_i(\hat{x}) = 0$ y el resultado es $\lambda\, a_i^T d \le 0$: factible para *todo* $\lambda > 0$. Si i es inactivo, $g_i(\hat{x}) < 0$ y basta tomar λ pequeño. Para las igualdades, $h_j(\hat{x} + \lambda d) = h_j(\hat{x}) + \lambda e_j^T d = 0$. Obsérvese que aquí no ha hecho falta ningún desarrollo de Taylor con resto: una función afín coincide con su propia linealización, y por eso el modelo lineal no puede mentir. Esa es la razón última de que este caso no necesite cualificación.
Paso 2: aplicar Farkas en su forma estándar (el núcleo). Por el teorema de la condición geométrica, no existe d con $\nabla f(\hat{x})^T d < 0$ que sea factible. Por el paso 1, el conjunto de direcciones factibles es exactamente $\{d \neq 0 : a_i^T d \le 0\ (i \in I(\hat{x})),\ e_j^T d = 0\}$. Así que el sistema

$$a_i^T d \le 0\ \ (i \in I(\hat{x})), \qquad e_j^T d = 0, \qquad \nabla f(\hat{x})^T d < 0$$

no tiene solución. Escribiendo las igualdades $e_j^T d = 0$ como el par de desigualdades $e_j^T d \le 0$ y $-e_j^T d \le 0$, el lema de Farkas del capítulo 2 dice que entonces $-\nabla f(\hat{x})$ pertenece al cono generado por los a_i activos y por los $\pm e_j$: existen $u_i \ge 0$ y coeficientes no negativos v_j^+, v_j^- con

$$-\nabla f(\hat{x}) = \sum_{i \in I(\hat{x})} u_i\, a_i + \sum_j (v_j^+ - v_j^-) e_j.$$

Paso 3: recomponer. Poniendo $v_j = v_j^+ - v_j^-$, que es un número real de signo cualquiera, y $u_i = 0$ para i inactivo, se obtiene la estacionariedad de KKT con la holgura complementaria y los signos correctos. La libertad de signo de los v_j ha salido, ni más ni menos, de haber desdoblado cada igualdad en dos desigualdades opuestas.

Para reconstruirla. Con restricciones afines el modelo lineal es exacto, así que las direcciones factibles son exactamente las del cono $\{a_i^T d \le 0\ (i \text{ activa}),\ e_j^T d = 0\}$, con desigualdades no estrictas. La condición geométrica dice que ninguna de ellas baja. Farkas, sin necesidad de Gordan ni de u_0, convierte eso en «$-\nabla f(\hat{x})$ está en el cono generado por los a_i activos y los $\pm e_j$». Como el coeficiente de ∇f no aparece, no hay nada que pueda anularse, y por eso aquí sobra cualquier cualificación.

CONEXIÓN: POR QUÉ LA PROGRAMACIÓN LINEAL NUNCA NECESITÓ ESTO

El teorema anterior explica un silencio de los capítulos 3 y 4. Un problema lineal tiene objetivo afín y restricciones afines, de modo que cae íntegramente en el caso recién demostrado: sus óptimos son siempre puntos KKT, sin hipótesis, sin cualificaciones y sin cúspides posibles. Por eso la teoría de la dualidad lineal pudo construirse sin mencionar nada de esto.

Y más todavía: se verá en la sección 7.3.4 que al escribir las condiciones KKT de un problema lineal salen, una por una, las tres piezas del capítulo 4: la factibilidad del dual, la holgura complementaria y el signo de las variables duales. La teoría de esta sección no es una generalización lejana de aquella: es la misma, escrita para funciones que se curvan.

7.1.7 Suficiencia en el caso convexo

Todo lo anterior son condiciones *necesarias*: sirven para descartar candidatos, no para certificar un óptimo. Un punto KKT puede ser un mínimo, un máximo o ninguna de las dos cosas, igual que un punto con gradiente nulo en el capítulo 6. Bajo convexidad, en cambio, la implicación se da la vuelta y KKT pasa a ser un certificado completo.

Teorema (suficiencia de KKT en problemas convexos)**.** Considere el problema

$$\text{Minimizar } f(x) \quad \text{sujeto a:} \quad g_i(x) \le 0 \ (i = 1, \dots, l), \quad h_j(x) = 0 \ (j = 1, \dots, m), \quad x \in S,$$

con S abierto y convexo, f convexa y diferenciable, cada g_i convexa y diferenciable, y cada h_j afín. Si $\hat{x}$ es un punto KKT, entonces $\hat{x}$ es un **mínimo global** del problema.

LA IDEA: LA FUNCIÓN LAGRANGIANA ES CONVEXA, Y SU GRADIENTE SE ANULA

La demostración que sigue son cuatro líneas de álgebra, pero conviene ver antes de qué va, porque así se recuerda sin memorizarla.
Considere la función

$$L(x) = f(x) + \sum_i u_i \, g_i(x) + \sum_j v_j \, h_j(x)$$

con los multiplicadores del punto KKT *fijos*. Esa función es convexa: es f, convexa, más una combinación de funciones convexas con coeficientes $u_i \ge 0$, que conserva la convexidad, más funciones afines, que son a la vez convexas y cóncavas y no la estropean. Aquí se ve para qué sirve exactamente el signo $u_i \ge 0$: si algún u_i fuera negativo, el sumando $u_i g_i$ sería cóncavo y L podría dejar de ser convexa. La condición de signo no es una convención de escritura, es lo que sostiene este teorema.
La estacionariedad de KKT dice precisamente que $\nabla L(\hat{x}) = 0$. Y para una función convexa diferenciable, un punto con gradiente nulo es mínimo global, resultado del capítulo 6. Así que $\hat{x}$ minimiza L sobre todo S, sin restricciones ningunas.
Falta el último eslabón, y es el que usa la holgura complementaria: sobre los puntos factibles, L es *menor o igual* que f, porque $u_i g_i(x) \le 0$ y $v_j h_j(x) = 0$; y en el propio $\hat{x}$, L vale *exactamente* $f(\hat{x})$, porque $u_i g_i(\hat{x}) = 0$. De modo que $f(\hat{x}) = L(\hat{x}) \le L(x) \le f(x)$ para todo x factible. Toda la demostración es comprobar esa cadena.

Sea $x \in X$ un punto factible cualquiera. Se define, con los multiplicadores $u \ge 0$ y v que proporciona la condición KKT en $\hat{x}$,

$$L(y) = f(y) + \sum_{i=1}^{l} u_i \, g_i(y) + \sum_{j=1}^{m} v_j \, h_j(y), \qquad y \in S.$$

Paso 1: L es convexa. La suma de funciones convexas es convexa; multiplicar una función convexa por un escalar no negativo la deja convexa; y una función afín es convexa. Como f es convexa, cada g_i es convexa con $u_i \geq 0$ y cada h_j es afín, L es convexa en S.
Paso 2: $\hat{x}$ minimiza L globalmente (el núcleo). La condición de estacionariedad de KKT es exactamente $\nabla L(\hat{x}) = 0$. Por el teorema del capítulo 6 que dice que en una función convexa diferenciable todo punto de gradiente nulo es mínimo global, se tiene $L(\hat{x}) \leq L(y)$ para todo $y \in S$. En particular $L(\hat{x}) \leq L(x)$.
Paso 3: en $\hat{x}$, la lagrangiana vale lo que el objetivo. Por la holgura complementaria, $u_i\, g_i(\hat{x}) = 0$ para todo i; y por factibilidad, $h_j(\hat{x}) = 0$. Luego

$$L(\hat{x}) = f(\hat{x}) + 0 + 0 = f(\hat{x}).$$

Paso 4: en cualquier punto factible, la lagrangiana no pasa del objetivo. Como x es factible, $g_i(x) \leq 0$ y $u_i \geq 0$, de modo que $u_i\, g_i(x) \leq 0$; y $h_j(x) = 0$, de modo que $v_j\, h_j(x) = 0$. Luego

$$L(x) = f(x) + \sum_i u_i g_i(x) + \sum_j v_j h_j(x) \;\leq\; f(x).$$

Paso 5: encadenar. Uniendo los tres últimos pasos,

$$f(\hat{x}) \overset{(3)}{=} L(\hat{x}) \overset{(2)}{\leq} L(x) \overset{(4)}{\leq} f(x).$$

Como x era un punto factible arbitrario, $\hat{x}$ es mínimo global.

Para reconstruirlo. Tres ideas y en este orden. Con los multiplicadores fijos, la lagrangiana es convexa gracias a que $u \geq 0$. KKT dice que su gradiente se anula en $\hat{x}$, luego $\hat{x}$ la minimiza en todo S. Y la lagrangiana coincide con f en $\hat{x}$ y queda por debajo de f en todo punto factible, lo que convierte «mínimo de L sin restricciones» en «mínimo de f con restricciones».

Ejemplo (KKT resuelto entero, con comprobación)**.**

$$\text{Minimizar } f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \quad \text{sujeto a:} \quad \begin{aligned} g_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 - 5 \leq 0 \\ g_2(x) &= x_1 + 2x_2 - 4 \leq 0 \\ g_3(x) &= -x_1 \leq 0, \quad g_4(x) = -x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

El problema es convexo, y conviene decirlo antes de calcular nada, porque es lo que convertirá el candidato en solución: f es una suma de cuadrados de funciones afines, luego convexa; g_1 es $x_1^2 + x_2^2$ menos una constante, luego convexa; g_2, g_3 y g_4 son afines. Además cumple Slater, porque el punto $\bar{x} = (1/2, 1/2)$ da $g_1 = -4{,}5 < 0$, $g_2 = -2{,}5 < 0$, $g_3 = g_4 = -1/2 < 0$. Así que KKT será necesaria y suficiente a la vez.

Los gradientes.

$$\nabla f(x) = \big(2(x_1 - 3),\, 2(x_2 - 2)\big)^T, \qquad \nabla g_1(x) = (2x_1,\, 2x_2)^T,$$

$$\nabla g_2 = (1, 2)^T, \qquad \nabla g_3 = (-1, 0)^T, \qquad \nabla g_4 = (0, -1)^T.$$

El árbol de casos, podado. El mínimo sin restricciones de f es $(3, 2)$, que no es factible ($9 + 4 = 13 > 5$), así que alguna restricción estará activa. Se prueba con $I = \{1, 2\}$, es decir,

con las dos primeras activas y $u_3 = u_4 = 0$. Las dos ecuaciones $g_1 = g_2 = 0$ son

$$x_1^2 + x_2^2 = 5, \qquad x_1 + 2x_2 = 4,$$

que sustituyendo $x_1 = 4 - 2x_2$ dan $(4 - 2x_2)^2 + x_2^2 = 5$, es decir $5x_2^2 - 16x_2 + 11 = 0$, con raíces $x_2 = 1$ y $x_2 = 11/5$. La primera da $x_1 = 2$ y la segunda $x_1 = 4 - 22/5 = -2/5 < 0$, que incumple $g_3 \leq 0$. Queda el candidato $\hat{x} = (2, 1)$.

Los multiplicadores. En $\hat{x} = (2, 1)$: $\nabla f = (-2, -2)^T$, $\nabla g_1 = (4, 2)^T$, $\nabla g_2 = (1, 2)^T$. La estacionariedad es

$$(-2, -2)^T + u_1(4, 2)^T + u_2(1, 2)^T = (0, 0)^T \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 4u_1 + u_2 = 2 \\ 2u_1 + 2u_2 = 2. \end{cases}$$

De la segunda, $u_1 + u_2 = 1$, luego $u_2 = 1 - u_1$; sustituyendo en la primera, $4u_1 + 1 - u_1 = 2$, es decir $3u_1 = 1$. Sale

$$u_1 = \tfrac{1}{3}, \qquad u_2 = \tfrac{2}{3},$$

los dos positivos. Los cuatro requisitos se cumplen: factibilidad ($g_1 = g_2 = 0$, $g_3 = -2 < 0$, $g_4 = -1 < 0$), signo ($u \geq 0$), holgura complementaria ($u_3 = u_4 = 0$ con $g_3, g_4 < 0$) y estacionariedad.

Conclusión. Por el teorema de la p. 394, $\hat{x} = (2, 1)$ es el mínimo global, con $f(\hat{x}) = 1 + 1 = 2$.

Comprobación. Sustituyendo los multiplicadores en la estacionariedad, $(-2, -2) + \frac{1}{3}(4, 2) + \frac{2}{3}(1, 2) = (0, 0)$. La factibilidad y la holgura se han comprobado arriba; junto con la convexidad, estas igualdades certifican el resultado.

Observación (por qué se ha podado, y cómo se podría no podar)**.** En el ejemplo se ha probado directamente con $I = \{1, 2\}$ y ha salido bien, pero conviene ver que el método completo es enumerar. Con cuatro restricciones hay $2^4 = 16$ combinaciones de activas e inactivas, y en cada una se resuelve un sistema. La poda que se ha hecho tiene dos argumentos, y los dos son honestos:

1. Si ninguna estuviera activa, todos los u_i serían cero y quedaría $\nabla f(\hat{x}) = 0$, cuya única solución es $(3, 2)$, que no es factible. Descartado el caso $I = \emptyset$.
2. Si estuviera activa alguna de no negatividad, el punto tendría una coordenada nula. Con $x_1 = 0$ la función vale al menos 9 y con $x_2 = 0$ al menos 4; como ya se conoce un punto factible con valor 2, ninguno de esos casos puede dar el mínimo. Descartadas g_3 y g_4.

Lo que queda son cuatro casos con $I \subseteq \{1, 2\}$, y el vacío ya se ha descartado. Los dos casos con una sola activa se descartan comprobando que sus soluciones no son factibles, y queda el que se ha resuelto.

Las dos ramas de una sola activa, con los números puestos. Merece la pena hacerlas, porque en ellas aparecen los dos filtros que todo candidato tiene que pasar: el signo del multiplicador y la factibilidad de las restricciones que se han dado por inactivas.

Rama $I = \{1\}$: solo el círculo activo. La estacionariedad es $2(x_1 - 3,\ x_2 - 2) + 2u_1(x_1, x_2) = 0$, es decir $x = (3, 2)/(1 + u_1)$: el candidato está sobre la recta que une el origen con $(3, 2)$. Imponiendo $x_1^2 + x_2^2 = 5$ sale $(1 + u_1)^2 = 13/5$, con dos raíces. La de signo menos, $u_1 = -\sqrt{13/5} - 1 \approx -2{,}61$, da el punto opuesto del círculo, el más alejado de $(3, 2)$, que es el máximo de f sobre la circunferencia: el signo lo descarta sin más cuentas. La de signo más, $u_1 = \sqrt{13/5} - 1 \approx 0{,}61 \geq 0$, da $x = (3, 2)\sqrt{5/13} \approx (1{,}861;\ 1{,}240)$, que tiene el signo bien.

Pero $x_1 + 2x_2 - 4 \approx 0{,}341 > 0$: incumple la segunda restricción, que se había supuesto inactiva. Rama descartada por *factibilidad*.

Rama $I = \{2\}$: solo la recta activa. La estacionariedad da $x_1 = 3 - u_2/2$ y $x_2 = 2 - u_2$, y la recta $x_1 + 2x_2 = 4$ obliga a $7 - \frac{5}{2}u_2 = 4$, es decir $u_2 = \frac{6}{5} \geq 0$ y $x = (\frac{12}{5}, \frac{4}{5})$, que es la proyección de $(3, 2)$ sobre la recta. El signo está bien; pero $x_1^2 + x_2^2 = \frac{144+16}{25} = 6{,}4 > 5$: se sale del círculo. Rama descartada, otra vez por *factibilidad*.

Las dos ramas fallan del mismo modo: su candidato se sale por la restricción que se había dado por inactiva. Eso es la señal de que el óptimo necesita las dos a la vez, que es la rama que se resolvió.

El método en pasos para resolver un sistema KKT a mano. Lo que se ha hecho en el ejemplo se repite, con las mismas decisiones, en cualquier problema pequeño.

1. *Forma y tabla.* Pasar el problema a la forma (P) y escribir la lista de gradientes, como en la sección 7.1.1.
2. *Decidir antes de calcular qué va a significar un punto KKT.* Si f y las g_i son convexas y las h_j afines, KKT será *suficiente*: el primer punto KKT que aparezca es un mínimo global. Si hay una cualificación (restricciones afines, Slater o independencia lineal), KKT será *necesaria*: si el mínimo existe, está entre los puntos KKT. Sin convexidad, un punto KKT es solo un candidato; y sin cualificación, el mínimo podría no ser punto KKT, como en la cúspide, y hay que mirar aparte los puntos donde la cualificación falla.
3. *Probar primero la rama vacía.* Resolver $\nabla f = 0$ (con las igualdades, si las hay). Si el resultado es factible y el problema es convexo, se ha terminado.
4. *Recorrer las ramas.* Cada rama fija un conjunto I de desigualdades activas y resuelve a la vez la estacionariedad, las ecuaciones $g_i = 0$ con $i \in I$ y las $h_j = 0$, con $u_i = 0$ para $i \notin I$. Se empieza por las más plausibles: las restricciones que separan el mínimo libre del conjunto factible.
5. *Pasar dos filtros a cada solución.* (a) Las desigualdades supuestas inactivas se cumplen: $g_i(x) \leq 0$ para $i \notin I$. (b) Los multiplicadores de las activas son no negativos: $u_i \geq 0$ para $i \in I$. Si falla (a), a la rama le falta alguna activa. Si falla (b), le sobra una: la de multiplicador negativo estorba en vez de sujetar. Si pasa los dos, es un punto KKT.
6. *Podar sin resolver* cuando se pueda: una rama cuyo mejor valor posible ya es peor que el de un punto factible conocido (como las de $x_1 = 0$ o $x_2 = 0$ en el ejemplo) no puede contener el mínimo.
7. *Concluir.* En el caso convexo, el punto KKT es el mínimo global. En el no convexo, se reúnen todos los candidatos, se decide cuáles son mínimos locales con las condiciones de segundo orden (sección 7.1.10) y, si el conjunto factible es compacto, el mínimo global es el candidato de menor valor.

Dónde se falla.

- *Aceptar un multiplicador negativo.* La raíz $u_1 \approx -2{,}61$ de la rama $I = \{1\}$ resuelve la estacionariedad y la ecuación del círculo, y apunta al máximo de f sobre la circunferencia. Solo el signo la distingue del mínimo.
- *No comprobar las inactivas.* El punto $(\frac{12}{5}, \frac{4}{5})$ tiene $u_2 > 0$ y todo parece en orden hasta que se evalúa el círculo. Un candidato no es punto KKT hasta que se ha comprobado que es factible.

- *Concluir «mínimo global» sin convexidad.* Fuera del caso convexo, un punto KKT puede ser un máximo o una silla, igual que un punto crítico del capítulo 6.
- *Parar en la primera rama que funciona sin ser convexo el problema.* Otra rama puede dar otro punto KKT de valor menor; hay que recorrerlas todas o podarlas con un argumento.
- *Dividir en vez de factorizar.* De $x_1(1-4v^2)=0$ salen dos ramas, $x_1=0$ y $v=\pm\frac{1}{2}$; dividir por x_1 pierde la primera sin haberla mirado.
- *Olvidar la cualificación.* Si en el óptimo los gradientes activos son dependientes, el sistema puede no tener solución aunque el punto sea el mínimo. En la cúspide del ejemplo de la p. 388, buscar solo puntos KKT pierde el óptimo.

7.1.8 Holgura complementaria, y lo que vale un recurso que sobra

La condición $u_i\, g_i(\hat{x})=0$ es la que menos parece decir y la que más significa. Su lectura, en una frase: **un recurso que sobra no tiene precio**.

Para verlo hace falta saber qué es u_i más allá de un número que aparece al resolver un sistema. La respuesta es la misma del capítulo 4: es la derivada del valor óptimo respecto del término independiente de la restricción, cuando se cumplen las hipótesis de sensibilidad que siguen.

Teorema (el multiplicador es un precio sombra)**.** Considere la familia de problemas

$$(\mathrm{P}_\epsilon)\qquad \text{Minimizar } f(x) \quad \text{sujeto a:} \quad g_i(x)\le \epsilon_i \ (i=1,\dots,l),$$

y sea $\phi(\epsilon)=\mathrm{Min}\{f(x): g_i(x)\le\epsilon_i\}$ su valor óptimo, la **función valor** o de perturbación. Sea $\hat{x}$ una **solución óptima** del problema no perturbado, con multiplicadores KKT u, y suponga que ϕ es diferenciable en $\epsilon=0$. Suponga además que existe una rama diferenciable $x(\epsilon)$ de soluciones óptimas de (P_ϵ), con $x(0)=\hat{x}$, sin que cambie el conjunto de restricciones activas, y que f y las g_i son diferenciables en $\hat{x}$. Entonces

$$\frac{\partial\phi}{\partial\epsilon_i}(0)=-u_i,\qquad i=1,\dots,l.$$

Observación (por qué la hipótesis dice «solución óptima» y no «punto KKT»)**.** Es una precisión que parece de letra pequeña y no lo es. Si en el enunciado se pusiera *punto KKT* en vez de *solución óptima*, el teorema sería falso, y el contraejemplo cabe en una línea. Tome

$$\text{Minimizar } -x^2 \quad \text{sujeto a:} \quad g(x)=x^2-1\le 0,\qquad x\in\mathbb{R}.$$

La función valor es $\phi(\epsilon)=-(1+\epsilon)$, de modo que $\phi'(0)=-1$. Los puntos que cumplen KKT son tres: $x=\pm1$ con $u=1$, que son los dos mínimos globales y dan $-u=-1=\phi'(0)$, correcto; y $\hat{x}=0$, donde $\nabla f(0)=0$ y la restricción está inactiva, de modo que $u=0$ cumple las cuatro condiciones. Ese tercer punto es KKT y da $-u=0\neq-1$.

La razón es que ϕ tiene *una* derivada mientras que un problema no convexo puede tener *varios* puntos KKT con multiplicadores distintos; solo el que de verdad realiza el mínimo puede leer la sensibilidad del valor óptimo. Por eso la demostración escribe $\phi(\epsilon)=f(x(\epsilon))$ con $x(\epsilon)$ *solución* de (P_ϵ), y no bastaría con una rama cualquiera de puntos estacionarios.

La otra hipótesis, la de que el conjunto activo no cambie, es la que sostiene el paso 3, y en la práctica se garantiza localmente, para datos de clase $\mathcal{C}^2$, con independencia lineal, las condiciones suficientes de segundo orden estrictas y la **holgura complementaria estricta**: que toda restricción activa tenga $u_i>0$. Sin ella, una restricción activa con multiplicador nulo puede soltarse al perturbar y la igualdad $g_k(x(\epsilon))=\epsilon_k$ deja de valer.

LA IDEA: POR QUÉ EL SIGNO ES EL QUE ES, Y QUÉ CUESTA CADA UNIDAD

Aflojar la restricción i significa aumentar ϵ_i, es decir, permitir más. Como se está minimizando, permitir más nunca puede empeorar: el conjunto factible crece y el mínimo solo puede bajar o quedarse igual. Por eso la derivada de ϕ es ≤ 0 y el multiplicador, que es su opuesto, es ≥ 0. La condición de signo de KKT, que hasta ahora se había justificado con la imagen de la pared que solo empuja, tiene aquí su segunda lectura: es la traducción de que relajar una restricción no puede perjudicar.
Y la magnitud dice cuánto se gana: u_i es lo que baja el coste óptimo por cada unidad que se afloje la restricción i. Es exactamente el precio sombra del capítulo 4, con la diferencia de que aquí la relación es local, válida para perturbaciones pequeñas, porque la función valor de un problema no lineal no tiene por qué ser lineal a trozos como en el caso lineal.
Ahora la holgura complementaria se lee sola. Si la restricción i no está activa, hay holgura: el óptimo no la está tocando. Entonces $u_i = 0$ y, bajo las hipótesis del teorema, $\partial\phi/\partial\epsilon_i = 0$: no hay mejora de primer orden al relajarla. Esta afirmación no supone que toda perturbación conserve el mismo óptimo. Un almacén de 100 toneladas del que se usan 60 vale, en el margen, cero: la tonelada ciento uno no se pagaría.

Esquema, con la hipótesis de diferenciabilidad de la función valor.
La demostración completa requiere condiciones que garanticen que la solución óptima $x(\epsilon)$ y los multiplicadores $u(\epsilon)$ dependen de forma diferenciable de ϵ. Una rama local se obtiene, para datos de clase $\mathcal{C}^2$, del **teorema de la función implícita** aplicado al sistema KKT bajo independencia lineal, holgura complementaria estricta y condiciones de segundo orden estrictas. El enunciado de ese teorema, con la fórmula de la derivada de la función implícita, está en el apéndice F: dice que si $F(x, \epsilon) = 0$ con F de clase $\mathcal{C}^1$ y la jacobiana $D_x F$ es invertible en el punto, entonces x se despeja localmente como función $\mathcal{C}^1$ de ϵ. Aquí F es el propio sistema KKT y la invertibilidad de $D_x F$ es exactamente lo que dan esas tres hipótesis. Admitida esa dependencia diferenciable, y suponiendo que la rama realiza el valor óptimo ϕ, el cálculo es corto y se da entero. La función implícita garantiza una rama local; su optimalidad global es una hipótesis adicional del enunciado.
Paso 1: escribir el valor óptimo. $\phi(\epsilon) = f(x(\epsilon))$, con $x(\epsilon)$ solución de (P_ϵ). Derivando por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_i}(0) = \nabla f(\hat{x})^T \frac{\partial x}{\partial \epsilon_i}(0).$$

Paso 2: sustituir el gradiente usando KKT (el núcleo). Por estacionariedad, $\nabla f(\hat{x}) = -\sum_k u_k \nabla g_k(\hat{x})$. Sustituyendo,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_i}(0) = -\sum_k u_k \, \nabla g_k(\hat{x})^T \frac{\partial x}{\partial \epsilon_i}(0).$$

Paso 3: derivar las restricciones activas. Para las restricciones activas la igualdad $g_k(x(\epsilon)) = \epsilon_k$ se mantiene en un entorno de $\epsilon = 0$; derivando respecto de ϵ_i,

$$\nabla g_k(\hat{x})^T \frac{\partial x}{\partial \epsilon_i}(0) = \delta_{ki},$$

donde δ_{ki} vale 1 si $k = i$ y 0 en otro caso. Para las inactivas, $u_k = 0$ y el sumando desaparece. Sustituyendo en el paso 2 queda un único sumando superviviente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_i}(0) = -u_i.$$

Para reconstruirla. El valor óptimo es f evaluada en la solución que se mueve, y se deriva por la regla de la cadena. KKT permite cambiar ∇f por $-\sum u_k \nabla g_k$, y cada producto $\nabla g_k^T \, \partial x / \partial \epsilon_i$ mide cuánto se mueve la restricción k cuando se afloja la i: nada si $k \neq i$ y una unidad si $k = i$, porque las activas siguen activas y la i vale exactamente ϵ_i. De la suma solo sobrevive $-u_i$. Las hipótesis técnicas están para dos cosas: que la solución se mueva de forma derivable, y que el conjunto activo no cambie mientras se mueve.

Ejemplo (el precio sombra, calculado de las dos maneras)**.**

$$\text{Minimizar } x_1^2 + x_2^2 \quad \text{sujeto a:} \quad x_1 + x_2 \geq 4, \qquad x_1 \leq 5.$$

Escrito en la forma estándar: $g_1(x) = 4 - x_1 - x_2 \leq 0$ y $g_2(x) = x_1 - 5 \leq 0$.

Por KKT. El origen, mínimo sin restricciones, incumple g_1. Probemos con g_1 activa y $u_2 = 0$; al final comprobaremos todas las condiciones:

$$(2x_1,\, 2x_2)^T + u_1(-1,-1)^T = (0,0)^T \quad \Longrightarrow \quad 2x_1 = u_1, \quad 2x_2 = u_1 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2 = \tfrac{u_1}{2}.$$

Imponiendo $g_1 = 0$, es decir $x_1 + x_2 = 4$, sale $u_1 = 4$ y $\hat{x} = (2,2)$, con valor $f(\hat{x}) = 8$. La segunda restricción da $g_2(\hat{x}) = 2 - 5 = -3 < 0$, inactiva, consistente con $u_2 = 0$. Y el problema es convexo, luego $\hat{x}$ es el mínimo global.

Por la función valor. Con el término independiente genérico, $x_1 + x_2 \geq b$, la misma cuenta da, para $0 < b < 10$, $\hat{x} = (b/2, b/2)$ y

$$\phi(b) = 2\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{2}, \qquad \text{luego} \qquad \phi'(b) = b, \qquad \phi'(4) = 4 = u_1.$$

(El signo cuadra: aquí se ha derivado respecto de b, y aumentar b es *apretar* la restricción $x_1 + x_2 \geq b$, no aflojarla, de modo que la derivada sale con el signo opuesto al del teorema, que estaba escrito para $g_i \leq \epsilon_i$.)

Comprobación. Con $b = 4$, $\phi = 8$; con $b = 4{,}1$, $\phi = 8{,}405$. El cociente incremental es 4,05, cercano a $\phi'(4) = 4$. Para cualquier incremento t suficientemente pequeño, $\phi(4+t) - \phi(4) = 4t + t^2/2$: el multiplicador da el término de primer orden.

Ejemplo (la lectura económica, con presupuesto)**.** Un consumidor reparte un presupuesto $B = 6$ entre dos bienes de precios 1 y 2, y su satisfacción es $\ln x_1 + 2 \ln x_2$. El problema, escrito como minimización:

$$\text{Minimizar } -\ln x_1 - 2\ln x_2 \quad \text{sujeto a:} \quad x_1 + 2x_2 - 6 \leq 0, \quad x_1 > 0,\ x_2 > 0.$$

Estacionariedad: $(-1/x_1,\, -2/x_2)^T + u(1,2)^T = (0,0)^T$, es decir $u = 1/x_1$ y $2u = 2/x_2$, o sea $x_1 = 1/u$ y $x_2 = 1/u$. Sustituyendo en la restricción activa, $1/u + 2/u = 6$, luego $u = 1/2$ y $\hat{x} = (2,2)$, con satisfacción $3\ln 2 \approx 2{,}0794$ (el objetivo minimizado vale $-3\ln 2$). La convexidad del objetivo y de las restricciones certifica el óptimo.

El multiplicador $u = 1/2$ dice cuánta satisfacción adicional se obtendría por cada euro más de presupuesto. Comprobado numéricamente: con $B = 5{,}99$ el valor óptimo es 2,074437370377746 y con $B = 6{,}01$ es 2,08443737963702; la diferencia dividida entre 0,02 da 0,5000004629637012.

Y la restricción está activa, con multiplicador estrictamente positivo, porque el presupuesto se gasta entero: con una función creciente en las dos variables, guardar dinero sin gastar siempre es peor. Esa es la lectura del signo estricto: la restricción no solo se toca, sino que aprieta de verdad.

7.1.9 Restricciones de igualdad: los multiplicadores de Lagrange clásicos

Cuando el problema tiene solo igualdades, las condiciones KKT se reducen a lo que en cálculo de varias variables se llama el método de los multiplicadores de Lagrange. Merece la pena escribirlo aparte porque es la forma en que aparece con más frecuencia y porque el signo libre de los v_j simplifica mucho las cuentas.

Corolario (multiplicadores de Lagrange)**.** Sea $\hat{x}$ un mínimo local de $\operatorname{Min}\{f(x) : h_j(x) = 0,\ j = 1, \dots, m\}$, con f y las h_j de clase $\mathcal{C}^1$, y suponga que los gradientes $\nabla h_1(\hat{x}), \dots, \nabla h_m(\hat{x})$ son linealmente independientes. Entonces existen $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}$, únicos, con

$$\nabla f(\hat{x}) + \sum_{j=1}^{m} v_j \nabla h_j(\hat{x}) = 0.$$

La unicidad sale de la independencia lineal: si dos vectores de multiplicadores dieran la misma combinación, su diferencia daría una combinación nula de vectores independientes, luego sería nula.

La idea: el gradiente perpendicular a la superficie

Con una sola restricción la condición dice $\nabla f(\hat{x}) = -v\,\nabla h(\hat{x})$: los dos gradientes son paralelos. Y eso tiene una lectura geométrica exacta.
El conjunto $\{h(x) = 0\}$ es una superficie de nivel de h, y $\nabla h(\hat{x})$ es perpendicular a ella en $\hat{x}$. Moverse dentro de la superficie significa moverse en direcciones d del plano tangente, es decir, con $\nabla h(\hat{x})^T d = 0$. La variación de f al moverse así es $\nabla f(\hat{x})^T d$. Que $\hat{x}$ sea óptimo obliga a que esa variación sea nula en todas las direcciones tangentes —si fuera positiva en una, sería negativa en la opuesta, que también es tangente —, y una forma lineal que se anula en todo el plano tangente tiene que ser proporcional a la normal. De ahí el paralelismo.
La imagen habitual, y es buena: las curvas de nivel de f y la superficie de restricción son tangentes en el óptimo. Si se cortaran transversalmente, uno podría deslizarse a lo largo de la restricción hacia niveles más bajos de f.

Conexión: ligaduras y trabajo virtual en mecánica

La condición de Lagrange puede reconstruirse con la misma idea que elimina las reacciones de una ligadura ideal. Sea $M = \{x : h_1(x) = \cdots = h_m(x) = 0\}$ y supongamos que los gradientes de las restricciones son independientes en $\hat{x}$. Una variación admisible $x(\varepsilon) \in M$ satisface, al derivar las ligaduras,

$$\nabla h_j(\hat{x})^T d = 0, \qquad d = x'(0).$$

El teorema de la función implícita asegura la recíproca local: cada vector de ese núcleo es velocidad de una curva admisible. Así no se confunde una dirección tangente con un segmento recto que permanezca sobre una restricción curva.
En un extremo de $f|_M$, la primera variación $\frac{d}{d\varepsilon} f(x(\varepsilon))|_0 = \nabla f(\hat{x})^T d$ se anula para todos esos vectores. Por álgebra lineal, el ortogonal del núcleo del jacobiano es el espacio generado por sus filas: ∇f es combinación de las normales. Eso produce los multiplicadores, con la convención del libro, $\nabla f + \sum_j v_j \nabla h_j = 0$.
Si $f = V$ es energía potencial, la fuerza aplicada es $F = -\nabla V$ y, en equilibrio, la reacción es $R = \nabla V = -\sum_j v_j \nabla h_j$. Su trabajo virtual es cero: $R^T d = 0$ para toda variación admisible. Los multiplicadores dan los coeficientes de la reacción en las normales elegidas; no son necesariamente sus módulos, pues los gradientes pueden no ser unitarios.
Esta es una condición de equilibrio, no todavía de estabilidad o de mínimo. El péndulo vertical hacia abajo y el invertido están ambos en equilibrio; distinguirlos requiere estudiar variaciones de segundo orden. Tampoco se identifica la función lagrangiana de optimización $f + \sum_j v_j h_j$ con el lagrangiano mecánico $T - V$: la primera impone restricciones a un problema estático, mientras que el segundo entra en una acción cuyas variables son trayectorias.

Conexión: la desigualdad entre las medias, demostrada con multiplicadores

Un caso donde este corolario hace un trabajo que parece de otra rama. Considere

$$\text{Minimizar } \sum_{k=1}^{n} x_k \quad \text{sujeto a:} \quad \prod_{k=1}^{n} x_k = 1, \qquad x_k > 0.$$

Los gradientes son $\nabla f = (1, \dots, 1)^T$ y $\partial h/\partial x_k = \prod_{i \neq k} x_i = 1/x_k$ en los puntos factibles, donde el producto vale 1. La condición de Lagrange da $1 + v/x_k = 0$ para todo k, luego $x_k = -v$ para todo k: todas las coordenadas son iguales. Como el producto vale 1 y son positivas, $x_k = 1$ para todo k, y el mínimo vale n.
Traducido: para todo $x > 0$ con $\prod x_k = 1$ se tiene $\sum x_k \geq n$. Y aplicando eso a $x_k = a_k / \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$, cuyo producto vale 1, sale

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \;\geq\; \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n},$$

que es la desigualdad entre la media aritmética y la geométrica. Un teorema que suele demostrarse por inducción o por concavidad del logaritmo sale aquí como subproducto de un problema de optimización con una restricción.
Queda un cabo suelto que hay que atar y que se atará en el ejercicio sobre la desigualdad de las medias (p. 445): los multiplicadores dan un candidato, no una demostración de que el mínimo existe. Hay que comprobar por separado que el mínimo se alcanza, y eso se hace con el teorema de Weierstrass sobre un compacto bien elegido.

7.1.10 Condiciones de segundo orden sobre el cono crítico

Igual que en el capítulo 6 el gradiente nulo no distinguía un mínimo de un máximo o de una silla, aquí un punto KKT puede ser cualquier cosa cuando el problema no es convexo. Lo que falta es la curvatura. Y hay dos ajustes respecto del caso sin restricciones, los dos importantes:

1. La curvatura que hay que mirar no es la de f sino la de la **función lagrangiana**, porque las restricciones curvadas contribuyen a la forma del problema.
2. No hay que mirarla en todas las direcciones, sino en las que **respetan la linealización de las restricciones y no aumentan el objetivo a primer orden**.

Definición. Sea $\hat{x}$ un punto KKT con multiplicadores u, v. La **función lagrangiana** del problema es

$$L(x, u, v) = f(x) + \sum_{i=1}^{l} u_i\, g_i(x) + \sum_{j=1}^{m} v_j\, h_j(x),$$

y su hessiana respecto de x, evaluada en el punto y con los multiplicadores fijos, es

$$\nabla^2_{xx} L(\hat{x}, u, v) = \nabla^2 f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{l} u_i\, \nabla^2 g_i(\hat{x}) + \sum_{j=1}^{m} v_j\, \nabla^2 h_j(\hat{x}).$$

El **cono crítico** en $\hat{x}$ es

$$C(\hat{x}) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{rl} \nabla h_j(\hat{x})^T d = 0 & \text{para todo } j, \\ \nabla g_i(\hat{x})^T d = 0 & \text{para todo } i \in I(\hat{x}) \text{ con } u_i > 0, \\ \nabla g_i(\hat{x})^T d \le 0 & \text{para todo } i \in I(\hat{x}) \text{ con } u_i = 0 \end{array} \right\}.$$

LA IDEA: POR QUÉ LA HESSIANA DE L Y NO LA DE f, Y POR QUÉ SOLO EN EL CONO

Dos preguntas, dos respuestas.

Por qué L. Imagine que se camina por una restricción curva, por ejemplo por una circunferencia. Aunque la función objetivo fuera lineal, al recorrer la circunferencia el valor de f subiría y bajaría, porque el camino se curva bajo los pies. La segunda derivada del valor de f a lo largo del camino recoge dos efectos: la curvatura de f y la curvatura del camino. El primero está en $\nabla^2 f$; el segundo, en los $\nabla^2 g_i$ y $\nabla^2 h_j$, y aparece pesado por los multiplicadores, que miden cuánto empuja cada restricción. La combinación de los dos es exactamente $\nabla^2_{xx} L$. Mirar solo $\nabla^2 f$ es olvidarse de que el suelo por el que se camina no es plano.

Por qué solo en el cono crítico. Porque las direcciones que salen del conjunto factible no cuentan. Que f suba o baje en una dirección prohibida es irrelevante. El cono crítico es justamente el conjunto de direcciones donde la información de primer orden *no decide*: las direcciones tangentes a las igualdades y a las desigualdades activas que aprietan de verdad ($u_i > 0$), y las que respetan a primer orden las activas con multiplicador nulo, incluso entrando hacia su lado interior. En ellas $\nabla f(\hat{x})^T d = 0$: el objetivo no cambia a primer orden. El gradiente de L, en cambio, se anula en todas las direcciones por KKT. El cono es un modelo de primer orden; un segmento recto en una dirección suya no tiene por qué ser factible si las restricciones se curvan. Las demás ya están decididas: en ellas f crece a primer orden o la dirección no es factible.

La consecuencia práctica es que $\nabla^2_{xx} L(\hat{x})$ **no tiene por qué ser semidefinida positiva**

en todo el espacio para que $\hat{x}$ sea mínimo. La condición necesaria se exige solo sobre el cono; la positividad estricta en sus direcciones no nulas dará una condición suficiente. El ejemplo de la p. 406 muestra un mínimo estricto donde la hessiana de la lagrangiana tiene un autovalor nulo y otro positivo, y donde además la hessiana de f sola es indefinida y no dice nada.

Teorema (condición necesaria de segundo orden)**.** Sea $\hat{x}$ un mínimo local de (P) en el que se cumple la cualificación de independencia lineal, con f, g_i y h_j de clase $\mathcal{C}^2$, y sean u, v sus multiplicadores. Entonces

$$d^T \nabla^2_{xx} L(\hat{x}, u, v)\, d \;\geq\; 0 \qquad \text{para todo } d \in C(\hat{x}).$$

La idea. Es la condición necesaria de segundo orden del capítulo 6, aplicada a una función de una sola variable. Se fabrica una curva factible $x(t)$ que sale de $\hat{x}$ con velocidad d y se mira $t \mapsto f(x(t))$, que tiene un mínimo en $t = 0$ por la derecha. A lo largo de esa curva f coincide con L, y el gradiente de L se anula en $\hat{x}$; así que la primera derivada es cero y la segunda es $d^T \nabla^2_{xx} L\, d$, que no puede ser negativa.

Paso 1: una curva factible que sale en la dirección d. Sea $d \in C(\hat{x})$ no nulo. Tomemos las igualdades $h_j = 0$ y las restricciones activas para las que $\nabla g_i(\hat{x})^T d = 0$. Sus gradientes son independientes. Por la función implícita existe una curva $\mathcal{C}^2$, $x(t)$, que conserva esas igualdades y cumple $x(0) = \hat{x}$, $x'(0) = d$. Las demás restricciones activas tienen derivada estrictamente negativa; junto con la continuidad de las inactivas, esto hace factible la curva para $t > 0$ pequeño.
Paso 2: sobre la curva, f y L son la misma función (el núcleo). Toda restricción con multiplicador positivo se conserva con igualdad sobre la curva. Por tanto, $f(x(t)) = L(x(t), u, v)$, y KKT da

$$\left.\frac{d}{dt} f(x(t))\right|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{d^2}{dt^2} f(x(t))\right|_{t=0} = d^T \nabla^2_{xx} L(\hat{x}, u, v) d.$$

En la segunda derivada aparece también el término $\nabla_x L(\hat{x}, u, v)^T x''(0)$, que se anula porque el gradiente de L es cero: por eso no hace falta conocer la aceleración de la curva.
Paso 3: el signo. Como $f(x(t)) \geq f(\hat{x})$ para $t > 0$ pequeño, esa segunda derivada no puede ser negativa. Para $d = 0$ no hay nada que probar: la forma cuadrática vale 0.

Teorema (condición suficiente de segundo orden)**.** Sea $\hat{x}$ un punto KKT de (P) con multiplicadores u, v, con f, g_i y h_j de clase $\mathcal{C}^2$. Si

$$d^T \nabla^2_{xx} L(\hat{x}, u, v)\, d \;>\; 0 \qquad \text{para todo } d \in C(\hat{x}),\ d \neq 0,$$

entonces $\hat{x}$ es un mínimo local **estricto** de (P).

De la condición suficiente, con igualdades y desigualdades.
Paso 1: razonar por reducción al absurdo con una sucesión. Suponga que $\hat{x}$ no es mínimo local estricto. Entonces existe una sucesión de puntos factibles $x^k \to \hat{x}$ con $x^k \neq \hat{x}$ y

$f(x^k) \le f(\hat{x})$.
Paso 2: extraer una dirección límite por compacidad. Escriba $x^k = \hat{x} + \lambda_k d^k$ con $\lambda_k = \|x^k - \hat{x}\| > 0$ y $d^k = (x^k - \hat{x})/\lambda_k$, de modo que $\|d^k\| = 1$ y $\lambda_k \to 0$. La sucesión (d^k) vive en la esfera unidad, que es compacta, luego tiene una subsucesión convergente a un d con $\|d\| = 1$. Se trabaja con esa subsucesión y se sigue llamándola (d^k).
Paso 3: la dirección límite está en el cono crítico. Como $h_j(x^k) = 0 = h_j(\hat{x})$, el desarrollo de primer orden da

$$0 = h_j(\hat{x} + \lambda_k d^k) = \lambda_k \, \nabla h_j(\hat{x})^T d^k + o(\lambda_k),$$

y dividiendo por λ_k y pasando al límite, $\nabla h_j(\hat{x})^T d = 0$ para todo j. Para una desigualdad activa, el mismo argumento con $g_i(x^k) \le 0 = g_i(\hat{x})$ da $\nabla g_i(\hat{x})^T d \le 0$. Además, $f(x^k) \le f(\hat{x})$ implica $\nabla f(\hat{x})^T d \le 0$. Por KKT,

$$\nabla f(\hat{x})^T d = -\sum_{i \in I(\hat{x})} u_i \nabla g_i(\hat{x})^T d \ge 0.$$

La suma debe ser cero y cada sumando es no negativo. Por ello $\nabla g_i(\hat{x})^T d = 0$ siempre que $u_i > 0$. Luego $d \in C(\hat{x})$ y $d \neq 0$.
Paso 4: pasar de f a L (el núcleo de la prueba). En cualquier punto factible, $L(x, u, v) \le f(x)$, porque $u \ge 0$, $g(x) \le 0$ y $h(x) = 0$. En $\hat{x}$, la holgura complementaria da $L(\hat{x}, u, v) = f(\hat{x})$. Así,

$$L(x^k, u, v) \le f(x^k) \le f(\hat{x}) = L(\hat{x}, u, v).$$

Podemos desarrollar L a segundo orden: su gradiente se anula por KKT, mientras que el de f no tiene por qué anularse. Ese es el motivo de introducir la lagrangiana.
Paso 5: el desarrollo de segundo orden y la contradicción. Como $\nabla_x L(\hat{x}, u, v) = 0$,

$$L(\hat{x} + \lambda_k d^k, u, v) = L(\hat{x}, u, v) + \frac{\lambda_k^2}{2} \, (d^k)^T \nabla_{xx}^2 L(\hat{x}, u, v) \, d^k + o(\lambda_k^2).$$

De $L(x^k, u, v) \le L(\hat{x}, u, v)$ se sigue

$$\frac{\lambda_k^2}{2} \, (d^k)^T \nabla_{xx}^2 L(\hat{x}, u, v) \, d^k + o(\lambda_k^2) \;\le\; 0,$$

y dividiendo por $\lambda_k^2/2 > 0$ y pasando al límite, $d^T \nabla_{xx}^2 L(\hat{x}, u, v) \, d \le 0$. Pero $d \in C(\hat{x})$ y $d \neq 0$, de modo que la hipótesis del teorema obliga a que esa cantidad sea estrictamente positiva. Contradicción.

Para reconstruirla. Si $\hat{x}$ no fuera mínimo estricto, habría puntos factibles $x^k \to \hat{x}$ que no empeoran. Sus direcciones normalizadas tienen un límite d (compacidad de la esfera), y las cuentas de primer orden lo meten en el cono crítico. En los puntos factibles $L \le f$, con igualdad en $\hat{x}$, así que $L(x^k) \le L(\hat{x})$; y como el gradiente de L se anula, el desarrollo de L empieza en el término de segundo orden, que obliga a $d^T \nabla_{xx}^2 L \, d \le 0$. La lagrangiana está ahí para eso: con f sola quedaría un término de primer orden que no se anula.

Ejemplo (el cono crítico decide, y la hessiana de f no dice nada)**.**

$$\text{Minimizar } f(x) = x_1^2 - x_2^2 \quad \text{sujeto a:} \quad h(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0.$$

Lo que se sabe de antemano. Sobre la circunferencia, $x_2^2 = 1 - x_1^2$, luego $f = x_1^2 - (1 - x_1^2) = 2x_1^2 - 1$, cuyo mínimo sobre $x_1 \in [-1, 1]$ es -1 en $x_1 = 0$ y cuyo máximo es 1 en $x_1 = \pm 1$. Así que los mínimos globales son $(0, \pm 1)$ y los máximos, $(\pm 1, 0)$. Esto sirve de patrón de comparación: se va a ver que las condiciones de segundo orden lo detectan sin necesidad de esa sustitución.

Los puntos KKT. $\nabla f = (2x_1, -2x_2)^T$ y $\nabla h = (2x_1, 2x_2)^T$. La estacionariedad $\nabla f + v\nabla h = 0$ es

$$2x_1(1 + v) = 0, \qquad -2x_2 + 2vx_2 = 0 \iff 2x_2(v - 1) = 0.$$

Si $x_1 = 0$, la factibilidad da $x_2 = \pm 1 \neq 0$ y la segunda ecuación obliga a $v = 1$. Si $x_2 = 0$, entonces $x_1 = \pm 1 \neq 0$ y la primera obliga a $v = -1$. Los cuatro puntos son KKT, y las condiciones de primer orden no los distinguen en absoluto.

La hessiana de f sola no sirve. $\nabla^2 f = \operatorname{diag}(2, -2)$ en todo punto: es indefinida siempre, en los mínimos y en los máximos por igual. Cualquier criterio que mirara solo $\nabla^2 f$ fracasaría en los cuatro puntos.

La hessiana de la lagrangiana. $L = x_1^2 - x_2^2 + v(x_1^2 + x_2^2 - 1)$, luego

$$\nabla^2_{xx} L = \operatorname{diag}(2 + 2v,\ -2 + 2v).$$

En $(0, 1)$, con $v = 1$. $\nabla^2_{xx} L = \operatorname{diag}(4, 0)$, que es semidefinida positiva pero *no* definida positiva. El cono crítico es $\{d : \nabla h(0,1)^T d = 0\} = \{d : (0,2)^T d = 0\} = \{(d_1, 0)\}$, la recta horizontal. Sobre ella,

$$d^T \nabla^2_{xx} L\, d = 4d_1^2 > 0 \quad \text{para } d_1 \neq 0,$$

de modo que la condición suficiente se cumple y $(0, 1)$ es mínimo local estricto. Y obsérvese lo que ha pasado: la dirección donde la hessiana se anula, la vertical, ha quedado *fuera* del cono crítico, porque salirse verticalmente de la circunferencia no es moverse por el conjunto factible. Restringir al cono es lo que ha permitido concluir. Lo mismo, con las mismas cuentas y el mismo $v = 1$, ocurre en $(0, -1)$: el cono crítico vuelve a ser la recta horizontal porque $\nabla h(0, -1) = (0, -2)^T$, y el valor de la forma cuadrática vuelve a ser $4d_1^2$.

En $(1, 0)$, con $v = -1$. $\nabla^2_{xx} L = \operatorname{diag}(0, -4)$. El cono crítico es $\{d : (2,0)^T d = 0\} = \{(0, d_2)\}$, la recta vertical, y sobre ella

$$d^T \nabla^2_{xx} L\, d = -4d_2^2 < 0 \quad \text{para } d_2 \neq 0.$$

La condición *necesaria* de segundo orden falla, luego $(1, 0)$ no es mínimo local. Lo mismo en $(-1, 0)$.

Comprobación numérica. Los cuatro puntos y sus multiplicadores se han recalculado resolviendo las ecuaciones, y las formas cuadráticas sobre las direcciones críticas dan 4, 4, -4 y -4 respectivamente, con $f = -1, -1, 1$ y 1: los dos primeros son los mínimos y los dos últimos los máximos, tal como predecía la sustitución directa.

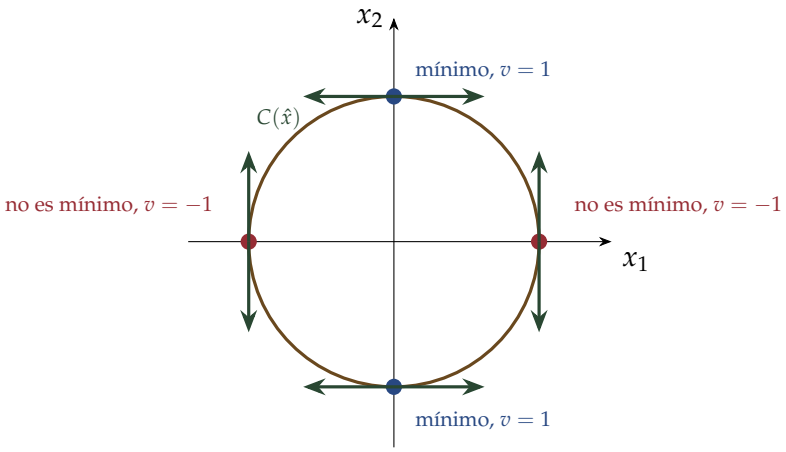


Figura 7.2: El cono crítico del ejemplo de la p. 406 es, en cada uno de los cuatro puntos KKT, la recta tangente a la circunferencia. Sobre ella la forma cuadrática $d^T \nabla^2_{xx} L\, d$ vale $4d_1^2$ en los polos y $-4d_2^2$ en los puntos del eje horizontal, y ese signo es lo que separa los mínimos de los que no lo son. La hessiana de f, que es indefinida en los cuatro, no distingue nada.

Observación (el hueco entre la necesaria y la suficiente)**.** Igual que en el capítulo 6, las dos condiciones no coinciden: la necesaria pide ≥ 0 y la suficiente pide > 0 sobre el cono. En el hueco viven los casos indecidibles, en los que la forma cuadrática se anula sobre alguna dirección crítica no nula y hay que estudiar órdenes superiores o razonar de otra manera. El ejemplo más sencillo, en una variable y sin restricciones, sigue siendo el de siempre: $f(x) = x^4$ y $f(x) = -x^4$ tienen los mismos datos de primer y segundo orden en el origen, y una tiene ahí un mínimo y la otra un máximo.

Qué se ha ganado. La pregunta del reparto entre camiones tiene ya respuesta, y en tres niveles. Primero, el geométrico: el reparto es el mejor de los permitidos cuando ninguna dirección que abarate es a la vez permitida; la pendiente que sigue bajando apunta hacia fuera. Segundo, el algebraico, que es el que se puede comprobar con papel: el gradiente del coste, cambiado de signo, se escribe como combinación con coeficientes no negativos de los gradientes de los topes que se están tocando, y los topes que sobran entran con coeficiente cero. En un problema convexo con una cualificación, eso distingue «ya no se puede mejorar» de «todavía se puede, pero no por ahí»: si la combinación existe con coeficientes no negativos, es un certificado de que el reparto es el mejor posible; si no existe, o solo existe con algún coeficiente negativo, todavía se puede mejorar, y un coeficiente negativo señala un tope del que conviene despegarse. Fuera del caso convexo la combinación es solo una condición necesaria, y decide la curvatura. Tercero, el económico: cada coeficiente es lo que se ganaría, en el margen, por cada unidad más de tope. Dos cosas quedan abiertas: cómo se llega a ese punto cuando no se sabe dónde está, que es la sección siguiente, y qué significa ese sistema de precios cuando se toma en serio como un problema propio, que es la última.

7.2 Métodos de gradiente proyectado y reducido

La pregunta

Un barco navega hacia el puerto más cercano y tiene delante una costa que no puede cruzar. La brújula le dice hacia dónde está el puerto, pero esa dirección lo mete en tierra. Puede seguir la costa, y entonces avanza menos de lo que quisiera; puede alejarse un poco de ella, y entonces pierde el rumbo. ¿Cuál es la mejor dirección que le queda? ¿Y cómo sabrá, en el momento en que la costa deje de estorbarle, que ya puede volver a poner rumbo directo?

La sección anterior dice cómo reconocer un óptimo cuando uno lo tiene delante. Esta dice cómo buscarlo. Y toda ella consiste en contestar la pregunta del barco de dos maneras: la de Rosen, que corrige la dirección proyectándola sobre lo que las restricciones permiten; y la de Wolfe, que cambia de coordenadas y hace desaparecer las igualdades de la escena. Comparten la búsqueda de direcciones factibles, pero no producen necesariamente la misma dirección. La segunda enlaza con el símplex del capítulo 3 mediante las variables básicas y los costos reducidos.

En toda la sección el problema es

$$(\mathrm{PL}_f) \qquad \text{Minimizar } f(x) \quad \text{sujeto a:} \quad Ax \le b, \qquad Ex = e,$$

con f diferenciable y **restricciones lineales**. Esa hipótesis se toma por dos motivos. El primero es que con restricciones lineales las direcciones factibles se caracterizan exactamente, sin cualificaciones, como se demostró en el teorema de la p. 392: un segmento que sale de un punto factible en una dirección que respeta las activas se queda dentro del conjunto durante un tramo entero, no solo a primer orden. El segundo es que es el caso que enlaza con el resto del libro: los capítulos 3 a 5 viven en él.

La idea: dos maneras de arreglar la dirección de máximo descenso

En el capítulo 6, sin restricciones, la dirección que se tomaba era $-\nabla f(x)$: la de máximo descenso. Aquí esa dirección suele apuntar hacia fuera. Hay dos formas de arreglarla, y son los dos métodos de esta sección.

Arreglarla por proyección (Rosen). Se descompone $-\nabla f(x)$ en dos trozos perpendiculares: el que va *a lo largo* de las restricciones activas y el normal a ellas. Se conserva el primero para mantenerlas con igualdad; después se comprueba si conviene soltar alguna desigualdad y moverse hacia el interior. La imagen es la del barco que descompone su rumbo ideal en una componente paralela a la costa y una perpendicular, y navega solo con la paralela.

Arreglarla cambiando de coordenadas (Wolfe). Si el conjunto factible es $\{x : Ax = b,\ x \ge 0\}$, las igualdades permiten despejar m variables en función de las otras $n - m$. Hecho eso, el problema queda escrito con $n - m$ variables libres y solo con condiciones de no negatividad. La dirección de máximo descenso se calcula en esas variables libres, y las despejadas se arrastran detrás para que las igualdades se sigan cumpliendo. La imagen es la del navegante que deja de usar coordenadas cartesianas y adopta como eje la propia costa: en el sistema nuevo, el obstáculo no aparece.

Las dos ideas construyen direcciones que conservan las igualdades. Rosen usa una

proyección ortogonal en las coordenadas originales; el gradiente reducido depende de las coordenadas libres elegidas. Pueden dar trayectorias distintas y, si el gradiente original ya respeta las restricciones, la corrección puede no cambiarlo.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: CASTIGAR EN VEZ DE RESTRINGIR

La quinta pregunta de la apertura del capítulo describe otra manera de abordar todo esto, y hay que contarla porque es una rama viva de la optimización, no un callejón cerrado.
Cuál es. En vez de resolver $\operatorname{Min}\{f(x) : g_i(x) \le 0\}$, se resuelve la familia sin restricciones

$$\text{Minimizar } f(x) + \mu \sum_{i=1}^{l} \big(\max\{0,\, g_i(x)\}\big)^2,$$

con $\mu > 0$ cada vez mayor. El segundo sumando vale cero en los puntos factibles y crece cuadráticamente en los que se salen: es una multa por incumplir. Con μ grande, la multa desincentiva la infactibilidad. Bajo hipótesis de existencia y compacidad, los límites de minimizadores globales penalizados resuelven el problema original.
Qué ventaja tiene. Permite buscar la solución con métodos sin restricciones, sin calcular proyecciones, y sirve también para restricciones no lineales. La penalización cuadrática de la parte positiva es de clase $\mathcal{C}^1$ si las g_i lo son, pero puede no tener segunda derivada al cruzar $g_i = 0$: Newton necesita tenerlo en cuenta.
Sus límites. Un parámetro finito no garantiza factibilidad exacta. Por ejemplo, minimizar x sujeto a $x \ge 0$ da $x^* = 0$, mientras que la penalización $x + \mu \max\{0, -x\}^2$ se minimiza en $x = -1/(2\mu) < 0$. En otros problemas el minimizador penalizado sí puede ser factible con μ finito. Además, al crecer μ pueden aumentar mucho las curvaturas normales a las restricciones respecto de las tangenciales, empeorando el condicionamiento.
Los *métodos de lagrangiano aumentado* combinan penalización y actualización de multiplicadores para reducir la necesidad de llevar μ a valores enormes. Para igualdades añaden al objetivo términos lineales y cuadráticos en las restricciones; las desigualdades requieren una formulación adaptada. Su convergencia y su condicionamiento también dependen del problema y de cómo se actualicen los parámetros.

7.2.1 Proyectar una dirección sobre las restricciones activas

Sea $\hat{x}$ un punto factible de (PL_f). Se llama A_1 a la submatriz de A formada por las filas de las restricciones activas en $\hat{x}$ y A_2 a la de las inactivas, y se define

$$M = \begin{pmatrix} A_1 \\ E \end{pmatrix},$$

la matriz que reúne todo lo que en $\hat{x}$ está apretando. Se supondrá que M tiene rango completo por filas, que es la cualificación de independencia lineal de la sección 7.1.6 escrita para restricciones lineales.

Definición. La **matriz de proyección** asociada a M es

$$P = I - M^T (M M^T)^{-1} M.$$

Si no hay filas en M, se toma directamente $P = I$. En otro caso, la matriz MM^T es invertible justamente porque M tiene rango completo por filas: si $MM^T y = 0$ entonces

$y^T MM^T y = \|M^T y\|^2 = 0$, luego $M^T y = 0$, y como las filas de M son independientes eso obliga a $y = 0$.

Proposición. La matriz P cumple:
1. $P = P^T$ (es simétrica);
2. $P^2 = P$ (es idempotente);
3. $PM^T = 0$, y por tanto $MP = 0$;
4. P es la proyección ortogonal sobre el núcleo de M, es decir, sobre $\{d : Md = 0\}$.

(1) Simetría. La traspuesta de $M^T(MM^T)^{-1}M$ es $M^T\big((MM^T)^{-1}\big)^T M$, y $(MM^T)^{-1}$ es simétrica por serlo MM^T; luego el producto entero es simétrico y P también.
(3) Anulación sobre las filas de M. Se calcula directamente:

$$PM^T = M^T - M^T(MM^T)^{-1}MM^T = M^T - M^T = 0.$$

La segunda igualdad es la que hace todo el trabajo: $(MM^T)^{-1}$ y MM^T se cancelan. Trasponiendo y usando (1), $MP = (PM^T)^T = 0$.
(2) Idempotencia. Escribiendo $P = I - Q$ con $Q = M^T(MM^T)^{-1}M$,

$$P^2 = P\,(I - Q) = P - PQ = P - \big(PM^T\big)(MM^T)^{-1}M = P - 0 = P,$$

donde se ha usado (3).
(4) Es la proyección ortogonal sobre $\ker M$. Hay que ver dos cosas. Primera, que $Pd \in \ker M$ para todo d: por (3), $M(Pd) = (MP)d = 0$. Segunda, que $d - Pd$ es ortogonal a $\ker M$: se tiene $d - Pd = Qd = M^T z$ con $z = (MM^T)^{-1}Md$, y para cualquier $y \in \ker M$,

$$y^T(d - Pd) = y^T M^T z = (My)^T z = 0.$$

Una matriz que descompone cada vector en un trozo dentro de $\ker M$ y otro perpendicular a $\ker M$ es la proyección ortogonal sobre $\ker M$.

La idea: qué trozo del gradiente se tira

La proposición dice, en lenguaje llano, que P parte cualquier vector en dos: la parte que mantiene constantes las restricciones activas y la parte normal a ellas.
Un vector d con $Md = 0$ es un vector que camina *a lo largo* de todo lo que en $\hat{x}$ está apretando: no cambia el valor de ninguna restricción activa ni de ninguna igualdad. Eso es $\ker M$. Las columnas de M^T generan las normales. Una componente normal puede salirse o entrar hacia el interior; por eso, tras proyectar, hay que comprobar los signos de los multiplicadores y decidir si se suelta alguna desigualdad. La descomposición

$$-\nabla f(\hat{x}) = \underbrace{-P\nabla f(\hat{x})}_{\text{a lo largo}} + \underbrace{-\big(I - P\big)\nabla f(\hat{x})}_{\text{contra las paredes}}$$

es la del barco: rumbo ideal igual a componente paralela a la costa más componente perpendicular. Rosen navega con la primera y tira la segunda.
Y aquí aparece ya, en germen, el criterio de parada. Si al tirar la componente perpendicular no queda nada, es decir, si $P\nabla f(\hat{x}) = 0$, entonces el rumbo ideal era *todo*

perpendicular a la costa: el gradiente está enteramente generado por las normales a las restricciones activas. Eso es la estacionariedad de Karush-Kuhn-Tucker, y lo único que faltará comprobar es el signo de los coeficientes.

La proyección, con números. Con una sola restricción activa, $x_1 + x_2 \leq 5$ por ejemplo, es $M = (1\ \ 1)$, $MM^T = 2$ y

$$P = I - \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(1\ \ 1) = \begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}.$$

Aplicada al vector $y = (3,1)$, da $Py = (1,-1)$ y $(I-P)y = (2,2)$. Las dos piezas se reconocen a simple vista: $(1,-1)$ va a lo largo de la recta $x_1 + x_2 =$ constante, porque $(1,1)^T(1,-1) = 0$, y $(2,2)$ es un múltiplo de la normal $(1,1)$. La suma devuelve y. Y se comprueban las cuatro propiedades de la proposición sin hacer teoría: P es simétrica; aplicada dos veces a y vuelve a dar $(1,-1)$, porque $P(1,-1) = (1,-1)$; manda la normal a cero, $P(1,1)^T = 0$; y deja intacto todo vector que ya iba a lo largo de la recta.

Teorema (dirección del gradiente proyectado)**.** Sea $\hat{x}$ factible para (PL_f), con M de rango completo por filas, y sea $d = -P\nabla f(\hat{x})$.

1. Si $d \neq 0$, entonces d es una dirección factible de descenso.
2. Si $d = 0$, sea $w = -(MM^T)^{-1}M\nabla f(\hat{x})$, partido en $w = (u,v)$ con u para las filas de A_1 y v para las de E. Si $u \geq 0$, entonces $\hat{x}$ es un punto KKT.

Parte (1), factibilidad. Por la parte (3) de la proposición de la p. 410,

$$Md = -MP\nabla f(\hat{x}) = 0,$$

es decir, $A_1 d = 0$ y $Ed = 0$. Lo primero dice que al moverse en la dirección d las restricciones activas siguen cumpliéndose *con igualdad*, y por tanto se cumplen; lo segundo, que las igualdades se conservan. Las inactivas cumplen $A_2\hat{x} < b_2$ con desigualdad estricta, luego siguen cumpliéndose para pasos suficientemente pequeños. Como las restricciones son lineales, no hace falta ningún desarrollo de Taylor: los valores $A(\hat{x} + \lambda d)$ son funciones afines de λ y basta acotar λ por el mínimo de un número finito de cocientes positivos.
Parte (1), descenso (el núcleo). Usando la simetría y la idempotencia de P,

$$\nabla f(\hat{x})^T d = -\nabla f(\hat{x})^T P\nabla f(\hat{x}) = -\nabla f(\hat{x})^T P^T P\nabla f(\hat{x}) = -\|P\nabla f(\hat{x})\|^2 = -\|d\|^2 < 0.$$

El truco de escribir $P = P^T P$, que sale de juntar las dos propiedades, es lo que convierte la expresión en un cuadrado y garantiza el signo. Por el criterio de derivada direccional negativa del capítulo 6, d es de descenso.
Parte (2). Si $d = 0$, entonces $P\nabla f(\hat{x}) = 0$, es decir,

$$\nabla f(\hat{x}) = M^T(MM^T)^{-1}M\nabla f(\hat{x}) = -M^T w,$$

por la definición de w. Escrito por bloques, eso es

$$\nabla f(\hat{x}) + A_1^T u + E^T v = 0.$$

Poniendo multiplicador cero a las restricciones inactivas, se obtiene la estacionariedad de KKT con la holgura complementaria; y si además $u \geq 0$, se cumple también la condición de signo. Las restricciones son afines, de modo que por el teorema de la p. 392 esas condiciones son las que corresponden.

7.2.2 Cuándo se suelta una restricción, y por qué lo dice el signo

Queda el caso interesante, que es el que da al método su dinámica: $d = 0$ pero algún $u_j < 0$. Ahí el punto no es óptimo, y el propio multiplicador negativo indica qué hay que hacer.

Teorema (el multiplicador negativo señala la restricción que sobra)**.** En la situación del teorema anterior, suponga $d = 0$ y que algún $u_j < 0$, correspondiente a la fila a_j^T de A_1. Sea $\hat{M}$ la matriz M sin esa fila y $\hat{P}$ su matriz de proyección. Entonces

$$\hat{d} = -\hat{P}\nabla f(\hat{x}) \;\neq\; 0$$

y $\hat{d}$ es una dirección factible de descenso.

LA IDEA: LA PARED QUE ESTORBA EN VEZ DE SUJETAR

Recuerde la imagen de la pelota apoyada. El multiplicador u_j es la fuerza con que la pared j empuja al punto. Una pared solo puede empujar hacia dentro del conjunto factible; que su multiplicador salga *negativo* significa que, para mantener el equilibrio, esa pared tendría que estar *tirando* hacia fuera, cosa que una pared no hace.
Traducido: esa restricción no está sujetando nada. Está estorbando. Si se despega el punto de ella, el objetivo baja. Y por eso el método la suelta: la quita del conjunto activo, recalcula la proyección con una restricción menos y sale una dirección que mejora. Lo que sigue es la comprobación de que la dirección nueva, además de mejorar, sigue siendo factible; y la parte delicada es comprobar que se aleja de la pared j en vez de atravesarla.

Paso 1: escribir el gradiente en las filas que quedan y en la que se va. Por hipótesis, $\nabla f(\hat{x}) = -M^T w$, es decir,

$$\nabla f(\hat{x}) = -\sum_{i \neq j} w_i\, m_i - u_j\, a_j,$$

donde m_i son las filas de M distintas de a_j, es decir, las filas de $\hat{M}$.
Paso 2: proyectar (el núcleo). Aplicando $\hat{P}$ y usando que $\hat{P}\hat{M}^T = 0$, todos los sumandos con m_i se anulan y queda un único superviviente:

$$\hat{P}\nabla f(\hat{x}) = -u_j\, \hat{P}a_j, \qquad \text{luego} \qquad \hat{d} = -\hat{P}\nabla f(\hat{x}) = u_j\, \hat{P}a_j.$$

Paso 3: $\hat{d} \neq 0$. Hace falta ver que $\hat{P}a_j \neq 0$. Si fuera $\hat{P}a_j = 0$, entonces $a_j = (I - \hat{P})a_j = \hat{M}^T z$ para algún z, es decir, a_j sería combinación lineal de las demás filas de M, en contra de que M tenga rango completo por filas. Luego $\hat{P}a_j \neq 0$ y, como $u_j \neq 0$, también $\hat{d} \neq 0$.
Paso 4: $\hat{d}$ es de descenso. Por el mismo cálculo del teorema anterior,

$$\nabla f(\hat{x})^T \hat{d} = -\|\hat{P}\nabla f(\hat{x})\|^2 = -\|\hat{d}\|^2 < 0.$$

Paso 5: $\hat{d}$ es factible, y aquí está el detalle que importa. Para las filas de $\hat{M}$, $\hat{M}\hat{d} = -\hat{M}\hat{P}\nabla f(\hat{x}) = 0$: todas las demás activas siguen cumpliéndose con igualdad. Falta la fila j, que es la que se ha soltado, y hay que comprobar que el movimiento va hacia el lado bueno:

$$a_j^T \hat{d} = a_j^T (u_j \hat{P} a_j) = u_j \, a_j^T \hat{P} a_j = u_j \, a_j^T \hat{P}^T \hat{P} a_j = u_j \, \|\hat{P} a_j\|^2 \; < \; 0,$$

porque $u_j < 0$ y la norma al cuadrado es estrictamente positiva por el paso 3. Que $a_j^T \hat{d} < 0$ significa que al avanzar en la dirección $\hat{d}$ el valor de $a_j^T x$ *disminuye*, de modo que la restricción $a_j^T x \leq b_j$, que estaba en el límite, pasa a cumplirse con holgura estricta. El punto se despega de la pared por dentro. Con eso, y con la holgura de las inactivas, $\hat{d}$ es factible.

EXPLÍCATE. *El paso 5 es el que justifica el nombre de «soltar». Escriba en una frase qué habría pasado si u_j hubiera sido positivo, y por qué entonces la dirección $\hat{d}$ atravesaría la pared en vez de despegarse de ella.*

Para reconstruir los dos teoremas. Todo sale de dos propiedades de P. Por ser simétrica e idempotente, $\nabla f^T(-P\nabla f) = -\|P\nabla f\|^2$: la dirección proyectada baja siempre que no sea nula. Por ser $MP = 0$, la dirección no cambia ninguna activa: es factible. Si la proyección es nula, el gradiente es combinación de las filas activas, $\nabla f = -M^T w$, y eso es la estacionariedad de KKT; solo queda mirar los signos. Si un u_j es negativo, al quitar su fila la nueva dirección resulta ser $u_j \hat{P} a_j$, y $a_j^T \hat{d} = u_j \|\hat{P} a_j\|^2 < 0$: el mismo cuadrado de antes, ahora multiplicado por el signo de u_j, dice que el punto se despega de la pared por dentro.

7.2.3 El algoritmo de Rosen, y un recorrido completo

Los dos teoremas anteriores dan el siguiente algoritmo, suponiendo que las filas activas que forman M sean independientes en cada iteración. Si dejan de serlo, esta fórmula de proyección requiere tratar primero las dependencias.

1. **Partir** de un punto factible x^0. Poner $k = 0$.
2. **Identificar las activas** en x^k y formar M.
3. **Proyectar**: calcular P y $d^k = -P\nabla f(x^k)$.
4. **Si** $d^k \neq 0$, ir al paso 6.
5. **Si** $d^k = 0$, calcular $w = -(MM^T)^{-1} M \nabla f(x^k)$ y mirar la parte u correspondiente a las desigualdades activas.
   - Si $u \geq 0$: **parar**, x^k es un punto KKT.
   - Si algún $u_j < 0$: quitar de M la fila j (en la práctica, la del u_j más negativo, como criterio de elección) y volver al paso 3.
6. **Búsqueda en línea**: calcular el mayor paso factible

$$\lambda_{\text{máx}} = \text{Min}\left\{ \frac{b_i - a_i^T x^k}{a_i^T d^k} \;:\; a_i^T d^k > 0 \right\}$$

(con $\lambda_{\text{máx}} = +\infty$ si ningún denominador es positivo), y resolver $\text{Min}\{f(x^k + \lambda d^k) : 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\text{máx}}\}$. Si el mínimo se alcanza, sea λ_k una solución; con $\lambda_{\text{máx}} = +\infty$ hay que comprobar su existencia.

7. **Avanzar**: $x^{k+1} = x^k + \lambda_k d^k$, $k \leftarrow k+1$, volver al paso 2.

La fórmula de $\lambda_{\text{máx}}$ merece una lectura, porque es la misma criba que el test del cociente mínimo del símplex del capítulo 3. La restricción i se acerca a su límite solo si $a_i^T d^k > 0$, es decir, si al avanzar el valor $a_i^T x$ crece; en ese caso la holgura disponible es $b_i - a_i^T x^k$ y se agota en el paso $(b_i - a_i^T x^k)/(a_i^T d^k)$. La primera que se agote fija $\lambda_{\text{máx}}$ y se incorporará al conjunto activo si se llega a ese tope; si la búsqueda para antes, sigue inactiva. Las que se alejan no limitan nada.

Ejemplo (el gradiente proyectado, cuatro iteraciones con números enteros)**.**

$$\text{Minimizar } f(x) = (x_1-4)^2 + (x_2-3)^2 \quad \text{sujeto a:} \quad x_1 + x_2 \le 5, \quad x_1 \le 4, \quad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$

partiendo de $x^0 = (0,0)$. El gradiente es $\nabla f(x) = \big(2(x_1-4),\, 2(x_2-3)\big)^T$. Las cuatro restricciones, escritas como $a_i^T x \le b_i$, tienen

$$a_1 = (1,1)^T, \quad a_2 = (1,0)^T, \quad a_3 = (-1,0)^T, \quad a_4 = (0,-1)^T,$$

con $b = (5,4,0,0)$. Se recuerda que $x_1 \ge 0$ se escribe $-x_1 \le 0$, y por eso a_3 lleva el signo menos.

Iteración 1, desde $x^0 = (0,0)$**.** Activas: la tercera y la cuarta, porque $x_1 = x_2 = 0$. Así que

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad MM^T = I, \qquad P = I - M^T M = I - I = 0.$$

La proyección es la matriz nula: con dos restricciones activas independientes en el plano no queda ninguna dirección libre, porque el punto es un vértice. Luego $d^0 = 0$ y hay que mirar los multiplicadores. Con $\nabla f(0,0) = (-8,-6)^T$,

$$w = -(MM^T)^{-1} M \nabla f(x^0) = -M \nabla f(x^0) = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Los dos son negativos. Se suelta el más negativo, $u_3 = -8$, que es la restricción $x_1 \ge 0$. Con $M = (0,-1)$ queda

$$P = I - \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}(0,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad d^0 = -P\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La dirección es horizontal, lo cual es lo que tenía que salir: se ha soltado la pared vertical $x_1 \ge 0$ y se mantiene $x_2 = 0$, de modo que la dirección elegida va a lo largo del eje. Normalizando a $d^0 = (1,0)^T$, el paso máximo lo dan las restricciones que se acercan: $a_1^T d^0 = 1 > 0$ da $(5-0)/1 = 5$, y $a_2^T d^0 = 1 > 0$ da $(4-0)/1 = 4$. Luego $\lambda_{\text{máx}} = 4$. La búsqueda en línea es

$$f(0+\lambda, 0) = (\lambda - 4)^2 + 9 = \lambda^2 - 8\lambda + 25,$$

cuyo mínimo sin restricción está en $\lambda = 4$, que coincide con $\lambda_{\text{máx}}$. Así que $\lambda_0 = 4$ y

$$x^1 = (4,\, 0), \qquad f(x^1) = 0 + 9 = 9,$$

frente a $f(x^0) = 16 + 9 = 25$.

Iteración 2, desde $x^1 = (4,0)$. Activas: la segunda ($x_1 = 4$) y la cuarta ($x_2 = 0$). Otra vez dos activas independientes, otra vez $P = 0$ y $d^1 = 0$. Con $\nabla f(4,0) = (0,-6)^T$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, que cumple $MM^T = I$,

$$w = -M\nabla f(x^1) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

El multiplicador de $x_1 \le 4$ es cero y el de $x_2 \ge 0$ es -6. Se suelta este último. Con $M = (1,0)$,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad d^1 = -P\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \;\to\; (0,1)^T.$$

Paso máximo: solo $a_1^T d^1 = 1 > 0$, con holgura $5 - 4 = 1$, luego $\lambda_{\text{máx}} = 1$. La búsqueda en línea da $f(4,\lambda) = (\lambda - 3)^2$, decreciente en $[0,1]$, con mínimo sin restringir en $\lambda = 3$; se corta en $\lambda_1 = 1$. Sale

$$x^2 = (4,\,1), \qquad f(x^2) = 0 + 4 = 4.$$

Iteración 3, desde $x^2 = (4,1)$. Activas: la primera ($4 + 1 = 5$) y la segunda ($x_1 = 4$). De nuevo $P = 0$ y $d^2 = 0$. Ahora

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad MM^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (MM^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

donde se ha usado que el determinante vale 1. Con $\nabla f(4,1) = (0,-4)^T$,

$$M\nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad w = -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aquí el orden de las filas importa: la primera fila de M es $a_2 = (1,0)$, la de $x_1 \le 4$, y su multiplicador es -4; la segunda es $a_1 = (1,1)$, la de $x_1 + x_2 \le 5$, con multiplicador $+4$. Se suelta la de multiplicador negativo, o sea $x_1 \le 4$, y se conserva $x_1 + x_2 \le 5$. Con $M = (1,1)$,

$$P = I - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1,1) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$d^2 = -P\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \;\to\; (-1,1)^T.$$

La dirección es paralela a la recta $x_1 + x_2 = 5$, como tenía que ser: se camina a lo largo de la única restricción que queda activa. Paso máximo: $a_3^T d^2 = (-1,0)^T(-1,1) = 1 > 0$ con holgura $0 - (-4) = 4$, luego $\lambda_{\text{máx}} = 4$; las demás no limitan. La búsqueda en línea:

$$f(4 - \lambda,\, 1 + \lambda) = (-\lambda)^2 + (\lambda - 2)^2 = 2\lambda^2 - 4\lambda + 4,$$

con derivada $4\lambda - 4$, que se anula en $\lambda_2 = 1$. Sale

$$x^3 = (3,\,2), \qquad f(x^3) = 1 + 1 = 2.$$

Iteración 4, desde $x^3 = (3,2)$: la parada. Activa solo la primera ($3+2=5$); la segunda tiene holgura ($3<4$) y las de no negatividad también. Con $M=(1,1)$ y $\nabla f(3,2) = (-2,-2)^T$,

$$d^3 = -P\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\-1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0.$$

El gradiente es perpendicular a la recta activa y la proyección lo aniquila. El multiplicador es

$$w = -(MM^T)^{-1}M\nabla f(x^3) = -\tfrac{1}{2}\big((1,1)(-2,-2)^T\big) = -\tfrac{1}{2}(-4) = 2 \geq 0.$$

Se cumple el criterio de parada: $x^* = (3,2)$ es un punto KKT, con multiplicador $u_1 = 2$ para $x_1 + x_2 \leq 5$ y cero para las demás. Y como f es convexa (suma de cuadrados) y las restricciones son afines, el teorema de la p. 394 lo convierte en mínimo global.

Comprobación. En $(3,2)$, el gradiente $(-2,-2)$ se cancela con $u_1 a_1 = 2(1,1)$; las otras restricciones tienen multiplicador cero. El valor es exactamente $f(3,2) = 2$, frente a los valores 25, 9 y 4 de los puntos anteriores.

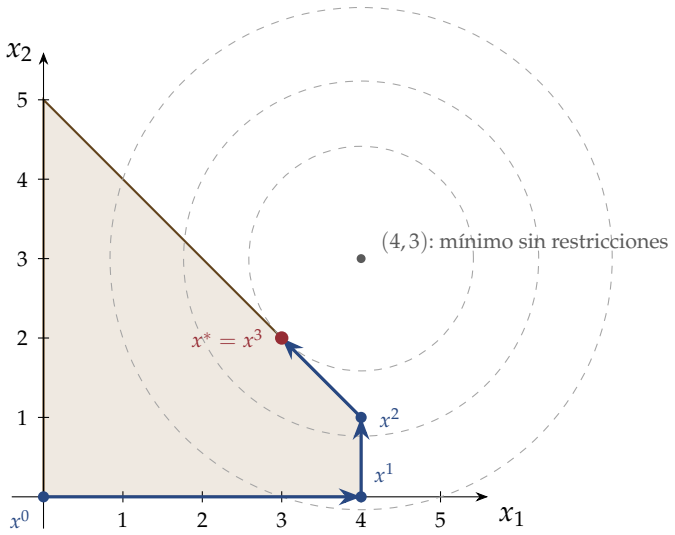


Figura 7.3: El recorrido del ejemplo de la p. 414. Desde el vértice $(0,0)$ el método suelta primero $x_1 \geq 0$ y avanza por el eje hasta chocar con $x_1 \leq 4$; suelta después $x_2 \geq 0$ y sube pegado a esa pared hasta chocar con $x_1 + x_2 \leq 5$; suelta entonces $x_1 \leq 4$ y se desliza por la última recta hasta el punto donde el gradiente le queda perpendicular. Las circunferencias de puntos son las curvas de nivel de f, centradas en el mínimo sin restricciones $(4,3)$, que no es factible.

Observación (qué enseña el recorrido)**.** Tres cosas que conviene no perder de vista.

El método puede pasar por vértices sin quedarse en ellos. Los puntos x^0, x^1 y x^2 son vértices del poliedro, pero el óptimo $x^* = (3,2)$ no lo es: está en el interior de una arista. Ahí se ve la diferencia con el símplex del capítulo 3, que solo mantiene soluciones básicas factibles: en este poliedro, un objetivo lineal alcanza su mínimo en al menos un vértice. Con objetivo curvado eso deja de ser cierto, y el método tiene que poder parar a mitad de una arista.

La proyección nula no significa óptimo. En las tres primeras iteraciones salió $P = 0$ y $d = 0$, y sin embargo el punto no era óptimo: lo decían los multiplicadores negativos. Confundir «no hay dirección libre con las activas de ahora» con «no hay dirección de mejora» es el error habitual, y la parte (2) del teorema de la p. 411 existe justamente para distinguirlos.

El paso lo fija a veces la restricción y a veces la función. En las iteraciones 1 y 2 el mínimo de f a lo largo de la semirrecta coincidía con el tope o quedaba fuera del tramo factible, respectivamente, y se tomó $\lambda_{\text{máx}}$; en la 3, el mínimo cayó dentro y el paso lo determinó la derivada. En el primer caso se incorpora una restricción nueva al conjunto activo; en el segundo, no.

Dónde se falla al hacerlo a mano.

- *El signo de las filas de las restricciones «$\geq$».* La fila de $x_2 \geq 0$ es $a_4 = (0, -1)$, no $(0, 1)$. Con la fila mal puesta, en la iteración 2, desde $(4, 0)$, sale $w = (0, 6) \geq 0$ en lugar de $(0, -6)$, y el método para en $(4, 0)$, con $f = 9$, declarando punto KKT un punto que no lo es. El error no se nota en la cuenta: se nota en que el resultado es falso.
- *Leer cada multiplicador en la fila equivocada.* En la iteración 3 la primera fila de M era la de $x_1 \leq 4$. Quien la tome por la de $x_1 + x_2 \leq 5$ soltará esta última, cuyo multiplicador es $+4$; la dirección que resulta, $(0, 4)$, tiene $a_1^T d = 4 > 0$: atraviesa la pared en vez de despegarse de ella, y el paso máximo es cero. Conviene escribir junto a cada fila de M el nombre de su restricción.
- *Contar en el paso máximo las restricciones que se alejan.* Solo cuentan las de $a_i^T d > 0$. Un cociente con denominador negativo sale negativo y no limita nada.
- *Mezclar la dirección normalizada con la sin normalizar.* Desde $(0, 0)$, con $d = (8, 0)$ el tope es $\lambda = \frac{1}{2}$ y con $d = (1, 0)$ es $\lambda = 4$; los dos llevan a $(4, 0)$. Lo que no vale es calcular el paso con una y avanzar con la otra.
- *Tomar el mínimo libre de la búsqueda en línea sin mirar el tope.* Si el mínimo de f a lo largo de la semirrecta cae más allá de $\lambda_{\text{máx}}$, el paso es $\lambda_{\text{máx}}$, como en las iteraciones 1 y 2. Y si f no es convexa a lo largo de la semirrecta, «el mínimo libre» puede no ser el mínimo en $[0, \lambda_{\text{máx}}]$: hay que comparar con los extremos.

7.2.4 El gradiente reducido de Wolfe

El segundo método ataca el mismo problema con las herramientas del capítulo 3, y por eso se escribe en la forma estándar de aquel capítulo:

$$(\text{PE}_f) \qquad \text{Minimizar } f(x) \quad \text{sujeto a:} \quad Ax = b, \quad x \geq 0,$$

con $A \in M_{m \times n}$ de rango m. Para simplificar la elección de base, supondremos que cada m columnas de A son independientes. Supondremos también no degeneración: toda solución básica factible tiene sus m variables básicas estrictamente positivas.

Dado un punto factible x, se elige una base B formada por m columnas de A tales que las componentes correspondientes de x sean estrictamente positivas. Se escribe $A = [B, N]$ y $x = (x_B, x_N)$, con la misma convención del capítulo 3. La igualdad $Ax = b$ es entonces $Bx_B + Nx_N = b$, y como B es invertible,

$$x_B = B^{-1}\big(b - Nx_N\big).$$

Esa fórmula es toda la idea del método: **las variables básicas no son incógnitas independientes**, sino funciones de las no básicas. Sustituyendo, el problema se convierte en uno en las $n - m$ variables x_N:

$$F(x_N) = f\big(B^{-1}(b - Nx_N),\, x_N\big),$$

sin restricciones de igualdad. Quedan $x_N \geq 0$ y $B^{-1}(b - Nx_N) \geq 0$; estas últimas no limitan los pasos suficientemente pequeños si $x_B > 0$.

Definición. El **gradiente reducido** de f en x respecto de la base B es el gradiente de F respecto de las variables no básicas:

$$r_N = \nabla_N f(x) - N^T w, \qquad \text{donde} \qquad w^T = \nabla_B f(x)^T B^{-1}.$$

Componente a componente, para cada índice no básico j,

$$r_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - w^T a_j.$$

De que r_N es en efecto $\nabla F(x_N)$.
Se deriva F por la regla de la cadena. La dependencia de x_B respecto de x_N viene de $x_B = B^{-1}(b - Nx_N)$, cuya matriz jacobiana es $-B^{-1}N$. Luego

$$\nabla F(x_N) = \nabla_N f(x) + \left(-B^{-1}N\right)^T \nabla_B f(x) = \nabla_N f(x) - N^T (B^{-1})^T \nabla_B f(x).$$

Y $N^T (B^{-1})^T \nabla_B f(x) = N^T \left(\nabla_B f(x)^T B^{-1}\right)^T = N^T w$, que es lo que se quería.

CONEXIÓN: ESTO ES EXACTAMENTE $c_j - z_j$

Merece la pena parar aquí, porque es la conexión que da sentido a todo el método.
En el capítulo 3, con objetivo lineal $c^T x$, se definía el vector $w^T = c_B^T B^{-1}$ y, para cada columna a_j, la cantidad $z_j = c_B^T B^{-1} a_j = w^T a_j$. El **costo reducido** era

$$c_j - z_j = c_j - w^T a_j,$$

y el criterio de optimalidad del símplex decía que la solución básica factible es óptima cuando todos los costos reducidos son no negativos.
Póngase ahora $f(x) = c^T x$ en las fórmulas de arriba. Entonces $\nabla f(x) = c$ en todo punto, de modo que $\nabla_B f(x) = c_B$ y $\nabla_j f(x) = c_j$, y las dos definiciones coinciden línea a línea:

$$w^T = \nabla_B f(x)^T B^{-1} = c_B^T B^{-1}, \qquad r_j = \nabla_j f(x) - w^T a_j = c_j - z_j.$$

No es una analogía: es la misma fórmula. El gradiente reducido *es* el vector de costos reducidos, con $\nabla f(x)$ ocupando el lugar de c. La única diferencia es que c era constante y $\nabla f(x)$ cambia de un punto a otro, de modo que aquí hay que recalcularlo en cada iteración en vez de leerlo de una tabla.
Y el vector w también conserva su papel. En el capítulo 4 era la candidato dual asociado a una base; cuando esa base era óptima, proporcionaba precios sombra. Aquí $-w$ es el candidato a multiplicador de las igualdades: si se escribe la lagrangiana con la convención de la sección 7.1.4, $L(x, v) = f(x) + v^T(Ax - b)$, la estacionariedad en las componentes básicas da $\nabla_B f(x) + B^T v = 0$, es decir, $v = -w$. Los dos objetos que en programación lineal se calculaban con la tabla son, en este capítulo, los multiplicadores de Karush-Kuhn-Tucker cuando se cumplen también los signos y la holgura complementaria.

Falta decir cómo se elige la dirección. La regla, debida a Wolfe, tiene una sola sutileza y está en las variables no básicas que valen cero.

Definición. Dado un punto factible x con base B y gradiente reducido r_N, la **dirección del gradiente reducido** es el vector $d = (d_B, d_N)$ definido por

$$d_j = \begin{cases} -r_j & \text{si } r_j \le 0, \\ -x_j\, r_j & \text{si } r_j > 0, \end{cases} \qquad \text{para cada } j \text{ no básico}, \qquad d_B = -B^{-1} N\, d_N.$$

LA IDEA: POR QUÉ EL CASO $r_j > 0$ SE TRATA APARTE

La regla parece caprichosa y no lo es. Se trata de bajar f sin salirse, y hay tres situaciones.
Si $r_j < 0$, aumentar x_j baja el objetivo. Se pone $d_j = -r_j > 0$: la variable sube. No hay ningún problema, porque subir nunca viola $x_j \geq 0$.
Si $r_j > 0$ *y* $x_j > 0$, lo que baja el objetivo es *disminuir* x_j, y se puede, porque hay margen hasta el cero. Se pone $d_j = -x_j r_j < 0$. El factor x_j es una precaución: cuanto más cerca esté la variable de su cota, más suave es el movimiento, lo que evita que el paso máximo impuesto por esta coordenada tienda a cero solo porque $x_j \to 0$: si $d_j < 0$, el cociente es $-x_j/d_j = 1/r_j$. Otras coordenadas aún pueden limitar el avance.
Si $r_j > 0$ *y* $x_j = 0$, lo que bajaría el objetivo es disminuir x_j, y eso está prohibido: la variable ya está en su cota inferior. Se pone $d_j = -x_j r_j = 0$, es decir, la variable no se mueve. Aquí es donde el factor x_j hace su trabajo de verdad, y por eso la regla se escribe así y no de otra forma.
Es exactamente la lógica del símplex, con una diferencia de estrategia: el símplex elige *una sola* variable no básica con costo reducido negativo y la mueve; el gradiente reducido las mueve *todas* a la vez, cada una en proporción a lo que promete. Y la última línea de la definición, $d_B = -B^{-1}Nd_N$, es la que arrastra a las básicas para que la igualdad $Ax = b$ siga cumpliéndose: son las que pagan el movimiento de las otras.

Teorema (el gradiente reducido decide)**.** Sea x un punto factible de (PE_f) con base B y $x_B > 0$, y sea d la dirección recién definida.
1. Si $d \neq 0$, entonces d es una dirección factible de descenso.
2. Si $d = 0$, entonces x es un punto KKT de (PE_f).

Paso 1: d respeta las igualdades. Por construcción,

$$Ad = Bd_B + Nd_N = B\big(-B^{-1}Nd_N\big) + Nd_N = -Nd_N + Nd_N = 0,$$

de modo que $A(x + \lambda d) = Ax = b$ para todo λ: las restricciones de igualdad se cumplen a lo largo de toda la semirrecta, no solo cerca del punto.
Paso 2: d respeta la no negatividad para pasos pequeños. Para las variables básicas, $x_B > 0$ por hipótesis, luego un paso suficientemente pequeño no las hace negativas. Para una no básica j con $x_j > 0$, lo mismo. Y para una no básica con $x_j = 0$ hay dos casos: si $r_j \leq 0$ entonces $d_j = -r_j \geq 0$ y la variable sube o se queda; si $r_j > 0$ entonces $d_j = -x_j r_j = 0$ y la variable no se mueve. En ninguno de los dos baja de cero. Aquí es donde se usa la regla partida de la definición, y es el motivo de que esté escrita así.
Paso 3: d es de descenso (el núcleo). Se calcula la derivada direccional separando básicas y no básicas y sustituyendo d_B:

$$\nabla f(x)^T d = \nabla_B f(x)^T d_B + \nabla_N f(x)^T d_N = -\nabla_B f(x)^T B^{-1} N\, d_N + \nabla_N f(x)^T d_N.$$

El primer sumando es $-w^T N d_N = -(N^T w)^T d_N$, de modo que

$$\nabla f(x)^T d = \big(\nabla_N f(x) - N^T w\big)^T d_N = r_N^T d_N = \sum_{j \text{ no básico}} r_j\, d_j.$$

Y cada sumando es menor o igual que cero, por la definición de d_j: si $r_j \le 0$, entonces $r_j d_j = -r_j^2 \le 0$; si $r_j > 0$, entonces $r_j d_j = -x_j r_j^2 \le 0$, porque $x_j \ge 0$. Luego $\nabla f(x)^T d \le 0$. Además la suma vale cero solo si todos los sumandos son cero, y eso ocurre solo si todos los d_j con j no básico son cero, es decir, solo si $d_N = 0$, lo que arrastra $d_B = 0$ y por tanto $d = 0$. Así que si $d \neq 0$ la derivada direccional es estrictamente negativa.
Paso 4: si $d = 0$, se cumple KKT. Que $d_N = 0$ significa, para cada no básico j: o bien $r_j \le 0$ y $-r_j = 0$, es decir $r_j = 0$; o bien $r_j > 0$ y $x_j r_j = 0$, es decir $x_j = 0$. En los dos casos $r_j \ge 0$ y $r_j x_j = 0$. Para las básicas, el gradiente reducido vale

$$r_B = \nabla_B f(x) - B^T w = \nabla_B f(x) - B^T (B^T)^{-1} \nabla_B f(x) = 0,$$

donde se ha usado $w = (B^T)^{-1} \nabla_B f(x)$, que es la definición de w traspuesta. Luego también $r_B \ge 0$ y $r_B^T x_B = 0$.
Juntándolo: el vector $r = \nabla f(x) - A^T w$ cumple $r \ge 0$ y $r_j x_j = 0$ para todo j. Las condiciones KKT del problema $\text{Min}\{f(x) : Ax = b,\ x \ge 0\}$ piden, con multiplicador v para las igualdades y $\mu \ge 0$ para las restricciones $-x_j \le 0$,

$$\nabla f(x) + A^T v - \mu = 0, \qquad \mu \ge 0, \qquad \mu_j x_j = 0.$$

Tomando $v = -w$ y $\mu = r$, la primera igualdad es $\nabla f(x) - A^T w - r = 0$, que es la definición de r; y las otras dos son lo que se acaba de comprobar. Luego x es un punto KKT.

Para reconstruirlo. El gradiente reducido es el gradiente del problema una vez eliminadas las variables básicas. Su signo decide igual que el costo reducido en el símplex: negativo significa que conviene subir esa variable, positivo que conviene bajarla, y cuando no se puede bajar porque ya vale cero, esa componente se congela. Que todas las componentes estén congeladas o anuladas es exactamente la holgura complementaria de KKT, con el gradiente reducido en el papel de multiplicador de la no negatividad.

7.2.5 El algoritmo de Wolfe, y un recorrido completo

1. **Partir** de un punto factible x^0 con $Ax^0 = b$, $x^0 \ge 0$. Poner $k = 0$.
2. **Elegir base**: tomar como básicas m variables con $x_j^k > 0$ y columnas independientes. Con más de m positivas, la elección habitual es quedarse con las m mayores. Es una heurística: el paso depende también de las columnas y de la dirección.
3. **Calcular** $w^T = \nabla_B f(x^k)^T B^{-1}$ y el gradiente reducido $r_N = \nabla_N f(x^k) - N^T w$.
4. **Formar** la dirección d^k con la regla partida y $d_B = -B^{-1} N d_N$. Si $d^k = 0$, **parar**: x^k es un punto KKT.
5. **Paso máximo**:
$$\lambda_{\text{máx}} = \text{Min}\left\{ -\frac{x_j^k}{d_j^k} \ :\ d_j^k < 0 \right\},$$
con $\lambda_{\text{máx}} = +\infty$ si ninguna componente de d^k es negativa.
6. **Búsqueda en línea**: minimizar $f(x^k + \lambda d^k)$ para $\lambda \in [0, \lambda_{\text{máx}}]$, obteniendo λ_k si el mínimo se alcanza. Si $\lambda_{\text{máx}} = +\infty$, hay que comprobar esa existencia.
7. **Avanzar**: $x^{k+1} = x^k + \lambda_k d^k$, $k \leftarrow k + 1$, volver al paso 2.

El paso 5 es literalmente el test del cociente mínimo del capítulo 3: la variable j baja a razón de $|d_j|$ por unidad de λ y se agota en $x_j/|d_j|$; la primera que llega a cero fija el tope. La única novedad respecto del símplex es el paso 6, que puede detenerse antes del tope si la función empieza a subir.

Ejemplo (el gradiente reducido, dos iteraciones)**.**

$$\text{Minimizar } f(x) = (x_1-3)^2 + (x_2-2)^2 \quad \text{sujeto a:} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

partiendo de $x^0 = (0,0,4)$. Aquí $A = (1\ \ 2\ \ 1)$, $m = 1$, $b = 4$ y $\nabla f(x) = \big(2(x_1-3),\, 2(x_2-2),\, 0\big)^T$. La tercera componente del gradiente es cero porque x_3 no aparece en el objetivo: es una variable de holgura.

Iteración 1, desde $x^0 = (0,0,4)$**.** La única componente positiva es x_3, luego la base es $B = (1)$, la columna de x_3, y las no básicas son x_1 y x_2, con $N = (1\ \ 2)$. El gradiente es $\nabla f(x^0) = (-6,-4,0)^T$, de modo que $\nabla_B f = 0$ y

$$w = \nabla_B f(x^0) B^{-1} = 0 \cdot 1 = 0, \qquad r_N = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 0 = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Los dos gradientes reducidos son negativos: a las dos variables les conviene subir. Por la regla, $d_1 = 6$ y $d_2 = 4$, y

$$d_B = d_3 = -B^{-1} N\, d_N = -(1\ \ 2) \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = -(6+8) = -14.$$

Se comprueba que $Ad = 6 + 2\cdot 4 - 14 = 0$, como tenía que ser. El paso máximo lo fija la única componente negativa, la tercera:

$$\lambda_{\text{máx}} = -\frac{x_3^0}{d_3} = -\frac{4}{-14} = \frac{2}{7}.$$

La búsqueda en línea: sobre la semirrecta, $x(\lambda) = (6\lambda,\, 4\lambda,\, 4-14\lambda)$ y

$$f(\lambda) = (6\lambda-3)^2 + (4\lambda-2)^2 = 52\lambda^2 - 52\lambda + 13,$$

cuya derivada $104\lambda - 52$ se anula en $\lambda = 1/2$. Pero $1/2 > 2/7$, de modo que el mínimo libre cae fuera del tramo permitido y, como la parábola es decreciente hasta $1/2$, el mínimo en $[0, 2/7]$ se alcanza en el extremo: $\lambda_0 = 2/7$. Sale

$$x^1 = \left(\frac{12}{7},\, \frac{8}{7},\, 0\right), \qquad f(x^1) = \left(-\frac{9}{7}\right)^2 + \left(-\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{81+36}{49} = \frac{117}{49} \approx 2{,}388,$$

frente a $f(x^0) = 9 + 4 = 13$.

Iteración 2, desde $x^1 = (12/7,\, 8/7,\, 0)$**.** Ahora hay dos componentes positivas y solo una puede ser básica; se toma la mayor, $x_1 = 12/7$. Así que $B = (1)$, la columna de x_1, y las no básicas son x_2 y x_3, con $N = (2\ \ 1)$. El gradiente es

$$\nabla f(x^1) = \big(2\left(\tfrac{12}{7} - 3\right),\, 2\left(\tfrac{8}{7} - 2\right),\, 0\big)^T = \big(-\tfrac{18}{7},\, -\tfrac{12}{7},\, 0\big)^T,$$

luego $w = -18/7$ y

$$r_N = \begin{pmatrix} -12/7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\left(-\frac{18}{7}\right) = \begin{pmatrix} -12/7 + 36/7 \\ 0 + 18/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24/7 \\ 18/7 \end{pmatrix}.$$

Los dos son positivos, y ahí es donde la regla partida decide. Para x_2: $r_2 = 24/7 > 0$ y $x_2 = 8/7 > 0$, luego $d_2 = -x_2 r_2 = -\frac{8}{7}\cdot\frac{24}{7} = -\frac{192}{49}$. Para x_3: $r_3 = 18/7 > 0$ pero $x_3 = 0$, luego $d_3 = 0$: la variable está en su cota y no se mueve. Y

$$d_1 = -B^{-1}N d_N = -(2\ \ 1)\begin{pmatrix} -192/49 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{384}{49}.$$

Multiplicando la dirección por la constante positiva $7/8$, que no cambia nada porque solo reescala el parámetro, queda $d = (48/7,\ -24/7,\ 0)$, y se comprueba $Ad = 48/7 + 2(-24/7) + 0 = 0$.

El paso máximo lo fija la componente negativa, la segunda: $\lambda_{\text{máx}} = -(8/7)/(-24/7) = 1/3$. La búsqueda en línea, con $x(\lambda) = \left(\frac{12}{7} + \frac{48}{7}\lambda,\ \frac{8}{7} - \frac{24}{7}\lambda,\ 0\right)$, da

$$f(\lambda) = \frac{2880\lambda^2 - 576\lambda + 117}{49},$$

con derivada nula en $\lambda = 576/5760 = 1/10$. Como $1/10 < 1/3$, el paso es interior y $\lambda_1 = 1/10$. Sale

$$x^2 = \left(\frac{12}{7} + \frac{48}{70},\ \frac{8}{7} - \frac{24}{70},\ 0\right) = \left(\frac{12}{5},\ \frac{4}{5},\ 0\right) = (2{,}4,\ 0{,}8,\ 0), \qquad f(x^2) = \frac{9}{25} + \frac{36}{25} = \frac{9}{5} = 1{,}8.$$

Iteración 3: la parada. En $x^2 = (12/5,\ 4/5,\ 0)$ la base sigue siendo x_1. El gradiente es $\nabla f(x^2) = \left(2(\frac{12}{5} - 3),\ 2(\frac{4}{5} - 2),\ 0\right)^T = (-\frac{6}{5},\ -\frac{12}{5},\ 0)^T$, luego $w = -6/5$ y

$$r_N = \begin{pmatrix} -12/5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\left(-\frac{6}{5}\right) = \begin{pmatrix} -12/5 + 12/5 \\ 6/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6/5 \end{pmatrix}.$$

Para x_2: $r_2 = 0$, luego $d_2 = -r_2 = 0$. Para x_3: $r_3 = 6/5 > 0$ y $x_3 = 0$, luego $d_3 = 0$. Así que $d = 0$ y el método para. El punto $x^* = (2{,}4,\ 0{,}8,\ 0)$ es un punto KKT, y como f es convexa y las restricciones afines, es el mínimo global, con $f(x^*) = 1{,}8$.

Lectura de los números de la parada. El gradiente reducido final es $(0,\ 6/5)$. El cero en x_2 dice que no hay variación de primer orden al moverla y compensar el cambio con x_1. El $6/5$ en x_3 es el multiplicador de la restricción $x_3 \geq 0$: sacar la holgura del cero costaría $6/5$ por unidad a primer orden, compensando con la variable básica; por eso se queda en cero. Y $w = -6/5$ es el multiplicador de la igualdad, cambiado de signo respecto de la convención de la sección 7.1.4: el multiplicador de $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$ en la lagrangiana es $v = -w = 6/5$.

Comprobación. El punto final cumple $12/5 + 2(4/5) = 4$. Con $v = 6/5$ y $\mu = (0, 0, 6/5)$, la estacionariedad es $(-6/5, -12/5, 0) + (6/5)(1, 2, 1) - (0, 0, 6/5) = 0$. Se cumplen también $\mu \geq 0$ y $\mu_j x_j = 0$ para todas las componentes.

CONEXIÓN: EL MISMO PROBLEMA POR EL CAMINO DEL CAPÍTULO 3

Compare el lector el recorrido anterior con lo que haría el símplex sobre el mismo conjunto factible si el objetivo fuera lineal. Los puntos que ha visitado el gradiente reducido son

$$(0,0,4) \;\longrightarrow\; \left(\tfrac{12}{7},\tfrac{8}{7},0\right) \;\longrightarrow\; \left(\tfrac{12}{5},\tfrac{4}{5},0\right).$$

El primero es un vértice del poliedro: es la solución básica factible con x_3 básica. Los otros dos *no* son vértices: tienen dos componentes positivas y solo hay una restricción de igualdad, de modo que una solución básica factible puede tener a lo sumo una componente positiva. Están en el interior del segmento que une $(4,0,0)$ con $(0,2,0)$.
Ahí está, en un ejemplo, toda la diferencia entre los dos métodos. El símplex salta de vértice en vértice porque el teorema fundamental de la programación lineal le garantiza que en alguno de ellos está el óptimo. Con objetivo curvado ese teorema desaparece — aquí el óptimo está en mitad de una arista —, y el método tiene que poder caminar por dentro de las caras. Lo que se conserva es la contabilidad: base, no base, B^{-1}, el vector w, los costos reducidos y el test del cociente mínimo. Cambia solo quién decide dónde parar: antes lo decía la primera variable que llegaba a cero, ahora puede decirlo la derivada de f a lo largo del camino.

Dónde se falla al hacerlo a mano.

- *Tomar como básica una variable que vale cero.* En $x^1 = (\frac{12}{7},\frac{8}{7},0)$, si se toma x_3 como básica, sale $w = 0$, $d_N = (\frac{18}{7},\frac{12}{7})$ y $d_3 = -(\frac{18}{7} + 2\cdot\frac{12}{7}) = -6$: la variable básica tiene que bajar y ya está en cero, así que el paso máximo es 0 y el método se atasca sin haber llegado a ningún sitio. Por eso la base se elige entre las variables estrictamente positivas.
- *Olvidar arrastrar a las básicas.* Si en la iteración 1 se moviera solo $d_N = (6,4)$ con $d_3 = 0$, sería $Ad = 6 + 8 = 14 \neq 0$ y el punto se saldría de la igualdad $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$ al primer paso. La línea $d_B = -B^{-1}Nd_N$ no es opcional.
- *Aplicar la rama equivocada de la regla.* Con $r_j > 0$ y $x_j = 0$ la componente es $d_j = 0$. Poner $d_j = -r_j$, como con x_3 en la iteración 2 ($r_3 = \frac{18}{7}$), daría $d_3 < 0$ con $x_3 = 0$: cualquier paso positivo la haría negativa.
- *Calcular el paso máximo sin las básicas.* En la iteración 1 la única componente negativa era la básica, $d_3 = -14$. Sin ella, $\lambda_{\text{máx}}$ saldría infinito, la búsqueda en línea daría $\lambda = \frac{1}{2}$ y el punto $(3,2,-3)$, que no es factible.
- *Confundir w con el multiplicador.* Con la convención de este capítulo, el multiplicador de la igualdad es $v = -w$; en el ejemplo, $v = \frac{6}{5}$ y no $-\frac{6}{5}$.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: PROYECTAR EL PUNTO EN VEZ DE LA DIRECCIÓN

Hay una idea más simple que la de Rosen y que se le parece tanto que conviene distinguirlas. *Cuál es.* En vez de corregir la dirección, se da el paso sin corregirla — $y^k = x^k - \lambda\nabla f(x^k)$, como en el capítulo 6 — y después se devuelve el punto al conjunto factible tomando el punto de X más cercano a y^k:

$$x^{k+1} = \Pi_X(y^k), \qquad \Pi_X(y) = \arg\operatorname{Min}\{\|z-y\| : z \in X\}.$$

Qué ventaja tiene. El esquema no necesita formar explícitamente una matriz de restricciones activas. Si X es no vacío, cerrado y convexo, la proyección existe y es única, por el teorema del capítulo 2.
Dónde está el coste. Calcular $\Pi_X(y)$ exige resolver $\operatorname{Min}\{\|z-y\|^2 : z \in X\}$. Puede ser sencillo o costoso según X. Para una caja, se recorta cada coordenada a su intervalo; para una bola, se conserva el punto si está dentro y se reescala hasta el borde si está fuera; para el ortante no

negativo, se sustituyen por cero las componentes negativas. Estas proyecciones se calculan recorriendo las coordenadas. En un poliedro general se resuelve un problema cuadrático convexo; la elección entre este esquema y uno de conjunto activo depende del coste de ese cálculo y de la estructura del problema.

DE DÓNDE VIENE: DOS ARTÍCULOS DE PRINCIPIOS DE LOS SESENTA, Y UNA HOJA DE CÁLCULO

Los dos métodos de esta sección nacieron con tres años de diferencia y en el mismo ambiente: el de los primeros años de la programación matemática, cuando el símplex ya funcionaba y se buscaba cómo extenderlo a objetivos no lineales.
El método del gradiente proyectado es de J. B. ROSEN, que lo publicó en dos partes en el *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*: la primera, de 1960, para restricciones lineales, que es la que se ha expuesto aquí; la segunda, de 1961, para restricciones no lineales, donde la proyección deja de ser una matriz constante y hay que añadir un paso de corrección que devuelva el punto a la superficie curva.
El método del gradiente reducido es de Philip WOLFE, presentado en 1963. Wolfe ya había trabajado con Marguerite FRANK en 1956 en otro método para objetivos cuadráticos con restricciones lineales, que sustituía en cada iteración la función por su aproximación lineal y resolvía un problema lineal entero con el símplex. Esa idea de apoyarse en el símplex es la que reaparece, mucho más afinada, en el gradiente reducido.
La continuación tiene un final inesperado. En 1969 Abadie y Carpentier extendieron el método de Wolfe a restricciones no lineales con el nombre de *gradiente reducido generalizado*, y esa es la versión que acabó programándose en el resolvedor de las hojas de cálculo de uso común. Por ejemplo, la opción *GRG Nonlinear* de Solver en Excel utiliza esta familia de métodos; las opciones de símplex y evolutiva emplean otros algoritmos.

Qué se ha ganado. La pregunta del barco tiene dos respuestas que llevan al mismo puerto. La mejor dirección que le queda es la parte de su rumbo ideal que va a lo largo de la costa: la proyección de $-\nabla f$ sobre lo que las restricciones activas permiten, o, en el lenguaje de Wolfe, el gradiente reducido con las variables básicas arrastradas detrás. Y sabrá que la costa ha dejado de estorbarle cuando el multiplicador de esa restricción salga negativo: en ese momento la pared ya no sujeta, estorba, y soltarla da una dirección que se despega de ella hacia dentro. Cuando la proyección se anula y todos los multiplicadores son no negativos, el barco está en un punto KKT, y en un problema convexo eso es el puerto. Lo que queda abierto es el precio de esa comodidad: los dos métodos se han escrito para restricciones lineales, donde moverse a lo largo de una restricción no la viola nunca. Con restricciones curvas hay que corregir el punto en cada paso o cambiar de estrategia, y la sección siguiente cambia de estrategia: en vez de caminar pegado a las paredes, les pone precio.

7.3 Teoría lagrangiana

LA PREGUNTA

Una empresa con varias divisiones tiene un presupuesto común y limitado, y cada división quiere gastarlo en lo suyo. La dirección puede repartirlo ella misma, decidiendo cuánto le toca a cada una, lo que exige saberlo todo sobre todas. O puede hacer otra cosa: no imponer ningún reparto, ponerle a cada euro un **precio** y dejar que

> cada división gaste lo que le convenga pagando ese precio. Si el precio se elige bien, dicen, las divisiones por su cuenta acabarán gastando exactamente el presupuesto y el reparto será el mejor posible. ¿Es eso siempre posible? ¿Y qué se pierde cuando no lo es?

La respuesta ocupa la sección entera, y conviene adelantar su forma. Poner precio a una restricción en vez de imponerla es exactamente pasar de $f(x)$ a

$$L(x,u) = f(x) + u^T g(x),$$

donde u fija los precios y $u^T g(x)$ valora los excesos o las holguras. Si una solución factible minimiza también L y cumple la holgura complementaria, el teorema del punto de silla certifica su optimalidad. Buscar precios que den la mejor cota inferior es el **problema dual**. Con convexidad, Slater y existencia de un óptimo, se obtienen precios que certifican ese valor. Sin esas hipótesis puede haber un **salto de dualidad**, aunque la no convexidad no obliga a que lo haya. La programación entera ofrece ejemplos de ambos comportamientos.

A lo largo de la sección el problema es

$$(\mathrm{P}) \qquad \text{Minimizar } f(x) \quad \text{sujeto a:} \quad g(x) \le 0, \quad h(x) = 0, \quad x \in X,$$

con $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto **no vacío**, por lo demás cualquiera. Esa generosidad con X no es un adorno: es lo que permitirá tomar $X = \mathbb{Z}^n$ y aplicar toda esta teoría a la programación entera. En esta sección no se supone que f sea diferenciable ni que nada sea convexo, salvo donde se diga expresamente.

7.3.1 La función lagrangiana y los puntos de silla

Definición. La **función lagrangiana** de (P) es

$$L(x,u,v) = f(x) + u^T g(x) + v^T h(x), \qquad x \in X, \quad u \in \mathbb{R}^l,\ u \ge 0, \quad v \in \mathbb{R}^m.$$

LA IDEA: LA MULTA QUE SUSTITUYE A LA PROHIBICIÓN

La lagrangiana convierte una prohibición en un precio, y todo lo que sigue sale de esa lectura.

En (P), violar la restricción $g_i(x) \le 0$ está prohibido: los puntos que la violan sencillamente no existen. En L, en cambio, están permitidos, pero cuestan: quien elige un x con $g_i(x) > 0$ paga $u_i g_i(x)$, y quien deja holgura $g_i(x) < 0$ recibe $u_i|g_i(x)|$ como premio. La prohibición ha pasado a ser una tarifa.

Cuando las funciones son diferenciables, esta lectura ayuda a interpretar KKT:

- $u_i \ge 0$ dice que la tarifa es un precio, no una subvención. Un precio negativo animaría a violar la restricción, que es lo contrario de lo que se quiere.
- $u_i g_i(x) = 0$ dice que solo se cobra por lo que se agota: un recurso del que sobra tiene precio cero, porque nadie paga por algo que le sobra a todo el mundo.
- La estacionariedad anula la variación de primer orden de L. Para concluir que x minimiza L hacen falta condiciones adicionales, como convexidad.

Y la pregunta que abre la sección se convierte en esta: ¿existe siempre una tarifa que haga que una solución libre factible certifique también el valor restringido? Veremos

cuándo la convexidad y una cualificación garantizan ese certificado y qué puede ocurrir en ausencia de ellas.

Definición. Una terna $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ con $\bar{x} \in X$ y $\bar{u} \geq 0$ es un **punto de silla** de la lagrangiana si

$$L(\bar{x}, u, v) \;\leq\; L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) \;\leq\; L(x, \bar{u}, \bar{v}) \qquad \text{para todo } x \in X, \text{ todo } u \geq 0 \text{ y todo } v.$$

El nombre viene de la forma: en $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ la función es un *mínimo* si uno se mueve en x y un *máximo* si uno se mueve en (u, v), que es la forma de una silla de montar o de un puerto de montaña. La primera desigualdad dice que $(\bar{u}, \bar{v})$ maximiza $L(\bar{x}, \cdot, \cdot)$; la segunda, que $\bar{x}$ minimiza $L(\cdot, \bar{u}, \bar{v})$.

Teorema (caracterización del punto de silla)**.** Sean $\bar{x} \in X$ y $\bar{u} \geq 0$, $\bar{v} \in \mathbb{R}^m$. Entonces $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ es un punto de silla de L si y solo si se cumplen las tres condiciones siguientes:
1. $\bar{x}$ minimiza $L(\cdot, \bar{u}, \bar{v})$ sobre X;
2. $g(\bar{x}) \leq 0$ y $h(\bar{x}) = 0$, es decir, $\bar{x}$ es factible para (P);
3. $\bar{u}^T g(\bar{x}) = 0$.

Y si eso ocurre, $\bar{x}$ es un **mínimo global** de (P).

LA IDEA: POR QUÉ EL MÁXIMO EN u OBLIGA A SER FACTIBLE

Antes de la demostración conviene ver por qué la mitad izquierda de la desigualdad —la que dice que $\bar{u}$ maximiza— equivale a la factibilidad más la holgura complementaria. Es la parte que sorprende.
Fije $\bar{x}$ y mire la función $u \mapsto L(\bar{x}, u, \bar{v}) = f(\bar{x}) + u^T g(\bar{x}) + \dots$ Como función de u es *lineal*, con coeficientes $g(\bar{x})$, y hay que maximizarla sobre el ortante $u \geq 0$. Una función lineal sobre un ortante tiene máximo finito solo si todos sus coeficientes son ≤ 0: si algún $g_i(\bar{x})$ fuera positivo, bastaría hacer u_i tan grande como se quisiera para que L creciera sin límite. Luego que exista máximo obliga a $g(\bar{x}) \leq 0$, que es la factibilidad. Y una vez que todos los coeficientes son ≤ 0, el máximo de la función lineal se alcanza donde cada u_i multiplica a un coeficiente nulo o donde el propio u_i vale cero: eso es $\bar{u}^T g(\bar{x}) = 0$, la holgura complementaria.
Dicho en la metáfora del precio: el que pone el precio quiere cobrar lo máximo posible. Si el comprador se pasa del cupo, el vendedor sube el precio indefinidamente y le arruina; si el comprador deja holgura, al vendedor solo le queda poner precio cero para no regalar nada. El equilibrio está en gastar exactamente el cupo, o pagar cero por lo que sobra.

Parte 1: las tres condiciones implican punto de silla. Supuestas (1), (2) y (3), la desigualdad de la derecha es literalmente (1). Para la de la izquierda, sea $u \geq 0$ y v cualesquiera. Entonces

$$L(\bar{x}, u, v) = f(\bar{x}) + u^T g(\bar{x}) + v^T h(\bar{x}) = f(\bar{x}) + u^T g(\bar{x}) \;\leq\; f(\bar{x}),$$

donde se ha usado $h(\bar{x}) = 0$ para borrar el último término y, en la desigualdad, que $u \geq 0$ y $g(\bar{x}) \leq 0$ hacen que $u^T g(\bar{x})$ sea una suma de productos de un número no negativo por uno no positivo, luego ≤ 0. Y por (3) y (2), $L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) = f(\bar{x}) + 0 + 0 = f(\bar{x})$. Uniendo, $L(\bar{x}, u, v) \leq L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$.

Parte 2: punto de silla implica las tres condiciones (el núcleo). La desigualdad de la derecha es (1) sin más. De la de la izquierda, escrita explícitamente y cancelando $f(\bar{x})$, sale

$$(u-\bar{u})^T g(\bar{x}) + (v-\bar{v})^T h(\bar{x}) \;\leq\; 0 \qquad \text{para todo } u \geq 0 \text{ y todo } v.$$

Ahora se eligen valores concretos de u y v, y cada elección extrae una conclusión.
Elección A, para la factibilidad de las desigualdades. Tome $v = \bar{v}$ y $u = \bar{u} + e_i$, donde e_i es el vector con un 1 en la posición i y ceros en el resto; ese u es admisible porque $\bar{u} \geq 0$ y sumarle un vector no negativo lo deja no negativo. La desigualdad queda $e_i^T g(\bar{x}) \leq 0$, es decir, $g_i(\bar{x}) \leq 0$. Repitiendo para cada i, $g(\bar{x}) \leq 0$.
Elección B, para la factibilidad de las igualdades. Tome $u = \bar{u}$ y $v = \bar{v} + t\,e_j$ con $t \in \mathbb{R}$ cualquiera, positivo o negativo, lo cual es admisible porque v no tiene restricción de signo. La desigualdad queda $t\,h_j(\bar{x}) \leq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Si $h_j(\bar{x})$ fuera distinto de cero, eligiendo t con su mismo signo el producto sería positivo. Luego $h_j(\bar{x}) = 0$.
Elección C, para la holgura complementaria. Tome $u = 0$, que es admisible, y $v = \bar{v}$. La desigualdad queda $-\bar{u}^T g(\bar{x}) \leq 0$, es decir, $\bar{u}^T g(\bar{x}) \geq 0$. Por otro lado, $\bar{u} \geq 0$ y $g(\bar{x}) \leq 0$ dan $\bar{u}^T g(\bar{x}) \leq 0$. Las dos juntas obligan a $\bar{u}^T g(\bar{x}) = 0$.
Parte 3: $\bar{x}$ es mínimo global. Sea x cualquier punto factible de (P). Entonces

$$f(\bar{x}) \overset{(2),(3)}{=} L(\bar{x},\bar{u},\bar{v}) \overset{(1)}{\leq} L(x,\bar{u},\bar{v}) \;=\; f(x) + \bar{u}^T g(x) + \bar{v}^T h(x) \;\leq\; f(x),$$

donde la última desigualdad usa que x es factible ($g(x) \leq 0$, $h(x) = 0$) y que $\bar{u} \geq 0$.

Para reconstruirlo. La mitad derecha de la silla dice «al precio $\bar{u}$, el punto $\bar{x}$ es el que más conviene». La mitad izquierda dice «al punto $\bar{x}$, el precio $\bar{u}$ es el que más recauda», y eso, por ser L lineal en u sobre un ortante, obliga a factibilidad y holgura complementaria. Y de las tres condiciones sale la optimalidad global con la misma cadena de cuatro pasos del teorema de la p. 394.

Observación (qué añade este teorema a KKT, y qué le quita)**.** Compare el lector este teorema con el de suficiencia de KKT, teorema de la p. 394. La cadena final es la misma, palabra por palabra. La diferencia está en la condición (1).

En KKT, la condición (1) se obtenía de que $\nabla_x L(\hat{x}) = 0$ y de que L fuera convexa: se usaba cálculo diferencial para deducir que $\hat{x}$ minimiza L. Aquí la condición (1) se *pide directamente*, y con ello desaparecen las dos hipótesis: **no hace falta que f sea diferenciable ni que nada sea convexo**. El teorema del punto de silla vale para funciones con picos, para conjuntos X discretos y para problemas donde la palabra «gradiente» no significa nada.

Lo que se paga por esa generalidad es que la condición (1) deja de ser comprobable con una ecuación: minimizar $L(\cdot,\bar{u},\bar{v})$ sobre X es otro problema de optimización. En los casos en que ese problema es fácil — y en programación entera lo es a menudo, porque quitar las restricciones incómodas deja un problema con estructura —, esa es justamente la ventaja del método.

Y hay una asimetría que conviene subrayar: el teorema dice que *si* hay punto de silla, entonces hay óptimo global. No dice que el punto de silla exista. Encontrar cuándo existe es el asunto de las subsecciones que siguen: la convexidad con Slater y existencia de óptimo dará una garantía, mientras que fuera de ese marco habrá que estudiar cada caso.

DE DÓNDE VIENE: DE LA MECÁNICA AL REPARTO DE RECURSOS

El nombre viene de Joseph-Louis LAGRANGE, que en la *Mécanique analytique* de 1788 introdujo los multiplicadores para tratar sistemas mecánicos con ligaduras. El problema era físico y la lectura también: un cuerpo obligado a moverse sobre una superficie está sometido, además de a las fuerzas aplicadas, a una *fuerza de reacción* perpendicular a la superficie, que es la que impide que la atraviese. El multiplicador es el coeficiente de esa reacción respecto de la normal elegida; su magnitud depende también de la norma de ∇h_j. La ecuación $\nabla f + \sum v_j \nabla h_j = 0$ dice que las fuerzas aplicadas y las de reacción se equilibran. La caja de intuición de la pelota apoyada contra la pared, con la que empezó este capítulo, es literalmente la lectura de Lagrange.
La lectura como precio es del siglo XX y viene de la economía. La versión con puntos de silla y desigualdades es la de Kuhn y Tucker en 1951, que la conectaron explícitamente con los teoremas de minimax de la teoría de juegos: un punto de silla es un equilibrio entre dos jugadores, uno que elige x para minimizar y otro que elige u para maximizar, y la existencia de ese equilibrio implica dualidad fuerte y que ambos óptimos se alcanzan.
Y el uso práctico como precio de un recurso escaso lo popularizó Hugh EVERETT en 1963, en un trabajo sobre asignación óptima de recursos escritos precisamente en los términos de la pregunta que abre esta sección: en vez de repartir centralmente, poner precio y dejar decidir. Everett observó también el fenómeno incómodo, que es el salto de dualidad: hay repartos óptimos que ningún sistema de precios consigue producir.

7.3.2 La función dual, y las dos cosas que se cumplen siempre

Definición. La **función dual** de (P) es

$$\theta(u, v) = \operatorname{ínf}\big\{ L(x, u, v) : x \in X \big\} = \operatorname{ínf}\big\{ f(x) + u^T g(x) + v^T h(x) \ : \ x \in X \big\},$$

con valores en $[-\infty, +\infty)$, y el **problema dual lagrangiano** es

$$(\mathrm{D}) \qquad \text{Maximizar } \ \theta(u, v) \quad \text{sujeto a:} \quad u \geq 0.$$

Conviene leer la definición despacio, porque en dos líneas hay dos operaciones muy distintas. La primera, la que define θ, es una **minimización en** x con los precios congelados: fijado cuánto cuesta cada restricción, se busca el punto de X que menos paga en total. La segunda, la que define (D), es una **maximización en los precios**: entre todas las tarifas posibles, se busca la que hace subir más ese mínimo. Son las dos mitades del punto de silla de la subsección anterior, cada una convertida en un problema de optimización por su cuenta.

Y la lectura económica es la misma de siempre: quien fija los precios quiere recaudar lo máximo, sabiendo que quien compra reaccionará a esos precios eligiendo lo que más le conviene. El dual es el problema del que pone los precios.

Obsérvese la asimetría de la construcción, que es lo que la hace útil: en θ se ha tomado el ínfimo sobre X *sin* imponer $g(x) \leq 0$ ni $h(x) = 0$. Todas las restricciones incómodas han desaparecido y solo queda la pertenencia a X. Es la primera mitad del punto de silla, hecha para cada (u, v); el problema dual busca el (u, v) que hace de esa mitad la mejor posible.

Teorema (concavidad de la función dual)**.** La función θ es cóncava sobre el conjunto donde toma valores finitos, y ese conjunto es convexo. Esto vale **sean cuales sean** f, g, h y X.

La idea: un ínfimo de rectas siempre es cóncavo

La demostración cabe en un dibujo. Fije un punto $x \in X$ y mire la función

$$(u, v) \longmapsto f(x) + u^T g(x) + v^T h(x).$$

Con x fijo, los números $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son constantes: la función es *afín* en (u, v). Cada punto de X aporta, por tanto, un hiperplano.
Y θ es el ínfimo de todos ellos. Dibuje en el plano un puñado de rectas y marque, para cada abscisa, la más baja: la envolvente inferior de una familia de rectas es siempre una función cóncava, con forma de tejado hacia abajo, con picos en los cruces. No hace falta suponer nada sobre las rectas.
De ahí sale una consecuencia práctica de primer orden, y es la razón de ser de la relajación lagrangiana: **por horrible que sea el problema primal, el dual siempre es un problema de maximizar una función cóncava sobre un conjunto convexo**, es decir, un problema convexo: todo máximo local es global. Eso no hace necesariamente fácil resolverlo: cada evaluación de θ puede exigir un problema difícil, y la función puede no ser diferenciable. Además, su valor óptimo puede dejar un salto respecto del primal.

Sean (u_1, v_1) y (u_2, v_2) donde θ es finita, con $u_1, u_2 \geq 0$, y sea $\lambda \in [0, 1]$. Escriba $(u_\lambda, v_\lambda) = \lambda(u_1, v_1) + (1 - \lambda)(u_2, v_2)$, que cumple $u_\lambda \geq 0$ por ser combinación con coeficientes no negativos de vectores no negativos.
Paso 1: la lagrangiana es afín en los multiplicadores. Para cada $x \in X$ fijo,

$$L(x, u_\lambda, v_\lambda) = f(x) + u_\lambda^T g(x) + v_\lambda^T h(x) = \lambda\, L(x, u_1, v_1) + (1 - \lambda)\, L(x, u_2, v_2),$$

sin más que repartir $f(x) = \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(x)$ y usar la linealidad de los productos escalares en u y en v.
Paso 2: acotar cada sumando por su ínfimo (el núcleo). Por definición de ínfimo, $L(x, u_1, v_1) \geq \theta(u_1, v_1)$ y $L(x, u_2, v_2) \geq \theta(u_2, v_2)$ para *ese mismo* x. Multiplicando por $\lambda \geq 0$ y $1 - \lambda \geq 0$ y sumando,

$$L(x, u_\lambda, v_\lambda) \;\geq\; \lambda\, \theta(u_1, v_1) + (1 - \lambda)\, \theta(u_2, v_2).$$

Paso 3: tomar ínfimo en x. La desigualdad anterior vale para todo $x \in X$, y su lado derecho no depende de x: es una cota inferior del conjunto $\{L(x, u_\lambda, v_\lambda) : x \in X\}$. El ínfimo de ese conjunto es la mayor de sus cotas inferiores, luego

$$\theta(u_\lambda, v_\lambda) \;\geq\; \lambda\, \theta(u_1, v_1) + (1 - \lambda)\, \theta(u_2, v_2),$$

que es la definición de concavidad. Y de paso queda demostrado que el conjunto donde θ es finita es convexo: si los dos extremos dan valores finitos, la desigualdad acota el punto intermedio por debajo, y por arriba lo acota cualquier $L(x, u_\lambda, v_\lambda)$ con x fijo.

Para reconstruirla. Con x fijo, L es afín en los multiplicadores; θ es el ínfimo de todas esas funciones afines; y el ínfimo de una familia de funciones afines es cóncavo, porque la combinación de dos cotas inferiores es una cota inferior de la combinación. No se ha usado nada de f, de g, de h ni de X: por eso vale siempre.

Teorema (dualidad débil)**.** Sea x factible para (P) y sea (u, v) con $u \geq 0$. Entonces

$$\theta(u, v) \;\leq\; f(x).$$

En consecuencia,

$$\sup\{\theta(u, v) : u \geq 0\} \;\leq\; \text{ínf}\{f(x) : x \text{ factible}\}.$$

> Es una cadena de tres pasos y cada uno usa una cosa distinta.
>
> $$\theta(u, v) \overset{(a)}{\leq} L(x, u, v) \overset{(b)}{=} f(x) + u^T g(x) + v^T h(x) \overset{(c)}{\leq} f(x).$$
>
> En (a) se usa que $\theta(u, v)$ es el ínfimo de L sobre X y que $x \in X$ por ser factible: un ínfimo no supera a ninguno de los valores del conjunto. En (b), la definición de L. En (c), que $h(x) = 0$ borra el último término y que $u \geq 0$ junto con $g(x) \leq 0$ hace que $u^T g(x) \leq 0$. Como la desigualdad vale para todo par admisible, vale entre el supremo de la izquierda y el ínfimo de la derecha.

Observación (tres consecuencias que se usan todos los días)**.** La dualidad débil es corta de demostrar y muy productiva. Tres lecturas:

Primera: cada (u, v) admisible es un certificado. Calcular $\theta(u, v)$ para *un* multiplicador cualquiera da una cota inferior del óptimo del problema original, garantizada, sin haber resuelto el primal, aunque sí hay que calcular o acotar rigurosamente el ínfimo que define θ. Eso hace utilizable la relajación lagrangiana dentro de la ramificación y acotación del capítulo 5: la cota que sirve para podar un nodo.

Segunda: si los dos valores coinciden, los dos puntos son óptimos. Si se encuentran x factible y (u, v) admisible con $\theta(u, v) = f(x)$, entonces por dualidad débil ningún punto factible baja de $\theta(u, v) = f(x)$, luego x es óptimo; y ningún multiplicador sube de $f(x) = \theta(u, v)$, luego (u, v) también. Es el mismo argumento de certificación cruzada del capítulo 4.

Tercera: los infinitos se corresponden. Si el problema dual no está acotado superiormente, el primal no puede tener ningún punto factible, porque cualquiera de ellos acotaría el dual. Y si el primal no está acotado inferiormente, $\theta \equiv -\infty$. Es la misma tabla de casos que la del capítulo 4, con la misma demostración.

7.3.3 El salto de dualidad

Definición. Cuando los valores óptimos primal y dual son finitos, el **salto de dualidad** es la diferencia

$$\text{ínf}\{f(x) : x \text{ factible}\} \;-\; \sup\{\theta(u, v) : u \geq 0\},$$

que por el teorema anterior es siempre mayor o igual que cero.

Ejemplo (un salto de dualidad, con dos puntos)**.**

$$\text{Minimizar } f(x) = -x \quad \text{sujeto a:} \quad g(x) = x - \tfrac{3}{2} \leq 0, \qquad x \in X = \{0, 3\}.$$

El conjunto X tiene dos elementos; es el ejemplo más pequeño posible de un problema no convexo.

El primal. De los dos puntos de X, solo $x = 0$ cumple $x \le 3/2$; el otro da $3 > 3/2$. Luego el óptimo primal es $x^* = 0$ con $f(x^*) = 0$.

El dual. Para cada $u \ge 0$,

$$\theta(u) = \operatorname{Min}\{-x + u(x - \tfrac{3}{2}) : x \in \{0, 3\}\} = \operatorname{Min}\{-\tfrac{3}{2}u,\ -3 + \tfrac{3}{2}u\}.$$

Son dos rectas: una que baja con pendiente $-3/2$ y otra que sube con pendiente $3/2$. Su envolvente inferior sube hasta el corte y baja después, que es la concavidad del teorema de la p. 428 vista en el caso más simple. El corte está donde $-\frac{3}{2}u = -3 + \frac{3}{2}u$, es decir $3u = 3$, o sea $u^* = 1$, y ahí

$$\theta(u^*) = -\tfrac{3}{2}.$$

El salto. $0 - (-\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} > 0$. Para $u > 1$, el subproblema sí elige $x = 0$, pero su valor es $L(0, u) = -3u/2 < 0$: falla la holgura complementaria, pues $u\, g(0) = -3u/2 \neq 0$. Coincidir en el punto no basta para certificar el valor. La mejor cota es $-3/2$, a distancia $3/2$ del óptimo primal.

Comprobación. Evaluando θ en $u = 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2$ se obtiene $-3, -\frac{9}{4}, -\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}, -3$: sube hasta $u = 1$ y baja después, con el máximo en $-3/2$.

LA IDEA: EL SALTO SE VE DIBUJANDO EL CONJUNTO DE PARES (CONSUMO, COSTE)

Para una sola desigualdad y sin igualdades, podemos representar el salto en el plano. Se dibuja el conjunto

$$G = \{\,(g(x),\, f(x))\ :\ x \in X\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

un punto por cada elemento de X: en la abscisa, cuánto consume de la restricción; en la ordenada, cuánto cuesta.

El primal, en ese dibujo, es mirar solo los puntos con abscisa ≤ 0 (los factibles) y quedarse con el de ordenada más baja.

El dual, en ese dibujo, es otra cosa. Para u fijo, $\theta(u) = \text{ínf}\{z_2 + u\, z_1 : (z_1, z_2) \in G\}$, y el valor $z_2 + uz_1 = c$ describe una recta de pendiente $-u$. La recta de apoyo inferior, si el ínfimo se alcanza, toca G; $\theta(u)$ es la altura a la que corta al eje vertical. Maximizar en $u \ge 0$ es **buscar, entre todas las rectas de pendiente no positiva que dejan a G por encima, la que corta más arriba al eje vertical**.

Una función afín tiene el mismo ínfimo sobre G que sobre su envolvente convexa: en una combinación convexa, su valor es una media de los valores originales. Por eso **el dual no distingue G de su envolvente convexa**. En este ejemplo finito, convexificar permite interpolar entre los dos puntos y mejora el valor factible hasta la altura de la cota dual. Para conjuntos generales hay que considerar además cuestiones de cierre y de existencia de apoyos; la sola no convexidad no garantiza un salto positivo.

En el ejemplo de la p. 430, G tiene dos puntos: $(g(0), f(0)) = (-\frac{3}{2},\, 0)$ y $(g(3), f(3)) = (\frac{3}{2},\, -3)$. El primal se queda con el de la izquierda, a altura 0. La mejor recta que deja los dos por encima es la que pasa por los dos, y corta al eje vertical en $-3/2$. La diferencia entre 0 y $-3/2$ es el salto, y se mide en el eje vertical entre las alturas 0 y $-3/2$. La cuerda pasa por el punto factible; el salto no se mide entre ellos en su misma abscisa.

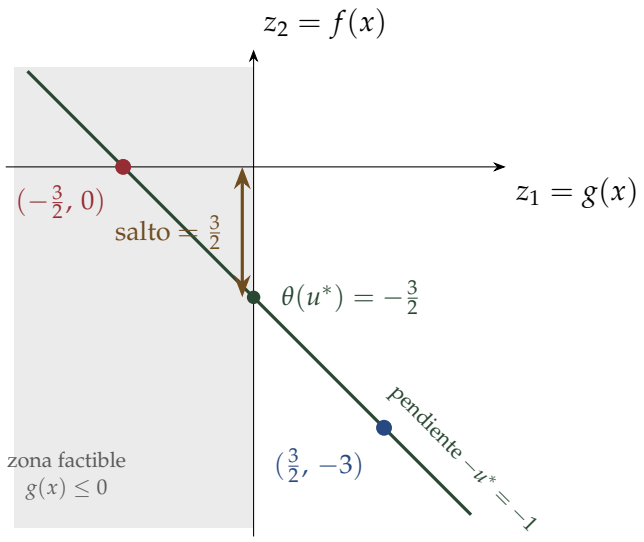


Figura 7.4: El salto de dualidad del ejemplo de la p. 430. Los dos puntos son el conjunto G de pares (consumo, coste). El primal se queda con el de la zona factible, a altura 0. El dual busca la recta de pendiente no positiva que deja los dos puntos por encima y corta lo más arriba posible al eje vertical: la mejor pasa por los dos y corta en $-3/2$. La distancia entre las dos alturas es el salto, y aparece porque G tiene dos puntos sueltos y no un borde inferior convexo.

Teorema (dualidad fuerte en el caso convexo)**.** Considere $\text{Min}\{f(x) : g_i(x) \leq 0,\ h_j(x) = 0,\ x \in X\}$ con X abierto y convexo, f y las g_i convexas y diferenciables, las h_j afines, y suponga que se cumple la condición de Slater. Si el problema tiene solución óptima x^*, entonces el salto de dualidad es cero y el dual alcanza su máximo:

$$f(x^*) = \text{Max}\{\theta(u, v) : u \geq 0\}.$$

Paso 1: obtener multiplicadores. Por el teorema de la p. 391, la condición de Slater garantiza KKT en ausencia de igualdades. Con igualdades afines, se parametriza el subespacio afín que definen y se aplica el mismo teorema al problema reducido: el dominio relativo sigue siendo abierto y convexo, y el punto de Slater sigue siendo estrictamente factible. Al volver a las coordenadas originales, el residuo del gradiente es normal a su espacio de direcciones y se expresa con los gradientes de las igualdades. Así, x^* es un punto KKT: existen $u^* \geq 0$ y v^* con

$$\nabla f(x^*) + \sum_i u_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_j v_j^* \nabla h_j(x^*) = 0, \qquad u_i^*\, g_i(x^*) = 0.$$

Paso 2: convertir la estacionariedad en minimalidad global (el núcleo). La función $x \mapsto L(x, u^*, v^*)$ es convexa, por ser suma de f convexa, de las g_i convexas multiplicadas por escalares no negativos y de funciones afines; y la estacionariedad dice $\nabla_x L(x^*, u^*, v^*) = 0$. Por el resultado del capítulo 6 sobre puntos críticos de funciones convexas, x^* minimiza $L(\cdot, u^*, v^*)$ sobre todo X. Es la condición (1) del teorema de la p. 426.

Paso 3: aplicar el teorema del punto de silla. Las condiciones (2) y (3) de ese teorema son la factibilidad de x^* y la holgura complementaria del paso 1. Luego (x^*, u^*, v^*) es punto

de silla, y por tanto

$$\theta(u^*, v^*) = \inf_{x \in X} L(x, u^*, v^*) = L(x^*, u^*, v^*) = f(x^*),$$

donde la última igualdad usa otra vez factibilidad y holgura complementaria.
Paso 4: cerrar con dualidad débil. Por el teorema de la p. 430, ningún multiplicador admisible da un valor mayor que $f(x^*)$. Como (u^*, v^*) alcanza ese valor, es óptimo del dual y el máximo se alcanza.

Para reconstruirla. Cuatro eslabones, cada uno con su hipótesis. La existencia del óptimo da el punto x^*; Slater da sus multiplicadores KKT; la convexidad convierte la estacionariedad en «x^* minimiza la lagrangiana en todo X», que es la mitad que faltaba para tener un punto de silla; y el teorema del punto de silla junto con la dualidad débil dicen que $\theta(u^*, v^*) = f(x^*)$ es a la vez la mejor cota y el valor óptimo. Sin convexidad, lo que se rompe es que el óptimo minimice la lagrangiana. En el ejemplo de los dos puntos, la holgura complementaria en $x^* = 0$ obliga a $u = 0$, y con $u = 0$ la lagrangiana $-x$ se minimiza en $x = 3$, no en x^*: no hay punto de silla, y el salto aparece.

Observación (el caso convexo sin diferenciabilidad)**.** El teorema se ha demostrado suponiendo f y las g_i diferenciables, porque así se apoya en lo ya demostrado. La dualidad fuerte vale igualmente sin esa hipótesis, y la demostración general es geométrica: se comprueba que bajo convexidad el conjunto $G + \{(z_1, z_2) : z_1 \geq 0,\ z_2 \geq 0\}$ del dibujo de la figura 7.4 es convexo, en el caso de una desigualdad y sin igualdades. Se obtiene un apoyo en su frontera a la altura del óptimo mediante el teorema de separación del capítulo 2, y el hiperplano separador resulta ser precisamente la recta de apoyo cuya ordenada en el origen es el óptimo dual. La condición de Slater es lo que garantiza que ese hiperplano no sea vertical, que es el caso degenerado en que el multiplicador del objetivo se anula, exactamente igual que en el paso de Fritz John a KKT de la sección 7.1.6. Los dos resultados son el mismo teorema dicho dos veces.

Ejemplo (el mismo problema, por KKT y por el dual)**.** Se retoma el ejemplo de la p. 400, omitiendo la restricción $x_1 \leq 5$, que no cambia su óptimo. Estudiamos $\operatorname{Min}\{x_1^2 + x_2^2 : x_1 + x_2 \geq 4\}$ por el camino dual. Con $g(x) = 4 - x_1 - x_2 \leq 0$ y $X = \mathbb{R}^2$,

$$L(x, u) = x_1^2 + x_2^2 + u\,(4 - x_1 - x_2).$$

Para u fijo, L es una parábola convexa en cada variable, y su mínimo se obtiene anulando las derivadas: $2x_1 - u = 0$ y $2x_2 - u = 0$, o sea $x_1 = x_2 = u/2$. Sustituyendo,

$$\theta(u) = 2\left(\frac{u}{2}\right)^2 + u\,(4 - u) = \frac{u^2}{2} + 4u - u^2 = 4u - \frac{u^2}{2}.$$

Es una parábola cóncava, como promete el teorema de la p. 428. Su máximo está donde $\theta'(u) = 4 - u = 0$, es decir en $u^* = 4$, con

$$\theta(u^*) = 16 - 8 = 8.$$

Y 8 es exactamente el valor óptimo primal calculado en el ejemplo de la p. 400. El salto es cero, como garantiza el teorema de la p. 432, porque el problema es convexo y cumple Slater

(el punto $(3,3)$ da $g = -2 < 0$). Además $u^* = 4$ coincide con el multiplicador de KKT y con el precio sombra $\phi'(4) = 4$ que allí se calculó: los tres números son el mismo.

Comprobación. Con $u = 4$, $L(x,4) = (x_1-2)^2 + (x_2-2)^2 + 8 \geq 8$. El punto factible $(2,2)$ alcanza esa cota: quedan certificados ambos óptimos.

El método en pasos para calcular un dual lagrangiano. El ejemplo anterior, el de los dos puntos y la mochila que vendrá siguen el mismo camino:

1. *Decidir qué se dualiza y qué se queda en X.* En X se dejan las restricciones que hacen fácil minimizar: signos, cotas, integridad, una estructura conocida. Las demás pasan al objetivo con precio.
2. *Escribir la lagrangiana con la convención de signos*: cada $g_i \leq 0$ con $u_i \geq 0$ y cada $h_j = 0$ con v_j libre, y reagrupar los términos en x.
3. *Minimizar en x con los multiplicadores fijos.* Si la lagrangiana se separa en variables, una a una. Si es convexa y derivable en $X = \mathbb{R}^n$, anulando el gradiente, como aquí. Si X es finito, comparando valores. Si es lineal en una variable no acotada, el ínfimo es $-\infty$ salvo que el coeficiente tenga el signo adecuado, y esa condición de signo pasa a ser una restricción del dual, como en la sección 7.3.4.
4. *Escribir θ con su dominio*: la fórmula, dónde es finita y, si hace falta, a trozos.
5. *Maximizar θ* con $u \geq 0$ y v libre: derivando si es derivable, mirando los picos si es lineal a trozos.
6. *Comparar con un valor primal factible.* Si coinciden, los dos son óptimos y el salto es cero; si no, la diferencia acota el salto. Si el minimizador de la lagrangiana en u^* es factible y cumple la holgura complementaria, es una solución primal.

Dónde se falla.

- *El signo de la restricción.* Si en el ejemplo anterior se escribe $g = x_1 + x_2 - 4$ en lugar de $4 - x_1 - x_2$, la cuenta da $\theta(u) = -\frac{u^2}{2} - 4u$, que en $u \geq 0$ es máxima en $u = 0$ con valor 0. La cota $0 \leq 8$ es verdadera y no sirve para nada: se ha estado premiando la infactibilidad en vez de cobrarla.
- *Poner signo a los multiplicadores de las igualdades.* Los v_j son libres. En el ejercicio del dual cuadrático (p. 452), exigir $v \geq 0$ lleva el máximo a $v = 0$, con cota 0, cuando el valor óptimo es 3 y se alcanza en $v = -2$.
- *Olvidar dónde vale $-\infty$.* Las restricciones del dual salen de ahí. Si se ignoran, se maximiza una fórmula fuera del sitio donde es la función dual.
- *Leer la solución primal en el dual cuando hay salto.* En la mochila del ejemplo de la p. 439, en $u^* = \frac{5}{3}$ minimizan la lagrangiana a la vez $(1,1)$, que no cabe, y $(0,1)$, que cabe pero vale 4 y no el óptimo 5. Con salto, el dual da una cota, no la solución.
- *Dar por nulo el salto sin haberlo ganado.* El teorema de dualidad fuerte pide convexidad, Slater y existencia de óptimo. Fuera de ahí, el salto se calcula o se acota, no se supone.

7.3.4 El dual de un problema lineal es un dual lagrangiano

Esta subsección es la que une el capítulo con el 4. Se hace dos veces, porque hay dos maneras de ver lo mismo: escribiendo las condiciones KKT de un problema lineal, y construyendo su dual lagrangiano.

Primero, las condiciones KKT de un problema lineal

Considere

$$\text{(PL)} \qquad \text{Minimizar } c^T x \quad \text{sujeto a:} \quad Ax \geq b, \quad x \geq 0.$$

Escrito en la forma estándar de este capítulo, las restricciones son $g_i(x) = b_i - a_i^T x \leq 0$ para $i = 1, \ldots, m$, donde a_i^T es la fila i de A, y $g_{m+j}(x) = -x_j \leq 0$ para $j = 1, \ldots, n$. Los gradientes son $\nabla f = c$, $\nabla g_i = -a_i$ y $\nabla g_{m+j} = -e_j$. Llamando $u \in \mathbb{R}^m$ a los multiplicadores del primer grupo y $\mu \in \mathbb{R}^n$ a los del segundo, las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker son

$$\underbrace{c - A^T u - \mu = 0,}_{\text{estacionariedad}} \qquad \underbrace{u_i\,(b_i - a_i^T x) = 0, \quad \mu_j\, x_j = 0,}_{\text{holgura complementaria}} \qquad \underbrace{u \geq 0,\ \mu \geq 0}_{\text{signo}}.$$

Y ahora se leen una por una.

La estacionariedad y el signo de μ son la factibilidad del dual. De $c - A^T u = \mu$ y $\mu \geq 0$ sale $A^T u \leq c$, que junto con $u \geq 0$ es exactamente el conjunto factible del problema dual del capítulo 4.

μ es el vector de costos reducidos. La componente j de μ vale $\mu_j = c_j - (a^j)^T u$, donde a^j es la columna j de A. Con u en el papel del vector dual w, eso es $c_j - w^T a_j = c_j - z_j$, la cantidad del capítulo 3. La condición $\mu \geq 0$ es el criterio de optimalidad del símplex.

Las dos holguras complementarias son las dos del capítulo 4. La primera dice que una restricción primal con holgura tiene variable dual nula; la segunda, que una variable primal positiva obliga a que su restricción dual se cumpla con igualdad, porque $\mu_j = 0$ significa $(a^j)^T u = c_j$.

Es decir: las condiciones KKT de un problema lineal **son** el teorema de la holgura complementaria. Aquel teorema, que en el capítulo 4 se demostró con las manos y la dualidad fuerte lineal, es el caso particular de este capítulo en que todas las funciones son afines.

Segundo, el dual lagrangiano de un problema lineal

Se toma $X = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$ y se dualiza *solo* el grupo $Ax \geq b$, dejando la no negatividad dentro de X. La lagrangiana es

$$L(x, u) = c^T x + u^T(b - Ax) = u^T b + \big(c - A^T u\big)^T x.$$

Obsérvese la reagrupación: se han juntado los términos con x y ha quedado una constante más una forma lineal en x. Eso es lo que hace calculable el ínfimo.

Proposición. La función dual de (PL) con $X = \{x \geq 0\}$ es

$$\theta(u) = \inf_{x \geq 0} \Big[u^T b + \big(c - A^T u\big)^T x\Big] = \begin{cases} u^T b & \text{si } A^T u \leq c, \\ -\infty & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y por tanto el problema dual lagrangiano es

$$\text{(D)} \qquad \text{Maximizar } b^T u \quad \text{sujeto a:} \quad A^T u \leq c, \quad u \geq 0,$$

que es el problema dual del capítulo 4.

El término $u^T b$ no depende de x y sale fuera del ínfimo. Queda por calcular $\inf_{x\geq 0} d^T x$ con $d = c - A^T u$, y ese ínfimo se separa componente a componente, porque la restricción $x \geq 0$ no mezcla variables:

$$\inf_{x\geq 0} \sum_{j=1}^{n} d_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \inf_{x_j \geq 0} d_j x_j.$$

Caso $d_j \geq 0$. El producto $d_j x_j$ es no negativo y vale 0 en $x_j = 0$: el ínfimo es 0 y se alcanza.
Caso $d_j < 0$. Tomando $x_j = t$ y haciendo $t \to +\infty$, el producto $d_j t$ tiende a $-\infty$: el ínfimo es $-\infty$.
Luego el ínfimo total es 0 si todas las componentes de d son no negativas, es decir si $c - A^T u \geq 0$, o sea $A^T u \leq c$; y es $-\infty$ si alguna es negativa. Como maximizar θ no puede elegir nunca un punto donde valga $-\infty$ habiendo otros donde vale un número, el problema dual se reduce a maximizar $u^T b$ sobre $\{u \geq 0 : A^T u \leq c\}$.

LA IDEA: DE DÓNDE SALEN LAS RESTRICCIONES DEL DUAL

La demostración anterior explica una cosa que en el capítulo 4 había que aprenderse: por qué el dual de un problema de mínimo con $x \geq 0$ tiene restricciones $A^T u \leq c$, y no $=$ ni $\geq$.
La razón es que **las restricciones del dual son la condición para que la función dual no valga menos infinito**. El precio u es libre mientras el «coste neto» de cada actividad, $c_j - (a^j)^T u$, siga siendo no negativo; en cuanto uno de esos costes netos se vuelve negativo, al comprador le conviene comprar cantidad infinita de esa actividad y el problema relajado se desploma. El dual no impone $A^T u \leq c$ por gusto: lo impone porque fuera de ahí no hay nada que maximizar.
Y de paso queda claro por qué la elección de X importa. Si se dualizaran también las restricciones $x \geq 0$, metiendo $X = \mathbb{R}^n$, aparecerían los multiplicadores μ y la función dual sería finita solo cuando $c - A^T u - \mu = 0$ exactamente, que es la estacionariedad de la página anterior. Se obtiene el mismo dual con los costos reducidos escritos aparte. Qué se dualiza y qué se deja dentro de X es una decisión, y en la subsección siguiente será *la* decisión.

Ejemplo (los dos duales sobre los mismos números)**.**

$$\text{Minimizar } 4x_1 + 3x_2 \quad \text{sujeto a:} \quad 2x_1 + x_2 \geq 8, \quad x_1 + 3x_2 \geq 9, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Por el símplex, o gráficamente. El óptimo está en el corte de las dos restricciones: resolviendo $2x_1 + x_2 = 8$ y $x_1 + 3x_2 = 9$ se obtiene $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, con valor $12 + 6 = 18$.

Por KKT. Las dos restricciones están activas y las de no negatividad no. La estacionariedad, con $\nabla f = (4,3)^T$, $\nabla g_1 = (-2,-1)^T$ y $\nabla g_2 = (-1,-3)^T$, es

$$(4,3)^T + u_1(-2,-1)^T + u_2(-1,-3)^T = (0,0)^T \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2u_1 + u_2 = 4 \\ u_1 + 3u_2 = 3. \end{cases}$$

De la primera, $u_2 = 4 - 2u_1$; sustituyendo en la segunda, $u_1 + 12 - 6u_1 = 3$, es decir $5u_1 = 9$, de donde

$$u_1 = \tfrac{9}{5}, \qquad u_2 = 4 - \tfrac{18}{5} = \tfrac{2}{5},$$

los dos positivos.

Por el dual lagrangiano. Por la proposición de la p. 435, el dual es

$$\text{Maximizar } 8u_1 + 9u_2 \quad \text{sujeto a:} \quad 2u_1 + u_2 \le 4, \quad u_1 + 3u_2 \le 3, \quad u_1, u_2 \ge 0,$$

cuyo óptimo es el corte de sus dos restricciones, $u = (\frac{9}{5}, \frac{2}{5})$, con valor

$$8 \cdot \tfrac{9}{5} + 9 \cdot \tfrac{2}{5} = \tfrac{72}{5} + \tfrac{18}{5} = \tfrac{90}{5} = 18.$$

Los tres caminos dan lo mismo, y los multiplicadores de KKT son punto por punto la solución óptima del dual. Ese es el contenido de esta subsección en un ejemplo: no hay dos teorías de la dualidad, hay una.

Comprobación. Resolviendo el primal con un algoritmo de programación lineal se obtiene $x^* = (3,\ 2)$ con valor 18; resolviendo el dual, $u^* = (1{,}8,\ 0{,}4)$ con valor 18; y resolviendo el sistema 2×2 de la estacionariedad, $u = (1{,}8,\ 0{,}4)$.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: EL DUAL DE WOLFE

Hay otra forma de construir un problema dual, anterior en el tiempo y más fácil de escribir, que conviene conocer para saber por qué no es la que se ha adoptado aquí.

Cuál es. En vez de definir el dual con un ínfimo, se define con las condiciones de estacionariedad puestas como restricciones:

$$\text{Maximizar } L(x,u,v) \quad \text{sujeto a:} \quad \nabla_x L(x,u,v) = 0, \quad u \ge 0,$$

con variables $x \in \mathbb{R}^n$, u y v, para funciones diferenciables; todas las restricciones que se dualizan deben estar incluidas en L. En el caso lineal con $x \ge 0$, dualizar también la no negatividad introduce $\mu \ge 0$ y da $c - A^T u - \mu = 0$, equivalente a $A^T u \le c$. En el caso cuadrático convexo se obtiene también un dual explícito.

Qué ventaja tiene. Que está escrito, sin ínfimos ni funciones definidas por optimización. Se puede pasar a un resolvedor tal cual, y para problemas cuadráticos convexos es una forma muy manejable.

Qué la hunde como teoría general. Tres cosas. La primera, que necesita diferenciabilidad, y la mitad del interés de esta sección está en problemas donde no la hay. La segunda, que su conjunto factible — los puntos que cumplen $\nabla_x L = 0$ — no es convexo en general, de modo que se pierde la propiedad más valiosa del dual lagrangiano, que es ser siempre un problema convexo. La tercera, que sus teoremas de dualidad débil y fuerte exigen convexidad del primal, mientras que la dualidad débil lagrangiana no exige nada, y es justamente esa gratuidad la que hace posible la relajación lagrangiana de la subsección siguiente.

Sigue usándose, y con provecho, en programación cuadrática convexa.

7.3.5 Relajación lagrangiana

Aquí la teoría se paga sola. La idea es del capítulo 5, con la maquinaria de este.

Un problema entero se escribe muchas veces con dos grupos de restricciones muy distintos: unas que dan al problema una estructura reconocible — de transporte, de asignación, de flujo, de mochila — y otras, pocas, que la estropean y que son las que lo hacen difícil. La relajación lagrangiana consiste en **dualizar exactamente esas**, dejándolas como un precio en el objetivo, y quedarse con un problema que se sabe resolver.

Formalmente, se parte de

$$\text{(PE)} \qquad \text{Minimizar } c^T x \quad \text{sujeto a:} \quad Ax \le b \ \text{(las incómodas)}, \qquad x \in X,$$

donde $X = \{x \in \mathbb{Z}^n : Dx \leq d,\ x \geq 0\}$ recoge las restricciones fáciles y la integridad. La función dual es

$$\theta(u) = \text{ínf}\{c^T x + u^T(Ax - b) \ :\ x \in X\} = \text{ínf}\{(c + A^T u)^T x : x \in X\} - u^T b,$$

que es un problema entero *sobre* X, es decir, con la estructura buena y sin las restricciones incómodas, y con el mismo tipo de objetivo lineal pero con costes modificados. Y por dualidad débil, cada $u \geq 0$ da una cota inferior del óptimo de (PE).

LA IDEA: POR QUÉ ESTO ES UNA RELAJACIÓN Y QUÉ LA DISTINGUE DE LA LINEAL

En el capítulo 5 la manera de obtener cotas era la **relajación lineal**: borrar la exigencia de integridad y resolver el problema continuo con el símplex. Aquí se hace lo contrario: se conserva la integridad y se borran unas restricciones, cobrando por incumplirlas. Las dos dan cotas inferiores utilizables para podar. La lineal conserva el objetivo y amplía el conjunto factible; la lagrangiana amplía el conjunto y cambia el objetivo, pero en cada punto originalmente factible cumple $L(x,u) \leq c^T x$. Esa desigualdad es la que garantiza su cota. La diferencia está en qué se sacrifica. La lineal sacrifica la integridad, que suele ser lo más valioso del modelo. La lagrangiana la conserva y sacrifica un puñado de restricciones, poniendo en su lugar un precio que las desanima. Hay una tercera diferencia, práctica: la relajación lineal se resuelve una vez, mientras que la lagrangiana hay que resolverla para cada u, y encima hay que buscar el mejor u. Eso cuesta. Lo que se gana a cambio es una cota que puede ser mucho mejor, y el resto de la subsección dice exactamente cuándo lo es y cuándo no.

Teorema (qué vale exactamente la mejor cota lagrangiana)**.** Si X es finito y no vacío y $\{x \in H(X) : Ax \leq b\}$ es no vacío, entonces

$$\text{Max}_{u \geq 0}\ \theta(u) \ =\ \text{Min}\{c^T x \ :\ Ax \leq b,\ x \in H(X)\},$$

donde $H(X)$ es la envolvente convexa de X.

Paso 1: el ínfimo sobre X y sobre su envolvente convexa coinciden. La función $x \mapsto c^T x + u^T(Ax - b)$ es afín. El mínimo de una función afín sobre un politopo se alcanza en un punto extremo, y los puntos extremos de $H(X)$ pertenecen a X — resultados los dos del capítulo 2. Luego

$$\theta(u) = \text{Min}_{x \in X}\big[c^T x + u^T(Ax - b)\big] = \text{Min}_{x \in H(X)}\big[c^T x + u^T(Ax - b)\big].$$

Paso 2: escribir la convexificación como un problema lineal. Enumere $X = \{x^1, \ldots, x^q\}$. Un punto de $H(X)$ se escribe como $x = \sum_t \lambda_t x^t$, con $\lambda_t \geq 0$ y $\sum_t \lambda_t = 1$. El problema de la derecha es, por tanto,

$$\text{Min} \sum_{t=1}^{q} (c^T x^t)\lambda_t \quad \text{sujeto a:} \quad \sum_{t=1}^{q} (Ax^t)\lambda_t \leq b, \quad \sum_{t=1}^{q} \lambda_t = 1, \quad \lambda \geq 0.$$

Es factible por hipótesis y su conjunto factible es compacto, de modo que tiene un óptimo finito.
Paso 3: tomar su dual lineal. Con $u \geq 0$ para las desigualdades y $\beta \in \mathbb{R}$ para la igualdad,

el dual se escribe

$$\text{Max } \beta - u^T b \quad \text{sujeto a:} \quad \beta \leq (c + A^T u)^T x^t \quad (t = 1, \ldots, q), \qquad u \geq 0.$$

Fijado u, el mejor β es el menor de esos q valores. El objetivo resultante es precisamente $\theta(u)$. La dualidad fuerte lineal garantiza que el dual alcanza el mismo valor finito que el primal, y prueba la igualdad del enunciado.

Para reconstruirla. Una función afín tiene el mismo mínimo sobre X que sobre su envolvente convexa, así que la función dual no distingue una de otra. Escribiendo los puntos de $H(X)$ con pesos λ_t, el problema de la derecha es un problema lineal en los pesos; su dual lineal, una vez elegido el mejor β, es exactamente $\text{Max}_{u \geq 0}\, \theta(u)$; y la dualidad fuerte lineal del capítulo 4 iguala los dos valores. La relajación lagrangiana hereda así toda su potencia de la dualidad lineal.

Observación (la lectura del teorema, que es lo que decide qué se dualiza)**.** El teorema dice que la mejor cota lagrangiana es el óptimo del problema en el que X se ha sustituido por su envolvente convexa. De ahí salen las tres reglas prácticas del método.

Primera: la mejor cota lagrangiana nunca es peor que la lineal. La relajación lineal resuelve sobre $\{x : Ax \leq b,\ Dx \leq d,\ x \geq 0\}$, y $H(X)$ está contenida en $\{x : Dx \leq d,\ x \geq 0\}$ porque este último es convexo y contiene a X. Minimizar sobre un conjunto menor da un mínimo mayor o igual, y en un problema de mínimo, mayor significa mejor cota.

Segunda: es estrictamente *mejor solo si $H(X)$ es estrictamente menor.* Si el poliedro $\{x : Dx \leq d,\ x \geq 0\}$ ya tiene todos sus vértices enteros — por ejemplo, si D es totalmente unimodular y d es entero, como en el capítulo 5 —, entonces coincide con $H(X)$ y la cota lagrangiana es exactamente la lineal. A eso se le llama *propiedad de integridad*, y cuando el subproblema la tiene, dualizar no gana nada en calidad de cota.

Tercera: elegir qué se dualiza exige comparar coste y calidad de la cota. Conviene conservar un subproblema fácil. Si además su envolvente convexa mejora la relajación continua utilizada, la mejor cota puede aumentar; para asegurar una mejora estricta no basta la inclusión estricta, pues el objetivo podría minimizarse en una zona común a ambos conjuntos.

En la relajación del viajante de Held y Karp, se conservan los llamados *1-árboles*: un árbol generador sobre todos los vértices salvo uno distinguido, más dos aristas que conectan ese vértice al árbol. Un recorrido del viajante es un 1-árbol con todos los grados iguales a dos. Al dualizar las condiciones de grado, el subproblema busca un 1-árbol de coste mínimo con costes modificados, que se calcula mediante un árbol generador mínimo y la elección de dos aristas. La comparación con una cota lineal depende de qué formulación se relaje; no se deduce de afirmar que el politopo de 1-árboles sea no entero. [1]

Ejemplo (una mochila, con su salto medido)**.**

$$\text{Maximizar } 5x_1 + 4x_2 \quad \text{sujeto a:} \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 4, \qquad x_1, x_2 \in \{0, 1\}.$$

Escrito como mínimo, $\text{Min}\{-5x_1 - 4x_2\}$ con las mismas restricciones. Se dualiza la restricción de capacidad y se deja $X = \{0, 1\}^2$.

[1] M. Held y R. M. Karp, *The Traveling-Salesman Problem and Minimum Spanning Trees*, Operations Research 18 (1970), pp. 1138–1162, doi:10.1287/opre.18.6.1138.

El óptimo entero. Solo hay cuatro puntos. El $(1,1)$ consume $5 > 4$ y no es factible; los otros tres dan valores 0, 5 y 4. Luego el óptimo es $x^* = (1,0)$ con valor 5, es decir, -5 en la forma de mínimo.

La función dual. Para $u \geq 0$,

$$\begin{aligned}\theta(u) &= \mathrm{Min}_{x\in\{0,1\}^2}\big[-5x_1 - 4x_2 + u(3x_1 + 2x_2 - 4)\big] \\ &= -4u + \mathrm{Min}_{x\in\{0,1\}^2}\big[(3u-5)x_1 + (2u-4)x_2\big].\end{aligned}$$

La minimización se separa en las dos variables, porque el conjunto $\{0,1\}^2$ es un producto y el objetivo no las mezcla:

$$\theta(u) = -4u + \mathrm{Min}\{0,\, 3u-5\} + \mathrm{Min}\{0,\, 2u-4\}.$$

Cada mínimo elige $x_j = 1$ si su coeficiente es negativo y $x_j = 0$ si es positivo. Los cambios de signo están en $u = 5/3$ y en $u = 2$, de modo que

$$\theta(u) = \begin{cases} u - 9 & \text{si } 0 \leq u \leq \frac{5}{3}, \\ -2u - 4 & \text{si } \frac{5}{3} \leq u \leq 2, \\ -4u & \text{si } u \geq 2. \end{cases}$$

Es lineal a trozos y cóncava, con cambios de pendiente en $5/3$ y en 2: crece con pendiente 1, luego decrece con pendiente -2 y luego con pendiente -4. El máximo está en el primer pico,

$$u^* = \tfrac{5}{3}, \qquad \theta(u^*) = \tfrac{5}{3} - 9 = -\tfrac{22}{3} \approx -7{,}33.$$

El salto. $-5 - \big(-\frac{22}{3}\big) = \frac{22}{3} - 5 = \frac{7}{3} \approx 2{,}33$. Hay salto, que se ha comprobado calculando ambos valores; la no convexidad por sí sola no lo imponía.

Y la cota no mejora a la lineal. La relajación lineal es $\mathrm{Max}\{5x_1 + 4x_2 : 3x_1 + 2x_2 \leq 4,\ 0 \leq x \leq 1\}$, cuyo óptimo es $x = (2/3, 1)$ con valor $4 + \frac{10}{3} = \frac{22}{3}$. Coincide con la cota lagrangiana, y el teorema de la p. 438 dice por qué: aquí $X = \{0,1\}^2$ y $H(X) = [0,1]^2$, que es exactamente el conjunto de la relajación lineal. El subproblema tiene la propiedad de integridad y dualizar la capacidad no gana nada.

Comprobación. Evaluando θ en $u = 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ 2,\ 3$ se obtiene $-9, -\frac{17}{2}, -8, -\frac{23}{3}, -\frac{22}{3}, -8, -12$: crece hasta $u = 5/3$ y decrece después. La relajación lineal resuelta numéricamente da $x = (0{,}6667,\ 1)$ con valor 7,3333, que es $22/3$.

Observación (cómo se maximiza θ en la práctica)**.** La figura enseña también la dificultad del método: θ es cóncava pero **no diferenciable**, con picos justamente en los valores de u donde cambia la solución óptima del subproblema, que suelen ser los interesantes. Por eso no se puede usar el método del gradiente del capítulo 6.

Lo que se usa es el método del *subgradiente*: si x_u es una solución óptima del subproblema para el multiplicador u, entonces el vector $Ax_u - b$ cumple, para todo $u' \geq 0$,

$$\theta(u') \ \leq\ \theta(u) + (Ax_u - b)^T(u' - u),$$

que es la desigualdad del gradiente al revés, propia de las funciones cóncavas, y que se comprueba en una línea: $\theta(u') \leq c^T x_u + (u')^T(Ax_u - b) = \big[c^T x_u + u^T(Ax_u - b)\big] + (u' -$

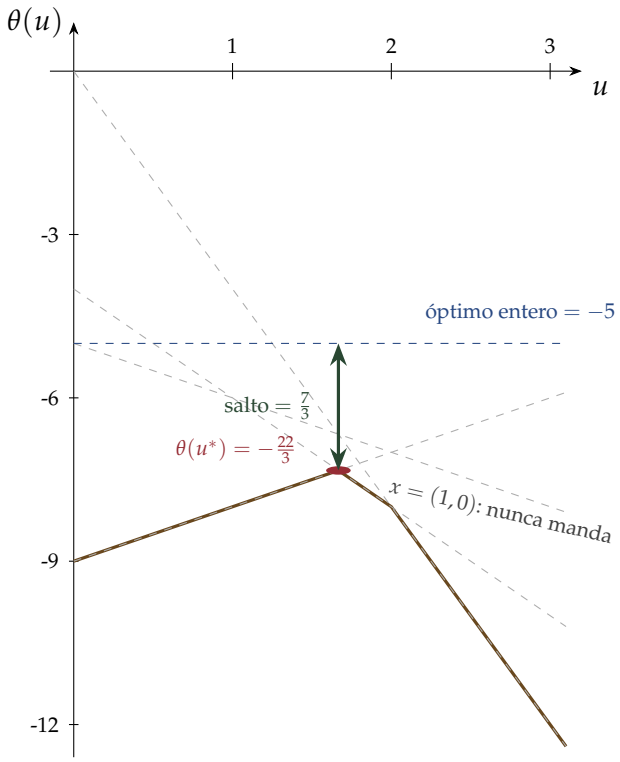


Figura 7.5: La función dual del ejemplo de la p. 439. Cada punto de $X = \{0,1\}^2$ aporta una recta (a puntos) y θ es la envolvente inferior de las cuatro, lineal a trozos y cóncava, tal como garantiza el teorema de la p. 428. Los tres tramos los dan, por orden, $(1,1)$, $(0,1)$ y $(0,0)$; el máximo está en el pico $u^* = 5/3$, donde se cruzan las rectas de $(0,1)$ y $(1,1)$, y se queda $7/3$ por debajo del óptimo entero. La recta de $(1,0)$ queda siempre por encima y no llega a formar parte de la envolvente: que un punto de X no aparezca nunca como minimizador del subproblema es lo normal, no una anomalía.

$u)^T(Ax_u - b)$, donde la primera desigualdad es la definición de θ como mínimo y el corchete es $\theta(u)$ por ser x_u óptimo. Con eso se itera

$$u^{k+1} = \operatorname{Max}\{0,\ u^k + \lambda_k\,(Ax_{u^k} - b)\},$$

donde el máximo componente a componente devuelve el punto al ortante. El vector $Ax_u - b$ se llama, con esta convención cóncava, *supergradiente*; su opuesto es un subgradiente de $-\theta$. La regla requiere escoger las longitudes de paso con hipótesis de convergencia adecuadas y no garantiza aumentar θ en cada iteración. La actualización tiene una lectura económica limpia: si la solución del subproblema consume más de lo permitido, es decir $Ax_u - b > 0$, el precio sube; si deja holgura, baja.

Qué se ha ganado. La pregunta de la empresa con divisiones tiene ahora un lenguaje exacto. Poner un precio u a cada euro y dejar que cada división decida por su cuenta es calcular $\theta(u)$: minimizar la lagrangiana sin la restricción común. Buscar el mejor precio es resolver el dual, que siempre es un problema cóncavo, y cualquier precio, bueno o malo, da una cota del mejor reparto posible (dualidad débil). ¿Es siempre posible que el precio consiga el reparto óptimo? Cuando el problema es convexo, cumple Slater y tiene óptimo, sí: hay un precio que forma punto de silla con el reparto óptimo, y entonces las divisiones, respondiendo a ese precio, pueden elegir el reparto que cumple el presupuesto y lo certifica. Fuera de ahí, no siempre: puede quedar un salto, y el salto es exactamente lo que se pierde, como en la mochila, donde ningún precio hace que la elección libre sea a la vez factible y óptima. Y la regla del subgradiente es el ajuste que haría la dirección sin saberlo todo: subir el precio de lo que se sobreconsume y bajar el de lo que sobra.

7.4 Ejercicios

Ejercicio 7.1. *Karush-Kuhn-Tucker sobre un problema lineal ya resuelto* DIC 2018

Se considera

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2 \quad \text{sujeto a:} \quad \begin{array}{ll} 6x_1 + 4x_2 \le 24, & x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -x_1 + x_2 \le 1, & x_2 \le 2, \qquad x_1, x_2 \ge 0, \end{array}$$

cuya solución óptima es $x^* = \left(3, \frac{3}{2}\right)$ con $z^* = 21$. Escriba las condiciones necesarias de primer orden de Karush-Kuhn-Tucker y compruebe si la solución óptima las verifica. El enunciado completo del que sale este apartado, con la resolución gráfica, la tabla, el dual y el corte, está en E.9.1.

Resolución. *La idea.* Comprobar KKT en un punto dado no es resolver un sistema KKT: el punto ya está, y lo único que falta son los multiplicadores. La holgura complementaria anula los de las restricciones que sobran, la estacionariedad deja un sistema pequeño para las que aprietan, y todo se decide al final en el signo. Como el problema es lineal, se sabe además de antemano qué tiene que salir: sus óptimos son siempre puntos KKT (teorema de la p. 392), de modo que un multiplicador negativo no significaría «no cumple KKT», sino que hay un error de signo en el planteamiento.

Primer movimiento: pasar a mínimo y ordenar los signos. Todas las condiciones de este capítulo están escritas para Min y para restricciones $g_i(x) \le 0$. Un problema de máximo se convierte en uno de mínimo cambiando el signo del objetivo, y con eso el gradiente también cambia de signo. Escribiendo $f(x) = -5x_1 - 4x_2$,

$$\nabla f(x) = (-5,\, -4)^T \qquad \text{en todo punto, porque } f \text{ es lineal.}$$

Las seis restricciones, en la forma $g_i(x) \le 0$, tienen gradientes constantes

$$\nabla g_1 = (6,4)^T, \qquad \nabla g_2 = (1,2)^T, \qquad \nabla g_3 = (-1,1)^T,$$

$$\nabla g_4 = (0,1)^T, \qquad \nabla g_5 = (-1,0)^T, \qquad \nabla g_6 = (0,-1)^T,$$

donde g_5 y g_6 son $-x_1 \le 0$ y $-x_2 \le 0$.

Qué está activo. Se evalúa cada restricción en $x^* = (3, \frac{3}{2})$:

g_1 :	$18 + 6 = 24$	activa	
g_2 :	$3 + 3 = 6$	activa	
g_3 :	$-3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} < 1$	inactiva, holgura $\frac{5}{2}$	$\Rightarrow u_3 = 0$
g_4 :	$\frac{3}{2} < 2$	inactiva, holgura $\frac{1}{2}$	$\Rightarrow u_4 = 0$
g_5, g_6 :	$x_1 = 3 > 0,\ x_2 = \frac{3}{2} > 0$	inactivas	$\Rightarrow u_5 = u_6 = 0$

La holgura complementaria ya ha resuelto cuatro de los seis multiplicadores sin ninguna cuenta. Ese es siempre el primer paso: mirar qué sobra y anular su precio.

La estacionariedad. Quedan u_1 y u_2, y la condición es

$$(-5,-4)^T + u_1(6,4)^T + u_2(1,2)^T = (0,0)^T \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 6u_1 + u_2 = 5 \\ 4u_1 + 2u_2 = 4. \end{cases}$$

La segunda ecuación se simplifica dividiendo por dos: $2u_1 + u_2 = 2$. Restando esta de la primera desaparece u_2 y queda $4u_1 = 3$, es decir

$$u_1 = \tfrac{3}{4}, \qquad u_2 = 2 - 2 \cdot \tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{2}.$$

Comprobación de las cuatro condiciones. Factibilidad: x^* cumple las seis restricciones, dos con igualdad. Signo: $u = (\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0) \ge 0$. Holgura complementaria: los multiplicadores no nulos corresponden a restricciones activas. Y la estacionariedad se verifica sustituyendo, $6(\frac{3}{4}) + \frac{1}{2} = 5$ y $4(\frac{3}{4}) + 2(\frac{1}{2}) = 4$. Luego x^* **sí** verifica las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

Otra vía (leer los multiplicadores sin resolver el sistema). El problema es lineal, de modo que por la sección 7.3.4 sus multiplicadores son la solución óptima del problema dual, es decir, los precios sombra. Si ya se han calculado esos precios — y en el problema del que sale este apartado se calculan —, los multiplicadores ya están calculados: $u_1 = \frac{3}{4}$ y $u_2 = \frac{1}{2}$ son las tasas de mejora del objetivo al aumentar cada recurso, mientras se conserve la base óptima. La comprobación de la estacionariedad es entonces la comprobación de que el dual es factible con igualdad en las dos columnas básicas.

Y al revés: quien resuelva primero el sistema KKT obtiene los precios sombra de propina. Los dos cálculos son el mismo.

Lo que este ejercicio deja es la disciplina de orden: en un problema con seis restricciones y dos variables no se plantea un sistema de ocho incógnitas, se mira primero qué está activo

y la holgura complementaria hace desaparecer la mayor parte. Y deja la comprobación de que en un problema lineal la teoría de este capítulo y la del 4 dan literalmente los mismos números.

Dónde se falla.

- *No pasar a mínimo.* Con $\nabla f = (5,4)^T$ en lugar de $(-5,-4)^T$, el mismo sistema da $u_1 = -\frac{3}{4}$ y $u_2 = -\frac{1}{2}$, y se concluye que el óptimo no cumple KKT. La conclusión choca con el teorema de las restricciones afines, y eso es lo que delata el error.
- *Dar por activa una restricción que no lo es.* Con $-x_1 + x_2 \le 1$ o $x_2 \le 2$ entre las activas aparecen más incógnitas que ecuaciones y, sobre todo, un multiplicador sin derecho a existir: su restricción tiene holgura ($\frac{5}{2}$ y $\frac{1}{2}$).
- *Olvidar las restricciones de no negatividad en la lista.* Aquí no pasa nada porque están inactivas, pero en el ejercicio siguiente son las que equilibran el gradiente.

Ejercicio 7.2. *Los multiplicadores son los costos reducidos* JUN 2018

Se considera

$$\text{Maximizar } 2x_1 + x_2 - x_3 \quad \text{sujeto a:} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\le \tfrac{17}{2}, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &\le \tfrac{9}{2}, \end{aligned} \qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0,$$

cuya solución óptima es $x^* = \left(\frac{17}{2}, 0, 0\right)$ con $z^* = 17$, y cuya tabla final tiene la fila de $z_j - c_j$ igual a $(0,\ 3,\ 3,\ 2,\ 0)$ para las columnas x_1, x_2, x_3, h_1, h_2. Escriba las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker, compruebe que se cumplen e interprete los multiplicadores obtenidos. El enunciado completo está en E.9.3.

Resolución. *La idea.* Es la misma comprobación que en el ejercicio anterior, con una diferencia que cambia el interés: el óptimo es un vértice con dos variables en cero, de modo que dos restricciones de no negatividad están activas y sus multiplicadores no son cero. Resolver el sistema es entonces fácil, porque cada componente de la estacionariedad despeja una incógnita; lo que merece la pena es comparar los números con la tabla.

Preparación. En forma de mínimo, $f(x) = -2x_1 - x_2 + x_3$ y $\nabla f = (-2,-1,1)^T$. Las restricciones son

$$g_1(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 - \tfrac{17}{2} \le 0, \qquad g_2(x) = -x_1 + x_2 - 2x_3 - \tfrac{9}{2} \le 0,$$

con $\nabla g_1 = (1,2,1)^T$ y $\nabla g_2 = (-1,1,-2)^T$, más las tres de no negatividad $-x_j \le 0$, con gradientes $-e_1$, $-e_2$ y $-e_3$. Se llamará u_1, u_2 a los multiplicadores de las dos primeras y μ_1, μ_2, μ_3 a los de la no negatividad.

Qué está activo. En $x^* = (\frac{17}{2}, 0, 0)$:

$$g_1 = \tfrac{17}{2} - \tfrac{17}{2} = 0 \text{ (activa)}, \qquad g_2 = -\tfrac{17}{2} - \tfrac{9}{2} = -13 < 0 \text{ (inactiva)},$$

de modo que $u_2 = 0$; y de las tres de no negatividad, $x_1 > 0$ da $\mu_1 = 0$ mientras que $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$ dejan libres a μ_2 y μ_3.

La estacionariedad, componente a componente. La condición es

$$\nabla f(x^*) + u_1 \nabla g_1 + u_2 \nabla g_2 - \mu_1 e_1 - \mu_2 e_2 - \mu_3 e_3 = 0,$$

donde los signos menos vienen de que el gradiente de $-x_j \le 0$ es $-e_j$. Con $u_2 = 0$ y $\mu_1 = 0$:

$$\begin{array}{lrcl} \text{componente 1:} & -2 + u_1 & = & 0 \\ \text{componente 2:} & -1 + 2u_1 - \mu_2 & = & 0 \\ \text{componente 3:} & 1 + u_1 - \mu_3 & = & 0 \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad u_1 = 2, \quad \mu_2 = 3, \quad \mu_3 = 3.$$

La primera componente determina u_1 sola, porque es la de la variable básica; las otras dos solo despejan.

Comprobación. Todos los multiplicadores son no negativos, la holgura complementaria se cumple ($u_2 = 0$ con $g_2 < 0$; $\mu_1 = 0$ con $x_1 > 0$; $\mu_2, \mu_3 > 0$ con $x_2 = x_3 = 0$) y el punto es factible. Las condiciones se verifican.

La interpretación, que es lo que hace interesante el apartado. Compare los cinco números obtenidos con la fila $z_j - c_j$ de la tabla:

	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2
$z_j - c_j$	0	3	3	2	0
multiplicador KKT	$\mu_1 = 0$	$\mu_2 = 3$	$\mu_3 = 3$	$u_1 = 2$	$u_2 = 0$

Coinciden uno a uno. Los multiplicadores de la no negatividad **son** los costos reducidos de las variables estructurales, y los de las restricciones **son** los costos reducidos de las holguras, que a su vez son las variables duales. No hay que memorizar la correspondencia: sale de la sección 7.3.4, donde se demostró que $\mu_j = c_j - (a^j)^T u$ es la definición del costo reducido para el problema de mínimo allí considerado. Aquí, al partir de un máximo con $Ax \le b$, resulta $\mu_j = (a^j)^T u - c_j = z_j - c_j$.

Lo que deja es la lectura de una tabla del símplex como una lista de multiplicadores de Karush-Kuhn-Tucker: cada casilla de la última fila es el precio de una restricción, y el criterio de optimalidad «todos los costos reducidos no negativos» es la condición de signo $u \ge 0$ y $\mu \ge 0$.

Dónde se falla. En el signo de las restricciones $x_j \ge 0$. Su gradiente, escrito como $-x_j \le 0$, es $-e_j$, y por eso en la estacionariedad aparecen restando. Quien las sume obtiene $\mu_2 = \mu_3 = -3$ y cree ver un incumplimiento que no existe. Y, al comparar con la tabla, en la convención: este enunciado usa la fila $z_j - c_j$ de un problema de máximo, y con la convención $c_j - z_j$ de la teoría de minimización los mismos números saldrían con el signo cambiado.

Ejercicio 7.3. *Multiplicadores de Lagrange y la desigualdad de las medias* MAY 2015

Enuncie el método de los multiplicadores de Lagrange para el problema $\text{Min}\{f(x) : h_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, m\}$ y aplíquelo a

$$\text{Minimizar} \ \sum_{k=1}^{n} x_k \quad \text{sujeto a:} \quad \prod_{k=1}^{n} x_k = 1, \qquad x_k > 0.$$

El enunciado completo está en E.9.6.

PISTAS, DE MENOR A MAYOR

1. *El enunciado del método es el corolario de la p. 401; conviene escribir con cuidado la hipótesis de independencia lineal de los gradientes.*

2. *Antes de resolver el sistema, asegúrese de que el mínimo existe. El conjunto factible es cerrado, pero* no está acotado si $n \geq 2$, *de modo que Weierstrass no se aplica directamente: hay que fabricar un compacto donde sí valga.*
3. *Al derivar el producto respecto de x_k, use que en un punto factible el producto entero vale* 1.

Resolución. *La idea.* Tres movimientos, y el primero es el que no hace el método: asegurar que el mínimo existe, porque los multiplicadores solo dan candidatos. Después, comprobar la cualificación, para que el mínimo esté obligado a ser uno de esos candidatos. Y por último resolver el sistema, que aquí no da el valor de cada coordenada sino una relación entre todas.

El enunciado. Si $\hat{x}$ es un mínimo local de $\operatorname{Min}\{f(x) : h_i(x) = 0\}$, con f y las h_i de clase $\mathcal{C}^1$, y los gradientes $\nabla h_1(\hat{x}), \ldots, \nabla h_m(\hat{x})$ son linealmente independientes, entonces existen $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}$, únicos, tales que

$$\nabla f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} v_i \, \nabla h_i(\hat{x}) = 0.$$

Es el corolario de la p. 401, caso particular de Karush-Kuhn-Tucker sin desigualdades, donde los multiplicadores no llevan condición de signo porque una igualdad sujeta el punto por los dos lados.

Primer paso, y es el que casi todo el mundo se salta: comprobar que el mínimo existe. Para $n = 1$ el único punto factible es $x_1 = 1$, así que supongamos $n \geq 2$. El conjunto factible $X = \{x > 0 : \prod x_k = 1\}$ **no está acotado**: contiene $(t, 1/t, 1, \ldots, 1)$ para todo $t > 0$, cuya norma tiende a infinito con t. Y eso basta para que el teorema de Weierstrass no se aplique tal cual, porque pide un compacto.

Conviene decir, de paso, lo que *sí* se cumple, porque es el error natural en este punto: X **es cerrado** en $\mathbb{R}^n$, aunque la desigualdad que lo define sea estricta. Si $x^k \to \bar{x}$ con $x^k \in X$, la continuidad del producto da $\prod_j \bar{x}_j = 1$, que es distinto de cero, luego ninguna coordenada de $\bar{x}$ puede ser nula; y como son límites de números positivos, todas son positivas y $\bar{x} \in X$. Dicho de otro modo, no hay ninguna sucesión factible que se acerque a un punto con una coordenada nula: cuando una coordenada baja hacia cero, otra tiene que subir hacia infinito para que el producto siga valiendo 1, y entonces la sucesión no converge. Así que lo único que falla es la acotación, y la salida es acotar la búsqueda usando un punto de referencia.

El punto $\bar{x} = (1, \ldots, 1)$ es factible y da $f(\bar{x}) = n$. Si un punto factible x tiene alguna coordenada $x_k > n$, entonces $f(x) = \sum x_j > n$ porque las demás son positivas, luego ese punto es peor que $\bar{x}$. Y si alguna coordenada es muy pequeña, digamos $x_k < n^{-(n-1)}$, entonces las demás tienen que compensar para que el producto valga 1: $\prod_{j \neq k} x_j = 1/x_k > n^{n-1}$, lo que obliga a que alguna de ellas sea mayor que n, y se vuelve al caso anterior. Por tanto el mínimo, si existe, está en

$$K = \Big\{ x \in X : \; n^{-(n-1)} \leq x_k \leq n \;\text{ para todo } k \Big\},$$

que es cerrado (intersección de un cerrado definido por $\prod x_k = 1$ con una caja cerrada) y acotado, luego compacto. Y f es continua. Por Weierstrass el mínimo se alcanza en K, y por lo anterior es el mínimo sobre todo X.

Segundo paso: la cualificación. Hay una sola restricción, $h(x) = \prod_k x_k - 1$. Su gradiente tiene componentes

$$\frac{\partial h}{\partial x_k}(x) = \prod_{j \neq k} x_j = \frac{\prod_j x_j}{x_k} = \frac{1}{x_k},$$

donde la última igualdad usa que en un punto factible el producto vale 1. Como todas las x_k son positivas y finitas, ninguna componente se anula y $\nabla h(x) \neq 0$: una familia de un solo vector no nulo es linealmente independiente, de modo que la cualificación se cumple en todos los puntos factibles.

Tercer paso: el sistema. Con $\nabla f = (1, 1, \ldots, 1)^T$, la condición es

$$1 + v \cdot \frac{1}{x_k} = 0 \qquad \text{para cada } k = 1, \ldots, n,$$

de donde $x_k = -v$ *para todo* k. Ahí está la clave del problema: el sistema no da el valor de cada coordenada, da que **todas son iguales**, y el valor común lo fija la restricción. Como $\prod_k x_k = (-v)^n = 1$ y las coordenadas son positivas, sale $-v = 1$, es decir,

$$\hat{x} = (1, 1, \ldots, 1), \qquad v = -1, \qquad \operatorname{Min} \sum_k x_k = n.$$

Por el primer paso el mínimo existe y por el tercero el único candidato es $\hat{x}$; luego ese es el mínimo.

Otra vía (lo que este ejercicio demuestra de verdad). Lo que se acaba de probar es que

$$\prod_{k=1}^{n} x_k = 1,\ x_k > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k \ \geq\ n.$$

Ahora tome números positivos cualesquiera $a_1, \ldots, a_n$ y llame $G = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ a su media geométrica. Los números $x_k = a_k / G$ son positivos y su producto vale $\prod a_k / G^n = 1$, de modo que cumplen la hipótesis. Aplicando la desigualdad,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{G} \ \geq\ n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \ \geq\ \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n},$$

que es la desigualdad entre la media aritmética y la geométrica. Un teorema clásico, que se demuestra habitualmente por inducción o por la concavidad del logaritmo, sale aquí como subproducto de un problema de optimización con una restricción, y la igualdad se alcanza justo en el punto que dio el método: cuando todos los a_k son iguales.

Comprobación. Resolviendo el problema numéricamente para $n = 2, 3, 4, 5$ se obtiene en los cuatro casos $\hat{x} = (1, \ldots, 1)$ con valor 2, 3, 4 y 5 respectivamente.

Lo que deja son dos cosas. La primera es que los multiplicadores dan candidatos, no mínimos: sin el argumento de existencia del primer paso, el sistema podría estar señalando un punto que no fuera mínimo de nada. La segunda es que una desigualdad clásica es un problema de optimización disfrazado, y que reconocer el disfraz suele ser más fácil que buscar el truco algebraico.

Dónde se falla.

- *Saltarse la existencia.* El problema de *maximizar* $\sum x_k$ con la misma restricción tiene exactamente el mismo sistema y el mismo candidato, $(1, \ldots, 1)$, y sin embargo no tiene máximo: sobre $(t, 1/t, 1, \ldots, 1)$ la suma tiende a infinito. Sin el primer paso, nada distingue un caso del otro.
- *Usar* $\partial h / \partial x_k = 1/x_k$ *fuera del conjunto factible.* La simplificación vale porque el producto es 1; en un punto cualquiera la derivada es $\prod_{j \neq k} x_j$.
- *Ponerle signo a* v. Es el multiplicador de una igualdad y es libre; aquí sale $v = -1$, y exigir $v \geq 0$ dejaría el sistema sin solución.

Ejercicio 7.4. *Cuando falla la independencia lineal pero KKT sigue valiendo*

Considere

$$\text{Minimizar} \quad -(x_1+x_2) \quad \text{sujeto a:} \quad x_1+x_2 \le 1, \quad 2x_1+2x_2 \le 2, \quad x_1, x_2 \ge 0,$$

donde la segunda restricción es la primera multiplicada por dos. Estudie en el punto $\hat{x} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ si se cumple la cualificación de independencia lineal, si se cumplen las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker y si los multiplicadores son únicos.

Resolución. *La idea.* Hay que separar tres preguntas que suelen contestarse juntas: si se cumple la cualificación de independencia lineal, si el punto es KKT y si los multiplicadores son únicos. Cada una se contesta por su lado, y el ejercicio está hecho para que las respuestas no coincidan.

Qué está activo. En $\hat{x} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$: la primera restricción da $\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$, activa; la segunda da $1+1 = 2$, activa; las de no negatividad, $x_1 = x_2 = \frac{1}{2} > 0$, inactivas.

La cualificación falla. Los gradientes de las dos activas son $\nabla g_1 = (1,1)^T$ y $\nabla g_2 = (2,2)^T$, y el segundo es el doble del primero: son linealmente dependientes. La hipótesis del teorema de la p. 390 no se cumple.

Y sin embargo KKT vale. El punto es óptimo: todo factible cumple $-(x_1+x_2) \ge -1$, y $\hat{x}$ alcanza -1. Hay dos vías para deducir KKT. La primera: todas las restricciones son afines, de modo que el teorema de la p. 392 garantiza que todo mínimo local es punto KKT sin ninguna hipótesis adicional. La segunda: el punto $\bar{x} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ cumple $g_1 = -\frac{1}{2} < 0$, $g_2 = -1 < 0$ y las dos de no negatividad con desigualdad estricta, de modo que se cumple la condición de Slater y se aplica el teorema de la p. 391.

Compruébese directamente. Con $\nabla f = (-1,-1)^T$, la estacionariedad es

$$(-1,-1)^T + u_1(1,1)^T + u_2(2,2)^T = (0,0)^T \qquad \Longleftrightarrow \qquad u_1 + 2u_2 = 1,$$

una sola ecuación, porque las dos componentes dan lo mismo.

Los multiplicadores no son únicos. La solución general con $u \ge 0$ es

$$u_1 = 1-2t, \qquad u_2 = t, \qquad t \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right],$$

un segmento entero de multiplicadores admisibles. Los extremos son $t = 0$, que da $u = (1,0)$ — todo el precio a la primera restricción —, y $t = \frac{1}{2}$, que da $u = (0, \frac{1}{2})$ — todo a la segunda.

Qué ha pasado. La independencia lineal no es necesaria para que KKT se cumpla: es suficiente. Lo que aporta de más, cuando se cumple, es la **unicidad** de los multiplicadores, que sale de que una combinación lineal de vectores independientes determina sus coeficientes. Al fallar, dos restricciones que dicen lo mismo se reparten el precio como quieran, y la suma ponderada $u_1\nabla g_1 + u_2\nabla g_2 = (u_1+2u_2)(1,1)^T$ solo depende de la combinación u_1+2u_2, que sí está determinada y vale 1.

La sensibilidad exige distinguir cómo se perturba. Cerca del problema original, al cambiar los lados derechos a $1+\epsilon_1$ y $2+\epsilon_2$, el valor óptimo es

$$\phi(\epsilon_1, \epsilon_2) = -\min\{1+\epsilon_1,\ 1+\epsilon_2/2\}.$$

No es diferenciable en $(0,0)$. Aflojar solo la primera restricción no mejora el valor, porque la segunda sigue limitando; apretarla sí lo cambia. Si se perturban coherentemente con

$(\epsilon_1, \epsilon_2) = (t, 2t)$, el valor pasa a $-1 - t$, de acuerdo con $u_1 + 2u_2 = 1$. Los multiplicadores siguen informando de la sensibilidad, pero no son componentes de una derivada única que aquí no existe.

Lo que deja es la separación entre tres cosas que se confunden: que KKT se cumpla, que los multiplicadores sean únicos y que la cualificación se verifique. La cualificación de independencia lineal, en un mínimo local y bajo las hipótesis del teorema, garantiza KKT y unicidad de sus multiplicadores. Las condiciones KKT pueden cumplirse sin esa cualificación, como acaba de verse.

Ejercicio 7.5. *Segundo orden: el mismo sistema, cuatro puntos, dos mínimos*

Resuelva

$$\text{Minimizar } f(x) = x_1 x_2 \quad \text{sujeto a:} \quad h(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$$

escribiendo las condiciones de primer orden, encontrando todos los puntos que las cumplen y decidiendo cuáles son mínimos con las condiciones de segundo orden sobre el cono crítico.

Resolución. *La idea.* El primer orden dará cuatro candidatos con el mismo aspecto, y la hessiana de f no distinguirá ninguno. Lo que decide es la hessiana de la lagrangiana, con el multiplicador de cada punto, mirada solo sobre la recta tangente a la circunferencia. Es el ejemplo del cono crítico de la sección 7.1.10 con otra función.

Primer orden. $\nabla f = (x_2, x_1)^T$ y $\nabla h = (2x_1, 2x_2)^T$. La estacionariedad $\nabla f + v\nabla h = 0$ es

$$x_2 + 2vx_1 = 0, \qquad x_1 + 2vx_2 = 0.$$

Despejando $x_2 = -2vx_1$ en la primera y sustituyendo en la segunda,

$$x_1 + 2v(-2vx_1) = x_1\big(1 - 4v^2\big) = 0.$$

Si $x_1 = 0$, la primera ecuación da $x_2 = 0$ y el punto $(0,0)$ no cumple la restricción. Luego $1 - 4v^2 = 0$, es decir $v = \pm\frac{1}{2}$.

Con $v = \frac{1}{2}$, la primera ecuación da $x_2 = -x_1$, y la restricción $x_1^2 + x_2^2 = 2$ da $2x_1^2 = 2$, o sea $x_1 = \pm 1$. Salen los puntos $(1,-1)$ y $(-1,1)$, los dos con $f = -1$.

Con $v = -\frac{1}{2}$, sale $x_2 = x_1$ y los puntos $(1,1)$ y $(-1,-1)$, los dos con $f = 1$.

Las condiciones de primer orden no distinguen entre los cuatro.

La hessiana de f no sirve. $\nabla^2 f = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ en todo punto, con autovalores 1 y -1: indefinida siempre. Un criterio basado en $\nabla^2 f$ fracasaría en los cuatro puntos por igual.

La hessiana de la lagrangiana. $L = x_1 x_2 + v(x_1^2 + x_2^2 - 2)$, luego

$$\nabla^2_{xx} L = \begin{pmatrix} 2v & 1 \\ 1 & 2v \end{pmatrix}.$$

El cono crítico. Con una sola igualdad, $C(\hat{x}) = \{d : \nabla h(\hat{x})^T d = 0\}$, la recta tangente a la circunferencia en el punto.

En $(1,-1)$, *con* $v = \frac{1}{2}$. $\nabla^2_{xx} L = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, que tiene autovalores 2 y 0: es semidefinida positiva, no definida. El cono crítico es $\{d : (2,-2)^T d = 0\} = \{(t,t) : t \in \mathbb{R}\}$, y sobre él

$$d^T \nabla^2_{xx} L\, d = (t,t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = (t,t) \begin{pmatrix} 2t \\ 2t \end{pmatrix} = 4t^2 > 0 \quad \text{para } t \neq 0.$$

Por la condición suficiente, $(1,-1)$ es mínimo local estricto. Y la dirección donde la hessiana se anula, que es $(1,-1)$, ha quedado fuera del cono: es la normal a la circunferencia, y moverse por ella significa salirse del conjunto factible. Restringir al cono es exactamente lo que ha permitido concluir. El punto $(-1,1)$ da las mismas cuentas, con $\nabla h = (-2,2)^T$ y el mismo cono.

En $(1,1)$, con $v = -\frac{1}{2}$. $\nabla^2_{xx} L = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, con autovalores 0 y -2. El cono crítico es $\{d : (2,2)^T d = 0\} = \{(t,-t)\}$, y sobre él

$$d^T \nabla^2_{xx} L\, d = (t,-t) \begin{pmatrix} -2t \\ 2t \end{pmatrix} = -2t^2 - 2t^2 = -4t^2 < 0.$$

Falla la condición *necesaria* de segundo orden, luego $(1,1)$ no es mínimo local; es un máximo. Lo mismo en $(-1,-1)$.

Otra vía (sustituyendo la restricción). La circunferencia se parametriza como $x = (\sqrt{2}\cos\alpha, \sqrt{2}\sin\alpha)$, y entonces

$$f = 2\cos\alpha \sin\alpha = \operatorname{sen}(2\alpha),$$

cuyo mínimo es -1 y se alcanza donde $2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, es decir en $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ y $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, que son los puntos $(1,-1)$ y $(-1,1)$; y cuyo máximo es 1, en $(1,1)$ y $(-1,-1)$. Coincide con lo anterior.

Esta vía es más corta aquí, y conviene decir por qué no sirve en general: ha hecho falta poder parametrizar el conjunto factible con una sola variable y de forma explícita, algo que solo ocurre en dimensión baja y con restricciones muy amables. Es la alternativa que se discutió en la sección 7.1.2, con su ventaja y su límite a la vista.

Comprobación. Las cuatro formas cuadráticas sobre las direcciones críticas unitarias dan 2, 2, -2 y -2 (los valores $4t^2$ y $-4t^2$ con $t = 1/\sqrt{2}$), y la resolución numérica del problema da $\hat{x} = (1,-1)$ con $f = -1$.

Lo que deja es la frase que resume toda la sección 7.1.10: la curvatura que decide no es la de la función objetivo sino la de la lagrangiana, y no se mira en todas las direcciones sino en el cono crítico, que recoge las posibilidades de primer orden. Aquí las dos correcciones son imprescindibles: sin la primera, la hessiana es indefinida y no dice nada; sin la segunda, la hessiana de la lagrangiana en los mínimos es solo semidefinida y tampoco concluye.

Dónde se falla.

- *Usar la hessiana de f*, que es indefinida en los cuatro puntos y no decide nada.
- *Mirar $\nabla^2_{xx} L$ en todas las direcciones.* En $(1,-1)$ es solo semidefinida, y quien no restrinja al cono crítico no puede concluir que es mínimo.
- *Usar el multiplicador de otro punto.* Cada punto tiene el suyo: $v = \frac{1}{2}$ en $(1,-1)$ y $(-1,1)$, $v = -\frac{1}{2}$ en $(1,1)$ y $(-1,-1)$. La forma cuadrática sobre el cono crítico es $(4v+2)t^2$ en $(1,-1)$ y $(4v-2)t^2$ en $(1,1)$; con el v del otro punto vale 0 en los dos casos, y no decide nada.
- *Dividir por x_1* en $x_1(1-4v^2) = 0$ sin mirar antes el caso $x_1 = 0$, que aquí se descarta porque lleva a $(0,0)$, que no es factible.

Ejercicio 7.6. *Un recorrido del gradiente proyectado*

Aplique el método del gradiente proyectado, partiendo de $x^0 = (0,0)$, a

$$\text{Minimizar } (x_1-2)^2+(x_2-4)^2 \quad \text{sujeto a:} \quad x_1+x_2 \le 3, \quad x_1, x_2 \ge 0.$$

Resolución. *La idea.* El recorrido es el del ejemplo de la p. 414 con otros números: en los vértices la proyección es nula y deciden los multiplicadores; se suelta el más negativo; y en cada tramo el paso lo fija la primera restricción que se alcanza o el mínimo de f sobre la semirrecta, lo que llegue antes.

El gradiente es $\nabla f(x) = \big(2(x_1-2),\, 2(x_2-4)\big)^T$ y las tres restricciones tienen $a_1 = (1,1)^T$, $a_2 = (-1,0)^T$ y $a_3 = (0,-1)^T$ con $b = (3,0,0)$.

Iteración 1, desde $(0,0)$. Activas la segunda y la tercera, luego $M = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $MM^T = I$ y $P = I - M^TM = 0$. Con $\nabla f(0,0) = (-4,-8)^T$,

$$w = -M\nabla f(0,0) = -\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Los dos negativos; se suelta el más negativo, que es -8, correspondiente a $x_2 \ge 0$. Con $M = (-1,0)$ queda $P = \operatorname{diag}(0,1)$ y

$$d^0 = -P(-4,-8)^T = (0,8)^T \;\to\; (0,1)^T.$$

Paso máximo: solo $a_1^Td^0 = 1 > 0$, con holgura 3, luego $\lambda_{\text{máx}} = 3$. La búsqueda en línea sobre $f(0,\lambda) = 4 + (\lambda-4)^2 = \lambda^2 - 8\lambda + 20$ da un mínimo libre en $\lambda = 4 > 3$, de modo que $\lambda_0 = 3$ y

$$x^1 = (0,\,3), \qquad f(x^1) = 4+1 = 5.$$

Iteración 2, desde $(0,3)$. Activas la primera ($0+3=3$) y la segunda ($x_1 = 0$), luego $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $P = 0$. Ahora $MM^T = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, con determinante 1, e inversa $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Con $\nabla f(0,3) = (-4,-2)^T$,

$$M\nabla f = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad w = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

El multiplicador de $x_1+x_2 \le 3$ es $2 \ge 0$ y el de $x_1 \ge 0$ es $-2 < 0$: se suelta este último. Con $M = (1,1)$,

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad d^1 = -P(-4,-2)^T = -(-1,\,1)^T = (1,-1)^T.$$

Paso máximo: $a_3^Td^1 = (0,-1)^T(1,-1) = 1 > 0$ con holgura 3, luego $\lambda_{\text{máx}} = 3$. La búsqueda en línea sobre

$$f(\lambda, 3-\lambda) = (\lambda-2)^2 + (-1-\lambda)^2 = 2\lambda^2 - 2\lambda + 5$$

da $4\lambda - 2 = 0$, es decir $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, que está dentro del tramo. Sale

$$x^2 = \left(\tfrac{1}{2},\, \tfrac{5}{2}\right), \qquad f(x^2) = \tfrac{9}{4} + \tfrac{9}{4} = \tfrac{9}{2}.$$

Iteración 3: la parada. En x^2 solo la primera restricción está activa, y $\nabla f(x^2) = (-3,-3)^T$ es perpendicular a la recta $x_1+x_2 = 3$. Entonces $d^2 = -P(-3,-3)^T = 0$ y

$$w = -\tfrac{1}{2}\big((1,1)(-3,-3)^T\big) = 3 \;\ge 0,$$

luego $x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ es punto KKT con $u_1 = 3$, y por convexidad es el mínimo global.

Otra vía (proyectar directamente el mínimo sin restricciones). El mínimo de f sin restricciones es $(2, 4)$, que no es factible porque $2 + 4 = 6 > 3$. Como el objetivo es la distancia al cuadrado a ese punto y la única restricción que va a estar activa es una recta, el óptimo es la proyección ortogonal de $(2, 4)$ sobre $x_1 + x_2 = 3$:

$$(2,4) - \frac{(2+4)-3}{\|(1,1)\|^2}\,(1,1) = (2,4) - \frac{3}{2}(1,1) = \left(\tfrac{1}{2},\ \tfrac{5}{2}\right),$$

que además cumple $x \geq 0$, de modo que es factible y por tanto es el óptimo. Es mucho más rápido aquí porque la proyección sobre la recta tiene una fórmula sencilla. En otros conjuntos también se puede proyectar, aunque el cálculo puede ser más costoso.

Comprobación. En $x^* = (1/2, 5/2)$, la estacionariedad es $(-3, -3) + 3(1, 1) = 0$, y el valor es exactamente $9/2$.

Lo que deja es que el método puede empezar en un vértice, moverse por una arista y parar en mitad de otra, y que la señal para soltar una restricción es siempre la misma: el signo del multiplicador.

Ejercicio 7.7. *Un dual lagrangiano cuadrático*

Calcule la función dual y resuelva el problema dual de

$$\text{Minimizar } \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \text{sujeto a:} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3,$$

y compruebe que el salto de dualidad es cero. Interprete el multiplicador.

Resolución. *La idea.* Es el método en pasos del dual lagrangiano (sección 7.3.3) en su caso más limpio: la lagrangiana se separa en tres parábolas, cada una se minimiza derivando, y queda una θ explícita que se maximiza derivando otra vez. Lo único delicado es que el multiplicador de una igualdad no lleva signo.

La lagrangiana. Con $X = \mathbb{R}^3$ y $h(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 3$,

$$L(x, v) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + v\,(x_1 + x_2 + x_3 - 3).$$

El ínfimo en x. Para v fijo, L es una suma de tres parábolas convexas independientes, $x_k^2 + v x_k$, más la constante $-3v$. Cada una alcanza su mínimo donde su derivada se anula: $2x_k + v = 0$, es decir $x_k = -v/2$. Sustituyendo,

$$\theta(v) = 3\left(\frac{v}{2}\right)^2 + v\left(3 \cdot \left(-\frac{v}{2}\right) - 3\right) = \frac{3v^2}{4} - \frac{3v^2}{2} - 3v = -\frac{3v^2}{4} - 3v.$$

Es una parábola cóncava, como garantiza el teorema de la p. 428. Obsérvese que aquí el ínfimo es finito para todo v, cosa que no ocurría en el caso lineal de la proposición de la p. 435: la curvatura del objetivo impide que la lagrangiana se desplome.

El dual. Como h es una igualdad, v no tiene restricción de signo y el dual es $\operatorname{Max}_{v \in \mathbb{R}} \theta(v)$. Derivando, $\theta'(v) = -\frac{3}{2}v - 3 = 0$ da $v^* = -2$, y

$$\theta(v^*) = -\frac{3 \cdot 4}{4} - 3(-2) = -3 + 6 = 3.$$

El primal. Con $v^* = -2$, el minimizador de la lagrangiana es $x_k = -v^*/2 = 1$ para los tres índices, es decir $\hat{x} = (1,1,1)$, que cumple la restricción ($1+1+1=3$) y da $f(\hat{x}) = 3$. Coincide con el valor dual, luego el salto es cero. Y tenía que serlo: el objetivo es convexo, la restricción es afín y la condición de Slater se cumple de forma trivial cuando no hay desigualdades, de modo que se aplica el teorema de la p. 432.

La interpretación del multiplicador. Con término independiente genérico b en lugar de 3, la misma cuenta da $\hat{x} = (b/3, b/3, b/3)$ y valor óptimo $\phi(b) = b^2/3$, luego $\phi'(b) = 2b/3$ y $\phi'(3) = 2$. El multiplicador es $v^* = -2$, con el signo opuesto porque en la convención de este capítulo la restricción se escribe $h(x) = x_1 + x_2 + x_3 - b$ y aumentar b disminuye h. La tasa de aumento en $b = 3$ es 2: para un incremento pequeño t, el valor sube aproximadamente $2t$; exactamente sube $2t + t^2/3$.

Lo que deja es el mecanismo entero de la dualidad lagrangiana en el caso más amable: minimizar la lagrangiana en x da una fórmula para θ, esa fórmula es cóncava, se maximiza derivando, y el punto donde se alcanza el máximo dual reconstruye el óptimo primal.

Dónde se falla. En tratar v como si fuera el multiplicador de una desigualdad. Con $v \geq 0$ la función $-\frac{3}{4}v^2 - 3v$ es decreciente y el máximo se iría a $v = 0$, con cota 0: cierta, pero lejos del 3 que vale el problema. Y, al interpretar, en olvidar que el signo de v depende de cómo se haya escrito h: con $h = 3 - x_1 - x_2 - x_3$ saldría $v = 2$ y el mismo precio.

Ejercicio 7.8. *Una relajación lagrangiana, con su cota*

Considere

$$\text{Maximizar } 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \quad \text{sujeto a:} \quad 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5, \qquad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}.$$

Dualice la restricción de capacidad, escriba la función dual, calcule su máximo y compare la cota obtenida con el óptimo entero y con el de la relajación lineal.

Resolución. *La idea.* El ejemplar es tan pequeño que el óptimo entero se obtiene enumerando, y eso permite medir la cota en vez de creérsela. La función dual se separa en las tres variables porque $X = \{0,1\}^3$ es un producto; cada variable cambia de decisión en un valor de u, y entre esos valores θ es una recta. El teorema de la relajación dice de antemano con qué hay que compararla: con la relajación lineal.

El óptimo entero. Hay ocho puntos y se enumeran: $(0,0,0)$ pesa 0 y vale 0; $(1,0,0)$ pesa 3, vale 7; $(0,1,0)$ pesa 2, vale 4; $(0,0,1)$ pesa 3, vale 5; $(1,1,0)$ pesa 5, vale 11; $(1,0,1)$ pesa 6, no cabe; $(0,1,1)$ pesa 5, vale 9; $(1,1,1)$ pesa 8, no cabe. El óptimo es $x^* = (1,1,0)$ con valor 11, es decir -11 en forma de mínimo.

La función dual. Se escribe el problema como mínimo, $f(x) = -7x_1 - 4x_2 - 5x_3$, se dualiza $g(x) = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5 \leq 0$ y se deja $X = \{0,1\}^3$:

$$\begin{aligned}\theta(u) &= \operatorname{Min}_{x\in X}\big[-7x_1 - 4x_2 - 5x_3 + u(3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5)\big] \\ &= -5u + \operatorname{Min}_{x\in X}\big[(3u-7)x_1 + (2u-4)x_2 + (3u-5)x_3\big].\end{aligned}$$

El mínimo se separa en las tres variables, porque X es un producto y el objetivo no las mezcla:

$$\theta(u) = -5u + \operatorname{Min}\{0, 3u-7\} + \operatorname{Min}\{0, 2u-4\} + \operatorname{Min}\{0, 3u-5\}.$$

Cada variable vale 1 si su coeficiente es negativo y 0 si es positivo. Los cambios de signo están en $u = \frac{7}{3}$, $u = 2$ y $u = \frac{5}{3}$, y ordenados de menor a mayor dan cuatro tramos:

$$\theta(u) = \begin{cases} -5u + (3u-7) + (2u-4) + (3u-5) = 3u - 16 & 0 \le u \le \frac{5}{3}, \\ -5u + (3u-7) + (2u-4) + 0 = -11 & \frac{5}{3} \le u \le 2, \\ -5u + (3u-7) + 0 + 0 = -2u - 7 & 2 \le u \le \frac{7}{3}, \\ -5u & u \ge \frac{7}{3}. \end{cases}$$

Crece con pendiente 3, luego es constante, luego decrece: es cóncava y lineal a trozos, como debe.

El máximo dual. Se alcanza en todo el tramo constante, $u^* \in \left[\frac{5}{3}, 2\right]$, con

$$\theta(u^*) = -11.$$

Compruébese en los extremos: $3 \cdot \frac{5}{3} - 16 = 5 - 16 = -11$ y $-2 \cdot 2 - 7 = -11$.

La comparación. El óptimo entero es -11 y la cota lagrangiana es -11: aquí el salto es **cero**. La relajación lineal, en cambio, es $\text{Max}\{7x_1 + 4x_2 + 5x_3 : 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 5,\ 0 \le x \le 1\}$, y su óptimo se obtiene ordenando por valor unitario ($7/3 \approx 2{,}33$ para x_1, $4/2 = 2$ para x_2, $5/3 \approx 1{,}67$ para x_3): se toma $x_1 = 1$ gastando 3, luego $x_2 = 1$ gastando 2, y el peso se agota exactamente, de modo que la solución lineal es $(1, 1, 0)$ con valor 11, que resulta ser entera.

Por qué no hay salto en este caso. El teorema de la p. 438 dice que la mejor cota lagrangiana vale $\text{Min}\{c^T x : Ax \le b,\ x \in H(X)\}$, y aquí $H(X) = [0,1]^3$, que es exactamente el conjunto de la relajación lineal. Las dos cotas tienen que coincidir. Que además coincidan con el óptimo entero es una circunstancia de este ejemplar: el óptimo de la relajación lineal ha salido entero porque la capacidad se agota justo con dos objetos.

Qué habría que hacer para ganar algo. Dualizar la mochila no mejora la cota lineal porque lo que queda, $\{0,1\}^3$, tiene la propiedad de integridad. Para que la relajación lagrangiana aporte, hay que dualizar restricciones cuya eliminación deje un subproblema cuya envolvente convexa restrinja más que la relajación continua que se está comparando. La sección 7.3.5 explica por qué la formulación elegida importa, también en el ejemplo de los 1-árboles del viajante.

Lo que deja es la mecánica completa de una relajación lagrangiana sobre un ejemplar que cabe en media página — separar en variables, encontrar los cambios de signo, escribir θ a trozos y maximizarla — y, sobre todo, el criterio para saber de antemano si va a servir de algo.

Ejercicio 7.9. *Producción con rendimientos decrecientes, y el precio de la capacidad*

Un taller fabrica dos productos. El beneficio de fabricar x_1 unidades del primero y x_2 del segundo es $8x_1 - x_1^2 + 10x_2 - 2x_2^2$, y la capacidad total no permite pasar de seis unidades entre los dos. Determine el plan óptimo, el multiplicador de la capacidad y su interpretación, y diga hasta dónde vale esa interpretación.

Resolución. *La idea: plantear antes de calcular.* Un enunciado en palabras se convierte en un modelo con tres preguntas, en este orden. *Qué se decide*: las cantidades x_1 y x_2 de cada producto, que son las variables. *Qué se quiere*: el beneficio, que es el objetivo; aquí es cóncavo,

porque cada unidad adicional rinde menos que la anterior, y por eso al pasarlo a mínimo queda una función convexa. *Qué lo limita*: la capacidad, que dice «no pasar de seis», es decir, una desigualdad y no una igualdad; y las cantidades no negativas, que el enunciado no dice pero que el sentido del problema exige. Con el modelo escrito, el resto es el método en pasos de la sección 7.1.7: mirar el mínimo libre y, si no es factible, activar la restricción que lo impide.

Planteamiento. En forma de mínimo,

$$\text{Minimizar } f(x) = -8x_1 + x_1^2 - 10x_2 + 2x_2^2 \quad \text{sujeto a:} \quad g(x) = x_1 + x_2 - 6 \le 0, \quad x_1, x_2 \ge 0.$$

La función f es convexa: su hessiana es $\operatorname{diag}(2, 4)$, constante y definida positiva. Las restricciones son afines. Luego KKT será necesaria y suficiente.

¿Está activa la capacidad? El mínimo sin restricciones se obtiene anulando el gradiente: $2x_1 - 8 = 0$ y $4x_2 - 10 = 0$, es decir $(4,\ 2{,}5)$, que suma $6{,}5 > 6$. No es factible, de modo que la capacidad estará activa.

El sistema. Con $\nabla f = (2x_1 - 8,\ 4x_2 - 10)^T$ y $\nabla g = (1, 1)^T$, y con las de no negatividad inactivas,

$$2x_1 - 8 + u = 0, \qquad 4x_2 - 10 + u = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = \frac{8-u}{2}, \qquad x_2 = \frac{10-u}{4}.$$

Imponiendo $x_1 + x_2 = 6$,

$$\frac{8-u}{2} + \frac{10-u}{4} = \frac{16 - 2u + 10 - u}{4} = \frac{26 - 3u}{4} = 6 \quad \Longrightarrow \quad 26 - 3u = 24 \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{2}{3}.$$

Sustituyendo,

$$x_1 = \frac{8 - \frac{2}{3}}{2} = \frac{11}{3} \approx 3{,}67, \qquad x_2 = \frac{10 - \frac{2}{3}}{4} = \frac{7}{3} \approx 2{,}33,$$

que suman 6 y son positivas, de acuerdo con haber supuesto inactivas las de no negatividad. El beneficio es

$$8 \cdot \frac{11}{3} - \left(\frac{11}{3}\right)^2 + 10 \cdot \frac{7}{3} - 2\left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{264 - 121 + 210 - 98}{9} = \frac{255}{9} = \frac{85}{3} \approx 28{,}33.$$

La lectura del multiplicador. $u = \frac{2}{3}$ es la tasa marginal de aumento del beneficio respecto de la capacidad, evaluada en $b = 6$. Comprobado numéricamente: con capacidad 5,99 el beneficio óptimo es 28,3266 y con 6,01 es 28,33993; la diferencia dividida entre 0,02 da 0,66667.

Hasta dónde vale, que es lo interesante del ejercicio. La igualdad $\partial\phi/\partial b = u$ del teorema de la p. 398 es *local*, y aquí se ve por qué importa. Para $1/2 < b < 13/2$, las dos producciones son positivas y la capacidad está activa: $x_1 = (2b - 1)/3$, $x_2 = (b + 1)/3$ y $u = (26 - 4b)/3$, que decrece conforme b crece y se anula en $b = 6{,}5$. A partir de ahí la capacidad deja de estar activa, el óptimo pasa a ser el punto sin restricciones $(4,\ 2{,}5)$ y el beneficio se queda fijo en 28,5: ampliar más no sirve de nada. Comprobado: con $b = 6{,}5$ y con $b = 7$ el beneficio óptimo es 28,5 en los dos casos.

De hecho, cerca de $b = 6$ el beneficio óptimo cumple exactamente

$$\phi(6 + t) - \phi(6) = \frac{2}{3}t - \frac{2}{3}t^2.$$

El precio sombra da el término lineal, no el beneficio de añadir una unidad entera. Desde $b = 6$ hasta $b = 6{,}5$, la mejora total es solo $1/6$; a partir de 6,5, ampliar más ya no aporta

beneficio. En el caso lineal, el precio puede permanecer constante en un intervalo; aquí va cambiando con la capacidad.

Un precio sombra es una derivada: sirve para aproximar el efecto de una perturbación pequeña. Para un cambio finito hay que estudiar cómo varía ese precio o calcular directamente la diferencia entre los valores óptimos.

Dónde se falla.

- *Escribir la capacidad como igualdad.* Para $b = 6$ da lo mismo, porque la capacidad está activa; pero con $b = 7$ la igualdad obligaría a fabricar siete unidades y daría $\frac{85}{3} \approx 28{,}33$, peor que el 28,5 que se obtiene fabricando 6,5. Una igualdad obliga a usar un recurso que una desigualdad solo permite usar.
- *Maximizar sin cambiar de signo.* Con el gradiente del beneficio en la estacionariedad sale el mismo plan y $u = -\frac{2}{3}$, un precio negativo para una capacidad cuyo aumento sube el beneficio.
- *No comprobar las restricciones supuestas inactivas.* El plan tiene $x_1, x_2 > 0$, y hay que decirlo: si alguna saliera negativa, la rama estaría mal elegida.
- *Leer el multiplicador como el valor de una unidad entera.* La unidad que va de 6 a 7 no aporta $\frac{2}{3}$, sino $\frac{1}{6}$, y solo hasta 6,5.

REPASO INTERCALADO

Primera ronda: al terminar el capítulo.

1. Escriba las cuatro condiciones de Karush-Kuhn-Tucker de memoria y diga, para cada una, qué se rompe si se quita: qué pasa sin la condición de signo, qué pasa sin la holgura complementaria.
2. Un punto factible tiene $\nabla f(\hat{x}) = 0$. ¿Es un punto KKT? ¿Con qué multiplicadores?
3. ¿Por qué las condiciones de Fritz John no necesitan cualificación y las de Karush-Kuhn-Tucker sí? Conteste señalando el punto exacto de la demostración donde entra la hipótesis.
4. En el método del gradiente proyectado sale $P = 0$ y los multiplicadores de las desigualdades activas son no negativos. ¿Qué se concluye? ¿Y si uno de ellos es negativo?
5. Para un punto primal factible x y multiplicadores admisibles (u, v), ¿puede ser $\theta(u, v) < 0 < f(x)$? ¿Y $f(x) < 0 < \theta(u, v)$?
6. Resuelva $\operatorname{Min}\{x_1^2 + x_2^2 : \ x_1 + 2x_2 \geq 5, \ x_1 \geq 2\}$ con el método en pasos de la sección 7.1.7. ¿Qué dice la rama vacía? ¿Por qué fallan las dos ramas de una sola activa? ¿Qué multiplicadores da la de dos? (Para contrastar: $(2, \frac{3}{2})$, con $u = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ y valor $\frac{25}{4}$.)

Segunda ronda: dos días después, mezclando capítulos.

1. (Capítulo 6.) La condición necesaria sin restricciones era $\nabla f(x^*) = 0$. Obténgala como caso particular de Karush-Kuhn-Tucker y diga qué papel juega ahí la hipótesis de que S sea abierto.
2. (Capítulo 2.) Enuncie el lema de Farkas y úselo para demostrar que en un problema con restricciones afines todo mínimo local es punto KKT, sin mirar el texto.
3. (Capítulo 4.) Escriba las condiciones KKT del problema $\operatorname{Min}\{c^T x : Ax \geq b, \ x \geq 0\}$ y compruébelas contra el teorema de la holgura complementaria. ¿Qué objeto del

capítulo 4 es cada multiplicador?
4. (Capítulo 3.) En el gradiente reducido, ¿qué fórmula del símplex es $r_j = \nabla_j f(x) - w^T a_j$? ¿Y qué fórmula es el paso máximo?
5. (Capítulo 5.) La relajación lineal de un problema entero da una cota inferior; optimizar los multiplicadores lagrangianos da otra. Bajo las hipótesis del teorema finito, ¿cuál es mejor y qué condición garantiza su igualdad?
6. Un problema convexo tiene un punto KKT con multiplicador $u_1 = 0$ en una restricción *activa*. ¿Qué significa eso económicamente? ¿Contradice algo?

Tercera ronda: subir el nivel.

1. Explique, usando el dibujo de pares (consumo, coste), cómo puede aparecer un salto de dualidad. ¿Qué hipótesis lo excluyen en el teorema convexo? Use el ejercicio de relajación lagrangiana (p. 453) para mostrar que un problema entero también puede tener salto cero.
2. Construya un problema con dos restricciones de desigualdad en el que el óptimo cumpla las condiciones de Fritz John con $u_0 = 0$ y no cumpla las de Karush-Kuhn-Tucker, distinto del de la cúspide del texto.
3. (Capítulos 2 y 6.) Demuestre que la función dual es cóncava sin mirar el texto, y explique por qué esa demostración no usa ninguna hipótesis sobre el problema primal. ¿De qué resultado del capítulo 2 es un caso particular?
4. La condición suficiente de segundo orden pide que la forma cuadrática sea *estrictamente* positiva sobre el cono crítico. Construya un ejemplo donde valga cero en alguna dirección crítica no nula y el punto sea mínimo, y otro donde valga cero y no lo sea.
5. (Capítulo 5.) En un problema entero con estructura de transporte más tres restricciones adicionales, ¿qué conviene dualizar y por qué? Justifíquelo con el teorema que dice cuánto vale la mejor cota lagrangiana.
6. El método del gradiente proyectado y el del gradiente reducido resuelven el mismo tipo de problema. Escriba en cinco líneas en qué se parecen y en qué se diferencian, y diga cuál elegiría si el conjunto factible viniera dado por $Ax = b$, $x \geq 0$ con m mucho menor que n.
7. (Capítulo 2.) El problema $\text{Min}\{x_1^2 + x_2^2 : x_1 + 2x_2 \geq 5\}$ busca el punto del semiplano más cercano al origen. Calcule su función dual, maximícela y compruebe que su valor es el cuadrado de la distancia del origen a la recta $x_1 + 2x_2 = 5$. ¿Qué punto reconstruye el multiplicador óptimo? (Para contrastar: $\theta(u) = 5u - \frac{5}{4}u^2$, $u^* = 2$, valor 5, en el punto $(1, 2)$.)

APÉNDICE A

Ideas intuitivas

Este índice reúne las ideas que ayudan a reconstruir los principales resultados, con referencias a sus demostraciones. Sirve para repasar y localizar el punto que conviene releer. Las explicaciones completas y los ejemplos están junto a cada resultado en el cuerpo. El capítulo 1, dedicado a modelos, no se incluye en este índice de teoremas.

A.1 Análisis convexo

Todo el capítulo cuelga de una sola propiedad: en un convexo, mezclar no saca de él. De ahí salen los argumentos de separación. Al añadir una descripción poliédrica, los vértices y las direcciones permiten representar el conjunto con datos finitos.

Convexidad y combinaciones convexas (§2.1) Contener los segmentos ya obliga a contener todas las mezclas, porque una mezcla de k ingredientes es una mezcla de dos en la que uno de ellos está a su vez mezclado: la condición de dos puntos se propaga por inducción.

Operaciones que conservan la convexidad (§2.1) La intersección, la suma, la diferencia de Minkowski $A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$ y el reescalado conservan convexidad: estas cuatro operaciones llevan segmentos a segmentos, y la convexidad no habla de otra cosa.

El segmento que entra en el interior (§2.1) Si un extremo del segmento está en el interior, arrastra consigo una bola; al mezclar con $\lambda < 1$ esa bola se encoge pero no desaparece, y viaja con el punto. Por eso el interior y la clausura de un convexo son convexos. Si su interior no es vacío, su clausura coincide con la clausura de ese interior; si además el convexo es cerrado, coincide con ambas.

La envolvente convexa es la clausura convexa (§2.1) Construir mezclando y describir cortando todos los convexos que contienen a X dan lo mismo, porque el conjunto de las mezclas ya es convexo (luego es uno de los que se cortan) y a la vez está contenido en cualquier convexo que contenga a X. Cada descripción aprieta a la otra por un lado.

Teorema de Caratheodory (§2.1) Con $n+1$ ingredientes basta porque, si entran más, los vectores que van del primero a los demás son más de n y por tanto dependientes; esa dependencia es una manera de subir unos pesos y bajar otros *sin mover el punto*, y se empuja hasta que un peso llega a cero. Se repite mientras sobren.

Teorema de la proyección (§2.2) Para un convexo cerrado no vacío, el mínimo *existe* porque la distancia es continua y la búsqueda se puede encerrar en un compacto; es *único* porque dos puntos más cercanos empatados darían un punto medio aún más cercano, y está en S por convexidad; y la condición de ángulo no agudo $(y-\bar{x})^T(x-\bar{x}) \leq 0$ es exactamente la condición de que no quede ninguna dirección dentro de S por la que acercarse un poco más.

Separación de un punto y un convexo cerrado (§2.2) Se levanta la pared perpendicular al segmento que une el punto con su proyección. El convexo no puede asomar al otro lado, porque avanzar hacia el sitio donde asomara acercaría todavía más al punto, y la proyección ya era la más cercana. La convexidad se usa justo ahí: sin ella ese «avanzar un poco» se sale del conjunto.

Un convexo cerrado es la intersección de sus semiespacios (§2.2) Cada punto de fuera aporta el semiespacio que lo deja fuera, así que la intersección no puede contener a nadie que no esté en S; y contiene a S porque cada semiespacio lo contiene. Es el teorema anterior aplicado punto a punto. La versión fuerte, para un punto que no está en la clausura, se obtiene cerrando primero y separando después.

Lema de Farkas (§2.2) O el vector está en el cono generado por las filas, o hay un hiperplano que lo deja fuera, y nunca las dos cosas: lo segundo es la separación aplicada al cono, y lo primero es una línea de cuentas ($c = \sum y_i a_i$ con $y \geqq 0$ y $a_i^T x \leq 0$ obligan a $c^T x \leq 0$). Todo el argumento depende del signo $y \geqq 0$: una combinación con pesos no negativos conserva el sentido de las desigualdades, mientras que coeficientes arbitrarios no lo harían.

El cono generado por finitos vectores es cerrado (§2.2) Es la pieza sin la cual Farkas no se podría demostrar, porque separar exige cerrado. Y es verdad porque ese cono es la *unión finita* de los conos generados por subfamilias linealmente independientes — un Caratheodory cónico, probado con el mismo movimiento de pesos — y cada uno de esos es la imagen de un ortante por una aplicación lineal inyectiva, que no deforma la topología.

Corolario del lema de Farkas (§2.2) No hay geometría nueva: es Farkas escrito en otras coordenadas. Una desigualdad se convierte en igualdad pagando una holgura, con lo que $A^T y \leqq c$ pasa a ser el segundo sistema del lema para la matriz apilada $M = \left(\begin{smallmatrix} A \\ I \end{smallmatrix}\right)$; y el primer sistema del lema para esa M, con el cambio $x = -z$, es el del corolario. Esta es la forma en que el lema se usa después, en Tucker y en la dualidad.

Teorema de Gordan (§2.2) Es Farkas mirado desde el otro lado: o hay una dirección que forma ángulo agudo con *todas* las filas cambiadas de signo, o el origen se puede escribir como combinación no negativa y no trivial de ellas, es decir, las filas «se equilibran entre sí» y no dejan sitio para esa dirección. Es el teorema de alternativa que hace falta para las condiciones de optimalidad con restricciones.

Teorema de Tucker (§2.3) La antisimetría permite resolver la pregunta *índice a índice*: para cada posición k el corolario del lema de Farkas da un vector no negativo que la ilumina, y $A^T = -A$ es lo que deja pasar del sistema que devuelve Farkas al que se quiere. Al sumar

los n vectores no se pierde nada, porque ninguno puede restarle al otro: son n linternas, y encendidas todas no queda ninguna posición a oscuras. Con A simétrica el enunciado es falso, y $A = -I$ lo demuestra.

Caracterización de los puntos extremos (§2.4) Una esquina es un punto del que no se puede salir en dos sentidos opuestos, y moverse en los dos sentidos sin romper $Ax = b$ ni $x \geqq 0$ obliga a usar un vector del núcleo de A que sea cero donde x ya vale cero. Existe ese vector exactamente cuando las columnas de las componentes positivas son dependientes; luego un vértice es un punto cuyas columnas activas son *independientes*, y completándolas hasta m sale la base B y el vértice $(B^{-1}b, 0)$. De ahí que haya a lo sumo $\binom{n}{m}$: tantos como maneras de elegir m columnas entre n.

Existencia de puntos extremos (§2.4) Se toma un punto factible cualquiera y se le van bajando componentes positivas: mientras las columnas activas sean dependientes, existe una dirección de ida y vuelta por la que caminar hasta que otra componente se anula. El proceso baja un entero en cada paso, luego termina, y donde termina las columnas ya son independientes. La cota $x \geqq 0$ es lo que frena el paseo: en la forma $Ax \leqq b$ sin ella el resultado es falso, y por eso la forma estándar no es una manía de notación.

Direcciones y direcciones extremas (§2.4) Un rumbo por el que se puede caminar eternamente sin salir no puede romper $Ax = b$ (luego $Ad = 0$) ni hacer negativa ninguna componente (luego $d \geq 0$); eso ya es todo el lema. Y las direcciones extremas se reconocen igual de bien que los vértices: la columna j da un rumbo de fuga cuando $B^{-1}a_j \leqq 0$, es decir, cuando hacer crecer x_j no obliga a bajar a ninguna básica. Nada frena, luego se puede crecer sin límite; y como cada base ofrece a lo sumo $n - m$ candidatas, hay solo finitos rayos extremos, aunque cada uno admite múltiplos positivos de su dirección.

Teorema de representación de conjuntos poliédricos (§2.4) Un poliedro no vacío en la forma $Ax = b,\ x \geqq 0$ es una lista de restricciones visto desde fuera y una lista de vértices y rumbos visto desde dentro. Que las dos descripciones coincidan es lo que permite optimizar: una función lineal sobre una mezcla nunca es mejor que su mejor ingrediente, así que buscar el mejor punto entre infinitos se reduce a mirar unos pocos vértices y unos pocos rumbos. La demostración es de nuevo el paseo que baja componentes, hecho por inducción sobre el número de columnas activas.

A.2 Programación lineal

Una sola observación sostiene el capítulo entero: *una función lineal restringida a una recta es afín*: si no es constante, no tiene mínimos en el interior de un segmento. Si al empezar a andar en un sentido el valor mejora, no hay ninguna razón para pararse voluntariamente; se sigue hasta chocar con una pared.

Solución básica factible = punto extremo (§3.2) Es la caracterización algebraica de los vértices del capítulo 2 leída en el lenguaje del simplex: una base factible determina una esquina, aunque varias bases pueden dar la misma, y la existencia de al menos una es la existencia de puntos extremos. Sin este puente el simplex sería un procedimiento sobre tablas sin significado geométrico.

Teorema fundamental de la Programación lineal (§3.2) Como todo punto factible es mezcla

de vértices más combinación de rumbos, el valor objetivo en él es una media ponderada de los valores en los vértices más lo que aporten los rumbos. Si algún rumbo baja el objetivo ($c^T d^i < 0$), avanzando por él se baja sin límite y no hay óptimo; si ninguno lo baja, los rumbos solo pueden empeorar y conviene no usarlos, con lo que el mejor valor está en el mejor vértice, que son finitos. Las dos mitades del teorema son las dos mitades de esa frase.

Los tres casos de un problema lineal (§3.2) Infactible, ilimitado o con óptimo finito, y nada más, porque el teorema anterior agota las posibilidades. Si el conjunto factible es no vacío y acotado, no hay rumbos de fuga y existe óptimo. En una aplicación donde se esperaba un valor finito, la ilimitación invita a revisar si falta una capacidad, un presupuesto u otra restricción.

Condición suficiente de optimalidad de una solución básica factible (§3.3) En el vértice todas las no básicas valen cero, que es lo más bajo que pueden estar, así que cualquier otro punto factible se alcanza *subiendo* algunas de ellas; el objetivo se escribe $\bar{z} + \sum_{j \in NB} (c_j - z_j) x_j$, y si todos los $c_j - z_j$ son ≥ 0 subir no puede abaratar. Es suficiente y no necesaria: un vértice degenerado puede ser óptimo con un costo reducido negativo, porque el paso por esa arista tiene longitud cero.

Costo reducido y cociente mínimo (§3.3) Son las dos preguntas del paseo de esquina en esquina. El **costo reducido** $c_j - z_j$ es la derivada del objetivo a lo largo de la arista que se recorre al hacer crecer x_j, ya descontado lo que las básicas tienen que reajustarse para no romper $Ax = b$ — y ese descuento es el término z_j, de donde viene el nombre. El **cociente mínimo** es la distancia a la primera pared: al crecer x_j las básicas se mueven como $\bar{b} - B^{-1} a_j \, x_j$, y la primera que llegue a cero manda, porque pasarse de ella es hacerla negativa. Si ninguna baja y el costo reducido es negativo, no hay tope para la mejora: el problema es ilimitado. Con costo reducido cero, ese rumbo conserva el valor.

Convergencia del simplex (§3.3) Sin degeneración, el algoritmo termina porque hay finitas bases y el objetivo baja estrictamente en cada pivotaje de mejora, de modo que ninguna base puede repetirse. La única manera de romper el argumento es que el valor *no* baje, y eso es exactamente la degeneración: un vértice degenerado donde el paso puede tener longitud cero. En ese caso, una regla anticiclado como la de Bland garantiza la terminación.

A.3 Dualidad

El dual es a la vez el problema del comprador que pone precio a los recursos y el catálogo de todas las cotas demostrables del primal. Que la mejor cota sea exacta es la dualidad fuerte, y es el lema de Farkas dicho con precios.

El dual del dual es el primal (§4.1) Escribir el dual como si fuera un primal solo exige cambiar signos, porque maximizar $w^T b$ es minimizar $-b^T w$ y una desigualdad se invierte al cambiar de signo. Aplicada la definición otra vez, los signos se cancelan. Eso justifica que la tabla de correspondencias entre formas no haya que memorizarla: es un intercambio simétrico, y una restricción de uno es una variable del otro.

Teorema de dualidad débil (§4.2) Un x y un w factibles se comparan a través de la misma matriz: $c^T x \geq (w^T A) x = w^T (Ax) \geq w^T b$, y las dos desigualdades solo usan que los signos de las restricciones y los de las variables encajan. La consecuencia práctica es que cada w

dual factible *certifica* una cota del primal con una línea de cuentas, y que si dos candidatos dan el mismo valor los dos son óptimos y no hay que buscar más.

Teorema fundamental de dualidad lineal (§4.2) Los tres casos salen de una sola demostración. Se apilan factibilidad primal, factibilidad dual y coincidencia de valores en una única matriz, que resulta *antisimétrica* porque los dos problemas usan la misma A traspuesta y con signo cambiado; Tucker le da entonces un vector con complementariedad estricta que contiene, o las dos soluciones óptimas a la vez, o la prueba de que uno de los dos problemas no las tiene. La bifurcación la decide una componente de escala: positiva da el caso bueno, nula da direcciones en vez de soluciones.

Teorema de dualidad fuerte (§4.2) Si el primal tiene óptimo finito, la dualidad asegura una cota dual que lo alcanza. En la prueba mediante símplex se ve dónde está: la base óptima da $w^T = c_B^T B^{-1}$, los costos reducidos garantizan factibilidad dual y la tabla da $w^T b = c^T x^*$. La cota es exacta porque ambos candidatos son factibles y sus valores coinciden.

Teorema de holguras complementarias (§4.2) En la cadena de la dualidad débil hay dos desigualdades, y la igualdad final solo puede darse si las dos son igualdades. Cada una de ellas es una suma de productos de términos no negativos, y una suma así se anula solo si se anula cada sumando: de ahí que en cada par restricción-variable al menos uno de los dos sea cero. Leído en el mercado: si de un recurso sobra, su precio es nulo, porque nadie paga por lo que no falta; y si un precio es positivo, ese recurso se ha agotado, porque solo lo escaso vale algo. La versión *fuerte* añade que puede elegirse el par óptimo de modo que se anule exactamente uno de los dos, nunca los dos a la vez, y eso es de nuevo la complementariedad estricta que da Tucker.

Interpretación económica: los precios sombra (§4.2) Por la dualidad fuerte el valor óptimo se reparte exactamente entre los recursos, $z(b) = (w^*)^T b$, y una función lineal con coeficientes w_i^* tiene derivada w_i^*. Pero eso vale solo mientras w^* no cambie: como el factible del dual no depende de b, z es el máximo de un número finito de funciones lineales, o sea una superficie convexa hecha de facetas planas, y los precios sombra son la pendiente de la faceta en la que uno está. De ahí que la fórmula con un precio fijo valga dentro de su región de estabilidad. En una frontera pueden cambiar las pendientes y faltar la diferenciabilidad; las derivadas direccionales describen entonces la sensibilidad.

Teorema del simplex dual (§4.3) Una base óptima del primal produce, sin cuentas nuevas, un $w = c_B^T B^{-1}$ factible para el dual: la condición de optimalidad $c_j - z_j \geq 0$ *es* la factibilidad dual escrita con otras letras. Por eso se puede recorrer el camino al revés: mantener la optimalidad y trabajar para conseguir la factibilidad, que es lo que hace el simplex dual, y por eso sirve justo cuando una base pierde la factibilidad primal pero conserva la dual.

Criterios de salida y de entrada del simplex dual (§4.3) Sale la fila con $\bar{b}_r < 0$, porque es la que denuncia la infactibilidad. Y si en esa fila todos los coeficientes son no negativos, el primal es infactible sin más que leerla como ecuación: una suma de cosas no negativas no puede dar un número negativo. El criterio de entrada elige el cociente $\max\{(c_j - z_j)/y_{rj} : y_{rj} < 0\}$ porque es el mayor paso que se puede dar sin que ningún costo reducido cambie de signo, es decir, sin perder la optimalidad, que es lo único que no se quiere perder.

Rango de validez de un costo (§4.4.1) Tocar los costos no puede hacer infactible nada, porque las restricciones no se han movido: lo único que puede romperse es la optimalidad, y por eso

la condición es que los costos reducidos conserven el signo. Geométricamente, cada vértice tiene un cono de direcciones c para las que él es el óptimo, y la pregunta es si el nuevo c sigue dentro; el intervalo sale de exigir un signo a un cociente, una vez por cada variable no básica.

Rango de validez de un recurso (§4.4.2) Y al revés: tocar los recursos no puede romper la optimalidad, porque los costos reducidos no dependen de b; lo único que puede romperse es la factibilidad, y por eso la condición es $B^{-1}b \geqq 0$. La pared se desplaza paralela a sí misma y el vértice se desliza por sus aristas hasta que una variable básica se anularía. Dos maneras de tocar un problema, y una sola cosa que se rompe en cada una.

Añadir una variable o una restricción (§4.4.3 y §4.4.4) Una **variable** nueva entra valiendo cero, así que la solución de antes sigue siendo factible y lo único que hay que comprobar es su costo reducido: si es no negativo, no compensa fabricar el producto nuevo. Una **restricción** nueva no puede mejorar nada, porque el conjunto factible solo puede encoger; si la solución de antes la cumple, no ha pasado nada, y si no la cumple, la tabla ampliada tiene la fila mal y hay que arreglarla con el simplex dual, que es exactamente el caso para el que sirve.

A.4 Programación lineal entera

El problema relajado da una cota; si su solución ya es entera, da también el óptimo entero. Cuando no es entera, redondear es un movimiento local, y el óptimo entero puede estar en la otra punta de la figura, así que en vez de mover el punto hacia el poliedro hay que mover el poliedro hacia los puntos.

La relajación es una cota (§5.1) La región entera está contenida en la continua, luego el óptimo continuo es al menos tan bueno: es una promesa de que no se podrá hacer mejor. La distancia entre lo prometido y lo cumplible se llama salto de integridad, y toda la programación entera consiste en manejarla. Redondear falla porque el óptimo continuo puede apoyarse en un vértice de una franja tan estrecha que a su alrededor no haya ningún punto entero factible; en dimensión dos el disparate se ve, y en dimensión cincuenta hay además 2^{50} maneras de redondear.

Caracterizaciones de los poliedros enteros (§5.2.1) Para los poliedros de la forma estudiada, la integridad puede detectarse optimizando. «Todos los vértices enteros», «existe un óptimo entero siempre que haya óptimo finito» y «el valor óptimo finito es entero para todo c entero» son equivalentes: cada c elige un vértice, y elegir bien el c obliga a delatarlos uno a uno.

Las siete equivalencias de la unimodularidad total (§5.2.1) Trasponer, añadir la identidad, borrar una fila o una columna unitaria, cambiar un signo, permutar o duplicar: ninguna de esas operaciones puede crear un menor distinto de 0, 1 y -1, porque cada una transforma los menores de la matriz nueva en menores de la vieja, con el mismo valor o con el signo cambiado. Es un catálogo de manipulaciones seguras, y sirve para reconocer la unimodularidad sin calcular ni un determinante.

Teorema de Hoffman-Kruskal (§5.2.1) Es la equivalencia que convierte una propiedad de determinantes en una propiedad geométrica. De izquierda a derecha, por la regla de Cramer las coordenadas de un vértice son cocientes con $\det B$ en el denominador, así que si ese determinante vale ± 1 y b es entero no puede aparecer ninguna fracción. De derecha a izquierda, hay que fabricar un b entero que obligue a un menor concreto a delatarse. El «para

todo b» es esencial: con un b suelto el resultado es falso.

Criterios prácticos de unimodularidad (§5.2.1) El criterio por particiones exige que, para cada subconjunto de filas, se puedan asignar signos de modo que la suma en cada columna quede en $\{-1, 0, 1\}$. En una matriz con entradas $0, \pm 1$, si cada columna tiene a lo sumo un 1 y un -1, basta sumar las filas elegidas: cada columna ya cumple la condición.

Transporte, asignación y flujo (§5.2.2, §5.2.3 y §5.2.4) Cada variable conecta dos nodos. En flujo aporta un 1 y un -1 a la matriz de incidencia; en transporte y asignación se obtiene ese patrón cambiando el signo de uno de los bloques de filas. Así se prueba la unimodularidad total. Con datos de recursos y capacidades enteros, un óptimo básico del relajado es entero, si existe. En la asignación, las sumas de filas y columnas iguales a uno obligan entonces a que sus entradas sean 0 o 1; la relajación conserva el valor óptimo, aunque amplía el conjunto factible.

Corte fraccional de Gomory (§5.4.1) Se toma una fila de la tabla en la que la básica salió fraccionaria y se separa cada coeficiente en su parte entera y su parte fraccionaria. La parte entera, aplicada a variables enteras, da un número entero; luego la parte fraccionaria de la fila tiene que compensar exactamente el resto, y como todas las variables son no negativas eso obliga a $\sum_{j \in NB} f_{ij} x_j \geq f_i$. La desigualdad la cumple todo punto entero factible y la incumple el vértice fraccionario actual, que tiene todas las no básicas a cero: corta el punto malo sin perder ni un punto bueno.

Corte mixto de Gomory (§5.4.2) El mismo razonamiento cuando hay variables continuas, que no se pueden trocear en parte entera y parte fraccionaria. Se separan las columnas según el signo de su coeficiente y se pondera el bloque negativo por $f_i/(f_i - 1)$, que es el peor caso posible para él; el corte resultante sigue siendo válido porque se ha sido pesimista con lo único que no se controla.

Ramificación y acotación (§5.3) Partir por una variable fraccionaria en $x_j \leq \lfloor \bar{x}_j \rfloor$ y $x_j \geq \lfloor \bar{x}_j \rfloor + 1$ no pierde ninguna solución entera, porque entre esos dos números no hay enteros. Y la promesa de cada rama sirve para descartarla *entera* sin explorarla en cuanto sea peor que una solución ya encontrada: eso es lo que convierte una enumeración completa en una búsqueda con ramas descartadas. La terminación requiere, además, controlar el tamaño de la búsqueda; por ejemplo, con variables enteras acotadas.

A.5 Programación no lineal sin restricciones

Con un objetivo no lineal, el óptimo puede estar lejos de los vértices, incluso si el conjunto factible es un poliedro. El análisis local usa dos niveles de información: el gradiente mide la pendiente y la hessiana, la curvatura.

Teorema de Weierstrass (§6.1.2) Una función continua alcanza sus extremos en un conjunto compacto no vacío. En dimensión finita, perder cierre o acotación puede hacer que el ínfimo se escape hacia un punto excluido o al infinito. Son posibles fallos de las hipótesis, no condiciones necesarias para que exista mínimo; la continuidad también importa.

Weierstrass en $\mathbb{R}^n$: la coercividad (§6.2.6) $\mathbb{R}^n$ no es compacto, pero si f sube hacia $+\infty$ cuando $\|x\| \to \infty$, el mínimo no puede estar lejos: el subnivel $\{x : f(x) \leq f(x^0)\}$ es cerrado

y acotado, Weierstrass da en él un mínimo, y fuera de él f vale más. Si f es diferenciable, ese mínimo es un punto crítico, porque $\mathbb{R}^n$ es abierto.

En un problema convexo, todo mínimo local es global (§6.1.4) Si la función y su dominio son convexos, desde un mínimo local se ve el conjunto entero en línea recta: cualquier competidor está al final de un segmento que arranca ahí, y con una función convexa el valor sobre ese segmento nunca sube por encima de la cuerda. Si al empezar a andar se empeora, se empeora durante todo el camino, así que ningún punto lejano puede ser mejor. Sin convexidad puede haber mínimos locales con valores distintos.

Condición necesaria de optimalidad (§6.2.2) Si el gradiente no fuera nulo, la dirección $-\nabla f(x^*)$ sería de descenso y a primer orden bajaría el valor, contra la minimalidad. El mismo argumento en segundo orden, aplicado a una dirección con curvatura negativa, obliga a que la hessiana sea semidefinida positiva. Es importante leer bien el recíproco, que es falso: gradiente nulo no significa mínimo, significa *ausencia de información de primer orden*. Un máximo, una meseta y un puerto de montaña lo cumplen igual.

Condición suficiente de optimalidad local (§6.2.4) Con gradiente nulo, el desarrollo de Taylor deja el valor en manos de la forma cuadrática $d^T \nabla^2 f(x^*) d$; si es definida positiva, el menor autovalor $\alpha > 0$ acota esa forma por debajo por $\alpha \|d\|^2$, y el resto del desarrollo, que es $o(\|d\|^2)$, no puede compensarlo cerca del punto. Por eso la conclusión no es solo «mínimo local», sino que la función sube al menos como una parábola.

El hueco entre la necesaria y la suficiente (§6.2.3) La necesaria solo puede pedir semidefinida y la suficiente tiene que pedir definida, y en ese hueco viven x^4 y $-x^4$: las dos tienen hessiana nula en el origen y comportamientos opuestos. Cuando un autovalor se anula el segundo orden también es ciego, y hay que subir al tercero o mirar la función directamente.

Hessiana semidefinida positiva si y solo si la función es convexa (§6.2.6) Para una función dos veces diferenciable en un abierto convexo, es el puente entre una comprobación local y una propiedad global, y es la razón de que la hessiana aparezca en las condiciones de optimalidad *global*. Se prueba mirando la restricción de f a una recta: la convexidad de f equivale a la convexidad de todas esas funciones de una variable, y para una función de una variable ser convexa es tener segunda derivada no negativa, que es justo $d^T \nabla^2 f(x) d \geq 0$.

Condiciones suficientes de optimalidad global (§6.2.6) Una curvatura no negativa *en todo el conjunto* deja la gráfica por encima de su plano tangente en cada punto; si además el gradiente se anula en x^*, ese plano tangente es horizontal y toda la gráfica queda por encima de $f(x^*)$. La propiedad local se ha vuelto global sin más que pedirla en todas partes, y por eso reconocer la convexidad de un problema antes de resolverlo es la diferencia entre saber que se ha llegado y no saberlo.

Criterio de descenso (§6.3.1) Si $\nabla f(x)^T d < 0$, Taylor garantiza descenso para pasos positivos suficientemente pequeños. El recíproco solo exige $\nabla f(x)^T d \leq 0$: con producto nulo puede haber descenso de orden superior. Si el gradiente no es cero y D es simétrica definida positiva, $d = -D\nabla f(x)$ cumple el criterio estricto.

Dirección de máximo descenso (§6.3.2) Si el gradiente no es nulo, entre todas las direcciones de norma uno, la que minimiza $\nabla f(x)^T d$ es $-\nabla f(x)/\|\nabla f(x)\|$, y eso es exactamente el caso de igualdad de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. La misma cuenta explica por qué el

gradiente es perpendicular a las curvas de nivel: andar por el nivel no cambia el valor, luego el producto escalar es cero.

Los dos métodos, y por qué son dos (§6.3.5) El gradiente usa la aproximación lineal para elegir una dirección y una regla aparte para el paso. Newton busca el punto estacionario del modelo cuadrático. Si la hessiana es definida positiva, ese modelo tiene un mínimo; aun así, en la función original puede hacer falta amortiguar el paso para conseguir descenso.

A.6 Programación no lineal con restricciones

Con restricciones, «no hay dirección de bajada» deja de significar «el gradiente es cero»: significa que toda dirección que baje se sale. Traducir esa frase geométrica a una ecuación es todo el capítulo, y el traductor es un teorema de alternativa.

Condición geométrica de optimalidad (§7.1.2) En un mínimo local no puede haber ninguna dirección que sea a la vez de descenso y factible, porque avanzar un poco por ella daría un punto admisible y mejor. Dicho al revés: entre las desigualdades, solo las activas limitan el movimiento local, porque las inactivas dejan sitio para moverse en cualquier sentido antes de empezar a estorbar.

Condiciones necesarias de Fritz John (§7.1.3) Que dos conos abiertos no se corten es justamente la alternativa que resuelve el teorema de Gordan del capítulo 2: si no hay dirección que forme ángulo agudo con todos esos gradientes cambiados de signo, entonces alguna combinación no negativa y no trivial de ellos es cero. Esa combinación *es* la ecuación de Fritz John. La geometría se ha vuelto álgebra en un solo paso, y ese paso es el teorema de alternativa.

Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (§7.1.4) Son Fritz John con el multiplicador del objetivo normalizado a uno, y esa normalización es justo lo que puede fallar: con $u_0 = 0$ la condición habla solo de las restricciones y no dice nada del objetivo. Por eso hace falta una cualificación — independencia lineal de los gradientes activos, la condición de Slater, o que todas las restricciones sean afines — y por eso el ejemplo de la cúspide enseña qué se rompe sin ella: la aproximación lineal ve un cono de direcciones que el conjunto curvado no ofrece.

Suficiencia de KKT en el caso convexo (§7.1.7) Con f y las g_i convexas, cada función queda por encima de su aproximación lineal, y la ecuación de KKT dice que esas aproximaciones lineales, sumadas con pesos no negativos, no dejan ninguna dirección de mejora. Es la misma frase de siempre — la convexidad convierte lo local en global — escrita ahora con multiplicadores.

El multiplicador es un precio sombra (§7.1.8) Bajo las hipótesis de sensibilidad, si el problema de mínimo se perturba a $g_i(x) \le \epsilon_i$, su función valor satisface $\partial\phi/\partial\epsilon_i = -u_i$. Por tanto, u_i mide la tasa de mejora al relajar el límite. Es una derivada local: la holgura complementaria da precio cero a una restricción inactiva, pero no garantiza que cualquier ampliación finita deje el valor inalterado.

Multiplicadores de Lagrange clásicos (§7.1.9) En un extremo local con gradientes de las restricciones independientes, el gradiente del objetivo es una combinación lineal única de ellos: su derivada se anula en las direcciones tangentes. Los multiplicadores no tienen

condición de signo, porque una igualdad limita el movimiento en ambos sentidos. Es una condición de primer orden.

Condiciones de segundo orden sobre el cono crítico (§7.1.10) La curvatura que decide no es la del objetivo sino la del lagrangiano, porque la superficie factible también se curva y esa curvatura se paga; y no se mide en todas las direcciones sino solo en el *cono crítico*, las que el primer orden deja indecisas. En las demás ya ha decidido el gradiente y no hace falta mirar más. Es la versión con restricciones del hueco entre la condición necesaria y la suficiente del capítulo 6: semidefinida en la necesaria, definida en la suficiente.

Gradiente proyectado y gradiente reducido (§7.2) Rosen proyecta sobre el subespacio que conserva las restricciones activas; Wolfe usa coordenadas reducidas. Si la dirección proyectada es cero, se comprueban los multiplicadores: con los signos exigidos se obtiene KKT; un multiplicador negativo indica qué restricción soltar. Si hay descenso, se elige un paso que conserve factibilidad y mejora.

APÉNDICE B

Añadidos y omisiones

Este apéndice identifica la procedencia del contenido, los desarrollos añadidos y las omisiones. Los ejercicios llevan una marca de origen, como R4.7 o JUN 2021. La información sobre la evaluación está en el apéndice C.

La procedencia, capítulo a capítulo

Las fichas siguientes describen la relación de cada capítulo con los materiales del curso; después se detallan las ampliaciones y las erratas que afectan a su lectura.

Capítulo 1, introducción

- *La forma general del problema* (sección 1.1) es la del material de origen, donde la función objetivo se escribe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ para admitir varios objetivos a la vez. El libro fija $p = 1$ desde el principio, porque es el único caso que se estudia. Además, en la línea que define la función de las igualdades el original imprime f donde debe decir h: es una errata de tecleo, y el libro escribe h sin más.
- *Los cinco aspectos* que enumera esa misma sección y *la lista de hitos* con la que se cierra el capítulo (sección 1.3) son los del material de origen. La lista conserva los hitos, corrigiendo nombres, fechas y alcance cuando hacía falta: «Hurwitz y Dantzing» son Leonid Hurwicz y George Dantzig, «Fritz y John» son una sola persona, los cortes de Gomory son de 1958 y el *stepping stone* de 1954.
- *Los ejercicios de formulación* no vienen del tema 1, que no trae ninguno, sino de las tres primeras relaciones de problemas, que son de modelización lineal y entera. Se han puesto en el capítulo 1 porque la formulación es el primero de los cinco aspectos y porque los capítulos siguientes dan por sabido que uno sabe escribir un modelo.
- *El ejercicio del hospital* que cierra la sección 1.2 es el primer problema de la cuarta relación, no de las tres primeras. Se ha traído aquí porque es de formulación pura y porque es el segundo problema cuadrático de asignación de la sección, después del de las tres fábricas:

como aquel ya deja escrita la linealización, este puede dedicarse a lo que aquel no tenía, que son datos numéricos. La cota por la desigualdad del reordenamiento, con la comprobación de que se alcanza, y el cálculo de que la relajación continua del modelo linealizado vale cero son añadidos: el material de origen se detiene en el modelo.

Revisión de los pasatiempos. Los dos sudokus y el Subarai de R2 se han cotejado con las figuras del enunciado de 2025/26 y se reproducen en limpio. Las soluciones de los sudokus se han calculado y comprobado sobre esos datos; los pequeños tableros resueltos que aparecen a su derecha en el original son del día anterior y no se han usado. La distinción entre dificultad y cantidad de pistas se apoya en R. Pelánek, *Difficulty Rating of Sudoku Puzzles: An Overview and Evaluation* (2014), `https://arxiv.org/abs/1403.7373`. Los ejercicios R1.6, R1.7, R2.1 y R2.2 incluyen el código junto a su formulación, con explicaciones más detalladas en las primeras apariciones de cada orden. Los modelos y los datos se ofrecen también como ficheros para ejecutarlos sin transcribirlos del PDF.

Los grafos de R3. Las figuras se han cotejado con el enunciado actual. En el problema romano, las desigualdades desarrolladas tenían cuatro aristas distintas de las del mapa, aunque el valor óptimo seguía siendo cuatro. Se han corregido y comprobado ambos modelos: una solución óptima con la regla literal, cinco con la regla relajada. La nota histórica se ha contrastado con C. ReVelle y K. Rosing, *Defendens Imperium Romanum* (2000), pp. 585–587: Roma y Constantinopla dejan Britania sin cobertura en un paso.

Fuentes históricas de esta revisión. G. Dantzig, *Linear Programming* (2002), `https://doi.org/10.1287/opre.50.1.42.17798`, y *Linear Programming and Extensions*, capítulo 2, para los primeros desarrollos; A. Charnes y W. Cooper (1954), `https://doi.org/10.1287/mnsc.1.1.49`; H. Kuhn (1955), *The Hungarian Method for the Assignment Problem*; R. Gomory (1958), *Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs*; N. Karmarkar (1984), *A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming*. Las precisiones evitan atribuir a un método un alcance que no tiene.

Capítulo 2, análisis convexo

- *El orden* es el del material de origen: tres apartados (definiciones y Caratheodory, separación y Farkas, poliedros y representación) y un anexo, el teorema de Tucker. Ese material **enuncia sin demostrar** todo el tema salvo precisamente el teorema de Tucker, que es el único que trae demostrado. De ahí que Tucker vaya en sección propia. Las demostraciones del resto se detallan más abajo, en «Las demostraciones del análisis convexo».
- *Los tres órdenes entre vectores* ($\leqq$, $\leq$, $<$) y el aviso de que a partir del tema 3 el símbolo $\leq$ vuelve a admitir la igualdad vienen del material de origen. El libro conserva en cada capítulo el convenio que allí se usa, en vez de unificarlos, porque los enunciados de Gordan y de Tucker dependen de la distinción.
- *Los tres ejemplos numéricos* de la sección de poliedros (todos los vértices base a base, un poliedro con una sola dirección extrema, un vértice degenerado) son los del material de origen, recalculados aquí con aritmética exacta.
- *La presentación de la dualidad vía Tucker* — demostrar el lema sobre matrices antisimétricas aquí y deducir de él, en el capítulo 4, el teorema fundamental — también es la del material de origen, y el libro la conserva.

Aclaraciones de esta revisión. Se distingue la clausura convexa, nombre usado en los apuntes, del cierre topológico. En los ejemplos añadidos se corrige el punto de la mezcla de Carathéodory a $(1, 3/2)$, conservando sus coeficientes; se sustituye el falso contraejemplo con la norma

por la aplicación $t \mapsto (t, t^2)$; y se precisa qué chinchetas son vértices y qué condición sobre direcciones opuestas impide los puntos extremos. La nota histórica remite a C. Carathéodory (1911), *Über den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen*, §I.9, pp. 200–201, `https://doi.org/10.1007/BF03014795`.

También se han corregido las figuras de soporte, proyección y Farkas mediante construcciones que satisfacen las condiciones de sus pies, y se ha ajustado el signo de las reacciones en la interpretación mecánica: $c - A^T y = 0$, con $y \geqq 0$. La conexión con Geometría local distingue el lado local del plano tangente y el soporte global de un cuerpo convexo. En Tucker se explicita la complementariedad, se completa el reescalado de la segunda alternativa y se identifica correctamente el uso de la antisimetría. En la interpretación de juegos, con A definida como ganancias del jugador fila, se aplica Tucker a $-A$ para obtener una estrategia que no pierde en promedio. En poliedros se distingue la equivalencia de formulaciones de la correspondencia geométrica al partir variables libres. Se corrigen las coordenadas originales de dos bases no factibles, y la explicación de direcciones extremas usa k columnas de rango $k-1$, no un número fijo m. El dibujo de representación reproduce ahora las tres desigualdades del ejercicio R4.4. La nota histórica remite a H. Weyl (1935), *Elementare Theorie der konvexen Polyeder*, *Commentarii Mathematici Helvetici* 7, pp. 290–306, traducido por H. W. Kuhn en *Contributions to the Theory of Games*, I (1950).

Capítulo 3, programación lineal

- *El orden* es el del material de origen: las dos formas del problema y la partición $A = [B \mid N]$, el teorema fundamental, el método del simplex en sus cinco piezas y los cuatro ejemplos que cierran el tema — que no son cuatro ejercicios cualesquiera, sino los cuatro finales posibles del algoritmo.
- *El cambio de convenio de* $\leq$, que a partir de este capítulo vuelve a admitir la igualdad entre vectores, viene del material de origen, que lo hace para seguir a la bibliografía recomendada. El libro lo respeta y lo avisa donde ocurre.
- *Las variables libres* no se tratan en el material de origen, que escribe siempre $x \geq 0$; aparecen, en cambio, en los exámenes, y por eso el libro añade la sustitución $x_j = x_j^+ - x_j^-$ con su lectura geométrica.
- *El ejemplo de todas las bases* (sección 3.1) se hace entero. El material de origen lo deja a medias, con la indicación «considerar ahora $B = (a_1 \mid a_3)$ y analizar los resultados»; es justamente la segunda base la que enseña que un mismo vértice puede tener varias.
- *Una errata en el ejemplo del simplex.* En la segunda iteración, el material de origen imprime «$y_1 = B^{-1}a_2 = \binom{2}{-1}$»: la columna que se transforma es a_1, no a_2, y el resultado correcto es $y_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, que es el que trae el libro. El resto de esa iteración ya usa el valor bueno — la dirección que escribe, $(1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{2})$, es exactamente $(1, -y_{11}, 0, -y_{21})$ con ese y_1, y el cociente mínimo, $\frac{4}{3}$, también —, de modo que es una errata de copia y no un error de método.
- *La fase II del ejemplo de las dos fases* no está en el material de origen, que se detiene al acabar la fase I; el libro la completa porque el final es breve y la conclusión es instructiva.
- *Cómo se evita el ciclado* (la regla de Bland) es añadido: el material de origen se limita a nombrar el ciclado. Va marcado como añadido en el cuerpo.
- *La condición suficiente de optimalidad de una solución básica factible* (sección 3.3) se enuncia aparte, como resultado con entidad propia, y se demuestra en tres pasos con nombre, en lugar de quedar como un paso del algoritmo. Lleva la marca de lo que cae por el motivo

que explica el apéndice C.

Capítulo 4, dualidad

- *El orden* es el del material de origen: la construcción del dual (con sus dos definiciones, la canónica y la estándar, y la comprobación de que el dual del dual es el primal), los teoremas que relacionan los dos problemas, el simplex dual y el análisis de sensibilidad con sus cuatro modificaciones en ese mismo orden.
- *Los ejemplos numéricos* — el dual con las tres clases de restricción, los cuatro casos de la tabla de existencia, el ejemplo del simplex dual y los cuatro de sensibilidad — son los del material de origen, recalculados aquí.
- *La primera demostración de la dualidad fuerte* es la del material de origen, que se apoya en el teorema de Tucker; la segunda, por el simplex, es añadido y se explica más abajo.
- *Los tres números equivocados* de los ejemplos del tema 4 se corrigen sin decirlo en el cuerpo; la comprobación de los tres está más abajo, en «Tres correcciones a los apuntes del tema 4».

Capítulo 5, programación entera

- *El orden* es el del material de origen: el problema y por qué redondear no vale; las familias en que la integridad sale gratis (unimodularidad total, transporte, asignación, flujo); ramificación y acotación; y los cortes de Gomory.
- *El ejemplo de dos variables que descarta el redondeo* es el del material de origen, y también lo son los tres criterios encadenados de reconocimiento de matrices totalmente unimodulares.
- *Los cuatro modelos con los que allí se abre el tema* — mochila, localización discreta, transporte y asignación — están en este libro en el capítulo 1, con el resto de la formulación, y no se repiten aquí.
- *El algoritmo húngaro* no se estudia, ni en el material de origen (por falta de tiempo) ni aquí; se nombra para que conste que existe.

Capítulo 6, programación no lineal

- *El orden* es el del material de origen: el planteamiento general con Weierstrass y la distinción entre mínimo local y global; las condiciones de optimalidad; y los algoritmos. También es suyo el giro que da el capítulo tras Weierstrass — renunciar a la teoría global y quedarse con condiciones locales —, que allí se anuncia explícitamente.
- *Las dos herramientas* (los desarrollos de primer y segundo orden, numerados (1) y (2)) van juntas en una nota previa porque así están en el material de origen, y es un buen sitio: todas las demostraciones de la sección se apoyan en ellas y en nada más.
- *Todo lo demás* — que ese material enuncia los seis teoremas, el lema y la proposición sin demostrar ninguno, y de dónde salen entonces las demostraciones que aquí se leen — está más abajo, en «Lo que se ha añadido en el capítulo de programación no lineal».

Capítulo 7, programación no lineal con restricciones

- *El tema está en el programa formal, pero no se evalúa en el curso aquí descrito.* Se conserva como ampliación y sus tres apartados dan las tres secciones del capítulo, con sus nombres: condiciones de optimalidad, métodos de gradiente proyectado y reducido, y teoría lagrangiana.
- *Fuentes.* La colección de apuntes del profesor cubre los temas 1 a 6. Más abajo se indica la bibliografía usada para desarrollar el capítulo 7.

Qué se ha añadido, y por qué

La sesión cero de AMPL

La *Sesión cero de AMPL* es el apéndice G (página 591). Introduce la herramienta para poder escribir y resolver los modelos de los ejercicios. Su ubicación al final permite consultarla sin alterar la correspondencia entre los siete capítulos y los siete temas del programa.

El material de prácticas incluye modelos, datos y guiones de ejecución. El apéndice los acompaña con explicaciones y con su traducción a notación algebraica. El código de los ejercicios se trabaja junto a su formulación: las primeras apariciones explican la sintaxis con más detalle y las posteriores se concentran en las construcciones nuevas.

Las demostraciones del análisis convexo

Los apuntes del tema 2 **enuncian sin demostrar**. Las demostraciones que trae el capítulo 2 son las del manuscrito «demostraciones de teoremas para examen» disponible en el archivo. Donde ese manuscrito no llega, la demostración se ha escrito aquí, y son estas dos:

- *El cono generado por finitos vectores es cerrado* (sección 2.2). Sin este lema, la demostración del lema de Farkas tiene un agujero: no se puede aplicar el teorema de separación a un conjunto que no se sabe cerrado. La prueba reutiliza el movimiento de pesos del teorema de Caratheodory.
- *La caracterización de los puntos extremos, demostrada también en el caso degenerado* (sección 2.4). El manuscrito da una demostración que no cubre el caso en que el vértice tiene menos de m componentes positivas. Se conserva esa demostración, porque es la canónica, y se añade una segunda por inducción que no necesita la hipótesis de no degeneración.

Ejercicios propios del libro

Un ejercicio sin marca de procedencia es propio del libro. En los cinco primeros capítulos hay diez: siete en el capítulo 2, dos en el 3 y uno en el 5, que se describe más abajo con lo añadido en ese capítulo; los de los capítulos 6 y 7 se explican en sus propios apartados. Cada uno está por un motivo concreto:

- *Comprobar convexidad con la definición*, *Puntos extremos y direcciones de conjuntos concretos* y *Caratheodory en el plano, con números* (sección 2.1): usan las definiciones de la sección sobre conjuntos concretos antes de los teoremas, que es lo que las relaciones no ejercitan.
- *La envolvente convexa de la esfera* (sección 2.1): es la aplicación clásica del teorema de Caratheodory, y las relaciones no traen ninguna.
- *Calcular una proyección y un hiperplano separador* (sección 2.2): el teorema de la proyección se usa constantemente y no hay ningún ejercicio que obligue a calcular una con números.

- *Seguir la demostración de Tucker con números* (sección 2.3): la demostración es larga y abstracta, y verla funcionar sobre una matriz antisimétrica pequeña es lo que la hace creíble.
- *Todos los vértices y todas las direcciones extremas por bases* (sección 2.4): el recorrido sistemático de todas las bases es el puente entre la caracterización teórica y el algoritmo del simplex.
- *Bases, soluciones básicas y vértices en un cuadrilátero* y *Pasar a forma estándar un problema con de todo* (sección 3.1): las dos definiciones que el resto del capítulo 3 usa sin parar, la solución básica y la forma estándar, practicadas antes del teorema fundamental.

Además, el ejercicio sobre el cono de las columnas pide en su enunciado de origen solo la convexidad; aquí se le añade el cierre y una discusión de para qué sirve la hipótesis sobre el rango.

La segunda demostración de la dualidad fuerte

El teorema de dualidad fuerte (sección 4.2) lleva **dos** demostraciones. La primera es la de los apuntes, que lo deduce del teorema fundamental de dualidad y por tanto del teorema de Tucker. La segunda, mucho más corta, lo prueba a partir de la tabla final del simplex tomando $(w^*)^T = c_B^T B^{-1}$; está en el manuscrito del departamento y se conserva porque es *constructiva*: dice dónde está la solución dual en una tabla concreta, que es como se usa en la práctica.

Lo que se ha añadido en el capítulo de dualidad

- *La sección de ejercicios* (sección 4.5) no corresponde a ningún apartado del tema 4: agrupa los cinco problemas de la relación 5, desglosados en ocho ejercicios, y los seis de la relación 6. Los apartados 4.1 a 4.4 del libro sí van uno a uno con los del profesor.
- *La demostración de que las operaciones elementales equivalen a multiplicar por* $(B')^{-1}$ (sección 4.4.4). Los apuntes la dejan propuesta como ejercicio; aquí está hecha, y de ella sale además la lectura del término independiente de la fila nueva como el margen $b_{m+1} - a_{m+1}^T x^*$.
- *La lectura geométrica del rango de costos como un cono* (sección 4.4.1). No está en los apuntes, que dan solo la fórmula. Se incluye porque explica de un vistazo por qué el intervalo contiene siempre al cero y por qué en sus extremos hay solución múltiple, y porque permite resolver sin tablas los ejercicios de dos variables.
- *El caso de una restricción nueva que ya se cumple, y el de una restricción de igualdad* (sección 4.4.4), que los apuntes no tratan.
- *La particularización del rango de costos al caso de una sola variable* (sección 4.4.1), con la distinción entre variable básica y no básica. Es la forma en que aparece en todos los ejercicios, y los apuntes solo dan la versión general con dirección d.
- *La observación sobre el signo de los precios sombra* según la restricción sea $\geq$ o $\leq$ (secciones 4.3 y 4.5).

Tres correcciones a los apuntes del tema 4

Estas tres correcciones permiten cotejar los ejemplos del tema 4 con sus tablas originales.

1. *Ejemplo del simplex dual*, tabla final (sección 4.3): imprimen $c_3 - z_3 = \frac{19}{5}$, y el valor correcto es $\frac{9}{5}$. Con la propia tabla, $z_3 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + 2 \cdot \frac{7}{5} = \frac{11}{5}$ y $c_3 - z_3 = 4 - \frac{11}{5} = \frac{9}{5}$; la fórmula de actualización del pivotaje da lo mismo, $1 - \frac{1/2}{-5/2} \cdot 4 = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$. Todo lo demás de la tabla es correcto.
2. *Ejemplo de perturbación del vector de recursos*, segunda tabla (sección 4.4.2): imprimen el término independiente de la fila de x_2 como $-2 + 3\lambda$ y concluyen que la tabla es factible y óptima *para todo* $\lambda > 2$. Lo correcto es $6 - \lambda$: el pivotaje da $4 - \frac{1}{3}\big(3\lambda - 6\big) = 4 - (\lambda - 2) = 6 - \lambda$, y con ello $z^*(\lambda) = -3(6 - \lambda) = 3\lambda - 18$ y el rango termina en $\lambda = 6$; para $\lambda > 6$ el problema es infactible. Comprobado además en un caso concreto: para $\lambda = 3$ el poliedro es $x_1 + x_2 \leq 3$, $-x_1 + 2x_2 \leq 9$, $x \geq 0$, con vértices $(0,0)$, $(3,0)$ y $(0,3)$, y el mínimo de $-x_1 - 3x_2$ vale -9 en $(0,3)$; $3\lambda - 18$ da -9, mientras que la fórmula impresa daría -21. Los coeficientes de las dos filas de la tabla sí son los suyos. Esta es la única de las tres que cambia una conclusión.
3. *Ejemplo de añadir una restricción*, tabla final (sección 4.4.4): imprimen $c_6 - z_6 = \frac{2}{3}$, y el valor correcto es $\frac{1}{3}$. Con $c_B = (-2, 0, -1)$ y la columna de x_6 igual a $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ sale $z_6 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ y $c_6 - z_6 = \frac{1}{3}$; la actualización del pivotaje da lo mismo, $0 - \frac{1}{-3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$. Todo lo demás de la tabla es correcto.

Lo que se ha añadido en el capítulo de programación entera

- *La demostración de las cuatro caracterizaciones de los poliedros enteros* (sección 5.2.1). Los apuntes enuncian el teorema sin probarlo; aquí se demuestra, y la implicación difícil es la que deduce la integridad de los vértices del hecho de que el *valor* óptimo sea entero.
- *La demostración de la Proposición que dice que el relajado del transporte tiene óptimo finito* (sección 5.2.2), que los apuntes enuncian sin probar.
- *La demostración de que la matriz de incidencia nodo-arco es totalmente unimodular* (sección 5.2.4), que sale en dos líneas del criterio de la suma nula y que los apuntes enuncian sin probar.
- *La deducción completa del corte mixto mejorado* (m^*-corte, sección 5.4.2). Los apuntes dan la fórmula de los cuatro casos sin justificarla; aquí se explica de dónde sale (a una variable entera se le puede sumar cualquier entero) y se hace la cuenta que decide cuál de los dos candidatos es menor.
- *El ejercicio de las tres matrices* de la sección 5.2.1, que no está en las relaciones y se incluye porque la distinción entre ciclos pares e impares y entre grafos dirigidos y no dirigidos no aparece explicada en ningún otro sitio.
- *El ejemplo del transporte, resuelto.* Los apuntes escriben su matriz pero no lo resuelven; aquí se dan sus dos soluciones óptimas, calculadas con aritmética exacta.
- *La sección de ejercicios* (sección 5.5) no corresponde a ningún apartado del tema 5: agrupa los problemas de la relación 7.
- *Las lecturas económicas y las cajas de intuición*: el politopo de Birkhoff, la imagen del escultor para los cortes y la del pajar para la ramificación, y la observación de que el corte de Gomory del ejemplo es, traducido a las variables originales, la desigualdad que un ser humano habría escrito mirando el dibujo.

Y una omisión, declarada. La demostración del teorema de caracterización de la unimodularidad total **por particiones de filas** (sección 5.2.1) no se da. Los apuntes remiten al libro

de Nemhauser y Wolsey; el resultado es de Ghouila-Houri (1962) y su prueba es larga y de naturaleza distinta del resto del tema. Sí se demuestran los dos corolarios que se derivan de él, que son los que se usan en la práctica, y para probar que una matriz concreta es TU mediante este criterio hay que justificar la partición adecuada para cada subconjunto de filas.

Lo que se ha añadido en el capítulo de programación no lineal

Los apuntes del tema 6 enuncian los resultados sin demostrarlos. El capítulo desarrolla sus pruebas a partir de los manuscritos de clase y completa el criterio de descenso y la dirección de máximo descenso, usando Taylor y Cauchy–Schwarz.

Además se han añadido:

- El **lema del menor autovalor** (A definida positiva implica $d^T A d \geq \alpha \|d\|^2$), enunciado y demostrado con el teorema espectral. El profesor lo usa citándolo; aquí se prueba porque es la pieza que sostiene la condición suficiente.
- Una subsección sobre **cómo se reconoce en la práctica una hessiana definida positiva** (autovalores, criterio de Sylvester, completar cuadrados), con el aviso de que Sylvester *no* caracteriza el caso semidefinido si solo se miran los menores dominantes.
- **Los diez ejercicios de este capítulo**, añadidos para practicar los resultados y algoritmos del tema. Las relaciones 1 a 3 se dedican a modelización; la 4, a análisis convexo y programación lineal; la 5 y la 6, a dualidad y sensibilidad; y la 7, a programación entera y cortes.
- **Ejemplos numéricos completos** del método del gradiente, de la regla de Armijo y del método de Newton, con las cuentas hechas. En los apuntes no hay ninguno.
- El **criterio de coercividad** (una función continua que tiende a infinito cuando $\|x\| \to \infty$ tiene mínimo global en $\mathbb{R}^n$), probado a partir de Weierstrass, y el **método en pasos** para hallar y clasificar puntos críticos y decidir si hay mínimo global. Los apuntes citan Weierstrass, que no se aplica en $\mathbb{R}^n$; el criterio es el que resuelve la existencia en los ejercicios de cuárticas.
- La **explicación de la convergencia lineal y cuadrática** sobre un ejemplo no cuadrático, y un **criterio de parada** para los métodos de descenso.

Tres deslices en los apuntes del tema 6

Comprobados sobre el PDF original renderizado, no sobre su extracción de texto.

1. **El signo en la regla de Armijo.** Para $d^k = -\nabla f(x^k)$, la disminución exigida es $\gamma\alpha\|\nabla f(x^k)\|^2 > 0$ si el gradiente no es nulo. El signo contrario del original permite aceptar pasos que no descienden. El capítulo escribe la condición correcta y distingue la aceptación de un paso de la convergencia del método.
2. **Una errata tipográfica** en la cuadrática que justifica el método de Newton, sin consecuencias.
3. **Se invoca la condición necesaria donde corresponde la suficiente** al justificar Newton: que un punto con gradiente nulo sea mínimo local lo garantiza la suficiente, no la necesaria, que va en el sentido contrario.

También se corrige la proposición del original «d es dirección de descenso *si y solo si* $\nabla f(\hat{x})^T d < 0$» es falsa en el sentido directo. Con $f(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$ en el origen y $d = (1, 0)$ se tiene $\nabla f(0,0)^T d = 0$ y sin embargo $f(\lambda, 0) = -\lambda^2 < 0 = f(0,0)$: d es de descenso y el producto escalar no es negativo. Lo correcto es

$$\nabla f(\hat{x})^T d < 0 \implies d \text{ de descenso} \implies \nabla f(\hat{x})^T d \leq 0.$$

El capítulo demuestra entera la implicación útil y da el contraejemplo.

El capítulo 7 entero

El capítulo desarrolla los tres apartados del tema 7 del programa: condiciones de optimalidad, gradientes proyectado y reducido, y teoría lagrangiana. Se conserva como ampliación: **no se examina en el curso aquí descrito**.

De dónde sale entonces el capítulo. De los tres textos de programación no lineal que figuran en la bibliografía específica recomendada por el propio programa de la asignatura: Bazaraa, Sherali y Shetty, *Nonlinear Programming. Theory and Algorithms* (Wiley, 1993); Bertsekas, *Nonlinear Programming* (Athena Scientific, 1995); y Luenberger, *Linear and Nonlinear Programming* (Addison Wesley, 1989). La organización del capítulo — condición geométrica, Fritz John por el teorema de Gordan, Karush-Kuhn-Tucker bajo cualificación, gradiente proyectado y reducido, punto de silla y dualidad lagrangiana — es la del primero de los tres, que es el más próximo al enfoque del resto del libro.

Las demostraciones se desarrollan en el texto, junto con el contraejemplo de la cúspide, dos recorridos numéricos de los algoritmos y las figuras de dualidad. De los nueve ejercicios, tres proceden de exámenes de 2015 y 2018 y seis son añadidos. Las conexiones con los capítulos anteriores se apoyan en tres hechos: el gradiente reducido reutiliza bases y costos reducidos; KKT recupera la holgura complementaria lineal; y la mejor cota lagrangiana se relaciona con la relajación lineal mediante la envolvente convexa del subproblema.

Para los tipos de problema que aparecen en el archivo se han añadido tres métodos en pasos, cada uno con sus errores típicos: pasar un problema a la forma estándar, resolver a mano un sistema KKT recorriendo el árbol de casos, y calcular un dual lagrangiano. No son resultados nuevos, sino la destilación de lo que hacen los ejemplos del capítulo.

Métodos en pasos, errores típicos y cierres de sección

Todos los capítulos llevan además tres clases de añadido de exposición, que no introducen ningún resultado nuevo. Los tipos de problema que se repiten tienen su método escrito en pasos, destilado de los ejemplos resueltos: pensar una formulación (datos, índices, variables con su definición completa, objetivo con unidades, restricciones con nombre y una prueba con números), en el capítulo 1; pasar de la tabla final de la fase I a la fase II leyendo B^{-1}, en el 3; escribir el dual de un problema dado, pasar del primal resuelto al dual resuelto y calcular el rango de un solo costo o de un solo recurso, en el 4; decidir si una matriz es totalmente unimodular, hacer un corte fraccional y resolver un nodo de ramificación con la tabla, en el 5; y los ya citados de los capítulos 6 y 7. Detrás de esos métodos, de muchas demostraciones y de la mayoría de los ejercicios va una lista de errores típicos, casi siempre con el número equivocado al que llevan. Y la mayoría de las secciones se cierran con lo que se ha ganado en ellas. Los ejemplos numéricos nuevos de esos bloques —entre ellos el transporte de dos almacenes y tres tiendas del capítulo 1 y la dieta en miniatura vista desde el dual del 4— se han comprobado uno a uno con un cálculo independiente.

Los dos apéndices que no vienen de los apuntes

«Ideas intuitivas» recoge en un solo sitio las imágenes mentales que sostienen el curso, para poder releerlas del tirón: qué compra la convexidad, qué es un poliedro por dentro y por fuera, por qué el óptimo se para en una esquina, qué dice de verdad el lema de Farkas, qué es el dual mirado por dentro, por qué los precios sombra son derivadas, por qué relajar y redondear falla, y qué ve el gradiente frente a qué ve la hessiana. No contiene ninguna demostración ni ningún resultado que no esté probado en su capítulo: remite a cada uno por su nombre.

«Apoyo de otras asignaturas» es un puente, no un curso: qué hace falta de álgebra lineal, de análisis y de convexidad para leer este libro con soltura, con la definición mínima, un ejemplo y referencias para ampliar. Rouché–Frobenius, la regla de Cramer y el criterio de autovalores para formas cuadráticas se enuncian allí con ejemplos.

Dentro de esos dos apéndices hay tres cosas que son añadido de contenido y no solo de presentación:

- La lectura de $z(b)$ como **máximo de funciones lineales**, y por tanto convexa y lineal a trozos, con los precios sombra como pendiente de la faceta en la que se está. Los apuntes solo deducen $z(b) = (w^*)^T b$; que eso implica convexidad sale de la dualidad fuerte y de que el conjunto factible del dual no depende de b.
- La **conexión con Geometría local**: para la gráfica de una función en un punto crítico, con la normal hacia arriba, la segunda forma fundamental coincide con la hessiana. El caso elíptico puede ser mínimo o máximo estricto; el hiperbólico es de silla y el parabólico requiere más información.
- La regla de **Cramer** como explicación en una línea de por qué $\det B = \pm 1$ obliga a que los vértices sean enteros. El profesor lo usa, pero no lo escribe así.

Lo que se ha añadido al resolver los exámenes

Las fichas del apéndice E indican qué enunciados y resoluciones se conservan de cada prueba. Las soluciones desarrollan los pasos necesarios y, cuando la copia es ambigua, explicitan la interpretación adoptada. Entre los apoyos añadidos:

- El **modelo de itinerario** del calendario deportivo, con variables de posición y de trayecto y la linealización del producto. La resolución ajena lo deja sin terminar.
- La **demostración de que la función objetivo ingenua de ese problema es constante** sobre la región factible, que es lo que explica la frase del enunciado sobre no volver a la sede.
- La observación de que al desdoblar $x = x^+ - x^-$ el cono $|x| \leq y - 2$ adquiere **cuatro direcciones extremas** y el conjunto original solo tiene dos.
- Una **segunda demostración de que una matriz de intervalos es TU**, por colores alternos.
- La **comprobación por enumeración** del óptimo entero en los ejercicios de cortes, para poder decir si el corte cierra la brecha o no.
- La **formulación de «vender siempre el stock más antiguo»** con binarias de agotamiento, que la resolución ajena no contesta.
- Las **erratas detectadas** en enunciados y resoluciones, documentadas junto al ejercicio; las lecturas dudosas se distinguen de las correcciones justificadas.

Limitaciones de las copias

1. **Datos o signos de lectura dudosa.** Se indican junto al enunciado y, cuando condicionan el resultado, la solución se presenta bajo una lectura explícita.
2. **Partes de pruebas no conservadas.** La ficha de cada convocatoria identifica si solo se dispone de teoría, de problemas o de una resolución manuscrita.

Los apartados históricos de KKT y Lagrange están resueltos en las páginas 442, 444 y 445, con enlaces desde los enunciados completos del apéndice E.

Material de apoyo

El apéndice F recuerda las herramientas de álgebra lineal y análisis que usa el libro, con ejemplos y referencias para ampliarlas.

Qué no se ha recogido

Los siete capítulos recogen los apartados de los siete temas del programa. Las omisiones de demostraciones y de fuentes se indican en este apéndice; para preparar la evaluación del curso se trabaja con los seis primeros capítulos, según el apéndice C.

Las siete relaciones de problemas, una por una

Las hojas del curso tienen, contadas sobre el enunciado impreso, 7, 7, 5, 10, 5, 6 y 5 problemas, cuarenta y cinco en total. El libro los resuelve **todos menos uno**, y el que falta no falta por decisión editorial:

- *Relaciones 1, 2 y 3*, diecinueve problemas: sus formulaciones, en el capítulo 1.
- *Relación 4*, diez problemas. Ocho están en los capítulos 2 y 3; el noveno, el de las reinas en un tablero $n \times n$, es también el segundo problema de un examen y se resuelve en el apéndice de exámenes, con referencia desde el capítulo 1. El restante, R4.1 sobre el hospital, está en el capítulo 1.
- *Relaciones 5 y 6*, once problemas: enteros, en el capítulo 4.
- *Relación 7*, cinco problemas. Están los cuatro últimos, en el capítulo 5. **Falta el enunciado del primero**: la copia disponible empieza en el problema 2.

Del último problema de la relación 7 tampoco se conserva la resolución ajena de su cuarto apartado, el que impone que dos variables sean enteras y pares; ese apartado se ha resuelto aquí desde cero.

APÉNDICE C

Qué cae en el examen

Este apéndice recoge el sistema de evaluación de Programación Matemática en la Universidad de Sevilla y orienta el repaso con las pruebas del apéndice E. El resto del libro puede estudiarse sin esta guía.

Se distinguen las reglas del proyecto docente y las preguntas del archivo histórico: estas describen exámenes anteriores, no anticipan los siguientes. En el curso aquí descrito, el tema 7 figura en el programa, pero no se examina; se conserva como ampliación.

C.1 Cómo se califica

Estas reglas proceden de los proyectos docentes de los grupos 1, 2 y 3 de 2026-27, que coinciden en sus criterios de calificación.[1]

- La evaluación se hace mediante exámenes escritos que constan de **dos partes, Teoría y Problemas**.
- **Cada parte se califica entre** 0 **y** 10 **puntos.**
- La calificación global es **la media de las dos**, siempre que cada una supere un mínimo de 3.
- Si alguna de las dos no llega a 3, la calificación de la asignatura es el **mínimo entre** 3 **y la media** de ambas.
- Quien apruebe puede mejorar su calificación con trabajos voluntarios de teoría o de prácticas informáticas con software de optimización, si se proponen a lo largo del curso.

Teoría y problemas pesan la mitad cada uno. Con el mínimo exigido en cada parte, un 9 en problemas y un 2 en teoría dan una nota global de 3.

[1] Universidad de Sevilla, Programación Matemática, código 1710028; proyectos docentes de 2026-27, modificados el 2 de julio de 2026, apartado «Criterio de calificación». Disponibles en la ficha de la asignatura.

La evaluación continua

Hay un examen previo a la primera convocatoria, correspondiente a la evaluación continua, con las mismas características que el oficial. Sus reglas son:

- Quien no apruebe la evaluación continua pero obtenga una calificación **superior a** 6 **sobre** 10 **en alguna de las dos partes conserva esa parte** para la primera convocatoria.
- Quien no apruebe en la primera convocatoria debe examinarse de **toda la asignatura** en las restantes.
- Quien haya aprobado la evaluación continua y quiera subir nota en la primera convocatoria puede presentarse, pero **de toda la asignatura, no por partes**. La nota final es el **máximo** entre la de la evaluación continua y la de la primera convocatoria.

La carga lectiva

El programa oficial reparte las horas presenciales así: 54 **horas de clases teórico-prácticas** y 6 **horas de prácticas de informática**, sobre las 150 horas totales que corresponden a los 6 créditos de la asignatura. Este reparto indica tiempo presencial, no porcentajes de la calificación.

C.2 El formato

Las pruebas del archivo suelen tener una parte de teoría y otra de problemas. La distribución de puntos dentro de cada parte se lee en su enunciado; no debe confundirse con la ponderación de ambas en la nota global.

1. **Teoría.** Dos o tres cuestiones. Cada una pide *enunciar y demostrar* un resultado del temario, a menudo con una aplicación corta: una matriz pequeña, un poliedro o un sistema de desigualdades. Cuando se piden ambas, hay que resolver ambas.
2. **Problemas.** Uno de *formulación* y uno grande de *simplex, dualidad y sensibilidad*, a veces con un tercero de programación entera.

El guión del problema grande

Es el ejercicio que más se repite y el que más se parece a sí mismo de un año a otro. El guión, en el orden en que suele venir:

1. Se da la tabla final de la fase I con huecos (a, b, c) y hay que rellenarlos: la matriz B^{-1} se lee en las columnas de las variables artificiales o de holgura.
2. Fase II: costos reducidos, pivotar, y decidir el tipo de solución (única, múltiple o ilimitada).
3. El problema dual, su solución óptima leída como $c_B^T B^{-1}$, la comprobación de la holgura complementaria y la lectura de los precios sombra.
4. El rango de un coste (c_1, c_2, c_4) o de un recurso (b_1, b_2, b_3, o una perturbación Δ) que mantiene óptima la base, y qué hay que hacer al salirse de él: seguir con el simplex, con el simplex dual, o declarar el problema ilimitado o infactible.
5. Añadir una restricción o una variable nueva y reoptimizar.
6. Un corte de Gomory (el fraccional) restaurando la factibilidad con el simplex dual; o bien ramificación y acotación, a veces resuelta gráficamente.

Cada paso del guión tiene su método en el cuerpo del libro, con los errores típicos detrás: rellenar la tabla de la fase I y pasar a la fase II, en la sección 3.3; escribir el dual, leer su

solución en la tabla óptima y comprobar la holgura complementaria, en las secciones 4.1 y 4.2; los rangos de un solo costo y de un solo recurso, y qué hacer fuera de ellos, en las secciones 4.4.1 y 4.4.2; añadir una variable o una restricción, en las secciones 4.4.3 y 4.4.4; y el corte fraccional y un nodo de ramificación resuelto con la tabla, en las secciones 5.4.1 y 5.3.

C.3 Qué aparece en las pruebas resueltas

La tabla identifica resultados pedidos en las quince pruebas del apéndice E. Algunas solo contienen teoría; no todas tienen el mismo formato.

Resultado	**Convocatorias**
Lema de Farkas y sus aplicaciones	mayo 2026, parcial B de 24-25, tercera de 2018, parcial A de 2018
Teorema fundamental de la programación lineal	preparcial B de 23-24, primera de 2023, tercera de 2018, parcial B de 2017, 17-06-2015
Corte de Gomory, describirlo y justificarlo	mayo 2026 y parcial B de 24-25 (mixto), parcial A de 2018 y 17-06-2015 (fraccional)
Unimodularidad total y poliedro entero	parcial B y prefinal del grupo 1 de 24-25, primera y segunda de 22-23, primera de 2024, parcial A de 2018, junio de 2018, 29-05-2015
Condición de optimalidad en PNL sin restricciones	preparcial B de 23-24, primera de 2023, teoría de 2018, parcial B de 2017
Teorema de Gordan, como aplicación de Farkas	tercera de 2018, 29-05-2015
Caracterización de los puntos extremos	segunda de 22-23
Dualidad débil	segunda de 22-23
Condición suficiente de optimalidad de una solución básica factible	prefinal del grupo 1 de 24-25
Dual de un problema canónico y holgura complementaria	prefinal del grupo 1 de 24-25
Representación de poliedros	29-05-2015
Caratheodory	teoría de 2018

Apartados recurrentes del problema grande

1. **Completar una tabla con huecos**, leyendo B^{-1} en las columnas de holguras y artificiales, cuando estas forman la identidad en el sistema original.
2. **Formular el dual** y leer su solución en una tabla óptima.
3. **Rango de un costo**, distinguiendo básico de no básico.
4. **Rango de un término independiente**, y qué ocurre fuera del rango.
5. **Un corte de Gomory sobre una fila concreta** y reoptimización con símplex dual.
6. **Añadir una restricción o una variable.**
7. **Completar un árbol de ramificación y acotación.**

Los tipos de formulación

Localización con costes fijos y capacidades; cobertura y recubrimiento; asignación; coloración de grafos; planificación con precedencias; producción con stock, con y sin deterioro; calendario deportivo; las n reinas; el cuadrado mágico; diseño de redes con costes fijos; reparto de una herencia.

Cómo se piensa una formulación, en pasos, está al abrir la sección 1.2, con un modelo de transporte construido desde el enunciado; los recursos que se repiten en todos los tipos, en su catálogo; y los errores que más se cometen, al cerrarla.

Errores que conviene evitar

1. **La parte fraccionaria de un número negativo.** $f(-5/9) = 4/9$, no $5/9$. Aparece en la deducción de los cortes de Gomory; equivocarse puede producir una desigualdad que no sea válida para las soluciones enteras.
2. **Confundir qué pone en peligro cada cambio.** Tocar un costo pone en peligro la *optimalidad*; tocar un recurso, la *factibilidad*. Los dos apartados de sensibilidad de la segunda de 2022-23 permiten practicar esta distinción.
3. **No mirar la columna entera** antes de declarar ilimitado o múltiple. Costo reducido nulo con columna sin entradas positivas es óptimo múltiple *no acotado*; costo reducido negativo con columna no positiva es ilimitado.

C.4 Las demostraciones que hay que saber

Las marcas granates junto a los enunciados enlazan con la lista del apéndice D. Esta combina los epígrafes de contenidos importantes del profesor y el manuscrito «Demostraciones de teoremas para examen».

1. **Programación lineal.** El manuscrito desarrolla la demostración del teorema fundamental. El epígrafe del profesor incluye además el símplex matricial: condiciones de optimalidad, mejora de una solución básica factible y algoritmo. La selección del manuscrito no excluye estos contenidos. La condición suficiente de optimalidad de una solución básica factible lleva también la marca, pero no sale de esas listas: la pide el prefinal del grupo 1 de 2024-25, como primera cuestión de teoría (dar y justificar la condición).
2. **Análisis convexo.** Además de Caratheodory, Farkas y la representación, están la separación de un punto y un convexo cerrado, el teorema de Tucker, el teorema de Gordan y el lema de las direcciones, todos con demostración completa en el manuscrito, y la existencia de puntos extremos, que aparece en el epígrafe del propio profesor.
3. **Resultados auxiliares sin marca.** No figuran en esas dos listas: el lema de las combinaciones convexas, las operaciones con convexos, el teorema del interior, la igualdad entre envolvente y clausura convexa, el cierre del cono finitamente generado, la caracterización de las direcciones extremas y la segunda demostración (inductiva) del teorema de representación. Se incluyen para desarrollar las pruebas y se describen también en el apéndice de añadidos.

C.5 Por capítulos

Cada entrada dice a qué sección o a qué ejercicio del libro se refiere.

AMPL (introducción en el apéndice G)

Las pruebas de laboratorio piden escribir y resolver modelos con AMPL, interpretar sus salidas y, en ocasiones, obtener información de sensibilidad. El archivo también contiene preguntas sobre AMPL en exámenes escritos.

- **Curso 2023-24, grupo B.** Cuatro preguntas: (1) dar el archivo de modelo; (2) dar la solución óptima y el valor óptimo de la función objetivo; (3) dar los datos de sensibilidad de c_2 y de b_2, que se leen en la segunda fila de las dos tablas de `x.down/x.up` y `restricciones.down/restricciones.up`; (4) dar la solución del problema entero, que se obtiene añadiendo `, integer` a la declaración de `x`. El detalle que hace fallar el apartado (1) es que dos de las restricciones venían con $\geq$ y el modelo está escrito con $\leq$: hay que cambiar de signo esas filas en el fichero de datos.
- **Curso 2021-22.** Un problema de transporte equilibrado. Tres apartados: la solución óptima; **escribir a qué desigualdades concretas equivalen** las restricciones etiquetadas `Disponibilidades[2]` y `Demandas[2]`, que es lo que contesta `expand`; y el rango de variación individual de dos coeficientes de coste.
- **Parcial escrito del grupo A de 2018.** Pide formular el disco de radio mínimo que contiene a n discos dados como problema de optimización convexa diferenciable, demostrar que tiene solución óptima, justificar que es convexo diferenciable y *describir brevemente* cómo se resolvería con AMPL en la plataforma NEOS Solver. El apartado sobre AMPL pide describir el procedimiento.

El prefinal de mayo de 2026 pide formular en notación matemática y no menciona AMPL. En cambio, las pruebas escritas de junio y diciembre de 2018 sí piden código. Por eso conviene atender a lo que solicita cada enunciado, sin limitar AMPL al laboratorio.

Introducción a la Programación Matemática (capítulo 1)

La formulación de la sección 1.2 es uno de los dos problemas de casi todas las convocatorias. Los tipos que se repiten son estos, y los ejercicios del capítulo cubren todos:

- *Localización con costes fijos y capacidades.* Es el tipo más frecuente: diciembre de 2019 (plantas industriales y clientes exclusivos), octubre de 2023 (dos almacenes y cuatro poblaciones, con una ampliación posible) y julio de 2024 (minas, fábricas y ciudades). El patrón es siempre el mismo: una binaria de apertura, una continua de envío y la ligadura $x_{ij} \leq M_{ij}\, y_i$ que las une.
- *Cobertura.* Antenas de telefonía (septiembre de 2022), selección de columnas de una matriz de ceros y unos, que es el *set covering* en abstracto (septiembre de 2017), y nodos que vigilan a sus vecinos, que es dominación en un grafo (junio de 2022).
- *Asignación.* Cinco trabajadores y cinco puestos (junio de 2024) y tres fábricas en tres localizaciones (junio de 2023), este último con costes que dependen de *pares* de localizaciones y por tanto con producto de binarias que hay que linealizar.
- *Tableros y cuadrículas.* Cuadrados mágicos (junio de 2017), el Subarai (prefinal de mayo de 2023), cruces en una cuadrícula (junio de 2021) y seleccionar entradas de una matriz (octubre de 2024). Se usan binarias para representar elecciones, con uno o varios índices

según el problema; las restricciones expresan los recuentos, sumas o incompatibilidades pedidos.
- *Redes de dos etapas.* Cinco centros, dos almacenes y tres ciudades (junio de 2023): el balance en el nodo intermedio es la restricción que hay que ver.
- *Cartera con presupuesto y proporciones.* La política de préstamos de un banco (tercera convocatoria de 2018, celebrada en diciembre): las condiciones en porcentaje se convierten en lineales quitando el denominador.

Conviene definir los índices y escribir el modelo con sumatorios; se despliegan los datos cuando se pide. Para repartir el tiempo, atiéndase a la puntuación de cada apartado, que no tiene por qué ser proporcional a la longitud del enunciado.

Análisis convexo (capítulo 2)

De este tema cae, sobre todo, teoría: las definiciones de la sección 2.1, el lema de Farkas de la sección 2.2 y el teorema de representación de la sección 2.4. El manuscrito «Demostraciones de teoremas para examen» desarrolla varias de las pruebas que los apuntes del profesor omiten; este libro las explica junto a los enunciados.
- *El cono de las columnas es convexo y cerrado.* Cuestión de teoría 1 del examen parcial de 2024-25, junto con el lema de Farkas. Lo que se pide es la convexidad; el cierre se demuestra aquí como añadido porque la prueba de Farkas lo necesita.
- *El teorema de Gordan como aplicación de Farkas.* Tercera convocatoria de 2018 (cuestión de teoría 2) y convocatoria de mayo de 2015 (cuestión 3), en las dos con el mismo enunciado. Lo que se pide es la *demostración* a partir de Farkas, no citar el teorema de Gordan como conocido.
- *Farkas con variables libres y no negativas a la vez.* Cuestión 1 del examen parcial del grupo A de 2018. Es el enunciado con $Ax + By = b$: x es no negativo e y es libre.
- *Puntos extremos, direcciones extremas y representación de un poliedro no acotado.* Es el problema 4 de la relación 4 en sus apartados (a) y (b); los apartados (c) y (d), sobre vectores de coste concretos, se resuelven en el capítulo 3 con el teorema fundamental.
- *Representar un poliedro dado por desigualdades.* Cuestión 2 de la convocatoria de mayo de 2015, como aplicación del teorema de representación.
- *Un poliedro que es un solo punto.* Cuestión de teoría 2 del examen parcial de 2024-25. El enunciado original pregunta después si la matriz es totalmente unimodular, y esa parte corresponde al capítulo 5.

Sobre el teorema de Tucker (sección 2.3): los apuntes lo traen como anexo del tema 2 con su demostración, y de él cuelga el teorema fundamental de dualidad. No consta que haya caído por sí solo en las convocatorias vistas; entra por la puerta de la dualidad.

Dualidad en programación lineal (capítulo 4)

Es el tema con más peso del examen escrito, porque alimenta a la vez la parte de teoría y el problema grande. El epígrafe «Contenidos teóricos importantes del tema» con que el profesor cierra el tema 4 enumera cinco bloques: definición de dualidad; teoremas de dualidad débil, fuerte y de holguras; interpretación económica del dual; algoritmo dual del simplex, con su teorema y su razonamiento; y análisis de sensibilidad y post-optimalidad.
- *Holgura complementaria: enunciar y demostrar.* Prefinal del grupo 1 de 2024-25. La segunda convocatoria de 2022-23 pide demostrar la dualidad débil.

- *Escribir el dual de un problema dado y resolverlo desde la tabla óptima del primal.* Aparece en prácticamente todas las convocatorias, dentro del problema grande, y siempre de la misma manera: hallada la tabla óptima, se pide el dual, su solución óptima, la comprobación de la holgura complementaria y los precios sombra.
- *Rango de un coeficiente de costo o de un recurso que mantiene óptima la base*, y qué hacer fuera del rango. Es el apartado que más se repite después del anterior. Los cuatro finales posibles son: seguir con el simplex (se rompió la optimalidad), seguir con el simplex dual (se rompió la factibilidad), ilimitado o infactible.
- *Añadir una variable o una restricción a un problema ya resuelto.* Aparece en el banco histórico de 2018 y en la convocatoria de junio de 2018, y es el mismo mecanismo que usa después el corte de Gomory.
- *Un problema entero de simplex dual, sin fase I.* Es menos frecuente por sí solo; lo habitual es que el simplex dual aparezca como herramienta de reparación dentro del apartado de sensibilidad.

Sobre el reparto: el problema grande de las convocatorias recorre casi siempre la misma secuencia — completar una tabla con huecos, terminar el simplex, escribir el dual y sus precios sombra, un rango de sensibilidad y un cambio en los datos —, y esa secuencia está resuelta entera, apartado por apartado, en el problema 2 de la relación 5 (sección 4.5).

Programación lineal entera (capítulo 5)

El epígrafe «Contenidos teóricos importantes del tema» con que el profesor cierra el tema 5 enumera cinco puntos: poliedros enteros y matrices TU; equivalencias de unimodularidad; estructura especial de los problemas de transporte y asignación; descripción de los esquemas de ramificación y acotación; y deducción de los cortes de Gomory.

- *Definir matriz TU y decidir si una matriz concreta lo es.* Aparece en la prueba de junio de 2018, en la primera de 2023, en el parcial del grupo B de 2024-25 y en la evaluación alternativa de 2024-25. La matriz que más se repite es la del triángulo, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, cuyo determinante es -2.
- *Probar que un poliedro concreto tiene vértices enteros.* Cuestión 2 del examen parcial del grupo A de 2018, con el poliedro $\sum_{j \le k_i} x_{ij} \ge 1$, $0 \le x_{ij} \le u_{ij}$; y el politopo de asignación en la convocatoria de mayo de 2015.
- *Describir y justificar el corte fraccional de Gomory*, o el mixto. Aparece en 2015, en 2018 y en el parcial del grupo B de 2024-25, y siempre con las dos partes: la deducción y la aplicación a una tabla concreta.
- *Completar un árbol de ramificación y acotación* dado a medias, calculando los nodos que faltan y diciendo cuáles son terminales y por qué. Prueba de evaluación continua de junio de 2018.
- *Formular un problema con estructura de red* (flujo con coste fijo, camino más corto, asignación) y decidir si su matriz es TU. Examen parcial del grupo B de 2017 y prueba de junio de 2018.

Programación no lineal sin restricciones (capítulo 6)

El epígrafe «Contenidos teóricos importantes del tema» con que el profesor cierra el tema 6 enumera solo dos puntos, y conviene tomarlos al pie de la letra porque son muy concretos:

- *Condiciones necesarias y suficientes de optimalidad sin restricciones.*
- *Justificación y descripción de los algoritmos de gradiente.*

Las condiciones de optimalidad aparecen en la prueba de teoría de 2018, en la primera convocatoria de 2023, en el preparcial B de 2023-24 y en el parcial B de 2017. Se pide enunciarlas, demostrarlas o usarlas para clasificar puntos; los enunciados pueden referirse a mínimos o a máximos.

No se ha localizado una pregunta sobre la justificación de los algoritmos de gradiente en las pruebas resueltas, aunque figura en el epígrafe del tema.

Programación no lineal con restricciones (capítulo 7)

El tema 7 figura en el programa formal, pero no se examina en el curso aquí descrito. Se conserva como ampliación, fuera de la lista de demostraciones exigidas.

El archivo contiene preguntas de KKT (junio y diciembre de 2018) y Lagrange (mayo de 2015), resueltas en las páginas 442, 444 y 445. Estas pruebas históricas no amplían el contenido evaluable del curso.

Dos avisos de notación que solo importan en el examen

1. En la teoría de minimización, los costos reducidos se escriben como $c_j - z_j$, con $z_j = c_B^T B^{-1} a_j$. Algunos ejercicios usan $z_j - c_j$; al cambiar de convención, el criterio de optimalidad cambia de signo. Conviene mirarlo antes de decidir si una tabla es óptima.
2. Las variables duales se denotan por w en la teoría y, a menudo, por u en los ejercicios. El libro respeta la letra de cada enunciado.

APÉNDICE D

Teoremas que caen

Esta lista se genera a partir de las marcas granates del texto. Cada entrada enlaza con su enunciado e indica si se señala también la demostración.

El capítulo 7 se conserva como ampliación y **no forma parte de la evaluación del curso aquí descrito**. Sus resultados no llevan marcas de examen ni aparecen en esta lista. La presencia de preguntas relacionadas en el archivo histórico se explica en el apéndice C.

Teorema de Caratheodory . . . . . pág. 58
Teorema de la proyección sobre un convexo cerrado . . . . . pág. 68
Separación de un punto y un convexo cerrado . . . . . pág. 72
Lema de Farkas . . . . . pág. 73
Teorema de Gordan . . . . . pág. 79
Corolario del lema de Farkas . . . . . pág. 80
Teorema de Tucker . . . . . pág. 87
Caracterización de los puntos extremos en forma estándar . . . . . pág. 93
Existencia de puntos extremos . . . . . pág. 97
Lema de las direcciones de un poliedro en forma estándar . . . . . pág. 98
Teorema de representación de conjuntos poliédricos . . . . . pág. 101
Teorema fundamental de la programación lineal . . . . . pág. 128
Condición suficiente de optimalidad de una solución básica factible . . . . . pág. 138
Teorema de dualidad débil . . . . . pág. 190
Corolario de la dualidad débil . . . . . pág. 191
Teorema fundamental de dualidad lineal . . . . . pág. 192
Teorema de dualidad fuerte . . . . . pág. 196
Teorema de holgura complementaria fuerte . . . . . pág. 198
Teorema de holguras complementarias . . . . . pág. 199
Interpretación económica del dual: los precios sombra . . . . . pág. 202
Teorema del simplex dual: base óptima primal y factibilidad dual . . . . . pág. 209
Análisis de sensibilidad: rango del vector de costos . . . . . pág. 220
Análisis de sensibilidad: rango del vector de recursos . . . . . pág. 224

Post-optimalidad: añadir una nueva variable . . . . . pág. 227
Post-optimalidad: añadir una nueva restricción . . . . . pág. 230
Caracterizaciones de los poliedros enteros . . . . . pág. 272
Equivalencias de la unimodularidad total . . . . . pág. 273
Teorema de Hoffman-Kruskal . . . . . pág. 275
Estructura especial del problema del transporte: unimodularidad e integridad . pág. 285
Estructura especial del problema de asignación . . . . . pág. 286
Deducción y validez del corte fraccional de Gomory . . . . . pág. 298
Deducción y validez del corte mixto de Gomory . . . . . pág. 302
Convexidad: todo mínimo local es global . . . . . pág. 325
Condición necesaria de optimalidad en PNL sin restricciones . . . . . pág. 330
Condición suficiente de optimalidad local en PNL sin restricciones . . . . . pág. 336
Condición suficiente de optimalidad global . . . . . pág. 342
Hessiana semidefinida positiva si y solo si la función es convexa . . . . . pág. 343
Condición suficiente de optimalidad global para funciones convexas . . . . . pág. 345
Criterio de descenso y condición necesaria . . . . . pág. 351
Dirección de máximo descenso . . . . . pág. 352

Fuentes de la lista.

1. El epígrafe **«Contenidos teóricos importantes del tema»** con que termina cada uno de los temas de los apuntes del profesor.
2. El documento manuscrito **«Demostraciones de teoremas para examen»** que circula entre los estudiantes, veinticinco páginas con demostraciones agrupadas por temas. No es un documento oficial.

   Las dos listas no son idénticas, y conviene saber en qué se separan.

- El manuscrito trae, además de lo que está en el epígrafe del profesor, la *separación de un punto y un convexo cerrado*, el *teorema de Tucker*, el *teorema de Gordan* y el *lema de las direcciones* de un poliedro en forma estándar. Están marcados, porque el documento los demuestra enteros.
- El epígrafe del profesor trae la *existencia de puntos extremos*, que el manuscrito no incluye. También está marcada.
- En programación lineal, el manuscrito desarrolla el teorema fundamental. El epígrafe del profesor incluye también el símplex matricial, sus condiciones de optimalidad, la mejora de una solución básica factible y el algoritmo. La ausencia de una prueba en el manuscrito no la excluye de la evaluación.

Una marca no procede de ninguna de las dos listas: la de la condición suficiente de optimalidad de una solución básica factible, que se ha añadido porque la pide el prefinal del grupo 1 de 2024-25 (apéndice C).

APÉNDICE E

Exámenes resueltos

Este apéndice reúne convocatorias recientes y pruebas del banco histórico, ordenadas por fecha cuando se conoce. Permiten practicar la combinación de teoría, formulación y cálculo que aparece en los exámenes; su presencia aquí no garantiza que un contenido vaya a preguntarse en una convocatoria posterior.

Cada prueba comienza con una ficha que describe la fuente disponible y el reparto de puntos cuando consta. El enunciado se presenta antes de la resolución para poder intentarlo sin verla. Las soluciones desarrollan los cálculos y enlazan con los resultados demostrados en los capítulos.

La documentación no es igual en todos los casos: se distinguen los enunciados impresos de las reconstrucciones basadas en soluciones manuscritas. Las erratas identificadas se explican, y los datos que no pueden recuperarse con seguridad se dejan señalados como ausentes. Algunas pruebas conservan solo la parte de teoría.

E.1 Examen parcial del curso 2025–26 (mayo de 2026)

FICHA. Departamento de Estadística e Investigación Operativa. *Programación Matemática. Examen parcial. Curso 2025-2026.* Cuatro preguntas: Teoría 1 [3 puntos], Teoría 2 [2 puntos], Problema 1 [1,4 puntos] y Problema 2 [2,6 puntos]. Los puntos del enunciado impreso suman 9, no 10; así figura en el original y así se reproduce.

Enunciado

Teoría 1 [3 puntos]. Enuncie y demuestre el lema de Farkas.

Cuestión. ¿Es cierto el siguiente enunciado? Justifique la respuesta. Dada la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, el vector $b \in \mathbb{R}^n$ hace factible el sistema $Ax \leqq b$ para $x \in \mathbb{R}^m$, $x \geqq 0$, si y sólo si para cualquier $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $y \geqq 0$ y $y^T A \geqq 0$ entonces necesariamente $b^T y \geq 0$.[1]

Teoría 2 [2 puntos]. Defina el concepto de corte en un problema de programación lineal entera. Describir y justificar el corte mixto de Gomory para problemas entero-mixtos.

Problema 1 [1,4 puntos]. Se quiere crear el horario de exámenes finales para 6 asignaturas. Los siguientes pares de asignaturas comparten alumnos matriculados (y por tanto no pueden examinarse a la misma hora):

$$(1,2),\ (1,3),\ (1,5),\ (2,4),\ (2,6),\ (3,4),\ (3,5),\ (4,6),\ (5,6).$$

Formule el problema de programación lineal entera que minimiza el número de franjas horarias necesarias para programar todos los exámenes sin conflictos. Extender la formulación al caso general de n asignaturas y un conjunto de pares de exámenes que no pueden ser realizados en la misma franja horaria.

Problema 2 [2,6 puntos]. Considere el problema de Programación Lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeto a:} & 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

1. Obtener la tabla óptima mediante el algoritmo símplex. Indicar el tipo de solución y los valores óptimos de las variables y de la función objetivo.
2. Formular el problema dual, determinar el valor óptimo de las variables del dual y verifique las condiciones del Teorema de Holgura Complementaria. Calcule los precios sombra del problema e interprete su significado.
3. Determinar el rango de variación del coeficiente c_1 (coeficiente de x_1 en la función objetivo) para que la solución óptima no cambie.
4. Si el término independiente de la segunda restricción se modifica a $b_2 = 4 + \Delta$, calcule el rango de valores de Δ que mantiene la factibilidad de la base óptima obtenida en la fase II. Obtener la solución óptima del problema para $\Delta = -3$.

Teoría 1: el lema de Farkas

Resolución. El enunciado, en la forma de los apuntes (sección 2.2), es este.

Teorema (de Farkas)**.** Sean $A \in M_{m\times n}$ y $c \in \mathbb{R}^n$. Uno y solo uno de los siguientes sistemas tiene solución:
(1) $Ax \leqq 0$, $c^T x > 0$, para algún $x \in \mathbb{R}^n$; o
(2) $A^T y = c$, $y \geqq 0$, para algún $y \in \mathbb{R}^m$.

[1] El enunciado impreso escribe «el vector $b \in \mathbb{R}^m$». Es una errata del propio examen: con $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$, la única lectura en la que las dimensiones encajan es $b \in \mathbb{R}^n$, y así se resuelve aquí.

La idea, antes de la prueba. Llámense $a_1, \dots, a_m$ a las filas de A, vistas como vectores de $\mathbb{R}^n$. El sistema (2) dice que c es combinación lineal con coeficientes *no negativos* de esas filas, es decir, que c vive dentro del cono que generan. El sistema (1) dice que existe una dirección x que forma ángulo obtuso o recto con todas las filas y ángulo agudo con c: un hiperplano por el origen, de normal x, que deja el cono a un lado y a c al otro. El teorema afirma que estas dos situaciones son las únicas dos posibles y que son excluyentes: **o c está en el cono, o hay un plano que lo separa de él**. Toda la fuerza está en que el cono generado por un número finito de vectores es *cerrado*; sobre un convexo cerrado, la separación está garantizada.

Paso 1: la mitad fácil, que los dos no pueden darse a la vez. Supóngase que (2) tiene solución $y \geqq 0$ con $A^T y = c$, y que (1) tiene solución x con $Ax \leqq 0$. Entonces

$$c^T x = (A^T y)^T x = y^T (Ax) \leq 0,$$

porque $y \geqq 0$ y $Ax \leqq 0$: es una suma de productos de un número no negativo por uno no positivo. Pero (1) exige $c^T x > 0$. Contradicción. Luego a lo sumo uno de los dos tiene solución.

Paso 2: preparar el terreno. Supóngase ahora que (2) *no* tiene solución, y llámese

$$S = \{A^T y : \ y \geqq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

al cono generado por las filas de A. Que (2) no tenga solución es exactamente decir que $c \notin S$. Este conjunto S es convexo (combinación convexa de $A^T y_1$ y $A^T y_2$ es $A^T(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2)$, con el argumento $\geqq 0$) y es *cerrado* por ser un cono finitamente generado.

Paso 3: separar (este es el núcleo de la prueba). Como S es convexo, cerrado y no vacío ($0 \in S$) y $c \notin S$, el teorema de separación de un punto y un convexo cerrado (sección 2.2) da un vector $x \in \mathbb{R}^n$ y un escalar α con

$$x^T v \leq \alpha \quad \text{para todo } v \in S, \qquad x^T c > \alpha.$$

Paso 4: el cono obliga a que $\alpha \geq 0$, y de hecho a que se pueda tomar $\alpha = 0$. Como $0 \in S$ (tómese $y = 0$), se tiene $0 = x^T 0 \leq \alpha$, luego $\alpha \geq 0$ y por tanto $x^T c > \alpha \geq 0$: ya está la segunda condición de (1), $c^T x > 0$.

Paso 5: y el cono obliga también a que $Ax \leqq 0$. Aquí es donde se usa que S es un cono y no un convexo cualquiera. Sea a_i la fila i-ésima de A; tomando $y = \lambda e_i$ con $\lambda \geq 0$ se ve que $\lambda a_i \in S$ para todo $\lambda \geq 0$, luego

$$\lambda \, (a_i^T x) \leq \alpha \qquad \text{para todo } \lambda \geq 0.$$

Si fuera $a_i^T x > 0$, el miembro de la izquierda tendería a $+\infty$ al hacer $\lambda \to +\infty$ y no podría quedarse por debajo de la constante α. Luego $a_i^T x \leq 0$ para toda fila i, es decir, $Ax \leqq 0$.

Con los pasos 4 y 5, el vector x resuelve (1). Es decir: si (2) no tiene solución, (1) sí la tiene. Junto con el paso 1, exactamente uno de los dos tiene solución.

Lo que hay que llevarse a la cabeza para reconstruirla. Tres cosas y ninguna más: (i) la mitad fácil es una cuenta de signos, $c^T x = y^T (Ax) \leq 0$; (ii) la otra mitad es separar el punto c

del cono $S = \{A^T y : y \geqq 0\}$, que es cerrado; (iii) el hecho de que S sea un *cono* — y no un convexo cualquiera — es lo que permite empujar $\lambda \to \infty$ y convertir la desigualdad $x^T v \leq \alpha$ en $Ax \leqq 0$, y también lo que fuerza $\alpha \geq 0$.

Otra vía (la forma en que suele escribirse el lema en las resoluciones). Conviene reconocer la otra escritura, porque circula tanto como la anterior y es la que aparece en la mayoría de las resoluciones manuscritas de esta asignatura: *uno y solo uno de los sistemas* (I) $Ax = b$, $x \geqq 0$; (II) $u^T A \leqq 0$, $u^T b > 0$ *tiene solución*. No es un teorema distinto: es el mismo, escrito con A donde antes había A^T y con b donde antes había c. En esa escritura, el cono que se separa es $S = \{Ax : x \geqq 0\}$, el generado por las *columnas*, y el certificado es u.

La cuestión

El enunciado propuesto es cierto, y es exactamente el corolario del lema de Farkas (sección 2.2) leído como una equivalencia. El corolario dice que, dados $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $b \in \mathbb{R}^n$, uno y solo uno de los sistemas

$$\text{(I)} \quad Ax \leqq b,\ x \geqq 0, \qquad\qquad \text{(II)} \quad y^T A \geqq 0,\ y \geqq 0,\ y^T b < 0$$

tiene solución. Y decir «uno y solo uno» es decir dos cosas a la vez, que son justamente las dos implicaciones que se piden.

Implicación directa (y esta se puede probar sin el teorema). Supóngase que (I) es factible y tómese cualquier $y \geqq 0$ con $y^T A \geqq 0$. Multiplicando $Ax \leqq b$ por $y^T \geqq 0$ — lo que conserva el sentido de la desigualdad — se tiene $y^T Ax \leq y^T b$. Y multiplicando $y^T A \geqq 0$ por $x \geqq 0$ se tiene $y^T Ax \geq 0$. Encadenando,

$$0 \ \leq\ y^T Ax \ \leq\ y^T b,$$

es decir, $b^T y \geq 0$. Obsérvese que aquí no se ha usado nada profundo: es la *dualidad débil* de este par de sistemas, y sale de dos multiplicaciones por vectores no negativos.

Implicación recíproca (y esta sí es Farkas). Supóngase que todo $y \geqq 0$ con $y^T A \geqq 0$ cumple $b^T y \geq 0$. Eso dice, palabra por palabra, que el sistema (II) no tiene solución: no hay ningún y que cumpla a la vez $y \geqq 0$, $y^T A \geqq 0$ y $y^T b < 0$. Por el corolario, si (II) no tiene solución, (I) sí la tiene, luego $Ax \leqq b$, $x \geqq 0$ es factible. Y aquí sí hace falta el teorema: sin él, de «no hay certificado de infactibilidad» no se seguiría «hay solución».

QUÉ DEJA. La estructura de los teoremas de alternativa siempre es la misma: una mitad es una multiplicación por vectores de signo conocido y la otra es la separación. La primera dice que el certificado, si existe, no puede convivir con la solución; la segunda, que cuando no hay solución el certificado existe. Reconocer cuál de las dos mitades pide un enunciado concreto ahorra la mitad del trabajo.

Teoría 2: el corte mixto de Gomory

Resolución. *Qué es un corte.* Sea (PLE) un problema de programación lineal entera (o entera mixta) y sea X el conjunto de sus soluciones factibles. Una desigualdad $\pi^T x \geq \pi_0$ es un **corte** para (PLE) si cumple las dos condiciones siguientes:

(I) la satisfacen *todos* los puntos de X, es decir, no elimina ninguna solución factible del problema entero; y

(II) la *viola* la solución óptima x^* de la relajación lineal actual, es decir, $\pi^T x^* < \pi_0$.

La primera condición es la de validez y es la que hay que demostrar; la segunda es la que hace útil al corte, porque garantiza que al añadirlo la región factible del relajado se hace estrictamente más pequeña sin perder ningún punto entero. Una desigualdad que cumple (i) pero no (ii) puede estrechar la relajación, pero no elimina la solución actual. La idea de fondo está en la sección 5.4: se trata de acercar por fuera la envolvente convexa de X, que es el poliedro que de verdad se querría resolver.

El corte mixto. Sea x^* la solución óptima del relajado, obtenida con una base B en forma estándar ($x \geqq 0$), y sea x_i una variable básica que debe ser entera y no lo es. La fila i-ésima de la tabla dice, para toda solución factible del relajado,

$$x_i + \sum_{j \in NB} y_{ij} x_j = \bar{b}_i.$$

Escribiendo $\bar{b}_i = \lfloor \bar{b}_i \rfloor + f_i$ con $0 < f_i < 1$, esa misma fila se lee

$$x_i = \lfloor \bar{b}_i \rfloor + f_i - \sum_{j \in NB} y_{ij} x_j.$$

Se separan las columnas no básicas según el signo de su coeficiente en esa fila:

$$J^+ = \{ j \in NB : \ y_{ij} \geq 0 \}, \qquad J^- = \{ j \in NB : \ y_{ij} < 0 \}.$$

Teorema (validez del corte mixto de Gomory)**.** Con la notación anterior, toda solución factible del relajado con x_i entera cumple

$$\sum_{j \in J^+} y_{ij} x_j + \frac{f_i}{f_i - 1} \sum_{j \in J^-} y_{ij} x_j \ \geq \ f_i.$$

La restricción que se añade a la tabla, con holgura $h_i \geq 0$, es

$$h_i - \sum_{j \in J^+} y_{ij} x_j - \frac{f_i}{f_i - 1} \sum_{j \in J^-} y_{ij} x_j = -f_i.$$

La idea, antes de la prueba. Todo el corte sale de una *disyunción*. Llámese $k = x_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor$. Si x_i es entera, k también lo es, y la ecuación de la fila dice que $\sum_j y_{ij} x_j = f_i - k$. Como k es entero, solo caben dos casos: o $k \leq 0$, y entonces esa suma es *grande* (al menos f_i); o $k \geq 1$, y entonces es *muy negativa* (a lo sumo $f_i - 1 < 0$). La suma solo puede ser grande gracias a los términos de coeficiente positivo, y solo puede ser muy negativa gracias a los de coeficiente negativo: de ahí la partición en J^+ y J^-. Y el factor $\frac{f_i}{f_i - 1}$, que es *negativo*, es exactamente lo que hay que poner delante del bloque negativo para que la desigualdad del segundo caso, al darle la vuelta, se convierta en la del primero. Con eso, una sola desigualdad cubre los dos casos.

> *Paso 1: nombrar la parte entera.* Sea x factible en el relajado con $x_i \in \mathbb{Z}$, y póngase $k = x_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor \in \mathbb{Z}$. De la ecuación de la fila, $\sum_{j \in NB} y_{ij} x_j = f_i - k$.
> *Paso 2 (núcleo): la disyunción.* Como $k \in \mathbb{Z}$, o bien $k \leq 0$ o bien $k \geq 1$.
> *Caso A, $k \leq 0$.* Entonces $f_i - k \geq f_i$, luego $\sum_{j \in NB} y_{ij} x_j \geq f_i$. Los términos de J^- son ≤ 0 (coeficiente negativo por variable no negativa), así que quitarlos solo puede aumentar la suma: $\sum_{j \in J^+} y_{ij} x_j \geq \sum_{j \in NB} y_{ij} x_j \geq f_i$. Y el segundo bloque del corte es ≥ 0, porque es

el producto de $\frac{f_i}{f_i-1} < 0$ por $\sum_{J^-} y_{ij}x_j \le 0$. Sumando ambos, se cumple la desigualdad. *Caso B*, $k \ge 1$. Entonces $f_i - k \le f_i - 1 < 0$, luego $\sum_{j\in NB} y_{ij}x_j \le f_i - 1$. Los términos de J^+ son ≥ 0, así que quitarlos solo puede disminuir la suma: $\sum_{j\in J^-} y_{ij}x_j \le f_i - 1$. Al multiplicar por $\frac{f_i}{f_i-1}$, que es negativo, la desigualdad se invierte:

$$\frac{f_i}{f_i-1}\sum_{j\in J^-} y_{ij}x_j \;\ge\; \frac{f_i}{f_i-1}(f_i-1) = f_i,$$

y como el primer bloque es ≥ 0, sumando se cumple otra vez la desigualdad.
Paso 3: cerrar. En los dos casos posibles se cumple la desigualdad del enunciado, luego es una condición necesaria para que x_i sea entera: ningún punto factible del problema entero mixto se pierde al añadirla, y por tanto (i) se cumple. Y como en la tabla actual $x_j^* = 0$ para todo $j \in NB$, el miembro izquierdo vale $0 < f_i$: la solución actual viola el corte, que es la condición (ii). Escrito con holgura, el corte da $h_i = -f_i < 0$, de modo que la tabla ampliada es primal infactible y dual factible, y se continúa con el símplex dual (sección 4.3).

Dónde ha entrado cada hipótesis. Solo se ha usado que x_i es entera y que todas las variables son no negativas. En ningún momento se ha necesitado que las variables no básicas sean enteras, y eso es precisamente lo que hace válido el corte en problemas entero-mixtos, a diferencia del f-corte, cuya justificación utiliza también la integridad de las variables no básicas de la fila. El desarrollo completo, con el corte mixto mejorado m^*, está en la sección 5.4.2.

Problema 1: el horario de exámenes

Resolución. *Qué clase de problema es.* Conviene verlo antes de escribir una sola variable. Si se dibuja un vértice por asignatura y una arista por cada par que comparte alumnos, lo que se pide es asignar a cada vértice una franja horaria de modo que dos vértices unidos por una arista reciban franjas distintas, usando el menor número posible de franjas. Eso es, exactamente, el problema del **número cromático** del grafo de conflictos. La formulación que sigue es la formulación entera estándar de la coloración de grafos, y conviene reconocerla porque el mismo modelo sirve para asignar frecuencias a antenas, turnos a trabajadores o registros a variables de un programa.

Datos. $n = 6$ asignaturas; $K = \{1,\dots,6\}$ el conjunto de franjas horarias *potenciales* (con n franjas siempre se puede, poniendo cada examen en la suya, así que $|K| = n$ nunca corta la solución óptima); y

$$P = \{(1,2),(1,3),(1,5),(2,4),(2,6),(3,4),(3,5),(4,6),(5,6)\}$$

el conjunto de pares en conflicto.

Variables de decisión. Hacen falta dos familias, y esto es lo único que tiene truco en el modelo: una para decir dónde va cada examen y otra para *contar* cuántas franjas se han acabado usando.

$$x_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si el examen de la asignatura } i \text{ se pone en la franja } k, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$y_k = \begin{cases} 1 & \text{si la franja } k \text{ se utiliza,} \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para $i = 1, \ldots, 6$ y $k \in K$.

Función objetivo. Minimizar el número de franjas utilizadas:

$$\text{Minimizar} \sum_{k \in K} y_k.$$

Restricciones.

1. *Cada asignatura se examina exactamente una vez:*

$$\sum_{k \in K} x_{ik} = 1, \qquad i = 1, \ldots, 6.$$

2. *Dos asignaturas en conflicto no comparten franja, y la franja usada se contabiliza:*

$$x_{ik} + x_{jk} \leq y_k, \qquad (i,j) \in P,\ k \in K.$$

   Esta única familia hace dos trabajos a la vez. Si $y_k = 0$, obliga a $x_{ik} = x_{jk} = 0$: en una franja no usada no hay exámenes. Y si $y_k = 1$, se reduce a $x_{ik} + x_{jk} \leq 1$, que es la prohibición de coincidir.

3. *Enlace para las asignaturas sin conflictos:*

$$x_{ik} \leq y_k, \qquad i = 1, \ldots, 6,\ k \in K.$$

   En este caso concreto es redundante, porque las seis asignaturas aparecen en algún par de P y la familia anterior ya las enlaza; pero en el caso general hay que ponerla, porque si no una asignatura aislada podría colocarse en una franja con $y_k = 0$ y el recuento saldría mal.

4. *Naturaleza de las variables:* $x_{ik} \in \{0,1\}$, $y_k \in \{0,1\}$.

El caso general. No cambia nada salvo los índices: dadas n asignaturas y un conjunto $P \subseteq \{(i,j) : 1 \leq i < j \leq n\}$ de pares incompatibles, con $K = \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_{k \in K} y_k \\ \text{sujeto a:} \quad & \sum_{k \in K} x_{ik} = 1, && i = 1, \ldots, n, \\ & x_{ik} + x_{jk} \leq y_k, && (i,j) \in P,\ k \in K, \\ & x_{ik} \leq y_k, && i = 1, \ldots, n,\ k \in K, \\ & x_{ik}, y_k \in \{0,1\}, && i = 1, \ldots, n,\ k \in K. \end{aligned}$$

Cuánto vale el óptimo, y cómo se comprueba. No lo pide el enunciado, pero merece la pena hacerlo porque es lo que da confianza en que el modelo está bien escrito. El grafo de conflictos de este caso tiene una estructura muy limpia: cada asignatura está en conflicto con exactamente tres, y sus no-adyacencias son $(1,4), (1,6), (2,3), (2,5), (3,6), (4,5)$, que forman el ciclo $1-4-5-2-3-6-1$. Es decir, el grafo de conflictos es el complementario de un ciclo de seis vértices, o dicho de forma más útil: son *dos triángulos unidos por un emparejamiento perfecto*,

$$\{1,3,5\} \text{ triángulo}, \qquad \{2,4,6\} \text{ triángulo}, \qquad \text{y las aristas } (1,2),\ (3,4),\ (5,6).$$

De ahí salen las dos mitades de la respuesta.

Cota inferior: las asignaturas 1, 3 y 5 están en conflicto dos a dos, luego necesitan tres franjas distintas. Con dos franjas es imposible, así que el óptimo es ≥ 3.

Solución factible con tres: franja $1 = \{1, 4\}$, franja $2 = \{2, 5\}$, franja $3 = \{3, 6\}$. Ninguno de los tres pares está en P ($(1, 4)$, $(2, 5)$ y $(3, 6)$ son justamente no-adyacencias), luego el horario es válido.

Como la cota inferior y la solución coinciden, el óptimo es $\sum_k y_k^* = 3$.

Otra vía (reducir la simetría entre franjas). Renombrar las franjas produce soluciones equivalentes que pueden aumentar el trabajo de ramificación y acotación. Una forma de reducir esa simetría es usar primero las franjas de menor índice,

$$y_k \;\geq\; y_{k+1}, \qquad k = 1, \ldots, n-1,$$

sin perder ninguna distribución de exámenes esencialmente distinta. Todavía se pueden permutar las franjas usadas entre sí: estas desigualdades eliminan solo parte de la simetría. Son una mejora opcional, no una garantía de rapidez.

QUÉ DEJA. Una variable binaria que cuenta un recurso usado debe estar enlazada con las asignaciones. Aquí el enlace ya está incluido en las restricciones de conflicto para los vértices no aislados; $x_{ik} \leq y_k$ cubre también los aislados. Los subgrafos completos dan cotas inferiores al número de franjas, porque sus exámenes deben ir separados.

Problema 2: símplex, dualidad y sensibilidad

Apartado 1: la tabla óptima

Resolución. *Forma estándar.* Las dos restricciones son de $\geq$, así que se restan variables de exceso $x_4, x_5 \geq 0$:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeto a:} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 4 \\ & x_1, \ldots, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Con esto, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $b = (6, 4)^T$.

Una base inicial mediante fase I. Las columnas de x_4 y x_5 son $-e_1$ y $-e_2$: no forman una identidad, sino *menos* la identidad, y la base $\{x_4, x_5\}$ daría $x_4 = -6$, $x_5 = -4$, que no es factible. Para construir una base factible se añaden variables artificiales $x_6, x_7 \geq 0$, una por restricción, y se resuelve primero

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & x_6 + x_7 \\ \text{sujeto a:} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 + x_7 = 4 \\ & x_1, \ldots, x_7 \geq 0. \end{aligned}$$

Fase I, tabla inicial. Con base $\{x_6, x_7\}$, $B = I$ y $\bar{b} = b$. Los costos reducidos se obtienen de

$c_j - z_j = c_j - c_B^T B^{-1} a_j$ con $c_B = (1,1)$, es decir, restando a cada c_j la suma de su columna:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_6	3	1	1	-1	0	1	0	6
x_7	1	2	1	0	-1	0	1	4
$c - z$	-4	-3	-2	1	1	0	0	10

Entra x_1, que es el costo reducido más negativo. Cociente mínimo: mín$\{6/3,\ 4/1\} = 2$, alcanzado en la primera fila, luego sale x_6.

Fase I, segunda tabla. Base $\{x_1, x_7\}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_1	1	$1/3$	$1/3$	$-1/3$	0	$1/3$	0	2
x_7	0	$5/3$	$2/3$	$1/3$	-1	$-1/3$	1	2
$c - z$	0	$-5/3$	$-2/3$	$-1/3$	1	$4/3$	0	2

Entra x_2, cuyo costo reducido $-5/3$ es el más negativo. En su columna las dos filas tienen coeficiente positivo, $1/3$ y $5/3$, así que las dos compiten: los cocientes son $2/(1/3) = 6$ y $2/(5/3) = 6/5$. El mínimo es $6/5$, en la segunda fila, luego sale x_7.

Fase I, tabla final. Base $\{x_1, x_2\}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_1	1	0	$1/5$	$-2/5$	$1/5$	$2/5$	$-1/5$	$8/5$
x_2	0	1	$2/5$	$1/5$	$-3/5$	$-1/5$	$3/5$	$6/5$
$c - z$	0	0	0	0	0	1	1	0

El óptimo de la fase I vale 0 y las dos artificiales han salido de la base: el problema original es factible y $\{x_1, x_2\}$ es una solución básica factible de partida. De paso, la tabla regala B^{-1}, que se lee en las columnas de las artificiales:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Fase II. Se recuperan los costos originales $c = (2,4,3,0,0)$ y se recalculan los costos reducidos sobre la misma base. Con $c_B = (c_1, c_2) = (2,4)$,

$$c_B^T B^{-1} = (2,4) \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{pmatrix} = \left(\tfrac{4}{5} - \tfrac{4}{5},\ -\tfrac{2}{5} + \tfrac{12}{5}\right) = (0,\ 2),$$

y de ahí $c_j - z_j = c_j - (0,2)\, a_j$ para cada columna:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	0	$1/5$	$-2/5$	$1/5$	$8/5$
x_2	0	1	$2/5$	$1/5$	$-3/5$	$6/5$
$c - z$	0	0	1	0	2	8

Todos los costos reducidos son ≥ 0: la tabla ya es óptima y la fase II no necesita ni un pivotaje. La solución óptima es

$$x^* = \left(\tfrac{8}{5},\ \tfrac{6}{5},\ 0\right), \qquad z^* = 2 \cdot \tfrac{8}{5} + 4 \cdot \tfrac{6}{5} = \tfrac{16}{5} + \tfrac{24}{5} = 8.$$

Tipo de solución: múltiple. Aquí está lo único que este apartado esconde. La variable *no básica* x_4 tiene costo reducido $c_4 - z_4 = 0$. Como esta base no es degenerada, x_4 puede aumentar una cantidad positiva sin que cambie el objetivo; el siguiente pivotaje da otro vértice óptimo. Haciéndolo (cociente mínimo: solo la fila de x_2 tiene coeficiente positivo en la columna de x_4, $1/5$, luego el cociente es $(6/5)/(1/5) = 6$ y sale x_2) se llega a la base $\{x_1, x_4\}$ con

$$\hat{x} = (4,\, 0,\, 0), \qquad x_4 = 6, \qquad z = 2 \cdot 4 = 8.$$

En cualquier óptimo deben anularse x_3 y x_5, cuyos costes reducidos son positivos. Queda $x_1 + 2x_2 = 4$ con $8/5 \le x_1 \le 4$. Por tanto, el conjunto de soluciones óptimas es todo el segmento

$$\left\{\lambda\left(\tfrac{8}{5}, \tfrac{6}{5}, 0\right) + (1-\lambda)(4,0,0) :\ \lambda \in [0,1]\right\},$$

y en todos sus puntos $z = 8$. *La solución óptima no es única.*

QUÉ DEJA. Un coste reducido nulo permite buscar otros óptimos, pero hay que comprobar que la variable puede aumentar un paso positivo: un pivote degenerado puede dejar el mismo punto. Un término independiente básico nulo indica degeneración, no multiplicidad.

Apartado 2: dual, holgura complementaria y precios sombra

Resolución. *El dual.* El primal es de mínimo con restricciones $\ge$ y variables ≥ 0, que es la forma simétrica de la sección 4.1. Su dual es de máximo, con una variable por restricción y una restricción por variable:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & 6w_1 + 4w_2 \\ \text{sujeto a:} \quad & 3w_1 + w_2 \le 2 \\ & w_1 + 2w_2 \le 4 \\ & w_1 + w_2 \le 3 \\ & w_1, w_2 \ge 0. \end{aligned}$$

La solución dual óptima, leída en la tabla. No hay que resolver el dual: sale de la tabla óptima del primal, porque $w^T = c_B^T B^{-1}$. Ya se calculó arriba:

$$w^* = (0,\, 2).$$

Otra manera de leerlo, que es la que conviene practicar porque no exige acordarse de B^{-1}: el costo reducido de la variable de exceso x_4 es $c_4 - z_4 = 0 - w^T(-e_1) = w_1$, y el de x_5 es w_2. En la tabla óptima esas dos casillas valen 0 y 2; luego $w^* = (0,2)$ directamente.

Comprobación de que es dual factible y de que los valores coinciden. Sustituyendo: $3 \cdot 0 + 2 = 2 \le 2$ (se cumple con igualdad), $0 + 2 \cdot 2 = 4 \le 4$ (con igualdad), $0 + 2 = 2 \le 3$ (holgada), y $w^* \ge 0$. El valor dual es $6 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 8 = z^*$: coinciden, como debe ser por el teorema de dualidad fuerte (sección 4.2).

Holgura complementaria. El teorema (sección 4.2) dice que, siendo x^* y w^* primal y dual factibles, son óptimos si y solo si se cumplen las dos familias de productos nulos. Se comprueban una a una.

Primera familia, *variable primal por holgura dual*: $x_j^* \,(c_j - a_j^T w^*) = 0$.

	x_j^*	holgura dual $c_j - a_j^T w^*$	producto
$j = 1$	$8/5$	$2 - (3 \cdot 0 + 2) = 0$	0
$j = 2$	$6/5$	$4 - (0 + 2 \cdot 2) = 0$	0
$j = 3$	0	$3 - (0 + 2) = 1$	0

Las dos variables que son positivas tienen su restricción dual saturada, y la que tiene holgura dual positiva vale cero. Correcto.

Segunda familia, *variable dual por holgura primal*: $w_i^* \left((a^i)^T x^* - b_i\right) = 0$. La primera restricción da $3 \cdot \frac{8}{5} + \frac{6}{5} + 0 = \frac{24}{5} + \frac{6}{5} = 6$, que es exactamente b_1: holgura primal nula, y el producto es cero sin necesidad de mirar w_1. La segunda da $\frac{8}{5} + 2 \cdot \frac{6}{5} + 0 = \frac{8}{5} + \frac{12}{5} = 4 = b_2$: también saturada. Los dos productos son cero. Correcto.

Una sutileza que conviene no pasar por alto. La primera restricción está *activa* y sin embargo su variable dual vale $w_1^* = 0$. Eso no contradice la holgura complementaria — el teorema pide que el *producto* sea nulo, y lo es —, pero sí es la señal de que el par (x^*, w^*) no cumple la holgura complementaria *estricta*. En este ejemplo el dual tiene un vértice degenerado (tres restricciones activas en $\mathbb{R}^2$: las dos primeras y $w_1 \geq 0$). Esto es compatible con la multiplicidad primal ya comprobada, pero la degeneración dual por sí sola no la demuestra.

Precios sombra. Los precios sombra son las componentes de w^*: miden la variación de z^* por unidad de aumento del término independiente correspondiente, mientras la base óptima siga siendo factible. Aquí:

- $w_1^* = 0$: aumentar b_1 (exigir $3x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 + \delta$) **no encarece el óptimo**. Es un resultado sorprendente, porque la restricción está saturada. Se puede comprobar directamente: con $b_1 = 6 + \delta$, $\bar{b} = B^{-1}(6 + \delta, 4)^T = \left(\frac{8}{5} + \frac{2\delta}{5},\ \frac{6}{5} - \frac{\delta}{5}\right)$, que es ≥ 0 para $-4 \leq \delta \leq 6$, y en todo ese rango $z^* = (w^*)^T b = 0 \cdot (6 + \delta) + 2 \cdot 4 = 8$, constante. Con $b_1 = 7$, por ejemplo, el óptimo es $x = (2, 1, 0)$ y $z = 8$ otra vez.
- $w_2^* = 2$: cada unidad que se añada a b_2 encarece el óptimo en 2. Es la restricción que de verdad aprieta, y es donde habría que negociar si se pudiera relajar una.

QUÉ DEJA. Precio sombra cero no significa «restricción sobrante»: dentro del rango de sensibilidad, mover su término independiente no cambia el valor óptimo. Una restricción activa puede tener precio nulo; ese dato solo no decide si hay óptimos alternativos.

Apartado 3: rango de c_1

Resolución. x_1 es *básica*, y ahí está la diferencia con el caso fácil. Si se cambia el costo de una variable no básica, solo se mueve su propio costo reducido; si se cambia el de una básica, pueden cambiar varios costes reducidos, porque c_B entra en $z_j = c_B^T B^{-1} a_j$ para todo j.

Sea $c_1 = 2 + \delta$. La fila de la tabla en la que x_1 es básica es la primera, así que el nuevo vector de costos reducidos es

$$(c_j - z_j)^{\text{nuevo}} = (c_j - z_j) - \delta\, y_{1j}, \qquad j \in NB,$$

donde y_{1j} es el coeficiente de la columna j en la fila de x_1. Con los números de la tabla óptima, columna a columna sobre las no básicas:

j	$c_j - z_j$	y_{1j}	condición $(c_j - z_j) - \delta y_{1j} \geq 0$
x_3	1	$1/5$	$1 - \frac{\delta}{5} \geq 0 \iff \delta \leq 5$
x_4	0	$-2/5$	$0 + \frac{2\delta}{5} \geq 0 \iff \delta \geq 0$
x_5	2	$1/5$	$2 - \frac{\delta}{5} \geq 0 \iff \delta \leq 10$

Intersecando las tres, $0 \leq \delta \leq 5$, es decir,

$$\boxed{2 \leq c_1 \leq 7}$$

Por qué no se puede bajar nada de c_1. Llama la atención que el rango no contenga ningún valor menor que el actual, y la razón es la de siempre en este problema: la columna de x_4 tiene costo reducido nulo, de modo que cualquier $\delta < 0$ lo vuelve negativo y rompe la optimalidad. Se ve también sin tablas comparando los dos vértices óptimos: en $(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}, 0)$ el objetivo vale $\frac{8}{5}c_1 + \frac{24}{5}$ y en $(4, 0, 0)$ vale $4c_1$, y

$$4c_1 - \left(\tfrac{8}{5}c_1 + \tfrac{24}{5}\right) = \tfrac{12}{5}\,(c_1 - 2),$$

que es negativo en cuanto $c_1 < 2$: el segundo vértice pasa a ser estrictamente mejor. En el otro extremo, en $c_1 = 7$ entra en juego el vértice $(1, 0, 3)$, con valor $c_1 + 9$, que iguala a $\frac{8}{5}c_1 + \frac{24}{5}$ justo en $c_1 = 7$ y a partir de ahí se queda por debajo: esto basta para probar que la solución anterior deja de ser óptima cuando $c_1 > 7$.

Apartado 4: rango de Δ y la solución para $\Delta = -3$

Resolución. *El rango.* Cambiar el término independiente no toca los costos reducidos: la base sigue siendo *dual* factible pase lo que pase, y lo único que puede fallar es la no negatividad de $\bar{b} = B^{-1}b$. Con $b = (6,\, 4 + \Delta)^T$,

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 + \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} - \frac{4+\Delta}{5} \\ -\frac{6}{5} + \frac{3(4+\Delta)}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} - \frac{\Delta}{5} \\ \frac{6}{5} + \frac{3\Delta}{5} \end{pmatrix}.$$

Imponiendo $\bar{b} \geq 0$:

$$\tfrac{8}{5} - \tfrac{\Delta}{5} \geq 0 \iff \Delta \leq 8, \qquad \tfrac{6}{5} + \tfrac{3\Delta}{5} \geq 0 \iff \Delta \geq -2,$$

luego

$$\boxed{-2 \leq \Delta \leq 8}$$

y en todo ese rango la base $\{x_1, x_2\}$ sigue siendo óptima, con $z^*(\Delta) = (w^*)^T b = 2(4 + \Delta) = 8 + 2\Delta$: la pendiente es el precio sombra $w_2^* = 2$, como tenía que ser.

El caso $\Delta = -3$. Está fuera del rango, así que la base $\{x_1, x_2\}$ deja de ser factible. Concretamente $b = (6, 1)^T$ y

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} + \frac{3}{5} \\ \frac{6}{5} - \frac{9}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

La tabla es *primal infactible* (hay un término independiente negativo) pero sigue siendo *dual factible* (los costos reducidos no han cambiado y son ≥ 0). Esa es exactamente la situación para la que sirve el **símplex dual** (sección 4.3), y usarlo ahorra volver a empezar con dos fases.

Tabla de partida:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	0	$1/5$	$-2/5$	$1/5$	$11/5$
x_2	0	1	$2/5$	$1/5$	$-3/5$	$-3/5$
$c - z$	0	0	1	0	2	2

Variable que sale: la de la fila con $\bar{b}_i < 0$, es decir, x_2 (fila 2).

Variable que entra: el criterio dual mira solo las columnas no básicas con coeficiente *negativo* en esa fila, y elige la de cociente $\left|\dfrac{c_j - z_j}{y_{2j}}\right|$ mínimo. En la fila de x_2 los coeficientes no básicos

son $y_{2,3} = 2/5$, $y_{2,4} = 1/5$ y $y_{2,5} = -3/5$. Solo x_5 es negativo, así que no hay elección: entra x_5, con cociente $|2/(-3/5)| = 10/3$. (Si *ninguna* hubiera sido negativa, la conclusión sería que el primal es infactible; no es el caso.)

Pivotaje sobre $y_{2,5} = -3/5$. Se divide la fila de x_2 por $-3/5$ y se hace ceros el resto de la columna:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	$1/3$	$1/3$	$-1/3$	0	2
x_5	0	$-5/3$	$-2/3$	$-1/3$	1	1
$c - z$	0	$10/3$	$7/3$	$2/3$	0	4

Ahora $\bar{b} \geq 0$ y $c - z \geq 0$: la tabla es óptima. La solución para $\Delta = -3$ es

$$x^* = (2,\, 0,\, 0), \qquad x_5 = 1, \qquad z^* = 4,$$

que se comprueba de un vistazo: $3 \cdot 2 = 6 \geq 6$ (saturada) y $2 \geq 1$ (con exceso 1, que es justamente x_5).

El dual también ha cambiado. La nueva base es $\{x_1, x_5\}$ y ahora $w^* = (2/3,\, 0)$: se lee en los costos reducidos de las variables de exceso, $c_4 - z_4 = w_1 = 2/3$ y $c_5 - z_5 = w_2 = 0$. Tiene sentido: al aflojar tanto la segunda restricción, deja de apretar y su precio sombra cae a cero, mientras que la primera pasa a ser la que manda.

QUÉ DEJA. Al cambiar b, se conserva la factibilidad dual: el simplex dual puede reoptimizar desde esa tabla o certificar que el nuevo problema es infactible. Al cambiar c, se conserva la factibilidad primal y se continúa con el simplex primal. El número de pivotajes depende del problema.

Qué buscaba: una convocatoria de las clásicas, con las cuatro piezas de siempre. En teoría, las dos que más se repiten en toda la serie de exámenes de la asignatura: Farkas con una aplicación que es su propio corolario disfrazado, y un corte de Gomory descrito y justificado. La cuestión de Teoría 1 no pedía una demostración nueva sino *reconocer* el corolario: quien intentaba probar la equivalencia a mano perdía mucho tiempo en la implicación recíproca, que sin el teorema no sale. En problemas, una formulación entera que es una coloración de grafos con el truco de las variables de recuento y_k, y el problema grande de siempre, con la particularidad de que el óptimo era múltiple (costo reducido nulo en una no básica), de que un precio sombra salía cero con la restricción activa, y de que el último apartado salía fuera del rango y pedía símplex dual. Las tres cosas están enlazadas y son la misma degeneración mirada desde tres sitios.

E.2 Examen parcial del grupo 3, curso 2024–25

FICHA. *Examen parcial G3, 2025.* Del archivo se conserva la resolución manuscrita completa, con sus dos problemas, pero **no el enunciado impreso**, de modo que este se ha reconstruido a partir de ella. La tabla inicial permite recuperar los coeficientes del problema 2. En su apartado (d) el manuscrito solo indica «corte de Gomory», sin precisar qué variables deben ser enteras: aquí se justifica el corte incluso bajo la condición de que solo x_1 lo sea. Del problema 1 se recupera la estructura, pero **no los datos numéricos**: faltan las duraciones y la tabla de precedencias. Se da la formulación simbólica. No se conserva la parte de teoría.

Enunciado (reconstruido)

Problema 1. Un proyecto consta de 10 tareas. La tarea i tiene una duración conocida d_i y no puede empezar hasta que hayan terminado todas las tareas que la preceden; el conjunto de esas tareas se denota $\mathrm{Prec}(i)$.

(a) Formule el problema de programación lineal que minimiza el *tiempo medio de finalización* de las tareas.
(b) Modifique la formulación para minimizar el *tiempo máximo de finalización* del proyecto.

Problema 2. Considere el problema

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & -3x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ \text{sujeto a:} \quad & 2x_1 - 2x_2 + x_3 \le 6 \\ & 4x_1 + x_2 - 2x_3 \le 6 \\ & -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

(a) Escriba la forma estándar y resúelvalo con el algoritmo del símplex.
(b) Determine el rango de variación de c_3 que mantiene óptima la base obtenida.
(c) ¿Qué componente del término independiente conviene modificar, y en qué cantidad?
(d) Suponiendo que x_1 deba ser entera, introduzca un corte de Gomory y restaure la factibilidad con un pivotaje del símplex dual.

Problema 1: la planificación con precedencias

Resolución. *Qué hay que decidir.* Lo único que se decide es *cuándo empieza cada tarea*; su duración es un dato. Conviene separar las dos cosas desde el principio, porque es la confusión más frecuente en este tipo de modelos:

$$\begin{aligned} d_i &= \text{duración de la tarea } i, && \text{que es un } \textit{dato}; \\ t_i &= \text{instante en que comienza la tarea } i, && \text{que es la } \textit{variable}, \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, 10$. La tarea i termina, por tanto, en el instante $t_i + d_i$.

(a) Tiempo medio de finalización. El tiempo medio es

$$\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(t_i + d_i) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} t_i + \underbrace{\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} d_i}_{\text{constante}},$$

y como el segundo sumando no depende de las variables y el primero es un múltiplo positivo de $\sum_i t_i$, minimizar el tiempo medio es *exactamente lo mismo* que minimizar $\sum_i t_i$. Merece la pena hacer esa simplificación de entrada, porque deja el modelo más limpio y porque razonar sobre ella es la mitad del ejercicio.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_{i=1}^{10} t_i \\ \text{sujeto a:} \quad & t_i \;\ge\; t_j + d_j, \quad i = 1, \dots, 10, \quad j \in \mathrm{Prec}(i), \\ & t_i \;\ge\; 0, \qquad\quad i = 1, \dots, 10. \end{aligned}$$

La restricción de precedencia se lee sola: la tarea i no puede arrancar antes de que la tarea j, que la precede, haya terminado, y la tarea j termina en $t_j + d_j$. Obsérvese que es *lineal* y que no hace falta ninguna variable binaria: las precedencias son un dato fijo, no algo que haya que decidir. (Si hubiera que decidir el orden — por ejemplo, porque dos tareas compiten por la misma máquina—, una formulación habitual introduce binarias para escoger el orden.)

(b) Tiempo máximo de finalización. Ahora el objetivo sería

$$\text{Minimizar} \quad \max_{i=1,\dots,10} (t_i + d_i),$$

que **no es una función lineal**: un máximo de funciones afines es convexo, pero en general no es afín, y el símplex no lo admite tal cual. El truco estándar, y es de los que conviene tener automatizado porque reaparece en muchos problemas, consiste en *promover el máximo a variable*. Se introduce una variable nueva $T_{\text{máx}} \geq 0$ y se la obliga a estar por encima de todos los tiempos de finalización:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & T_{\text{máx}} \\ \text{sujeto a:} \quad & T_{\text{máx}} \;\geq\; t_i + d_i, \quad i = 1, \dots, 10, \\ & t_i \;\geq\; t_j + d_j, \qquad i = 1, \dots, 10, \;\; j \in \text{Prec}(i), \\ & t_i \;\geq\; 0, \qquad\qquad i = 1, \dots, 10. \end{aligned}$$

Por qué el truco es correcto, que es lo que hay que saber justificar. Las restricciones nuevas dicen $T_{\text{máx}} \geq \max_i(t_i + d_i)$, no la igualdad. Pero como el objetivo *minimiza* $T_{\text{máx}}$, en el óptimo la desigualdad se cumple con igualdad: si sobrara holgura se podría bajar $T_{\text{máx}}$ y mejorar. Es decir, la dirección de la optimización es la que cierra la definición. El mismo argumento, con los signos al revés, sirve para *maximizar un mínimo*; y no sirve en general para minimizar un mínimo ni para maximizar un máximo: con ese cambio de sentido, la nueva variable ya no queda forzada a la igualdad.

QUÉ DEJA. Un máx dentro de un objetivo de minimización se linealiza con una variable de cota superior y una desigualdad por término. La legitimidad del truco no está en las restricciones, sino en el sentido de la optimización: es el objetivo quien fuerza la igualdad.

Problema 2: símplex, sensibilidad y un corte

(a) Forma estándar y símplex

Resolución. Las tres restricciones son de $\leq$, así que basta añadir holguras $x_4, x_5, x_6 \geq 0$:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & -3x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ \text{sujeto a:} \quad & 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ & 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 = 6 \\ & -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_6 = 3 \\ & x_1, \dots, x_6 \geq 0. \end{aligned}$$

Las columnas de las holguras forman la identidad, luego $\{x_4, x_5, x_6\}$ es una base factible de partida y **no hace falta fase I**. Como $c_B = 0$, los costos reducidos iniciales son los propios costos.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_4	2	-2	1	1	0	0	6
x_5	4	1	-2	0	1	0	6
x_6	-2	4	2	0	0	1	3
$c-z$	-3	-4	2	0	0	0	0

Entra x_2 ($c - z = -4$, el más negativo). Cociente mínimo entre las filas con coeficiente positivo en esa columna: $6/1 = 6$ en la de x_5 y $3/4$ en la de x_6; sale x_6.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_4	1	0	2	1	0	$1/2$	$15/2$
x_5	$9/2$	0	$-5/2$	0	1	$-1/4$	$21/4$
x_2	$-1/2$	1	$1/2$	0	0	$1/4$	$3/4$
$c-z$	-5	0	4	0	0	1	-3

Entra x_1 ($c - z = -5$). Cocientes: $\frac{15/2}{1} = \frac{15}{2}$ y $\frac{21/4}{9/2} = \frac{7}{6}$ (la fila de x_2 no compite, su coeficiente es $-1/2 < 0$). Sale x_5.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_4	0	0	$23/9$	1	$-2/9$	$5/9$	$19/3$
x_1	1	0	$-5/9$	0	$2/9$	$-1/18$	$7/6$
x_2	0	1	$2/9$	0	$1/9$	$2/9$	$4/3$
$c-z$	0	0	$11/9$	0	$10/9$	$13/18$	$-53/6$

Todos los costos reducidos son ≥ 0 y además *estrictamente* positivos en las no básicas: la tabla es óptima y la solución es única.

$$x^* = \left(\tfrac{7}{6},\ \tfrac{4}{3},\ 0\right), \qquad x_4^* = \tfrac{19}{3}, \quad x_5^* = x_6^* = 0, \qquad z^* = -\tfrac{53}{6}.$$

La lectura geométrica es que en el óptimo están activas la segunda y la tercera restricciones (sus holguras son cero) y la primera tiene $19/3$ de holgura en ese punto.

De paso, la base final deja a la vista

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2/9 & 5/9 \\ 0 & 2/9 & -1/18 \\ 0 & 1/9 & 2/9 \end{pmatrix},$$

que se lee en las columnas de las holguras x_4, x_5, x_6 y que hace falta en los dos apartados siguientes.

(b) Rango de c_3

Resolución. x_3 es una variable *no básica*, y ese es el caso fácil: cambiar su costo no altera c_B, luego no mueve ningún otro costo reducido. Solo hay que imponer que el suyo siga siendo no negativo.

$$c_3 - z_3 = c_3 - c_B^T B^{-1} a_3 = c_3 - \left[(-3)\cdot\left(-\tfrac{5}{9}\right) + (-4)\cdot\tfrac{2}{9}\right] = c_3 - \left[\tfrac{15}{9} - \tfrac{8}{9}\right] = c_3 - \tfrac{7}{9},$$

donde $(-5/9,\, 2/9)$ son los coeficientes de la columna de x_3 en las filas de las variables básicas x_1 y x_2 (la fila de x_4 no interviene porque $c_4 = 0$). Imponiendo $c_3 - z_3 \geq 0$,

$$\boxed{c_3 \;\geq\; \tfrac{7}{9}}$$

Para $c_3 = 7/9$ exactamente, el costo reducido se anula y aparecen óptimos múltiples; por debajo, x_3 entraría en la base y la solución cambiaría. El valor del enunciado es $c_3 = 2 > 7/9$, con holgura.

(c) Qué recurso conviene modificar

Resolución. La pregunta se contesta con los **precios sombra**, que son las componentes de $w^T = c_B^T B^{-1}$. Con $c_B = (c_4, c_1, c_2) = (0, -3, -4)$,

$$w^T = (0,-3,-4)\begin{pmatrix} 1 & -2/9 & 5/9 \\ 0 & 2/9 & -1/18 \\ 0 & 1/9 & 2/9 \end{pmatrix} = \left(0,\; -\tfrac{10}{9},\; -\tfrac{13}{18}\right).$$

Como el problema es de *minimizar*, un precio sombra negativo significa que aumentar ese término independiente *disminuye* el objetivo, que es lo que interesa. El más negativo es $w_2 = -10/9$, luego, comparando aumentos unitarios de los recursos, conviene incrementar b_2. (El primero es cero, coherentemente con que la primera restricción no está activa: aflojar una restricción que ya sobra no sirve de nada.)

En qué cantidad. Hasta donde la base siga siendo factible. Con $b = (6,\, 6+\Delta,\, 3)$,

$$\bar{b} = B^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ 6+\Delta \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{3} - \frac{2\Delta}{9} \\ \frac{7}{6} + \frac{2\Delta}{9} \\ \frac{4}{3} + \frac{\Delta}{9} \end{pmatrix},$$

y las tres condiciones $\bar{b} \geq 0$ dan

$$\Delta \leq \tfrac{57}{2}, \qquad \Delta \geq -\tfrac{21}{4}, \qquad \Delta \geq -12,$$

es decir, $-\frac{21}{4} \leq \Delta \leq \frac{57}{2}$. Lo máximo que se puede incrementar b_2 sin cambiar esta base es, por tanto, $\Delta = \frac{57}{2}$: el nuevo término independiente sería $b_2 = 6 + \frac{57}{2} = \frac{69}{2}$ y el objetivo pasaría a valer

$$z^* = -\tfrac{53}{6} + \left(-\tfrac{10}{9}\right)\cdot\tfrac{57}{2} = -\tfrac{53}{6} - \tfrac{95}{3} = -\tfrac{53}{6} - \tfrac{190}{6} = -\tfrac{243}{6} = -\tfrac{81}{2}.$$

Más allá de $\Delta = 57/2$ la base deja de ser factible (se anula primero $\bar{b}_1$, la holgura de la primera restricción) y el precio sombra deja de valer $-10/9$: habría que pivotar y recalcularlo.

QUÉ DEJA. El precio sombra solo vale dentro del intervalo en que la base se mantiene factible. Contestar «conviene subir b_2» sin decir hasta dónde deja el problema a medias, porque la pendiente $-10/9$ es válida exactamente hasta $\Delta = 57/2$ y ni un paso más.

(d) Un corte de Gomory

Resolución. La variable x_1 vale $7/6$ en el óptimo del relajado: no es entera, y su fila sirve para generar el corte. Esa fila es

$$x_1 - \tfrac{5}{9}x_3 + \tfrac{2}{9}x_5 - \tfrac{1}{18}x_6 = \tfrac{7}{6}.$$

El manuscrito calcula el f-corte, cuya justificación habitual corresponde al problema entero puro. Primero se reproduce el cálculo y después se comprueba por qué, en esta instancia, la desigualdad también es válida si solo x_1 debe ser entera. Se toman las partes fraccionarias de cada coeficiente, entendidas como $f = y - \lfloor y \rfloor$, de modo que quedan siempre en $[0, 1)$; con los coeficientes negativos hay que tener cuidado, porque su parte fraccionaria *no* es la del valor absoluto:

$$f_1 = \tfrac{7}{6} - 1 = \tfrac{1}{6}, \qquad f_{13} = -\tfrac{5}{9} - (-1) = \tfrac{4}{9}, \qquad f_{15} = \tfrac{2}{9}, \qquad f_{16} = -\tfrac{1}{18} - (-1) = \tfrac{17}{18}.$$

El corte fraccional (sección 5.4.1) es $\sum_{j \in NB} f_{1j} x_j \geq f_1$, que escrito con holgura $S_1 \geq 0$ da

$$S_1 - \tfrac{4}{9}x_3 - \tfrac{2}{9}x_5 - \tfrac{17}{18}x_6 = -\tfrac{1}{6} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 18S_1 - 8x_3 - 4x_5 - 17x_6 = -3.$$

Validez con solo x_1 entera. El corte mixto de la sección 5.4.2, con $f_1/(f_1 - 1) = -1/5$, da

$$\tfrac{1}{9}x_3 + \tfrac{2}{9}x_5 + \tfrac{1}{90}x_6 \geq \tfrac{1}{6}.$$

Los tres coeficientes del corte reproducido son mayores o iguales y las variables son no negativas; por tanto, este es una consecuencia más débil del corte mixto y también es válido. Esta comparación depende de los coeficientes concretos: el f-corte no se puede aplicar sin justificación a cualquier fila con variables continuas.

Al añadir esta desigualdad a la tabla óptima:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	S_1	$\bar{b}$
x_4	0	0	$23/9$	1	$-2/9$	$5/9$	0	$19/3$
x_1	1	0	$-5/9$	0	$2/9$	$-1/18$	0	$7/6$
x_2	0	1	$2/9$	0	$1/9$	$2/9$	0	$4/3$
S_1	0	0	$-4/9$	0	$-2/9$	$-17/18$	1	$-1/6$
$c - z$	0	0	$11/9$	0	$10/9$	$13/18$	0	$-53/6$

La tabla es dual factible (los costos reducidos no han cambiado) y primal infactible ($S_1 = -1/6$): símplex dual.

Sale S_1, la única fila con término independiente negativo. *Entra* la columna de cociente $\left|\frac{c_j - z_j}{y_{S_1,j}}\right|$ mínimo entre las que tienen coeficiente negativo en esa fila:

$$x_3 : \ \frac{11/9}{4/9} = \frac{11}{4}, \qquad x_5 : \ \frac{10/9}{2/9} = 5, \qquad x_6 : \ \frac{13/18}{17/18} = \frac{13}{17}.$$

El mínimo es $13/17$, luego entra x_6. Pivotando sobre $-17/18$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	S_1	$\bar{b}$
x_4	0	0	$39/17$	1	$-6/17$	0	$10/17$	$106/17$
x_1	1	0	$-9/17$	0	$4/17$	0	$-1/17$	$20/17$
x_2	0	1	$2/17$	0	$1/17$	0	$4/17$	$22/17$
x_6	0	0	$8/17$	0	$4/17$	1	$-18/17$	$3/17$
$c - z$	0	0	$15/17$	0	$16/17$	0	$13/17$	$-148/17$

La tabla vuelve a ser primal y dual factible, luego es óptima del relajado con el corte añadido, y el objetivo ha subido de $-53/6 \approx -8{,}83$ a $-148/17 \approx -8{,}71$: el corte ha hecho su trabajo, que es empeorar la cota.

Y no se ha terminado. Ahora $x_1 = 20/17$ sigue sin ser entera. Este corte mejora la cota, pero no resuelve el problema entero. Para continuar se necesitan nuevos cortes válidos para las condiciones de integridad del modelo, o combinar cortes con ramificación y acotación (sección 5.3).

Qué buscaba: el guion habitual del problema grande, sin teoría conservada. En el problema 1, dos linealizaciones que conviene tener automatizadas: que minimizar una media es minimizar una suma (la constante y el factor positivo se tiran), y que un máx se promueve a variable con una desigualdad por término. En el problema 2, la cadena completa: simplex sin fase I porque las holguras dan una base factible ($b \geqq 0$); rango de un costo *no básico*, que es el caso de una sola desigualdad; precios sombra leídos como derivadas del óptimo, con la trampa de que hay que decir hasta dónde valen; y un f-corte con coeficientes negativos, donde la parte fraccionaria de $-5/9$ es $4/9$ y no $5/9$, que es el error que más se cobra en este apartado.

E.3 Examen parcial del grupo B, curso 2024–25

FICHA. Departamento de Estadística e Investigación Operativa. *Programación Matemática. Examen parcial. Curso 2024-2025*, grupo B. Cuatro preguntas: Teoría 1 [2,5 puntos], Teoría 2 [2,5 puntos], Problema 1 [1,5 puntos] y Problema 2 [2,5 puntos]. Se conservan el enunciado impreso y una resolución manuscrita completa salvo en la segunda parte del problema 1.

Enunciado

Teoría 1 [2,5 puntos]. Enunciar y probar el lema de Farkas.

Cuestión. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $n \geq m$ y $\text{rango}(A) = m$. Probar que el conjunto $S = \{y \in \mathbb{R}^m : \ y = Ax,\ x \geq 0\}$ es un cono convexo.

Teoría 2 [2,5 puntos]. Enunciar y probar la validez del corte mixto de Gomory.

Cuestión. Definir matriz totalmente unimodular y describir en qué consiste un pivotaje del símplex sobre una matriz. Justificar que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

no es T.U. Encontrar un punto extremo del poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^3_+ : \ Ax = (1,1,1)^T\}$.

Problema 1 [1,5 puntos]. Consideremos 6 equipos de fútbol cuyas sedes locales distan según la tabla siguiente. Se desea establecer una secuencia de partidos a jugar en las próximas 10 jornadas de modo que cada dos equipos jueguen entre ellos exactamente dos veces, una vez en la sede de uno y otra vez en la sede del otro; ninguna pareja de equipos se enfrente las dos veces consecutivamente; ningún equipo juegue más de dos partidos consecutivos en su sede ni más de dos partidos consecutivos fuera de su sede; y se minimice la distancia total recorrida por los equipos. Se asume que un equipo no tiene que volver a su sede entre dos partidos consecutivos que deba jugar fuera y que en cada jornada juegan entre sí los seis equipos.

	Coruña	Barcelona	Madrid	Sevilla	Bilbao	Valencia
Coruña	0	745	665	929	605	521
Barcelona	745	0	80	337	1090	315
Madrid	665	80	0	380	1020	257
Sevilla	929	337	380	0	1380	408
Bilbao	605	1090	1020	1380	0	1010
Valencia	521	315	257	408	1010	0

Problema 2 [2,5 puntos]. Considere el problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & -2x_1 + 4x_2 - 7x_3 \\ \text{sujeto a:} & x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 3 \\ & -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

Tras introducir variables de holgura x_4 y x_5 en la primera y segunda restricción respectivamente, y variables artificiales x_6 y x_7 en la segunda y tercera respectivamente, se obtiene la tabla óptima de la primera fase:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_4	$1/5$	0	0	1	$-4/5$	$4/5$	$2/5$	$43/5$
x_3	a	0	1	0	b	$3/10$	$2/5$	c
x_2	$3/5$	1	0	0	$1/10$	$-1/10$	$1/5$	$4/5$
	0	0	0	0	0	1	1	0

1. Determine los valores a, b y c sin realizar pivotajes.
2. Aplique la fase II del método símplex y determine qué tipo de solución óptima tiene el problema. Si no ha hecho el apartado 1, para este apartado puede hacer la fase I pivotando.
3. Formular el problema dual, determinar el valor óptimo de las variables del dual y verifique las condiciones del Teorema de Holgura Complementaria. Calcule los precios sombra del problema e interprete su significado.
4. Si el término independiente de la tercera restricción se modifica a $b_3 = 6 + \Delta$, calcule el rango de valores de Δ que mantiene la factibilidad de la base óptima obtenida en la fase II. Obtener la solución óptima del problema para $\Delta = -5$, utilizando el algoritmo del símplex dual.[2]

Teoría 1: Farkas, y un cono generado por columnas

Resolución. El enunciado y la demostración del lema de Farkas son literalmente los de la sección E.1 de este mismo apéndice, que es la misma pregunta con las mismas palabras; allí está la prueba entera, en cinco pasos. En una línea, para no tener que ir a buscarla: la mitad fácil es la cuenta de signos $c^T x = y^T(Ax) \leq 0$, y la mitad difícil es separar el punto c del cono generado por las filas, que es convexo y *cerrado*; que sea un cono es lo que permite hacer $\lambda \to \infty$ y convertir la desigualdad de separación en $Ax \leqq 0$.

[2]El enunciado impreso dice «el término independiente de la segunda y tercera restricción se modifica a $b_3 = 6 + \Delta$», que no es coherente: solo se nombra un término independiente y solo se modifica uno. La anotación del propio examen ($b = (3, 4, 6) \rightsquigarrow (3, 4, 6 + \Delta)$) confirma que lo que cambia es *la tercera*, y así se resuelve.

La cuestión

Hay que probar dos cosas sobre $S = \{y \in \mathbb{R}^m : \ y = Ax,\ x \geq 0\}$, y las dos son directas. Lo interesante es advertir *qué papel juegan las hipótesis*, porque no es el que parece.

S es un cono. Un conjunto S es un cono si $y \in S$ y $\lambda \geq 0$ implican $\lambda y \in S$. Sea $y \in S$; entonces $y = Ax$ para algún $x \geq 0$. Dado $\lambda \geq 0$,

$$\lambda y = \lambda(Ax) = A(\lambda x),$$

y $\lambda x \geq 0$ por ser producto de un escalar no negativo por un vector no negativo. Luego λy es de la forma $A(\text{algo} \geq 0)$, es decir, $\lambda y \in S$.

S es convexo. Sean $y_1 = Ax_1$ e $y_2 = Ax_2$ dos puntos de S, con $x_1, x_2 \geq 0$, y sea $\lambda \in [0,1]$. Entonces

$$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 = \lambda Ax_1 + (1-\lambda)Ax_2 = A\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big),$$

por linealidad de A, y el vector $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ es ≥ 0 por ser combinación de dos vectores no negativos con coeficientes no negativos. Luego la combinación convexa está en S.

Qué pintan $n \geq m$ y rango$(A) = m$. No hacen falta para nada de lo anterior: S es un cono convexo para cualquier matriz A, incluso para la matriz nula. Lo que esas hipótesis añaden es que S es **de dimensión completa**. El rango de A es el número máximo de columnas suyas linealmente independientes, y coincide con la dimensión del subespacio que generan (apéndice F, sección «Álgebra lineal»); así que si rango$(A) = m$, las columnas de A generan todo $\mathbb{R}^m$, luego la envolvente lineal de S es $\mathbb{R}^m$ y el cono tiene interior no vacío. Sin esa hipótesis, S podría quedarse dentro de un hiperplano. Conviene decirlo explícitamente en lugar de usar las hipótesis sin necesitarlas.

CONEXIÓN: POR QUÉ LA CUESTIÓN VA PEGADA AL LEMA

No es casualidad que esta cuestión acompañe al lema de Farkas. En la escritura del lema que usan las resoluciones — (I) $Ax = b$, $x \geqq 0$; (II) $u^T A \leqq 0$, $u^T b > 0$ — el conjunto que hay que separar de b es precisamente este S. La demostración necesita tres propiedades suyas: que es convexo, que es un cono y que es *cerrado*. Las dos primeras son las que pide la cuestión y se prueban en cuatro líneas; la tercera es la delicada, y es donde se usa que el cono está generado por un número *finito* de columnas. Un cono generado por infinitos vectores puede no ser cerrado; extender la misma alternativa a ese caso requiere hipótesis adicionales.

QUÉ DEJA. «Cono» y «convexo» son dos propiedades independientes: hay conos no convexos (la unión de dos rayos) y convexos que no son conos (un segmento). Las dos se comprueban igual, empujando la operación hacia dentro de la x, y por eso este tipo de cuestión se resuelve en cuatro líneas si se tiene clara la definición.

Teoría 2: el corte mixto, y unimodularidad total

Resolución. El enunciado y la prueba de validez del corte mixto de Gomory son los de la sección E.1, y no se repiten. En una línea: llamando $k = x_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor$, si x_i es entera entonces k también, y la fila dice $\sum_j y_{ij} x_j = f_i - k$; si $k \leq 0$ esa suma es $\geq f_i$ y si $k \geq 1$ es $\leq f_i - 1 < 0$; multiplicando el bloque negativo por $\frac{f_i}{f_i - 1} < 0$ los dos casos se funden en una sola desigualdad.

La cuestión, en tres partes

(a) Matriz totalmente unimodular y pivotaje. Una matriz *entera* $A \in M_{m\times n}$ es **totalmente unimodular** (TU) si el determinante de *cualquier* submatriz cuadrada de A vale 0, 1 o -1 (sección 5.2.1). Tomando submatrices 1×1 se ve en seguida que, en particular, todas las entradas de una matriz TU están en $\{0,1,-1\}$; pero el recíproco es falso, y la matriz de esta misma cuestión lo demuestra.

Un **pivotaje del símplex** sobre la entrada $a_{pq}\neq 0$ consiste en la operación elemental que convierte la columna q en el vector unitario e_p: se divide la fila p por a_{pq} y a cada otra fila i se le resta la fila p multiplicada por a_{iq}. Entrada a entrada,

$$\bar a_{pj}=\frac{a_{pj}}{a_{pq}},\qquad \bar a_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{iq}\,a_{pj}}{a_{pq}}\quad (i\neq p).$$

Lo que hace interesante esta operación aquí es que **conserva la unimodularidad total**: si A es TU, la entrada a_{pq} vale ± 1 y dividir por ella no introduce denominadores. La propiedad se refiere al bloque de coeficientes de las restricciones, no a la fila de costes ni a la columna del término independiente. Si además b es entero, las operaciones con pivotes ± 1 mantienen enteras las soluciones básicas. La demostración está en la sección 5.2.1.

(b) Por qué A no es TU. Basta exhibir una submatriz cuadrada con determinante fuera de $\{0,1,-1\}$, y sirve la propia A, que es cuadrada. Desarrollando por la primera fila,

$$\det A = 1\cdot(0\cdot 1-1\cdot 1)-1\cdot(1\cdot 1-1\cdot 0)+0\cdot(1\cdot 1-0\cdot 0)=-1-1=-2,$$

y $-2\notin\{0,1,-1\}$. Luego A no es totalmente unimodular.

Hay una segunda lectura, que es la que se generaliza y conviene tener: cada columna de A tiene exactamente dos unos, del mismo signo. Para matrices así, el criterio suficiente de reconocimiento pide una partición de las filas en dos bloques tal que los dos unos de cada columna caigan en bloques distintos. Aquí las tres columnas emparejan las filas $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ y $\{2,3\}$: haría falta colorear con dos colores los tres vértices de un triángulo sin que dos adyacentes coincidan, y eso es imposible. **Los ciclos impares son el obstáculo**, y esa frase resume todo el tema: A es la matriz de incidencia de un triángulo no dirigido, y por eso falla; orientar las aristas la arreglaría. (El mismo ejercicio, con dos matrices más, está resuelto en la sección 5.2.1.)

(c) Un punto extremo de P. El poliedro es $P=\{x\geq 0:\ x_1+x_2=1,\ x_1+x_3=1,\ x_2+x_3=1\}$. Sumando las tres ecuaciones,

$$2(x_1+x_2+x_3)=3\quad\Longrightarrow\quad x_1+x_2+x_3=\tfrac{3}{2},$$

y restando a esto cada una de las ecuaciones se despeja de golpe: $x_3=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$, y por simetría $x_1=x_2=\frac{1}{2}$. El sistema tiene, por tanto, *solución única*

$$x^*=\left(\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}\right)\ \geq 0,$$

de modo que P se reduce a ese único punto, que es también su único punto extremo, pues no hay otros puntos de P con los que formar una combinación convexa. También se llega a él por la caracterización algebraica: la única base posible es $B=A$ (las tres columnas), y $B^{-1}b=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Y aquí está la gracia de la pregunta. El término independiente $(1,1,1)$ es entero, y sin embargo el único vértice del poliedro tiene todas sus coordenadas fraccionarias. Eso es exactamente

lo que el apartado anterior anticipaba: como A no es TU, el teorema de Hoffman-Kruskal (sección 5.2.1) no garantiza nada, y de hecho existe un b entero para el que el poliedro no es entero. Los tres apartados de la cuestión son, por tanto, uno solo: definición, contraejemplo y consecuencia.

QUÉ DEJA. Que una matriz tenga todas sus entradas en $\{0, 1\}$ no la hace TU. El ejemplo mínimo es la incidencia del triángulo, con determinante -2, y su poliedro asociado tiene el vértice $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$: las soluciones con coordenadas $1/2$ reaparecen al estudiar ciclos impares en problemas de emparejamiento y recubrimiento.

Problema 1: el calendario de la liga

Resolución. *Datos e índices.* Sea $N = \{1, \dots, 6\}$ el conjunto de equipos, que se identifica con el de sedes; $K = \{1, \dots, 10\}$ el de jornadas; y D_{pq} la distancia entre las sedes p y q, con $D_{pp} = 0$, dada por la tabla del enunciado.

Variable principal.

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } i \text{ recibe en su sede al equipo } j \text{ en la jornada } k, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para $i, j \in N$ con $i \neq j$ y $k \in K$. Son $6 \cdot 5 \cdot 10 = 300$ binarias. Obsérvese que el par ordenado importa: x_{ijk} y x_{jik} son partidos distintos, jugados en sedes distintas.

Las restricciones de calendario.

1. *Cada par se enfrenta exactamente una vez en cada sede:*

$$\sum_{k \in K} x_{ijk} = 1, \qquad i, j \in N,\ i \neq j.$$

   Escrita sobre pares *ordenados*, esta sola familia recoge las dos condiciones del enunciado (dos enfrentamientos, uno en cada sede).

2. *Cada jornada, cada equipo juega exactamente un partido:*

$$\sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} \left(x_{ijk} + x_{jik} \right) = 1, \qquad i \in N,\ k \in K.$$

   El primer sumando cuenta los partidos en casa y el segundo los de fuera. Esta es la que formaliza «en cada jornada juegan entre sí los seis equipos».

3. *Los dos enfrentamientos de una pareja no son consecutivos:*

$$x_{ijk} + x_{ji,k+1} \leq 1, \qquad i, j \in N,\ i \neq j,\ k = 1, \dots, 9.$$

   Como (i, j) recorre pares ordenados, al escribirla también para (j, i) queda cubierto el otro orden.

4. *No más de dos partidos consecutivos en casa:*

$$\sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} \left(x_{ijk} + x_{ij,k+1} + x_{ij,k+2} \right) \leq 2, \qquad i \in N,\ k = 1, \dots, 8.$$

5. *No más de dos partidos consecutivos fuera:*

$$\sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} \left(x_{jik} + x_{ji,k+1} + x_{ji,k+2} \right) \leq 2, \qquad i \in N,\ k = 1, \dots, 8.$$

Una comprobación de coherencia que conviene hacer siempre: hay $6 \cdot 5 = 30$ pares ordenados, es decir 30 partidos, y 10 jornadas con 3 partidos cada una dan también 30. Los números cuadran.

Por qué la función objetivo obvia no sirve

Lo primero que sale escribir es

$$\text{Minimizar} \sum_{k \in K} \sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} D_{ij}\, x_{ijk},$$

que, multiplicado por 2 para contar ida y vuelta, daría la distancia si cada equipo volviera a su sede después de cada partido. Pero **esa expresión es constante**, y por tanto no optimiza nada. En efecto,

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \neq j} D_{ij} x_{ijk} = \sum_{i \neq j} D_{ij} \underbrace{\sum_{k \in K} x_{ijk}}_{=1 \text{ por la restricción 1}} = \sum_{i \neq j} D_{ij},$$

que es la suma de todas las entradas de la tabla y no depende del calendario. Con esa obligación de regresar a casa, cualquier calendario factible recorre la misma distancia.

Y ahí está la razón de ser de la frase «se asume que un equipo no tiene que volver a su sede entre dos partidos consecutivos que deba jugar fuera»: sin esa posibilidad, el objetivo no distinguiría entre calendarios factibles. Con ella, lo que se minimiza es la longitud del *itinerario* de cada equipo, y encadenar dos visitas próximas (Barcelona y Madrid distan 80; Madrid y Valencia, 257 en los datos del examen) puede ahorrar viajes respecto a volver a casa en medio. Ese es el problema, y tiene nombre propio en la literatura: es el *travelling tournament problem*.

La formulación correcta: seguir el itinerario

Hace falta saber *dónde está* cada equipo en cada jornada, y después pagar el trayecto entre posiciones consecutivas.

Variables de posición. Para $i \in N$, $p \in N$ y $k \in K$,

$$y_{ipk} = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } i \text{ juega en la sede } p \text{ en la jornada } k, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

que no son variables nuevas de verdad, porque quedan determinadas por las x:

$$y_{iik} = \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} x_{ijk} \quad \text{(juega en su casa)}, \qquad y_{ipk} = x_{pik} \ \ (p \neq i) \quad \text{(juega en casa de } p\text{)}.$$

De la restricción 2 se sigue que $\sum_{p \in N} y_{ipk} = 1$ para todos i y k: cada equipo está en exactamente un sitio cada jornada. Se completa el itinerario con las posiciones inicial y final, que son la propia sede:

$$y_{ip0} = y_{ip,11} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = i, \\ 0 & \text{si } p \neq i. \end{cases}$$

Variables de trayecto. Para $i \in N$, $p, q \in N$ y $k = 0, 1, \ldots, 10$,

$$u_{ipqk} = 1 \text{ si el equipo } i \text{ pasa de la sede } p \text{ (jornada } k\text{) a la sede } q \text{ (jornada } k+1\text{)},$$

que es el producto $y_{ipk}\, y_{i,q,k+1}$ y por tanto no es lineal. Se linealiza de la manera estándar:

$$u_{ipqk} \;\geq\; y_{ipk} + y_{i,q,k+1} - 1, \qquad u_{ipqk} \;\geq\; 0.$$

Objetivo.

$$\text{Minimizar} \sum_{i\in N} \sum_{k=0}^{10} \sum_{p\in N} \sum_{q\in N} D_{pq}\, u_{ipqk}.$$

Por qué la linealización es correcta, que es lo que hay que saber justificar. Con $0 \leq u_{ipqk} \leq 1$, las desigualdades obligan a $u_{ipqk} = 1$ cuando ambas y valen 1, y en los demás casos permiten $u_{ipqk} = 0$. Si $D_{pq} > 0$, minimizar fuerza ese valor mínimo. Si $D_{pq} = 0$, como ocurre para $p = q$, el objetivo no lo fuerza, pero se puede elegir sin alterar el coste. Por tanto, existe un óptimo con cada u igual al producto: se conserva el valor óptimo y el calendario obtenido, aunque no todas las soluciones auxiliares representen exactamente los productos. Las u pueden ser continuas en $[0, 1]$; no hacen falta binarias adicionales.

Naturaleza de las variables. $x_{ijk} \in \{0, 1\}$; $y_{ipk} \in \{0, 1\}$ (o eliminadas por sustitución, que es preferible); $0 \leq u_{ipqk} \leq 1$.

Observación. La resolución manuscrita contiene varias erratas en las restricciones del calendario: escribe $x_{ijk} + x_{jik} = 1$ y $x_{ijk} + x_{ji,k+1} = 1$ donde debe ir ≤ 1. Con la igualdad, cada pareja estaría obligada a jugar *todas* las jornadas, y el modelo sería infactible. Además, pedir dos encuentros por pareja no garantiza uno en cada sede: aquí se exige $\sum_k x_{ijk} = 1$ para cada par ordenado. En la parte del itinerario, la resolución se interrumpe sin terminar; el modelo de arriba no procede de ella.

QUÉ DEJA. Antes de dar por buena una función objetivo conviene comprobar que no es constante sobre la región factible. Aquí la comprobación es de una línea (intercámbiense los sumatorios y úsese la restricción de asignación) y es la que revela de qué trata de verdad el problema.

Problema 2: leer una tabla sin pivotar

Apartado 1: los valores a, b y c

Resolución. *La idea.* Una tabla del símplex es $B^{-1}A$ junto a $B^{-1}b$; luego, si se conoce B^{-1}, cualquier casilla se calcula sin pivotar. Y B^{-1} está a la vista en la propia tabla: las columnas de las variables *artificiales* x_6 y x_7, cuyas columnas originales son e_2 y e_3, muestran $B^{-1}e_2$ y $B^{-1}e_3$, es decir, las columnas segunda y tercera de B^{-1}; y la columna de x_4, cuya columna original es e_1 y que además es básica, muestra $B^{-1}e_1$. Leyendo la tabla,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & 2/5 \\ 0 & 3/10 & 2/5 \\ 0 & -1/10 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Las columnas originales. En forma estándar el problema es

$$\begin{aligned} \text{sujeto a:} \quad & x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ & -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 4 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_7 = 6, \end{aligned}$$

de donde $a_1 = (1, -2, 2)^T$, $a_5 = (0, -1, 0)^T$ y $b = (3, 4, 6)^T$.

El valor a. Es la segunda componente de $B^{-1}a_1$ (la fila de x_3):

$$B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & 2/5 \\ 0 & 3/10 & 2/5 \\ 0 & -1/10 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{8}{5} + \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}, \qquad \text{luego } a = \tfrac{1}{5}.$$

De paso, las otras dos componentes, $1/5$ y $3/5$, coinciden con las que ya trae la tabla en las filas de x_4 y x_2: la comprobación sale gratis.

El valor b. Es la segunda componente de $B^{-1}a_5$, y como $a_5 = -e_2$, se trata simplemente de menos la segunda columna de B^{-1}:

$$B^{-1}a_5 = -\begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/10 \\ -1/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ -3/10 \\ 1/10 \end{pmatrix}, \qquad \text{luego } b = -\tfrac{3}{10}.$$

Otra vez la primera y la tercera componentes coinciden con las de la tabla.

El valor c. Es la segunda componente de $\bar{b} = B^{-1}b$:

$$B^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + \frac{16}{5} + \frac{12}{5} \\ \frac{12}{10} + \frac{24}{10} \\ -\frac{4}{10} + \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43/5 \\ 18/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}, \qquad \text{luego } c = \tfrac{18}{5}.$$

$$\boxed{a = \tfrac{1}{5}, \qquad b = -\tfrac{3}{10}, \qquad c = \tfrac{18}{5}}$$

QUÉ DEJA. Con B^{-1} y los datos originales se reconstruye la tabla. Las columnas que eran vectores de la identidad permiten leer B^{-1} directamente. Si se conservan las artificiales en fase II para hacer esa lectura, quedan solo como registro y no pueden volver a entrar en la base; también se puede guardar B^{-1} aparte.

Apartado 2: fase II y tipo de solución

Resolución. *Recuperar los costos.* La base es $\{x_4, x_3, x_2\}$ y los costos originales son $c = (-2, 4, -7, 0, 0)$ para $x_1, \ldots, x_5$. Con $c_B = (c_4, c_3, c_2) = (0, -7, 4)$,

$$w^T = c_B^T B^{-1} = (0, -7, 4) \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & 2/5 \\ 0 & 3/10 & 2/5 \\ 0 & -1/10 & 1/5 \end{pmatrix} = \left(0,\ -\tfrac{21}{10} - \tfrac{2}{5},\ -\tfrac{14}{5} + \tfrac{4}{5}\right) = \left(0,\ -\tfrac{5}{2},\ -2\right),$$

y de ahí los costos reducidos $c_j - z_j = c_j - w^T a_j$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_4	$1/5$	0	0	1	$-4/5$	$43/5$
x_3	$1/5$	0	1	0	$-3/10$	$18/5$
x_2	$3/5$	1	0	0	$1/10$	$4/5$
$c - z$	-3	0	0	0	$-5/2$	-22

Primer pivotaje. Entra x_1 ($c - z = -3$, el más negativo). Cocientes sobre las filas con coeficiente positivo: $\frac{43/5}{1/5} = 43$, $\frac{18/5}{1/5} = 18$ y $\frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{3}$. El mínimo es $4/3$; sale x_2.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_4	0	$-1/3$	0	1	$-5/6$	$25/3$
x_3	0	$-1/3$	1	0	$-1/3$	$10/3$
x_1	1	$5/3$	0	0	$1/6$	$4/3$
$c - z$	0	5	0	0	-2	-26

Segundo pivotaje. Entra x_5 ($c - z = -2$). En su columna solo la fila de x_1 tiene coeficiente positivo ($1/6$), luego no hay competencia: el cociente es $\frac{4/3}{1/6} = 8$ y sale x_1.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_4	5	8	0	1	0	15
x_3	2	3	1	0	0	6
x_5	6	10	0	0	1	8
$c - z$	12	25	0	0	0	-42

Los dos costos reducidos no básicos son 12 y 25, *estrictamente* positivos, luego la tabla es óptima y la solución es **única**. Además ningún $\bar{b}_i$ es cero, así que tampoco es degenerada.

$$x^* = (0,\, 0,\, 6), \qquad x_4^* = 15, \quad x_5^* = 8, \qquad z^* = -42.$$

Se comprueba sobre el enunciado original: $-2 \cdot 6 = -12 \leq 3$ (holgura 15), $2 \cdot 6 = 12 \geq 4$ (exceso 8) y $6 = 6$ (la igualdad, saturada).

Apartado 3: dual, holgura complementaria y precios sombra

Resolución. *El dual.* El primal es de mínimo con restricciones de los tres tipos, así que los signos de las variables duales se leen con la regla de correspondencia (sección 4.1): una restricción $\leq$ en un problema de mínimo da una variable dual ≤ 0; una $\geq$, una variable ≥ 0; y una igualdad, una variable libre. Cada variable primal, que es ≥ 0, da una restricción dual $\leq$.

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && 3w_1 + 4w_2 + 6w_3 \\ &\text{sujeto a:} && w_1 - 2w_2 + 2w_3 \leq -2 \\ &&& 2w_1 - 4w_2 + 3w_3 \leq 4 \\ &&& -2w_1 + 2w_2 + w_3 \leq -7 \\ &&& w_1 \leq 0, \quad w_2 \geq 0, \quad w_3 \text{ libre.} \end{aligned}$$

La solución dual. Con la base final $\{x_4, x_3, x_5\}$,

$$B = [a_4 \mid a_3 \mid a_5] = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

y con $c_B = (0, -7, 0)$,

$$w^* = c_B^T B^{-1} = (0, -7, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (0,\, 0,\, -7).$$

Si se conservan como registro las columnas artificiales, omitidas en la tabla impresa, la lectura también se hace a través de sus costes reducidos. La de x_4 ($= e_1$, con $c_4 = 0$) da $-w_1 = 0$; la de x_6 ($= e_2$, artificial de costo cero en la fase II) da $-w_2 = 0$; y la de x_7 ($= e_3$) da $-w_3 = 7$.

Comprobación. $w_1 = 0 \le 0$ y $w_2 = 0 \ge 0$: dual factible en signos. En las restricciones: $0 - 0 - 14 = -14 \le -2$; $0 - 0 - 21 = -21 \le 4$; $0 + 0 - 7 = -7 \le -7$, saturada. Y el valor dual es $3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot (-7) = -42 = z^*$, como pide la dualidad fuerte.

Holgura complementaria. Primera familia, $x_j^* \, (c_j - a_j^T w^*) = 0$:

	x_j^*	holgura dual	producto
$j = 1$	0	$-2 - (-14) = 12$	0
$j = 2$	0	$4 - (-21) = 25$	0
$j = 3$	6	$-7 - (-7) = 0$	0

Las holguras duales 12 y 25 son, no por casualidad, los costos reducidos de la tabla final: son la misma cantidad escrita de dos maneras.

Segunda familia, $w_i^* \cdot (\text{holgura primal de la restricción } i) = 0$: la primera restricción tiene holgura $15 > 0$ y $w_1^* = 0$; la segunda tiene exceso $8 > 0$ y $w_2^* = 0$; la tercera es una igualdad, con holgura nula, y $w_3^* = -7$ puede ser lo que sea. Los tres productos son cero.

Precios sombra e interpretación. Son $w^* = (0, 0, -7)$: la tasa de variación de z^* por unidad de cambio en cada término independiente. Las dos primeras restricciones tienen precio sombra nulo porque *no están activas*: sobra margen y aflojarlas o apretarlas un poco no cambia nada. La tercera vale -7, es decir, cada unidad que se añada a b_3 hace bajar el objetivo en 7; como el problema es de mínimo, subir b_3 *mejora* la solución. Y se ve por qué sin ninguna cuenta: la igualdad $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$ con $x_1 = x_2 = 0$ obliga a $x_3 = 6$, y cada unidad más de b_3 es una unidad más de x_3, que vale -7 en el objetivo.

Apartado 4: rango de Δ y el caso $\Delta = -5$

Resolución. Con $b = (3,\ 4,\ 6 + \Delta)^T$,

$$\bar{b} = B^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 + \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2(6 + \Delta) \\ 6 + \Delta \\ -4 + 2(6 + \Delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 + 2\Delta \\ 6 + \Delta \\ 8 + 2\Delta \end{pmatrix}.$$

Imponiendo $\bar{b} \ge 0$ componente a componente:

$$15 + 2\Delta \ge 0 \iff \Delta \ge -\tfrac{15}{2}, \qquad 6 + \Delta \ge 0 \iff \Delta \ge -6, \qquad 8 + 2\Delta \ge 0 \iff \Delta \ge -4.$$

La más restrictiva es la tercera:

$$\boxed{\Delta \ \ge \ -4}$$

No hay cota superior: por mucho que crezca b_3 la base sigue siendo factible, y el objetivo sigue bajando a razón de -7 por unidad. Es decir, el problema con b_3 libre sería ilimitado; con $b_3 = 6$ fijo, simplemente no hay tope por arriba en este análisis.

El caso $\Delta = -5$. Está fuera del rango. Sustituyendo, $\bar{b} = (5,\ 1,\ -2)^T$, luego la tabla es primal infactible y dual factible: símplex dual.

Sale x_5, la única fila con término independiente negativo. *Entra*: hay que buscar en esa fila una columna no básica con coeficiente **negativo**. La fila de x_5 es

$$(\ 6,\ 10,\ 0,\ 0,\ 1\ ) \qquad \text{sobre } x_1, \ldots, x_5,$$

y las dos columnas no básicas, x_1 y x_2, tienen coeficientes 6 y 10, ambos positivos. No hay ninguna candidata a entrar.

Conclusión. Cuando el símplex dual encuentra una fila con $\bar{b}_i < 0$ y todos sus coeficientes no básicos ≥ 0, esa fila es un certificado de infactibilidad: dice

$$0 \;\leq\; 6x_1 + 10x_2 + x_5 \;=\; -2,$$

que es imposible con $x \geq 0$. Luego **el primal es infactible** para $\Delta = -5$. Como el dual sigue siendo factible (cambiar b no cambia sus restricciones), la dualidad permite concluir que **el dual es ilimitado**.

Merece la pena comprobarlo sobre el problema original, porque así se ve de dónde sale. Con $b_3 = 1$, la tercera restricción es $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$, que con $x \geq 0$ obliga a $x_3 \leq 1$. La segunda pide $-2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \geq 4$, es decir, $2x_3 \geq 4 + 2x_1 + 4x_2 \geq 4$, o sea $x_3 \geq 2$. Las dos cosas a la vez son imposibles. La contradicción es exactamente la que la fila del símplex dual detecta de un vistazo.

QUÉ DEJA. La regla de parada del símplex dual no es un detalle técnico: una fila con término independiente negativo y todos los coeficientes no negativos *es* la demostración de que el primal no tiene soluciones, escrita en una línea. Conviene saber leerla como tal, porque en el examen se pide justificar la conclusión, no solo enunciarla.

Qué buscaba: la convocatoria más completa de la serie, con las cuatro piezas del temario en su sitio. La teoría, otra vez Farkas y el corte mixto, con dos cuestiones que no son demostraciones nuevas sino comprobaciones: que un cono generado por columnas es cono y es convexo (cuatro líneas, y lo fino es advertir que las hipótesis sobrantes sobran), y que la incidencia del triángulo no es TU con su consecuencia inmediata, el vértice $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. En problemas, una formulación que distingue las restricciones del calendario de la contabilización de los viajes, y el problema grande con la particularidad de que la tabla se da con huecos: se rellenan leyendo B^{-1} en las columnas artificiales, sin pivotar. El último apartado salía fuera del rango y terminaba en infactibilidad, no en una nueva solución; contestar «la base sigue siendo factible» era el error caro.

E.4 Prefinal del grupo 1, curso 2024–25

FICHA. *Prefinal PM 24/25, Grupo 1*, según el encabezado de la resolución manuscrita conservada en *Exámenes resueltos PM*, pp. 12–19. Contiene dos problemas y tres preguntas de teoría. El enunciado se reconstruye a partir de esa resolución; no se ha localizado el impreso correspondiente y en el manuscrito no consta el reparto de puntos.

Enunciado (reconstruido)

Problema 1. Consideremos el siguiente problema de programación lineal

$$
(\mathrm{P}) \qquad \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & 2x_1 + x_2 + 3x_4 + x_5 \\ \text{sujeto a:} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \ \geq \ 1 \\ & x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \ = \ 2 \\ & x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 \ \leq \ 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ \geq \ 0. \end{array}
$$

Tras aplicar la fase I se obtiene la tabla

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	LD
x_2	0	1	0	1	$1/5$	$-1/5$	0	$1/5$	$1/5$	$3/5$
x_1	1	0	-1	-1	$-3/5$	$3/5$	0	$-3/5$	$2/5$	$1/5$
x_7	0	0	0	2	$7/5$	$-2/5$	1	$2/5$	$-3/5$	$6/5$
z	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0

en la que x_6 y x_7 son holguras de la primera y la tercera restricción, respectivamente, y x_8 y x_9 son variables artificiales de la primera y la segunda restricción, respectivamente.

(a) Aplique la fase II y determine una solución óptima primal y otra óptima dual del problema (P).

(b) Determine el rango de variación del coeficiente c_2 correspondiente a la variable x_2 en la función objetivo, de forma que mantenga la optimalidad de la tabla del apartado anterior. ¿Qué ocurre si $c_2 = 0$? Determine la solución óptima en este caso e indique de qué tipo es dicha solución óptima.

(c) Si exigimos que todas las variables de (P) sean enteras, introduzca un f-corte de Gomory en la tabla óptima del primer apartado e indique la nueva solución óptima obtenida.

Problema 2. Se considera un tablero de ajedrez extendido $n \times n$ en el que queremos colocar el mayor número de reinas sin que se coman unas a otras (una reina come a otras piezas que estén en la misma horizontal, vertical o diagonal). Formule el problema como un modelo de Programación Lineal Entera.

Teoría 1. Sea el problema Min $c^T x$, sujeto a $Ax = b$, $x \geq 0$, y sea $\bar{x} = (B^{-1}b, 0)$ una solución básica factible. Dé y justifique una condición suficiente para que $\bar{x}$ sea óptima.

Teoría 2. Dado un problema de programación lineal en forma canónica:

(a) Formule su dual.

(b) Enuncie y demuestre el teorema de holgura complementaria.

Teoría 3. Defina matriz totalmente unimodular y poliedro entero. Enuncie y demuestre la relación entre ambos conceptos, y explique su importancia.

Problema 1(a): fase II, primal y dual

Resolución. *La forma estándar, para saber qué columnas son cuáles.* Con las variables que dice el enunciado, las tres restricciones se escriben

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - x_6 + x_8 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \qquad\quad + x_9 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 &= 2, \end{aligned}$$

de modo que las columnas originales son $a_6 = -e_1$ (exceso de una restricción $\geq$), $a_7 = e_3$, $a_8 = e_1$ y $a_9 = e_2$.

La base y su inversa. La tabla de la fase I tiene por base $\{x_2, x_1, x_7\}$, y su óptimo vale 0 con las dos artificiales fuera: el problema es factible. Las columnas de x_8 y x_9 son $B^{-1}e_1$ y $B^{-1}e_2$, y la de x_7 es la de una básica, así que la tercera columna de B^{-1} se obtiene de la de x_7 leyendo la posición de e_3; en total

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 0 \\ -3/5 & 2/5 & 0 \\ 2/5 & -3/5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Recuperar los costos. Con $c = (2,1,0,3,1,0,0)$ y $c_B = (c_2, c_1, c_7) = (1,2,0)$,

$$w^T = c_B^T B^{-1} = \left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{6}{5},\ \tfrac{1}{5} + \tfrac{4}{5},\ 0\right) = (-1,\ 1,\ 0),$$

y los costos reducidos $c_j - z_j = c_j - w^T a_j$ salen uno a uno:

$$c_3 - z_3 = 0 - (-1 - 1) = 2, \qquad c_4 - z_4 = 3 - (-3 + 2) = 4,$$

$$c_5 - z_5 = 1 - (-1) = 2, \qquad c_6 - z_6 = 0 - (1) = -1.$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_2	0	1	0	1	1/5	−1/5	0	3/5
x_1	1	0	−1	−1	−3/5	3/5	0	1/5
x_7	0	0	0	2	7/5	−2/5	1	6/5
$c - z$	0	0	2	4	2	−1	0	1

El pivotaje. Solo un costo reducido es negativo, el de x_6, así que entra x_6. En su columna hay una única entrada positiva, el $3/5$ de la fila de x_1; el cociente es $\frac{1/5}{3/5} = \frac{1}{3}$ y sale x_1. Obsérvese la ironía: entra la variable de exceso de la primera restricción, es decir, la solución óptima *no* satura esa restricción.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_2	1/3	1	−1/3	2/3	0	0	0	2/3
x_6	5/3	0	−5/3	−5/3	−1	1	0	1/3
x_7	2/3	0	−2/3	4/3	1	0	1	4/3
$c - z$	5/3	0	1/3	7/3	1	0	0	2/3

Todos los costos reducidos son ahora ≥ 0, y los de las no básicas son *estrictamente* positivos: óptimo único.

$$x^* = \left(0,\ \tfrac{2}{3},\ 0,\ 0,\ 0\right), \qquad z^* = \tfrac{2}{3},$$

con exceso $x_6^* = 1/3$ en la primera restricción y holgura $x_7^* = 4/3$ en la tercera. Se comprueba sobre el enunciado: $2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \geq 1$; $3 \cdot \frac{2}{3} = 2 = 2$; $\frac{2}{3} \leq 2$.

La solución dual. El primal es de mínimo con una restricción de cada tipo, así que los signos duales son distintos en cada una (sección 4.1): $\geq$ da $w_1 \geq 0$, la igualdad da w_2 libre, y $\leq$ da $w_3 \leq 0$.

$$\begin{array}{lll} \text{Maximizar} & w_1 + 2w_2 + 2w_3 & \\ \text{sujeto a:} & -w_1 + w_2 + w_3 \leq 2 & (x_1) \\ & 2w_1 + 3w_2 + w_3 \leq 1 & (x_2) \\ & w_1 - w_2 - w_3 \leq 0 & (x_3) \\ & 3w_1 + 2w_2 + 2w_3 \leq 3 & (x_4) \\ & w_1 + w_3 \leq 1 & (x_5) \\ & w_1 \geq 0, \quad w_2 \text{ libre}, \quad w_3 \leq 0. & \end{array}$$

Con la base final $\{x_2, x_6, x_7\}$ resulta

$$w^* = c_B^T B^{-1} = \left(0,\ \tfrac{1}{3},\ 0\right),$$

y se lee también sin calcular nada: x_6 es básica y su columna es $-e_1$, luego $0 = c_6 - z_6 = w_1$; x_7 es básica con columna e_3, luego $w_3 = 0$; y de $c_1 - z_1 = 2 - w_2 = \frac{5}{3}$ sale $w_2 = \frac{1}{3}$.

Comprobación. $w_1 = 0 \geq 0$ y $w_3 = 0 \leq 0$; las cinco restricciones duales dan $\frac{1}{3} \leq 2$, $1 \leq 1$ (saturada, coherente con $x_2^* > 0$), $-\frac{1}{3} \leq 0$, $\frac{2}{3} \leq 3$ y $0 \leq 1$. El valor dual es $0 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 0 = \frac{2}{3} = z^*$.

QUÉ DEJA. Una holgura o un exceso *positivo* en una solución óptima indica que la restricción no está activa; por holgura complementaria, su precio sombra es cero. Aquí $x_6^* = 1/3 > 0$ y $w_1^* = 0$. Ser básica por sí solo no garantiza una holgura positiva: en una base degenerada puede valer cero.

Problema 1(b): rango de c_2, y el caso $c_2 = 0$

Resolución. x_2 es básica y ocupa la primera fila de la tabla óptima. Al escribir $c_2 = 1 + \delta$, los costos reducidos de las variables no básicas cambian según $(c_j - z_j)^{\text{nuevo}} = (c_j - z_j) - \delta\, y_{1j}$, $j \in NB$, con y_{1j} los coeficientes de la fila de x_2. Los que tienen $y_{1j} = 0$ permanecen iguales:

j	$c_j - z_j$	y_{1j}	condición
x_1	$5/3$	$1/3$	$\frac{5}{3} - \frac{\delta}{3} \geq 0 \iff \delta \leq 5$
x_3	$1/3$	$-1/3$	$\frac{1}{3} + \frac{\delta}{3} \geq 0 \iff \delta \geq -1$
x_4	$7/3$	$2/3$	$\frac{7}{3} - \frac{2\delta}{3} \geq 0 \iff \delta \leq \frac{7}{2}$
x_5	1	0	$1 \geq 0$ siempre

Intersecando, $-1 \leq \delta \leq \frac{7}{2}$, es decir,

$$\boxed{0 \ \leq\ c_2 \ \leq\ \tfrac{9}{2}}$$

El caso $c_2 = 0$. Es justamente el extremo inferior del intervalo, y lo que ocurre ahí es que el costo reducido de x_3 se anula:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_2	$1/3$	1	$-1/3$	$2/3$	0	0	0	$2/3$
x_6	$5/3$	0	$-5/3$	$-5/3$	-1	1	0	$1/3$
x_7	$2/3$	0	$-2/3$	$4/3$	1	0	1	$4/3$
$c - z$	2	0	0	3	1	0	0	0

La base sigue siendo óptima y el valor óptimo pasa a ser $z^* = 0$ (basta sustituir: $2 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{2}{3} = 0$). Para saber si el costo reducido nulo de x_3 permite obtener otros óptimos, hay que examinar su columna.

La clave: la columna de x_3 no tiene ninguna entrada positiva. Sus coeficientes son $-\frac{1}{3}$, $-\frac{5}{3}$ y $-\frac{2}{3}$, todos negativos. Al intentar meter x_3 en la base no hay test del cociente que hacer: se puede aumentar x_3 *indefinidamente* sin que ninguna básica se haga negativa. Con $x_3 = \lambda \geq 0$,

$$x_2 = \tfrac{2}{3} + \tfrac{\lambda}{3}, \qquad x_6 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{5\lambda}{3}, \qquad x_7 = \tfrac{4}{3} + \tfrac{2\lambda}{3},$$

y como el costo reducido de x_3 es cero, el objetivo no cambia: $z = 0$ para todo $\lambda \geq 0$.

Es decir, con $c_2 = 0$ el problema tiene **infinitas soluciones óptimas y el conjunto de óptimos no está acotado**: es la semirrecta

$$\{(0,\ \tfrac{2}{3} + \tfrac{\lambda}{3},\ \lambda,\ 0,\ 0) :\ \lambda \geq 0\},$$

cuyo vértice es $\left(0, \frac{2}{3}, 0, 0, 0\right)$ y cuya dirección es $d = \left(0, \frac{1}{3}, 1, 0, 0\right)$, una dirección extrema del poliedro con $c^T d = 0$. El problema *no* es ilimitado — el objetivo no baja de 0 —, pero su cara óptima sí lo es. A partir de un óptimo, una dirección factible no nula con $c^T d = 0$ produce un rayo de óptimos; una dirección factible con $c^T d < 0$ haría el problema de mínimo ilimitado.

No faltan otros óptimos: para que $2x_1 + 3x_4 + x_5 = 0$, la no negatividad obliga a $x_1 = x_4 = x_5 = 0$, y la segunda restricción fija $x_2 = (2 + x_3)/3$. Se comprueba directamente que la semirrecta es factible: la segunda restricción da $3\left(\frac{2}{3} + \frac{\lambda}{3}\right) - \lambda = 2$ para todo λ, y las otras dos se cumplen con exceso y holgura crecientes.

QUÉ DEJA. Un costo reducido nulo permite conservar el objetivo, pero hay que comprobar cuánto puede crecer esa variable. Si su columna tiene una entrada positiva, el test del cociente da un paso finito: solo si es positivo se obtiene otro óptimo distinto. Ese paso no permite concluir que toda la cara óptima sea acotada. Si la columna no tiene entradas positivas, se obtiene un rayo factible de óptimos, como aquí. Con costo reducido negativo, ese mismo rayo haría el problema ilimitado.

Problema 1(c): un f-corte de Gomory

Resolución. Se vuelve a la tabla óptima del apartado (a), donde $x^* = \left(0, \frac{2}{3}, 0, 0, 0\right)$ y las tres básicas valen $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{3}$: ninguna es entera. Se corta sobre la fila de x_2.

Las partes fraccionarias. Con la convención $f = y - \lfloor y \rfloor$, que deja siempre $f \in [0, 1)$:

$$\bar{b}_2 = \tfrac{2}{3} = 0 + \tfrac{2}{3} \ \Rightarrow\ f_2 = \tfrac{2}{3}, \qquad y_{21} = \tfrac{1}{3} \ \Rightarrow\ f_{21} = \tfrac{1}{3},$$

$$y_{23} = -\tfrac{1}{3} = -1 + \tfrac{2}{3} \ \Rightarrow\ f_{23} = \tfrac{2}{3}, \qquad y_{24} = \tfrac{2}{3} \ \Rightarrow\ f_{24} = \tfrac{2}{3}, \qquad y_{25} = 0 \ \Rightarrow\ f_{25} = 0.$$

Obsérvese otra vez el punto delicado: la parte fraccionaria de $-\frac{1}{3}$ es $\frac{2}{3}$, no $\frac{1}{3}$.

El corte. $\sum_{j \in NB} f_{2j} x_j \geq f_2$, que con holgura $S_2 \geq 0$ se escribe

$$S_2 - \tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{2}{3}x_3 - \tfrac{2}{3}x_4 = -\tfrac{2}{3}.$$

La tabla ampliada y el símplex dual.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	S_2	$\bar{b}$
x_2	1/3	1	−1/3	2/3	0	0	0	0	2/3
x_6	5/3	0	−5/3	−5/3	−1	1	0	0	1/3
x_7	2/3	0	−2/3	4/3	1	0	1	0	4/3
S_2	−1/3	0	−2/3	−2/3	0	0	0	1	−2/3
$c - z$	5/3	0	1/3	7/3	1	0	0	0	2/3

Sale S_2. Entre las columnas con coeficiente negativo en su fila, los cocientes son

$$x_1:\ \left|\frac{5/3}{-1/3}\right| = 5, \qquad x_3:\ \left|\frac{1/3}{-2/3}\right| = \frac{1}{2}, \qquad x_4:\ \left|\frac{7/3}{-2/3}\right| = \frac{7}{2},$$

y el mínimo es $\frac{1}{2}$: entra x_3. Pivotando sobre $-\frac{2}{3}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	S_2	$\bar{b}$
x_2	$1/2$	1	0	1	0	0	0	$-1/2$	1
x_6	$5/2$	0	0	0	-1	1	0	$-5/2$	2
x_7	1	0	0	2	1	0	1	-1	2
x_3	$1/2$	0	1	1	0	0	0	$-3/2$	1
$c-z$	$3/2$	0	0	2	1	0	0	$1/2$	1

La tabla es primal y dual factible, luego óptima, y **todas las básicas son enteras**:

$$x^* = (0,\,1,\,1,\,0,\,0) \in \mathbb{Z}_+^5, \qquad z^* = 1,$$

con $x_6 = 2$ y $x_7 = 2$, también enteras. Aquí un solo corte basta para certificar el óptimo entero: el óptimo de la relajación con el corte ya satisface la integridad.

Comprobación sobre el enunciado. Con $x = (0,1,1,0,0)$: primera restricción, $2+1 = 3 \geq 1$; segunda, $3-1 = 2 = 2$; tercera, $1-1 = 0 \leq 2$; y el objetivo, $2\cdot 0 + 1\cdot 1 + 3\cdot 0 + 0 = 1$. Y el salto del óptimo, de $\frac{2}{3}$ a 1, es la pérdida que impone la integridad.

Problema 2: las reinas

Resolución. *La imagen antes del modelo.* Una reina domina su fila, su columna y las dos diagonales que pasan por su casilla. Colocar reinas que no se coman es, por tanto, elegir casillas de modo que cada fila, cada columna y cada diagonal contenga como mucho una. Y como *cada* una de esas cuatro familias de líneas cubre el tablero entero, el modelo consiste en escribir cuatro familias de restricciones idénticas en espíritu: «en esta línea, a lo sumo una».

Variables.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si en la casilla } (i,j) \text{ hay una reina,} \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad i,j = 1,\dots,n.$$

Objetivo.

$$\text{Maximizar} \ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}.$$

Restricciones. Las dos primeras familias son inmediatas:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \ \ (i = 1,\dots,n), \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \ \ (j = 1,\dots,n).$$

Para las diagonales conviene identificarlas por un índice, y hay una manera limpia de hacerlo: una casilla (i,j) está en la diagonal descendente ($\searrow$) determinada por $i-j$ y en la ascendente ($\nearrow$) determinada por $i+j$. Con eso,

$$\sum_{\substack{1\leq i,j\leq n \\ i-j=d}} x_{ij} \leq 1 \qquad \text{para } d = -(n-1),\dots,n-1,$$

$$\sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ i+j=s}} x_{ij} \le 1 \qquad \text{para } s = 2,\dots,2n.$$

Y finalmente $x_{ij} \in \{0,1\}$.

Otra vía (escribir las diagonales recorriéndolas). La otra forma de indexarlas, que es la que suele salir a mano, consiste en partir de la primera casilla de cada diagonal y avanzar. Para las descendentes: empezando en la columna 1, fila i, la diagonal es $\{(i+t,\, 1+t)\}$ con $t = 0,\dots,n-i$; y empezando en la fila 1, columna j, es $\{(1+t,\, j+t)\}$ con $t = 0,\dots,n-j$. Para las ascendentes, análogamente, $\{(1+t,\, j-t)\}$ con $t = 0,\dots,j-1$ y $\{(i+t,\, n-t)\}$ con $t = 0,\dots,n-i$. Escrito así hay que tener cuidado de no contar dos veces la diagonal principal, que aparece en las dos listas. La indexación por $i-j$ e $i+j$ evita ese problema de raíz y es preferible.

Cuánto vale el óptimo. No lo pide el enunciado, pero conviene saberlo para comprobar el modelo. Las n restricciones de fila dan de inmediato la cota $\sum_{ij} x_{ij} \le n$. Y para $n = 1$ y $n \ge 4$ esa cota se alcanza: es el clásico problema de las n reinas, que tiene solución para todo n salvo $n = 2$ y $n = 3$. En esos dos casos, el máximo es, respectivamente, 1 y 2; en el tablero 3×3 sirven, por ejemplo, $(1,1)$ y $(2,3)$. Para $n = 5$, que es el caso que dibuja la resolución manuscrita, una solución óptima con cinco reinas es

$$(1,1),\ (2,3),\ (3,5),\ (4,2),\ (5,4),$$

que se comprueba en un momento: las filas y las columnas son todas distintas; los valores de $i-j$ son $0,-1,-2,2,1$, todos distintos; y los de $i+j$ son $2,5,8,6,9$, también todos distintos.

QUÉ DEJA. Cuando una prohibición es del tipo «en cada línea, a lo sumo uno», el modelo es siempre el mismo: una familia de restricciones de suma acotada por línea, y tantas familias como tipos de línea haya. Lo único que exige pensar es *indexar* las líneas, y elegir bien el índice — aquí $i-j$ e $i+j$ — ahorra la mitad de la escritura y todos los casos de borde.

Teoría 1: condición suficiente de optimalidad

Resolución. Con la notación $A = [B \mid N]$ y $x = (x_B, x_N)$, la condición suficiente es

$$c_j - z_j = c_j - c_B^T B^{-1} a_j \ge 0 \qquad (j \in NB).$$

La demostración es la identidad que usa el símplex (sección 3.3). Para cualquier x factible,

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, \qquad c^T x = c^T \bar{x} + \sum_{j \in NB} (c_j - z_j) x_j.$$

Cada sumando es no negativo, de modo que $c^T x \ge c^T \bar{x}$. La factibilidad de $\bar{x}$ forma parte de la hipótesis: unos costos reducidos no negativos no convierten por sí solos una tabla infactible en una solución óptima.

Teoría 2: dual y holgura complementaria

Resolución. *(a) El par canónico.* Con la convención de mínimo que emplea el manuscrito,

$$\begin{array}{llll} \text{(P)} \quad \text{Minimizar} & c^T x & \text{(D)} \quad \text{Maximizar} & w^T b \\ \text{sujeto a:} & Ax \geq b & \text{sujeto a:} & A^T w \leq c \\ & x \geq 0 & & w \geq 0. \end{array}$$

(b) Enunciado. Si x y w son factibles para (P) y (D), respectivamente, ambos son óptimos si y solo si

$$w_i\big((Ax)_i - b_i\big) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m), \qquad x_j\big(c_j - (A^T w)_j\big) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Demostración. La diferencia entre sus valores se descompone en

$$c^T x - w^T b = (c - A^T w)^T x + w^T (Ax - b).$$

Por factibilidad, todos los productos de la derecha son no negativos. Si se anulan, los dos valores coinciden y la dualidad débil prueba la optimalidad. Recíprocamente, si ambas soluciones son óptimas, la dualidad fuerte iguala sus valores; una suma de productos no negativos solo puede valer cero si cada producto vale cero. Esta es la prueba de la sección 4.2, aplicada al par pedido.

Teoría 3: unimodularidad total y poliedros enteros

Resolución. Una matriz es *totalmente unimodular* (TU) si el determinante de toda submatriz cuadrada pertenece a $\{0, 1, -1\}$. Un poliedro es *entero* si cada una de sus caras no vacías contiene un punto entero. Para los poliedros contenidos en $\{x \geq 0\}$ que aparecen aquí, equivale a que todos sus vértices sean enteros.

La relación precisa, para $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, es

$$A \text{ es TU} \quad \Longleftrightarrow \quad P(b) = \{x \geq 0 : Ax \leq b\} \text{ es entero para todo } b \in \mathbb{Z}^m.$$

La copia manuscrita alterna $Ax = b$ y $Ax \leq b$ al enunciarla; su prueba utiliza las columnas de $[A \mid I]$, correspondientes a las desigualdades con holguras. Aquí se formula con $Ax \leq b$. Con solo igualdades, la implicación recíproca no es válida en general.

De TU a poliedro entero. Añadir la identidad conserva la unimodularidad total. Toda base D de $[A \mid I]$ tiene determinante ± 1, y por la fórmula de la inversa, D^{-1} tiene entradas enteras. Para b entero, cada solución básica factible tiene sus componentes básicas $D^{-1}b$ enteras; al retirar las holguras, todos los vértices de $P(b)$ son enteros.

La implicación recíproca. Sea B una submatriz cuadrada no singular de A, de orden k. Tras reordenar filas y columnas, se puede completar con columnas de la identidad hasta una base de $[A \mid I]$ de la forma

$$D = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & I_{m-k} \end{pmatrix}, \qquad \det D = \det B.$$

Para cada vector coordenado e_i, elíjase un vector entero q con componentes suficientemente grandes para que $q + D^{-1}e_i \geq 0$, y tómese $b = Dq + e_i$. Entonces b es entero y $D^{-1}b = q + D^{-1}e_i$ es una solución básica factible del sistema ampliado. Su proyección es un vértice

de $P(b)$, entero por hipótesis; las holguras $b - Ax$ también son enteras. Por tanto $D^{-1}e_i$ es entero. Así D^{-1} es una matriz entera, y

$$1 = \det(D^{-1}) \det D$$

es un producto de enteros. Se deduce $\det B = \det D = \pm 1$. Como todo menor no nulo tiene ese valor, A es TU. La sección 5.2.1 desarrolla esta relación y sus aplicaciones.

Importancia. Si A es TU y b es entero, un óptimo finito de la relajación lineal puede elegirse en un vértice entero: también resuelve el problema con restricciones de integridad. No hace falta recurrir a cortes o ramificación para obtener ese óptimo; sí siguen siendo necesarias las hipótesis sobre A y b.

Qué buscaba: en problemas, un recorrido por el símplex, la dualidad y los cortes: leer B^{-1} en las columnas artificiales para recuperar los costos de la fase II sin repetir el trabajo; un pivotaje; la lectura de la solución dual en los costos reducidos de las columnas unitarias; el rango de un costo *básico*, que puede modificar varios costos reducidos no básicos a la vez; y un f-corte. Los dos puntos donde se ganaba o se perdía son claros. El primero, en (b): con $c_2 = 0$ no basta decir «óptimo múltiple», porque la columna de x_3 no tiene entradas positivas y el conjunto de óptimos es una semirrecta, no un segmento. El segundo, en (c): la parte fraccionaria de $-1/3$ es $2/3$. El problema 2 era una formulación de restricciones de exclusión, donde había que indexar las diagonales. La teoría pide justificar tres criterios que sostienen esos cálculos: costos reducidos, holgura complementaria e integridad de los vértices.

E.5 Primera convocatoria de 2024

FICHA. *Examen de la primera convocatoria de 2024.* Del archivo se conserva la resolución manuscrita de los **dos problemas**, no la de teoría, y no se conserva el enunciado impreso. El problema 2 se recupera de su expresión y de las tablas del manuscrito. Del problema 1 se reconstruye la estructura, pero **no los datos numéricos** (capacidades, demandas y costes concretos), que no aparecen en la copia. Se resuelve la formulación con esos datos como parámetros. El manuscrito exige envíos enteros; esa condición se conserva.

Enunciado (reconstruido)

Problema 1. Tres minas extraen un mineral que se procesa en fábricas y se distribuye después a tres ciudades. La mina i puede producir a lo sumo a_i toneladas; la ciudad j exige al menos d_j; hay tres emplazamientos posibles de fábrica, y abrir la fábrica k cuesta f_k más α_k por tonelada procesada. Transportar una tonelada de la mina i a la fábrica k cuesta c_{ik}, y de la fábrica k a la ciudad j cuesta p_{kj}. Los envíos se realizan en cantidades enteras de toneladas.

1) Formule el problema de coste mínimo como un problema de programación lineal entera.
2) Si se impone que se construyan las tres fábricas, ¿es totalmente unimodular la matriz de restricciones resultante?

Problema 2. Considere el problema

$$
\text{(P)}\qquad
\begin{aligned}
&\text{Minimizar} && -6x_1 - 5x_2 + x_3 + 8x_4 \\
&\text{sujeto a:} && 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 \le 4 \\
& && x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 \le 3 \\
& && x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 \le 7 \\
& && x_i \ge 0, \quad i = 1, \dots, 5.
\end{aligned}
$$

1) Resuelva (P) y compruebe que $\{x_1, x_2, x_8\}$ es base óptima; dé B^{-1}. (Las variables x_6, x_7, x_8 son las holguras de las tres restricciones.)
2) Formule el dual y dé su solución óptima. Interprete los precios sombra.
3) Determine el rango de variación de c_1 que mantiene óptima la tabla obtenida.
4) Si $c_4 = 7$, dé la nueva solución óptima e indique de qué tipo es.
5) Dé una condición suficiente de optimalidad de la tabla en función de una columna genérica $(a_1, a_2, a_3)^T$ para la variable x_3 en (P).
6) Si se exige $x_1, \dots, x_5 \in \mathbb{Z}_+$, introduzca un corte de Gomory y obtenga la nueva solución óptima.

Problema 1: minas, fábricas y ciudades

Resolución. *La estructura, antes de las fórmulas.* Hay dos etapas de transporte encadenadas — mina → fábrica y fábrica → ciudad — y una decisión discreta en medio: qué fábricas se abren. Eso obliga a tres familias de variables, una por cada cosa que hay que decidir.

$$
\begin{aligned}
x_{ik} &= \text{toneladas enviadas de la mina } i \text{ a la fábrica } k, \\
z_{kj} &= \text{toneladas enviadas de la fábrica } k \text{ a la ciudad } j, \\
y_k &= \begin{cases} 1 & \text{si se abre la fábrica } k, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad i, j, k = 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

Restricciones.

1. *Capacidad de las minas:* $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} x_{ik} \le a_i$, $i = 1, 2, 3$.
2. *Demanda de las ciudades:* $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} z_{kj} \ge d_j$, $j = 1, 2, 3$.
3. *Balance en cada fábrica:* $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} x_{ik} = \sum_{j=1}^{3} z_{kj}$, $k = 1, 2, 3$. Todo lo que entra se procesa y sale; no se almacena nada.

4. *Enlace con la decisión de abrir:* $x_{ik} \le M\,y_k$ y $z_{kj} \le M\,y_k$ para todos i, j, k. Puede tomarse $M = \sum_i a_i$: ningún envío supera la capacidad total de las minas, porque en cada fábrica se conserva el flujo. Si la fábrica k no se abre, no entra ni sale nada de ella.
5. $x_{ik}, z_{kj} \in \mathbb{Z}_+$, $y_k \in \{0, 1\}$.

Función objetivo. Aquí hay que tener cuidado, porque la escritura espontánea no es lineal. El coste de la fábrica k es el fijo f_k, que solo se paga si se abre, más α_k por tonelada procesada; y la tentación es escribir $y_k\,(f_k + \alpha_k \sum_i x_{ik})$, que contiene el **producto** $y_k\,x_{ik}$ y por tanto *no* es una función lineal.

No hace falta: la restricción de enlace ya garantiza que $x_{ik} = 0$ cuando $y_k = 0$, de modo que $y_k \sum_i x_{ik} = \sum_i x_{ik}$ siempre. El coste variable se puede escribir sin la y, y solo el fijo la necesita:

$$\text{Minimizar} \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{3} f_k\,y_k}_{\text{costes fijos}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{3} \alpha_k \sum_{i=1}^{3} x_{ik}}_{\text{coste de proceso}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} c_{ik}\,x_{ik}}_{\text{transporte mina}\to\text{fábrica}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p_{kj}\,z_{kj}}_{\text{transporte fábrica}\to\text{ciudad}} .$$

Observación. La resolución manuscrita de esta convocatoria escribe el primer bloque como $\sum_k y_k\,(f_k + \alpha_k \sum_i x_{ik})$, que es cuadrático y no cabe en un modelo lineal. La corrección es la de arriba y no cambia el óptimo, precisamente porque la restricción de enlace hace redundante la multiplicación.

Apartado 2: ¿es TU la matriz cuando se abren las tres fábricas?

Qué queda del modelo. Si se impone $y_1 = y_2 = y_3 = 1$, las restricciones de enlace $x_{ik} \le M$ y $z_{kj} \le M$ son redundantes con la cota elegida y desaparecen, junto con las propias variables y. Su relajación lineal tiene nueve variables x_{ik}, nueve z_{kj} y nueve restricciones:

$$\sum_k x_{ik} \le a_i, \qquad \sum_k z_{kj} \ge d_j, \qquad \sum_i x_{ik} - \sum_j z_{kj} = 0.$$

La respuesta es sí, y la razón es que eso es una red. Obsérvese en qué filas aparece cada columna:

- la columna de x_{ik} tiene un 1 en la fila de la mina i y un 1 en la fila de balance de la fábrica k: dos elementos no nulos, del mismo signo;
- la columna de z_{kj} tiene un 1 en la fila de la ciudad j y un -1 en la fila de balance de la fábrica k: dos elementos no nulos, de signos opuestos.

Multiplicando por -1 las tres filas de las minas, la columna de cada x_{ik} pasa a tener un -1 y un $+1$, como ya ocurre con cada z_{kj}. Esa operación conserva la unimodularidad total. Ahora **toda columna tiene exactamente un $+1$ y un -1**, y las demás entradas son cero: se aplica directamente el criterio de incidencia dirigida de la sección 5.2.1.

Y lo que eso significa. Esa matriz no es «casi» una red: *es* la matriz de incidencia del grafo dirigido cuyos nodos son las tres minas, las tres fábricas y las tres ciudades, y cuyos arcos son los envíos mina→fábrica y fábrica→ciudad. Por Hoffman-Kruskal (sección 5.2.1), si las capacidades a_i y las demandas d_j son enteras, todos los vértices del poliedro lo son y **la integridad sale gratis**: se resuelve el relajado con el símplex y la solución ya es entera, sin ramificar ni cortar.

Qué cambia con las y. Al recuperar las restricciones $x_{ik} \le My_k$, las columnas de las variables y_k contienen coeficientes $-M$. Si $M > 1$, esos menores de orden uno ya impiden que la matriz

sea TU. Por tanto, esta formulación no permite usar el criterio anterior para prescindir de las decisiones binarias. La ausencia de TU, por sí sola, no demuestra que una instancia sea difícil.

QUÉ DEJA. La unimodularidad total no es una propiedad de la aplicación sino de la matriz, y en los modelos de red se reconoce mirando cuántas veces aparece cada variable: si cada columna tiene un $+1$ y un -1 como únicas entradas no nulas, es una incidencia de digrafo. En la formulación con enlaces, un coeficiente $-M$ con $M > 1$ basta para descartar TU.

Problema 2: la cadena completa sobre una tabla

Apartado 1: resolver y dar B^{-1}

Resolución. Las tres restricciones son de $\leq$ con término independiente positivo, así que las holguras x_6, x_7, x_8 dan una base factible de partida y no hay fase I.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\bar{b}$
x_6	2	1	2	-2	2	1	0	0	4
x_7	1	2	2	-2	2	0	1	0	3
x_8	1	2	2	-3	1	0	0	1	7
$c - z$	-6	-5	1	8	0	0	0	0	0

Entra x_1 ($c - z = -6$). Cocientes $4/2 = 2$, $3/1 = 3$, $7/1 = 7$: sale x_6.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\bar{b}$
x_1	1	$1/2$	1	-1	1	$1/2$	0	0	2
x_7	0	$3/2$	1	-1	1	$-1/2$	1	0	1
x_8	0	$3/2$	1	-2	0	$-1/2$	0	1	5
$c - z$	0	-2	7	2	6	3	0	0	-12

Entra x_2 ($c - z = -2$). Cocientes $\frac{2}{1/2} = 4$, $\frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$, $\frac{5}{3/2} = \frac{10}{3}$: sale x_7.

(T)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\bar{b}$
x_1	1	0	$2/3$	$-2/3$	$2/3$	$2/3$	$-1/3$	0	$5/3$
x_2	0	1	$2/3$	$-2/3$	$2/3$	$-1/3$	$2/3$	0	$2/3$
x_8	0	0	0	-1	-1	0	-1	1	4
$c - z$	0	0	$25/3$	$2/3$	$22/3$	$7/3$	$4/3$	0	$-40/3$

Todos los costos reducidos son estrictamente positivos en las no básicas: la base $\{x_1, x_2, x_8\}$ es óptima y la solución es única.

$$x^* = \left(\tfrac{5}{3},\ \tfrac{2}{3},\ 0,\ 0,\ 0\right), \qquad x_8^* = 4, \qquad z^* = -\tfrac{40}{3}.$$

La inversa de la base se lee en las columnas de las holguras, que son las de la identidad:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Apartado 2: el dual y los precios sombra

Resolución. El primal es de mínimo con las tres restricciones de $\leq$, luego las tres variables duales son ≤ 0:

$$\begin{array}{lll} \text{Maximizar} & 4w_1 + 3w_2 + 7w_3 & \\ \text{sujeto a:} & 2w_1 + w_2 + w_3 \leq -6 & (x_1) \\ & w_1 + 2w_2 + 2w_3 \leq -5 & (x_2) \\ & 2w_1 + 2w_2 + 2w_3 \leq 1 & (x_3) \\ & -2w_1 - 2w_2 - 3w_3 \leq 8 & (x_4) \\ & 2w_1 + 2w_2 + w_3 \leq 0 & (x_5) \\ & w_1, w_2, w_3 \leq 0. & \end{array}$$

Con $c_B = (-6, -5, 0)$,

$$w^* = c_B^T B^{-1} = (-6,-5,0)\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \left(-4+\tfrac{5}{3},\, 2-\tfrac{10}{3},\, 0\right) = \left(-\tfrac{7}{3},\, -\tfrac{4}{3},\, 0\right),$$

que también se lee en los costos reducidos de las holguras cambiados de signo: $c_6 - z_6 = \frac{7}{3} = -w_1$, $c_7 - z_7 = \frac{4}{3} = -w_2$, y x_8 es básica, luego $w_3 = 0$. El valor dual es $4\left(-\frac{7}{3}\right) + 3\left(-\frac{4}{3}\right) + 0 = -\frac{28}{3} - 4 = -\frac{40}{3} = z^*$.

Interpretación. Mientras la base siga siendo óptima, los precios sombra miden la variación de z^* por unidad de aumento del término independiente. Como el problema es de mínimo y los dos primeros son negativos, **aflojar cualquiera de las dos primeras restricciones abarata el óptimo**, y la que más lo hace es la primera, a razón de $7/3$ por unidad. La tercera tiene precio sombra cero, coherentemente con que su holgura $x_8 = 4$ es positiva. Puede reducirse b_3 de 7 a 3, o aumentarse sin límite, conservando esta base y el mismo valor óptimo; por debajo de 3 hay que volver a resolver.

Apartado 3: rango de c_1

Resolución. x_1 es básica y está en la primera fila. Con $c_1 = \lambda$ y $c_B = (\lambda, -5, 0)$, los costos reducidos de las cinco no básicas se recalculan como $c_j - z_j = c_j - \lambda\, y_{1j} + 5\, y_{2j}$:

j	$c_j - z_j$	condición ≥ 0
x_3	$1 - \frac{2\lambda}{3} + \frac{10}{3} = \dfrac{13 - 2\lambda}{3}$	$\lambda \leq \frac{13}{2}$
x_4	$8 + \frac{2\lambda}{3} - \frac{10}{3} = \dfrac{14 + 2\lambda}{3}$	$\lambda \geq -7$
x_5	$0 - \frac{2\lambda}{3} + \frac{10}{3} = \dfrac{10 - 2\lambda}{3}$	$\lambda \leq 5$
x_6	$0 - \frac{2\lambda}{3} - \frac{5}{3} = \dfrac{-5 - 2\lambda}{3}$	$\lambda \leq -\frac{5}{2}$
x_7	$0 + \frac{\lambda}{3} + \frac{10}{3} = \dfrac{10 + \lambda}{3}$	$\lambda \geq -10$

La fila de x_6 es la delicada, porque su coeficiente en la fila de x_2 es $-\frac{1}{3}$ y por tanto *suma* en vez de restar: $z_6 = \lambda \cdot \frac{2}{3} + (-5)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\lambda}{3} + \frac{5}{3}$. Comprobación rápida: en $\lambda = -6$ eso da $c_6 - z_6 = \frac{-5+12}{3} = \frac{7}{3}$, que es lo que dice la tabla.

Intersecando las cinco condiciones,

$$\boxed{-7 \;\le\; c_1 \;\le\; -\tfrac{5}{2}}$$

y en todo ese rango la base $\{x_1, x_2, x_8\}$ sigue siendo óptima, con $z^*(\lambda) = \frac{5}{3}\lambda - \frac{10}{3}$.

Observación. La resolución manuscrita de esta convocatoria escribe el costo reducido de x_6 como $\frac{5-2\lambda}{3}$ en vez de $\frac{-5-2\lambda}{3}$ y concluye $-7 \le \lambda \le \frac{5}{2}$. Es un error de signo: con $\lambda = 0$, por ejemplo, ese costo reducido vale $-\frac{5}{3} < 0$ y la tabla *no* es óptima, como se comprueba en un momento recalculando. El rango correcto es el del recuadro, y el valor del enunciado, $c_1 = -6$, cae dentro de él con holgura por los dos lados.

Apartado 4: si $c_4 = 7$

Resolución. x_4 es no básica, así que cambiar su costo solo mueve su propio costo reducido:

$$c_4 - z_4 = 7 - \left[(-6)\left(-\tfrac{2}{3}\right) + (-5)\left(-\tfrac{2}{3}\right)\right] = 7 - \left[4 + \tfrac{10}{3}\right] = 7 - \tfrac{22}{3} = -\tfrac{1}{3} < 0.$$

La tabla deja de ser óptima y hay que hacer entrar x_4. Pero su columna es

$$y_4 = \left(-\tfrac{2}{3},\ -\tfrac{2}{3},\ -1\right)^T,$$

con **todas las componentes negativas**. No hay test del cociente posible: se puede aumentar x_4 indefinidamente sin que ninguna básica se haga negativa, y cada unidad baja el objetivo en $\frac{1}{3}$. El problema es, por tanto, **ilimitado**.

Concretamente, la semirrecta

$$x(\theta) = \left(\tfrac{5}{3} + \tfrac{2\theta}{3},\ \tfrac{2}{3} + \tfrac{2\theta}{3},\ 0,\ \theta,\ 0\right), \qquad \theta \ge 0,$$

es factible para todo θ (con $x_8 = 4 + \theta$) y sobre ella $z = -\frac{40}{3} - \frac{\theta}{3} \to -\infty$. La dirección $d = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, 1, 0\right)$ es una dirección extrema del poliedro con $c^T d = -\frac{1}{3} < 0$, que es exactamente la condición del teorema fundamental de la programación lineal (sección 3.2) para que no exista mínimo finito.

QUÉ DEJA. El diagnóstico de «ilimitado» no es que el costo reducido sea negativo, sino que lo sea *y además* toda la columna sea ≤ 0, partiendo de una tabla factible. El costo negativo señala una candidata a entrar; la columna no positiva garantiza que puede crecer sin fin sin perder factibilidad. Y la columna con todas las entradas no positivas es, leída en el otro sentido, la dirección extrema que exhibe el teorema fundamental.

Apartado 5: una condición suficiente con columna genérica

Resolución. Supóngase que la columna de x_3 en (P) fuera $(a_1, a_2, a_3)^T$ en vez de $(2, 2, 2)^T$. Lo único que cambia en la tabla es esa columna y su costo reducido; el resto, incluidas B^{-1} y $\bar{b}$, no depende de ella. La columna en la tabla sería

$$y_3 = B^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2a_1 - a_2}{3} \\ \dfrac{-a_1 + 2a_2}{3} \\ -a_2 + a_3 \end{pmatrix},$$

y el costo reducido,

$$c_3 - z_3 = 1 - \left[(-6)\,\frac{2a_1 - a_2}{3} + (-5)\,\frac{-a_1 + 2a_2}{3}\right] = 1 - \frac{-12a_1 + 6a_2 + 5a_1 - 10a_2}{3},$$

$$\text{es decir,} \qquad c_3 - z_3 = 1 + \frac{7a_1 + 4a_2}{3} = \frac{3 + 7a_1 + 4a_2}{3}.$$

La condición suficiente para que la tabla siga siendo óptima es que ese costo reducido siga siendo ≥ 0, es decir,

$$\boxed{3 + 7a_1 + 4a_2 \;\geq\; 0}$$

Con la columna real $(2, 2, 2)$ da $3 + 14 + 8 = 25 \geq 0$, y en efecto $c_3 - z_3 = \frac{25}{3}$, que es lo que dice la tabla.

El atajo. No hacía falta calcular y_3: por definición $c_3 - z_3 = c_3 - w^{*T} a_3 = 1 - \left(-\frac{7}{3}a_1 - \frac{4}{3}a_2 + 0 \cdot a_3\right)$, que da lo mismo en una línea. Obsérvese de paso por qué a_3 no aparece: porque $w_3^* = 0$. Es decir, la tercera fila de la columna es *irrelevante* para la optimalidad, y eso no es casualidad sino la traducción de que la tercera restricción no está activa.

Apartado 6: un corte de Gomory

Resolución. *Primero, una comprobación que hay que hacer.* La justificación del f-corte requiere integridad de la variable básica y de las no básicas que intervienen en su fila, incluidas las holguras; el enunciado solo pide $x_1, \ldots, x_5 \in \mathbb{Z}_+$. Pero aquí no hay problema: los coeficientes de las tres restricciones y sus términos independientes son enteros, luego $x_6 = 4 - (2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5)$ y sus dos hermanas son automáticamente enteras en cuanto lo sean las $x_1, \ldots, x_5$. El corte es válido.

El corte, sobre la fila de x_1. Con $\bar{b}_1 = \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$, es $f_1 = \frac{2}{3}$, y las partes fraccionarias de la fila son

$$f_{13} = \tfrac{2}{3}, \qquad f_{14} = -\tfrac{2}{3} - (-1) = \tfrac{1}{3}, \qquad f_{15} = \tfrac{2}{3}, \qquad f_{16} = \tfrac{2}{3}, \qquad f_{17} = -\tfrac{1}{3} - (-1) = \tfrac{2}{3}.$$

Con holgura $S_1 \geq 0$,

$$S_1 - \tfrac{2}{3}x_3 - \tfrac{1}{3}x_4 - \tfrac{2}{3}x_5 - \tfrac{2}{3}x_6 - \tfrac{2}{3}x_7 = -\tfrac{2}{3}.$$

Símplex dual. Sale S_1, la única fila negativa. Los cocientes sobre las columnas con coeficiente negativo son

$$x_3:\ \frac{25/3}{2/3} = \frac{25}{2}, \quad x_4:\ \frac{2/3}{1/3} = 2, \quad x_5:\ \frac{22/3}{2/3} = 11, \quad x_6:\ \frac{7/3}{2/3} = \frac{7}{2}, \quad x_7:\ \frac{4/3}{2/3} = 2,$$

y el mínimo, 2, se alcanza *dos veces*, en x_4 y en x_7. Cualquiera de las dos sirve; tomando x_4:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	S_1	$\bar{b}$
x_1	1	0	2	0	2	2	1	0	-2	3
x_2	0	1	2	0	2	1	2	0	-2	2
x_8	0	0	2	0	1	2	1	1	-3	6
x_4	0	0	2	1	2	2	2	0	-3	2
$c - z$	0	0	7	0	6	1	0	0	2	-12

La tabla es primal y dual factible, y todas las básicas son enteras:

$$x^* = (3,\ 2,\ 0,\ 2,\ 0), \qquad z^* = -12.$$

Además $c_7 - z_7 = 0$ con x_7 no básica. Su columna permite un paso positivo de longitud 1: el test del cociente da $\min\{3, 1, 6, 1\} = 1$. Se alcanza así otro óptimo entero, $(2, 0, 0, 0, 0)$, también de valor -12. Esto prueba la multiplicidad, sin deducirla solo del costo reducido nulo o del empate anterior.

Comprobación, y por qué este resultado está cerrado. Sobre el enunciado, $x = (3, 2, 0, 2, 0)$ da $6 + 2 - 4 = 4 \le 4$, $3 + 4 - 4 = 3 \le 3$ y $3 + 4 - 6 = 1 \le 7$, con objetivo $-18 - 10 + 16 = -12$. Y como el óptimo del relajado con el corte añadido vale -12 y *es* entero, ese valor es también el óptimo del problema entero: la cota y la solución coinciden, y no hace falta seguir cortando. El salto respecto del relajado original, de $-\frac{40}{3} \approx -13{,}33$ a -12, es el precio de la integridad.

Qué buscaba: el recorrido completo del temario sobre una sola tabla, que es el formato que más se repite. Lo que de verdad distingue esta convocatoria son los apartados 4 y 5. El 4 no pedía pivotar sino *reconocer* que la columna entera es no positiva, que es el certificado de ilimitación; quien se ponía a pivotar no llegaba a ninguna parte. El 5 es el más elegante: la condición sale en una línea escribiendo $c_3 - {w^*}^T a_3 \ge 0$, y el hecho de que a_3 no aparezca es la lectura de que la tercera restricción no está activa. En el 3 hay una trampa de signo, en el costo reducido de la holgura x_6, que es donde se pierde el apartado.

E.6 Preparcial del grupo B, curso 2023–24

FICHA. *Preparcial, grupo B, curso 2023/24.* Tres problemas y dos cuestiones de teoría, con aplicaciones. Se conserva la resolución manuscrita, no el enunciado impreso. El problema 2 aparece copiado dentro de la resolución; del problema 1 se reconstruye el modelo por edades. Se señalan las cifras del manuscrito y se deja explícita la convención temporal necesaria para interpretar el deterioro y el coste de inventario.

Enunciado (reconstruido)

Teoría 1. Enunciar y probar el teorema fundamental de la programación lineal. *Aplicación:* expresar en forma estándar el poliedro $S = \operatorname{conv}\{(1,0), (0,1), (1,1)\}$.
Teoría 2. Enunciar y probar una condición suficiente de optimalidad para $\operatorname{Min}\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$, con $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$. *Aplicación:* probar que $f(x) = \|x - a\|^2$, con $a \in \mathbb{R}^n$, tiene un mínimo en $x = a$.

Problema 1. Una empresa planifica la producción de los meses 3 a 8 de un artículo *perecedero*. Puede fabricar a lo sumo 6000 unidades al mes, a un coste de 15 por unidad, y almacenar el sobrante con un coste de 0,75 por unidad y mes. El producto se deteriora: una parte de lo almacenado se pierde cada mes, y lo que lleva más de dos meses en almacén ya no sirve. Al final del mes 2 hay un stock inicial repartido por antigüedad. Formule el problema de coste mínimo que satisface la demanda D_i de cada mes, e imponga después que se venda siempre el stock más antiguo disponible.

Problema 2. Considere el problema

$$\text{(P)}\qquad \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & -3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{sujeto a:} & x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9 \\ & 2x_1 \qquad + 2x_3 \le 12 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{array}$$

(a) Resúelvalo, formule el dual y dé su solución óptima.
(b) Halle la nueva solución óptima si el vector de costos pasa a ser $c^T = (-1, -3, 1)$.
(c) Análisis de post-optimalidad con $c_2 = -2 + \lambda$ y $b_1 = 10 + \lambda$ simultáneamente: ¿para qué valores de λ sigue siendo óptima la base?
(d) Añada la restricción $x_1 + x_2 \le 7$ y obtenga la nueva solución óptima.

Problema 3. Resuelva mediante ramificación y acotación:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 5x_1 + 8x_2 \\ \text{sujeto a:} & x_1 + x_2 \le 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+. \end{array}$$

Teoría

Resolución. La primera cuestión trata de programación lineal; la segunda, de mínimos de una función suave sin restricciones. Se recogen las pruebas y sus aplicaciones.

Teorema fundamental de la programación lineal (sección 3.2). Para (PPL) Min $c^T x$ con $Ax = b$, $x \ge 0$, y conjunto factible *no vacío*, existe mínimo finito **si y solo si** $c^T d^j \ge 0$ para toda dirección extrema d^j del poliedro, y en ese caso el mínimo se alcanza en un punto extremo. La prueba es el teorema de representación aplicado dos veces: escribiendo todo punto factible como $x = \sum_i \lambda_i \hat{x}^i + \sum_j \mu_j d^j$, el término $\sum_j \mu_j c^T d^j$ es ≥ 0 y se descarta, y lo que queda es minimizar sobre un conjunto *finito* de puntos extremos. El recíproco es la construcción explícita de la semirrecta $\hat{x} + \lambda d^j$ sobre la que el objetivo tiende a $-\infty$.

Aplicación: de tres vértices a restricciones. El triángulo S queda descrito por

$$x_1 \le 1, \qquad x_2 \le 1, \qquad x_1 + x_2 \ge 1, \qquad x_1, x_2 \ge 0.$$

En efecto, un punto que cumple estas desigualdades se escribe como combinación convexa de los tres vértices con pesos $1 - x_2$, $1 - x_1$ y $x_1 + x_2 - 1$: son no negativos, suman uno y reproducen sus coordenadas. Introduciendo holguras x_3, x_4 y exceso x_5, una formulación estándar es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x_1, \ldots, x_5 \ge 0.$$

El triángulo original es la proyección sobre las dos primeras coordenadas; no se identifican literalmente conjuntos de dimensiones distintas.

Condición suficiente de optimalidad sin restricciones. Si $\nabla f(x^*) = 0$ y $H = \nabla^2 f(x^*)$ es *definida positiva*, entonces x^* es un mínimo local estricto. Sea $\mu > 0$ el menor autovalor de H. Por Taylor,

$$f(x^* + h) - f(x^*) = \tfrac{1}{2} h^T H h + r(h), \qquad \frac{r(h)}{\|h\|^2} \longrightarrow 0.$$

Para h suficientemente pequeño, $|r(h)| \leq (\mu/4)\|h\|^2$, de donde

$$f(x^* + h) - f(x^*) \geq \tfrac{\mu}{4}\|h\|^2 > 0 \qquad (h \neq 0).$$

La copia manuscrita escribe «semidefinida positiva», pero después usa que el menor autovalor es positivo. Hace falta *definida positiva*: $f(t) = -t^4$ tiene $f'(0) = f''(0) = 0$ y, sin embargo, 0 es un máximo local estricto.

Aplicación. Para $f(x) = \|x - a\|^2$,

$$\nabla f(x) = 2(x - a), \qquad \nabla^2 f(x) = 2I.$$

El gradiente se anula en a y la Hessiana es definida positiva; por tanto a es un mínimo local estricto. Además es el único mínimo global, porque $\|x - a\|^2 \geq 0$, con igualdad exactamente cuando $x = a$.

Problema 1: producción con stock que se deteriora

Resolución.

Observación (alcance de la reconstrucción)**.** El manuscrito usa 6000 unidades mensuales de capacidad, coste de fabricación 15, coste de inventario 0,75 e importe 25 por unidad perdida. Para el stock inicial escribe $y_{0,2} = 500 \cdot 0 = 0$, $y_{1,2} = 2000 \cdot 0{,}53 = 1060$ y $y_{2,2} = 1000 \cdot 0{,}89 = 890$. Un balance contiene una cifra discordante con el 0,53 y con su pérdida complementaria 0,47. Por eso se escriben las tasas como parámetros σ_0, σ_1; los demás cálculos del manuscrito corresponden a $\sigma_0 = 0{,}89$, $\sigma_1 = 0{,}53$. No se conserva una tabla numérica de demandas.

Se usa la convención que sugieren sus balances: primero se vende durante el mes y después se aplica el deterioro al sobrante. El coste de almacén del modelo siguiente se cobra sobre el inventario al cierre, después de ese deterioro. Sin el enunciado impreso no puede confirmarse si ese era exactamente el momento de cobro; cambiarlo modificaría el término de almacenamiento, no los balances físicos.

La idea que hay que tener, y es lo que de verdad se evalúa. Cuando el producto se estropea con el tiempo, **el stock deja de ser un número y pasa a ser un vector**: no da igual tener cien unidades recién fabricadas que cien de hace dos meses, porque no sobreviven lo mismo ni se pueden vender igual. Por eso la variable de almacén tiene que llevar *dos* índices, uno para cuándo se fabricó y otro para cuándo se guarda.

Variables e índices. El mes de planificación es $i = 3, \ldots, 8$; el índice k identifica el mes de fabricación de cada lote, incluido el stock anterior al horizonte.

$$\begin{aligned} x_i &= \text{unidades fabricadas en el mes } i; \\ y_{ki} &= \text{unidades del lote } k \text{ que quedan al cierre del mes } i; \qquad 0 \leq k \leq i. \\ z_{ki} &= \text{unidades del lote } k \text{ vendidas durante el mes } i, \end{aligned}$$

Los valores $y_{0,2} = 0$, $y_{1,2} = I_1$ y $y_{2,2} = I_2$ son datos iniciales, después del deterioro del mes 2; en los cálculos de la copia, $I_1 = 1060$ e $I_2 = 890$. Durante el mes i pueden venderse los lotes i,

$i-1$ y $i-2$ que estén disponibles. El lote $i-2$ está en su último mes de venta: lo que no se venda caduca al cierre.

Restricciones. Sean σ_0 la fracción que sobrevive un mes de lo fabricado en el propio mes y σ_1 la que sobrevive de lo que ya tenía un mes, con $0 \le \sigma_0, \sigma_1 \le 1$. Para cada $i = 3, \dots, 8$:

1. *Capacidad:* $x_i \le 6000$, $i = 3, \dots, 8$.
2. *Satisfacer la demanda:* $\displaystyle\sum_{k=0}^{i} z_{ki} = D_i$.
3. *No vender lo que no se tiene:* $z_{ii} \le x_i$ y $z_{ki} \le y_{k,i-1}$ para $k < i$.
4. *Actualizar el almacén:*

$$y_{ii} = \sigma_0\,(x_i - z_{ii}), \qquad y_{i-1,i} = \sigma_1\,(y_{i-1,i-1} - z_{i-1,i}), \qquad y_{ki} = 0 \quad (0 \le k \le i-2).$$

   La última igualdad elimina el sobrante caducado *después* de las ventas. No impide vender durante el mes el stock $y_{i-2,i-1}$ que aún estaba disponible.
5. *Naturaleza:* todas las variables enteras y no negativas, como exige el manuscrito.

Con porcentajes exactos, la integridad impone además que los balances produzcan stocks enteros; no se redondean sus resultados. Si las cantidades se interpretasen como volúmenes divisibles o valores medios, la versión continua relajaría esta condición, pero sería una interpretación distinta del requisito escrito.

Objetivo. Las unidades perdidas al cierre del mes i son

$$\begin{aligned} L_i = {} & (1-\sigma_0)(x_i - z_{ii}) + (1-\sigma_1)(y_{i-1,i-1} - z_{i-1,i}) \\ & + \sum_{k=0}^{i-2} (y_{k,i-1} - z_{ki}). \end{aligned}$$

Los dos primeros términos recogen el deterioro parcial de los lotes recientes; el último, la caducidad de todo el sobrante más antiguo. Cada unidad disponible se vende, se pierde o queda en inventario: no se cuenta dos veces. Con la convención de cobro al cierre fijada antes, el objetivo es

$$\text{Minimizar} \quad 15 \sum_{i=3}^{8} x_i + 0{,}75 \sum_{i=3}^{8} \sum_{k=0}^{i} y_{ki} + \gamma \sum_{i=3}^{8} L_i, \qquad \gamma = 25 \text{ en el manuscrito.}$$

La suma de inventario incluye los lotes iniciales que sigan disponibles, no solo los fabricados desde el mes 3.

El segundo apartado (vender siempre lo más antiguo). La resolución manuscrita lo deja sin contestar. La forma estándar de imponerlo es con variables binarias de agotamiento: sea $\delta_{ki} \in \{0, 1\}$, para $k < i$, que debe activarse si queda algo del lote k sin vender al terminar las ventas del mes. Entonces se pide

$$y_{k,i-1} - z_{ki} \;\le\; M\,\delta_{ki}, \qquad z_{k'i} \;\le\; M\,(1 - \delta_{ki}) \quad (k < k' \le i),$$

con $M = \max\{6000, I_1, I_2\}$, una cota válida para cualquier lote disponible. Si sobra producto viejo, la primera desigualdad fuerza $\delta_{ki} = 1$ y la segunda impide vender de un lote más reciente. Si se agota el viejo, puede elegirse $\delta_{ki} = 0$ y vender del nuevo. No se exige que la binaria valga cero cada vez que el sobrante sea cero: basta con que exista esa elección para representar todas las ventas permitidas. Así se incorpora la regla de prioridad al modelo entero.

QUÉ DEJA. Separar el inventario por lote permite aplicar a cada antigüedad su deterioro y su fecha de caducidad. Para imponer la prioridad, las binarias expresan la disyunción: o se agota el lote viejo, o no se vende del nuevo. Distinguir ventas, deterioro y cierre del mes evita retirar un lote un mes antes de tiempo o cobrar dos veces la misma unidad.

Problema 2: dual, dos post-optimalidades y una restricción nueva

Apartado (a): resolver y dualizar

Resolución. Las tres restricciones son de $\leq$ y sus términos independientes son positivos; las holguras x_4, x_5, x_6 forman una base inicial factible.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_4	1	2	1	1	0	0	10
x_5	1	1	2	0	1	0	9
x_6	2	0	2	0	0	1	12
$c - z$	-3	-2	-1	0	0	0	0

Entra x_1; cocientes 10, 9 y 6; sale x_6.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_4	0	2	0	1	0	$-1/2$	4
x_5	0	1	1	0	1	$-1/2$	3
x_1	1	0	1	0	0	$1/2$	6
$c - z$	0	-2	2	0	0	$3/2$	-18

Entra x_2; cocientes $4/2 = 2$ y $3/1 = 3$; sale x_4.

(T)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_2	0	1	0	$1/2$	0	$-1/4$	2
x_5	0	0	1	$-1/2$	1	$-1/4$	1
x_1	1	0	1	0	0	$1/2$	6
$c - z$	0	0	2	1	0	1	-22

$$x^* = (6,\, 2,\, 0), \qquad x_5^* = 1, \qquad z^* = -22,$$

con óptimo único (los tres costos reducidos no básicos son positivos). La inversa de la base se lee en las columnas de las holguras:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/4 \\ -1/2 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Observación. La resolución manuscrita escribe en esa tabla la columna de x_3 como $\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$ con costo reducido 3. Es incorrecto: con $a_3 = (1,2,2)^T$ resulta $B^{-1}a_3 = (0,1,1)^T$ y $c_3 - z_3 = 2$, como arriba. El error viene de haber copiado $a_3 = (1,2,3)$ en vez de $(1,2,2)$, y se arrastra al apartado (c). El valor óptimo y la solución, en cambio, son correctos.

El dual. Primal de mínimo con tres restricciones $\leq$, luego $w \leq 0$ en las tres:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 10w_1 + 9w_2 + 12w_3 \\ \text{sujeto a:} & w_1 + w_2 + 2w_3 \leq -3 \\ & 2w_1 + w_2 \leq -2 \\ & w_1 + 2w_2 + 2w_3 \leq -1 \\ & w_1, w_2, w_3 \leq 0. \end{array}$$

Con $c_B = (c_2, c_5, c_1) = (-2, 0, -3)$,

$$w^* = c_B^T B^{-1} = (-2, 0, -3) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/4 \\ -1/2 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \left(-1,\ 0,\ \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}\right) = (-1,\ 0,\ -1).$$

Comprobación: $-1 + 0 - 2 = -3$ (saturada, y $x_1^* > 0$); $-2 + 0 = -2$ (saturada, y $x_2^* > 0$); $-1 + 0 - 2 = -3 \leq -1$ (holgada, y $x_3^* = 0$). Valor dual $-10 + 0 - 12 = -22 = z^*$. El precio sombra nulo de la segunda restricción corresponde a su holgura positiva $x_5^* = 1$.

Apartado (b): nuevo vector de costos

Resolución. Con $c^T = (-1, -3, 1)$ y la misma base, $c_B = (-3, 0, -1)$ y

$$w^T = c_B^T B^{-1} = \left(-\tfrac{3}{2},\ 0,\ \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2}\right) = \left(-\tfrac{3}{2},\ 0,\ \tfrac{1}{4}\right),$$

de donde los costos reducidos

$$c_3 - z_3 = 1 - \left(-\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\right) = 2, \qquad c_4 - z_4 = \tfrac{3}{2}, \qquad c_6 - z_6 = -\tfrac{1}{4}.$$

El de x_6 es negativo: la base deja de ser óptima y entra x_6. Su columna es $\left(-\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right)$, con una única entrada positiva, en la fila de x_1; el cociente es $6/\tfrac{1}{2} = 12$ y sale x_1.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_2	1/2	1	1/2	1/2	0	0	5
x_5	1/2	0	3/2	−1/2	1	0	4
x_6	2	0	2	0	0	1	12
$c - z$	1/2	0	5/2	3/2	0	0	−15

$$x^* = (0,\ 5,\ 0), \qquad x_5^* = 4, \quad x_6^* = 12, \qquad z^* = -15.$$

Tiene sentido: al pasar c_2 de -2 a -3 y c_1 de -3 a -1, el producto que interesa fabricar cambia, y el óptimo se va al vértice donde solo se produce x_2, hasta agotar la primera restricción ($2 \cdot 5 = 10$).

Apartado (c): dos parámetros a la vez

Resolución. Aquí cambian *simultáneamente* un costo básico y un término independiente, de modo que hay que imponer las dos condiciones: factibilidad ($\bar{b} \geq 0$) y optimalidad ($c - z \geq 0$). La gracia del apartado es exactamente esa: los dos análisis son independientes y hay que intersecar los intervalos.

Factibilidad. Con $b = (10+\lambda,\, 9,\, 12)^T$,

$$\bar{b} = B^{-1}\begin{pmatrix} 10+\lambda \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10+\lambda}{2} - 3 \\ -\frac{10+\lambda}{2} + 9 - 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{\lambda}{2} \\ 1 - \frac{\lambda}{2} \\ 6 \end{pmatrix},$$

y $\bar{b} \geq 0$ equivale a $2 + \frac{\lambda}{2} \geq 0$ y $1 - \frac{\lambda}{2} \geq 0$, es decir,

$$-4 \leq \lambda \leq 2.$$

Optimalidad. Con $c_2 = -2+\lambda$, o sea $c_B = (-2+\lambda,\, 0,\, -3)$, los costos reducidos de las tres no básicas son

$$c_3 - z_3 = -1 - \big[(-2+\lambda)\cdot 0 + 0\cdot 1 + (-3)\cdot 1\big] = 2,$$
$$c_4 - z_4 = 0 - \big[(-2+\lambda)\tfrac{1}{2} + 0\cdot\big(-\tfrac{1}{2}\big) + 0\big] = 1 - \tfrac{\lambda}{2},$$
$$c_6 - z_6 = 0 - \big[(-2+\lambda)\big(-\tfrac{1}{4}\big) + (-3)\tfrac{1}{2}\big] = 1 + \tfrac{\lambda}{4}.$$

El primero no depende de λ (porque x_3 tiene coeficiente 0 en la fila de x_2) y es siempre positivo. Los otros dos dan $\lambda \leq 2$ y $\lambda \geq -4$.

Conclusión. Los dos intervalos coinciden, así que

$$\boxed{\lambda \in [-4,\, 2]}$$

y en él la base $\{x_2, x_5, x_1\}$ sigue siendo factible y óptima. En los extremos aparecen los dos fenómenos distintos: en $\lambda = 2$ se anulan $\bar{b}_2$ y $c_4 - z_4$; en $\lambda = -4$, se anulan $\bar{b}_1$ y $c_6 - z_6$. En ambos extremos la base es degenerada. También hay multiplicidad: las columnas de costo nulo permiten pasos positivos de longitudes 6 y 12, respectivamente.

Observación. La resolución manuscrita despeja $2 + \frac{\lambda}{2} \geq 0$ como $\lambda \geq -1$ y concluye $\lambda \in [-1, 2]$. Es un error aritmético: $\frac{\lambda}{2} \geq -2$ da $\lambda \geq -4$. Se comprueba en un momento con $\lambda = -3$, que la propia fórmula deja en $\bar{b} = \big(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 6\big) \geq 0$ y con todos los costos reducidos positivos.

Apartado (d): añadir $x_1 + x_2 \leq 7$

Resolución. La solución óptima actual da $x_1 + x_2 = 8 > 7$: la restricción nueva la deja fuera, luego hay que reoptimizar. No hace falta empezar de cero (sección 4.4.4): se añade la fila a la tabla óptima y se aplica el símplex dual.

Escribir la fila nueva en función de las no básicas. Con holgura $x_7 \geq 0$, la restricción es $x_1 + x_2 + x_7 = 7$. De la tabla óptima,

$$x_2 = 2 - \tfrac{1}{2}x_4 + \tfrac{1}{4}x_6, \qquad x_1 = 6 - x_3 - \tfrac{1}{2}x_6,$$

luego $x_1 + x_2 = 8 - x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_6$ y la fila queda

$$-x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 - \tfrac{1}{4}x_6 + x_7 = -1.$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_2	0	1	0	1/2	0	−1/4	0	2
x_5	0	0	1	−1/2	1	−1/4	0	1
x_1	1	0	1	0	0	1/2	0	6
x_7	0	0	−1	−1/2	0	−1/4	1	−1
$c - z$	0	0	2	1	0	1	0	−22

Símplex dual. Sale x_7. Cocientes sobre las columnas con coeficiente negativo:

$$x_3 : \frac{2}{1} = 2, \qquad x_4 : \frac{1}{1/2} = 2, \qquad x_6 : \frac{1}{1/4} = 4.$$

Hay empate entre x_3 y x_4; se toma x_3.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
x_2	0	1	0	1/2	0	−1/4	0	2
x_5	0	0	0	−1	1	−1/2	1	0
x_1	1	0	0	−1/2	0	1/4	1	5
x_3	0	0	1	1/2	0	1/4	−1	1
$c - z$	0	0	0	0	0	1/2	2	−20

Primal y dual factible: óptima.

$$x^* = (5, 2, 1), \qquad z^* = -20.$$

Comprobación sobre el enunciado: $5 + 4 + 1 = 10 \le 10$; $5 + 2 + 2 = 9 \le 9$; $10 + 2 = 12 \le 12$; $5 + 2 = 7 \le 7$. Las cuatro restricciones quedan saturadas, lo que explica que $x_5^* = 0$: la solución es **degenerada**. Eso se reconoce en el valor cero de una variable básica, no en los costos reducidos: los de las básicas siempre son nulos. Además x_4 es no básica y tiene costo reducido cero. Puede crecer hasta 2, con lo que se obtiene otro óptimo, $(6, 1, 0)$. Las soluciones óptimas forman el segmento entre $(5, 2, 1)$ y $(6, 1, 0)$; el manuscrito también obtiene esos extremos. El objetivo empeora de -22 a -20: exactamente el precio de la restricción añadida.

QUÉ DEJA. Al añadir una restricción no se vuelve a empezar. Se escribe la fila nueva *en función de las variables no básicas* — sustituyendo las básicas por su expresión en la tabla —, se pega debajo, y como el término independiente sale negativo justo cuando la restricción se viola, se puede continuar con el símplex dual. Aquí basta un pivotaje; el número necesario depende del problema.

Problema 3: ramificación y acotación

Resolución. *La relajación.* Los vértices son $(0,0)$, $(6,0)$, $(0,5)$ y $(9/4,15/4)$, este último obtenido al intersectar las dos rectas. Sus valores objetivo son 0, 30, 40 y $165/4$, respectivamente. El óptimo relajado es

$$x^{\mathrm{PL}} = (9/4,15/4), \qquad z_{\mathrm{PL}} = 165/4 = 41{,}25.$$

La copia manuscrita intercambia las coordenadas de la intersección y concluye que $(0,5)$ ya es óptimo relajado. Ese punto sí es entero y factible, de valor 40, pero falta descartar valores enteros mejores. Se usa como solución incumbente.

Primera ramificación: $x_2 \le 3$ o $x_2 \ge 4$. En la rama $x_2 \le 3$,

$$5x_1 + 8x_2 = 5(x_1 + x_2) + 3x_2 \le 30 + 9 = 39.$$

La cota se alcanza en $(3,3)$, pero no mejora 40; esa rama se cierra. En la rama $x_2 \ge 4$, la relajación alcanza su máximo 41 en $(9/5,4)$:

$$5x_1 + 8x_2 = (5x_1 + 9x_2) - x_2 \le 45 - 4 = 41.$$

Como $x_1 = 9/5$ no es entero, se ramifica de nuevo.

Segunda ramificación: $x_1 \le 1$ o $x_1 \ge 2$, manteniendo $x_2 \ge 4$. La rama $x_1 \ge 2$ es infactible, pues $5x_1 + 9x_2 \ge 10 + 36 = 46 > 45$. En la rama $x_1 \le 1$ se tiene

$$5x_1 + 8x_2 = \tfrac{8}{9}(5x_1 + 9x_2) + \tfrac{5}{9}x_1 \le 40 + \tfrac{5}{9} = \tfrac{365}{9} < 41.$$

La relajación alcanza esa cota en $(1,40/9)$. Para variables enteras, el objetivo también es entero, por lo que no puede superar 40. Se cierra esta última rama. Todas las ramas quedan descartadas o acotadas por el valor de la incumbente:

$$\boxed{x^* = (0,5), \qquad z^* = 40.}$$

Qué buscaba: en teoría, el teorema fundamental de la programación lineal y la condición suficiente de mínimo en programación no lineal, cada uno con una aplicación. En problemas, un ejercicio de formulación con inventario perecedero, que es de los que separan, y un problema grande cuya gracia está en el apartado (c): dos parámetros a la vez, uno en el costo y otro en el recurso, con dos análisis independientes que hay que intersecar. En el (d), lo que se evalúa no es reoptimizar sino *no* volver a empezar: la fila nueva se escribe en las no básicas y el símplex dual la absorbe en un pivotaje. El tercer problema practica ramificación y acotación, incluida la mejora de una cota al usar que el valor objetivo de una solución entera es entero.

E.7 Segunda convocatoria del curso 2022–23

FICHA. *Examen de la segunda convocatoria, curso 2022-23.* Tres problemas y dos cuestiones de teoría. Se conserva la resolución manuscrita, no el enunciado impreso. Los problemas 2 y 3 se reconstruyen enteros, porque la tabla y las ecuaciones aparecen copiadas dentro de la resolución; el problema 1 es una formulación con todos los datos como parámetros, así que también. De la teoría se conservan los enunciados pero no todos los datos de la segunda cuestión; se dice dónde.

Enunciado (reconstruido)

Problema 1. Una empresa planifica los próximos cinco meses. En el mes t la demanda mínima es d_t, fabricar una unidad cuesta f_t, guardar una unidad en inventario cuesta h_t, vender una unidad reporta v_t y la capacidad máxima de fabricación es K_t.

(a) Formule el problema de máximo beneficio.

(b) Modifique el modelo para permitir producir unidades adicionales en horas extra, con un coste unitario g_t y un límite E_t por mes.

Problema 2. Para un problema de programación lineal de mínimo con cinco variables y cinco restricciones de $\geq$, escrito en forma estándar con variables de exceso $x_6, \ldots, x_{10}$, se obtiene la tabla siguiente, asociada a la base $\{x_8, x_1, x_7, x_2, x_{10}\}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	$\bar{b}$
x_8	0	0	1	2	0	$-3/2$	0	1	$-1/2$	0	3
x_1	1	0	1	0	1	$-1/2$	0	0	$-1/2$	0	2
x_7	0	0	2	0	2	$-3/2$	1	0	$1/2$	0	4
x_2	0	1	0	1	0	$-1/2$	0	0	$1/2$	0	2
x_{10}	0	0	0	3	2	$-5/2$	0	0	$3/2$	1	9
$c - z$	0	0	0	2	2	$5/2$	0	0	$1/2$	0	10

con vector de costos $c = (3, 2, 3, 4, 5)$.

1) Compruebe si la tabla es óptima.
2) ¿Existe más de una base óptima? Dé dos más.
3) Si $c_4 = 4 + \Delta$, ¿para qué valores de Δ sigue siendo óptima la tabla?
4) Si $\bar{b}_2 = 2 + \Delta$, ¿para qué valores de Δ sigue siendo óptima y factible?
5) Formule el dual y dé su solución óptima.

Problema 3. Considere

$$
\text{(P)} \qquad \begin{aligned} &\text{Minimizar} && 5x_2 + 10x_4 \\ &\text{sujeto a:} && x_1 - \tfrac{5}{3}x_2 - \tfrac{1}{3}x_4 = \tfrac{5}{3} \\ & && -\tfrac{4}{3}x_2 + x_3 + \tfrac{11}{3}x_4 = \tfrac{7}{3} \\ & && x_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i = 1, \ldots, 4. \end{aligned}
$$

1) Compruebe que la base $\{x_1, x_3\}$ es óptima en el problema relajado.
2) Introduzca un f-corte de Gomory y restaure la factibilidad.

Teoría 1. Sea $S = \{x \geq 0 : Ax = b\}$, con $A \in M_{m\times n}$ de rango m.

(a) Defina solución básica factible y punto extremo. Justifique que todo punto extremo de S es una solución básica factible.

(b) Sea $\hat{x} = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)^T \in S$, con $x_i > 0$ para $i \leq k$ y $k \leq m$. Pruebe que si $\hat{x}$ es extremo, las columnas $a_1, \ldots, a_k$ son linealmente independientes.

(c) Pruebe el recíproco: si las columnas correspondientes a las componentes positivas de $\hat{x}$ son independientes, entonces $\hat{x}$ es extremo.

Teoría 2. (a) Sea $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ y $P(b) = \{x : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$. Pruebe que A es totalmente unimodular si y solo si $P(b)$ es entero para todo $b \in \mathbb{Z}^m$ con $P(b) \neq \emptyset$. (b) Formule el dual del problema dado, enuncie el teorema de dualidad débil y deduzca que si el primal es no acotado el dual es infactible.

Observación (hipótesis del apartado 2(a))**.** Se explicita que A es entera, hipótesis necesaria para el recíproco del teorema. Sin ella, $A = (1/2)$ daría, para cada b entero, el intervalo $[0, 2b]$ si $b \geq 0$ y el conjunto vacío si $b < 0$: todos los poliedros no vacíos serían enteros, pero A no sería totalmente unimodular.

Problema 1: producción, venta e inventario

Resolución. *Variables.* Tres familias, y conviene no mezclarlas: lo que se fabrica, lo que se vende y lo que se guarda.

$$\begin{aligned} x_t &= \text{unidades fabricadas en el mes } t, \quad t = 1, \dots, 5; \\ y_t &= \text{unidades vendidas en el mes } t, \quad t = 1, \dots, 5; \\ z_t &= \text{unidades almacenadas al final del mes } t, \quad t = 0, 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

Objetivo. Beneficio de las ventas menos costes de fabricación y almacenamiento:

$$\text{Maximizar} \ \sum_{t=1}^{5} \big(v_t\, y_t - f_t\, x_t - h_t\, z_t \big).$$

Restricciones.

1. *Balance de inventario:* $z_t = z_{t-1} + x_t - y_t$ para $t = 1, \dots, 5$, con $z_0 = 0$. Es la ecuación que sostiene todo el modelo: lo que hay al final es lo que había, más lo fabricado, menos lo vendido.
2. *Capacidad:* $x_t \leq K_t$.
3. *Demanda:* $y_t \geq d_t$.
4. *No vender lo que no se tiene:* $y_t \leq z_{t-1} + x_t$.
5. *Naturaleza:* $x_t, y_t, z_t \in \mathbb{Z}_+$.

Una observación que merece la pena. La restricción 4 es **redundante**: se obtiene de la 1 sin más que imponer $z_t \geq 0$, porque $z_t = z_{t-1} + x_t - y_t \geq 0$ es exactamente $y_t \leq z_{t-1} + x_t$. Escribirla no está mal, pero conviene saber que la no negatividad del inventario ya la contiene. La demanda es una cantidad mínima que debe venderse; el modelo permite vender más si hay producto disponible.

(b) Horas extra. Se añade una variable por mes y se retoca lo justo:

$$w_t = \text{unidades fabricadas en horas extra en el mes } t,$$

$$z_t = z_{t-1} + x_t + w_t - y_t, \qquad w_t \leq E_t, \qquad w_t \in \mathbb{Z}_+.$$

Si se conserva la restricción redundante de disponibilidad, también debe actualizarse:

$$y_t \leq z_{t-1} + x_t + w_t.$$

El objetivo pasa a ser

$$\text{Maximizar} \ \sum_{t=1}^{5} \big(v_t\, y_t - f_t\, x_t - g_t\, w_t - h_t\, z_t \big).$$

Obsérvese que *no* se toca la restricción $x_t \leq K_t$: la capacidad ordinaria sigue siendo la que era, y la producción extra tiene su propio límite E_t y su propio coste g_t.

QUÉ DEJA. El balance conecta producción, ventas e inventario entre meses. La producción extra se incorpora como una entrada adicional, con su límite y su coste. Al modificar el balance conviene revisar también las restricciones de disponibilidad: conservar la antigua podría impedir vender parte de la nueva producción.

Problema 2: leer una tabla que viene dada

1) ¿Es óptima?

Resolución. Sí. El criterio es que todos los costos reducidos sean no negativos, y en la fila $c - z$ los valores son 0, 0, 0, 2, 2, $\frac{5}{2}$, 0, 0, $\frac{1}{2}$, 0: ninguno es negativo. Además todos los $\bar{b}_i$ son positivos, luego la solución no es degenerada. Leyendo la tabla,

$$x^* = (2,\, 2,\, 0,\, 0,\, 0), \qquad x_7^* = 4,\ x_8^* = 3,\ x_{10}^* = 9, \qquad z^* = 10.$$

2) Otras dos bases óptimas

Resolución. Las hay, y la señal es el **cero en el costo reducido de** x_3, que es no básica: meterla en la base no cambia el valor del objetivo. Para saber a dónde se llega hay que hacer el test del cociente en su columna, que es $(1, 1, 2, 0, 0)$:

$$\frac{3}{1} = 3 \text{ (fila de } x_8), \qquad \frac{2}{1} = 2 \text{ (fila de } x_1), \qquad \frac{4}{2} = 2 \text{ (fila de } x_7),$$

y las filas de x_2 y x_{10} no compiten porque su coeficiente es cero. El mínimo, 2, se alcanza *dos veces*, de modo que hay dos pivotajes posibles y por tanto dos bases óptimas nuevas:

$$\{x_8,\ x_3,\ x_7,\ x_2,\ x_{10}\} \qquad \text{y} \qquad \{x_8,\ x_1,\ x_3,\ x_2,\ x_{10}\}.$$

Las tres bases dan $z = 10$. Las dos nuevas representan el mismo punto $(0, 2, 2, 0, 0)$ en las variables originales: son dos bases distintas, no dos soluciones nuevas distintas. Obsérvese que, al haber empate en el cociente, las dos tablas nuevas son **degeneradas**: en cada una queda una variable básica valiendo cero. Es el fenómeno habitual, y conviene decirlo: *empate en el test del cociente ⇒ degeneración en la tabla siguiente*.

3) Rango de c_4

Resolución. x_4 es **no básica**, así que cambiar su costo solo mueve su propio costo reducido y no toca nada más. Con $c_4 = 4 + \Delta$,

$$(c_4 - z_4)^{\text{nuevo}} = (4 + \Delta) - z_4 = (4 - z_4) + \Delta = 2 + \Delta,$$

y la condición de optimalidad $2 + \Delta \geq 0$ da

$$\boxed{\Delta \ \geq\ -2}$$

sin cota superior: subir el costo de una variable que ya no interesa nunca la hace interesante.

4) Rango de $\bar{b}_2$

Resolución. Ahora se toca un término independiente de la tabla, el de la fila de x_1. Eso no altera los costos reducidos, que siguen siendo no negativos. Para conservar una base óptima solo queda exigir la factibilidad, $\bar{b} \geq 0$. Con $\bar{b}_2 = 2 + \Delta$ y el resto fijo,

$$2 + \Delta \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\Delta \;\geq\; -2}$$

otra vez sin cota superior. El valor óptimo pasa a ser $z^* = 10 + 3\Delta$, porque $c_1 = 3$ es el costo de la variable básica de esa fila.

QUÉ DEJA. Los dos apartados anteriores son el mismo esquema visto por sus dos caras. Tocar un costo pone en peligro la *optimalidad* y deja intacta la factibilidad; tocar un término independiente pone en peligro la *factibilidad* y deja intactos los costos reducidos. Saber cuál de las dos cosas hay que comprobar ahorra la mitad del trabajo, y equivocarse de mitad es el error más común en este tipo de apartado.

5) El dual

Resolución. El primal es de mínimo con cinco restricciones de $\geq$ y cinco variables ≥ 0, luego el dual es de máximo con cinco variables ≥ 0 y cinco restricciones de $\leq$:

$$\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad & 4w_1 + 2w_2 + 3w_3 + 0\,w_4 + w_5 \\
\text{sujeto a:} \quad & w_1 + w_2 + 2w_3 + w_4 + w_5 \leq 3 \\
& w_1 + 2w_2 + w_3 - w_4 + 4w_5 \leq 2 \\
& w_1 - w_2 + w_3 + w_4 + w_5 \leq 3 \\
& w_1 + 2w_2 - w_3 - w_4 + w_5 \leq 4 \\
& w_1 - w_2 + 2w_3 + w_4 - w_5 \leq 5 \\
& w_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 5.
\end{aligned}$$

La solución, sin resolver nada. $w^T = c_B^T B^{-1}$, y B^{-1} se lee en la tabla: las columnas de $x_6, \ldots, x_{10}$ son B^{-1} cambiada de signo, porque las columnas originales de las variables de exceso son $-e_i$. Pero hay un camino más corto, y es el que conviene tener automatizado: **el costo reducido de la variable de exceso x_{5+i} vale exactamente w_i**, ya que

$$c_{5+i} - z_{5+i} = 0 - w^T(-e_i) = w_i.$$

Leyendo la fila $c - z$ en las columnas $x_6, \ldots, x_{10}$:

$$w^* = \left(\tfrac{5}{2},\ 0,\ 0,\ \tfrac{1}{2},\ 0\right).$$

Comprobación: el valor dual es $4 \cdot \frac{5}{2} + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 0 = 10 = z^*$. Y la holgura complementaria se lee de un vistazo: $w_2 = w_3 = w_5 = 0$ porque las variables de exceso x_7, x_8 y x_{10} son básicas y positivas (esas tres restricciones no están activas), mientras que w_1 y w_4 son positivas y, por ello, x_6 y x_9 deben valer cero (esas dos restricciones sí están activas). Una holgura nula, por sí sola, no obligaría a que el multiplicador fuese positivo.

Problema 3: un corte que basta

1) La base $\{x_1, x_3\}$ en el relajado

Resolución. El problema ya viene escrito en forma estándar y las columnas de x_1 y x_3 son e_1 y e_2, así que $\{x_1, x_3\}$ es una base con $B = I$ y $B^{-1} = I$. Como además $c_1 = c_3 = 0$, se tiene $c_B = 0$ y por tanto $z_j = 0$ para todo j: los costos reducidos coinciden con los costos.

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_1	1	$-5/3$	0	$-1/3$	$5/3$
x_3	0	$-4/3$	1	$11/3$	$7/3$
$c - z$	0	5	0	10	0

Los dos costos reducidos no básicos son 5 y 10, positivos, y $\bar{b} \geq 0$: la base es óptima y la solución única,

$$x^* = \left(\tfrac{5}{3},\ 0,\ \tfrac{7}{3},\ 0\right), \qquad z^* = 0.$$

Es el óptimo evidente: como el objetivo $5x_2 + 10x_4$ tiene coeficientes positivos y las variables son ≥ 0, lo mejor que puede pasar es que valga cero, y aquí se consigue.

2) El corte, y por qué con uno basta

Resolución. $x_1 = \frac{5}{3}$ no es entera; se corta sobre su fila. Partes fraccionarias:

$$\bar{b}_1 = \tfrac{5}{3} = 1 + \tfrac{2}{3} \ \Rightarrow\ f_1 = \tfrac{2}{3}, \qquad y_{12} = -\tfrac{5}{3} = -2 + \tfrac{1}{3} \ \Rightarrow\ f_{12} = \tfrac{1}{3},$$

$$y_{14} = -\tfrac{1}{3} = -1 + \tfrac{2}{3} \ \Rightarrow\ f_{14} = \tfrac{2}{3}.$$

Con holgura $x_5 \geq 0$, el corte es

$$x_5 - \tfrac{1}{3}x_2 - \tfrac{2}{3}x_4 = -\tfrac{2}{3}.$$

Añadido a la tabla, $\bar{b}_3 = -\frac{2}{3} < 0$ y los costos reducidos siguen siendo ≥ 0: símplex dual. Sale x_5, y los cocientes son

$$x_2 :\ \left|\frac{5}{-1/3}\right| = 15, \qquad x_4 :\ \left|\frac{10}{-2/3}\right| = 15,$$

otra vez un empate. Aquí la elección *sí* importa en la práctica, y conviene decirlo: entrando x_4 la tabla resultante vuelve a ser primal infactible y hace falta otro pivotaje; entrando x_2 se termina. Tomando x_2 y pivotando sobre $-\frac{1}{3}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	0	0	3	-5	5
x_3	0	0	1	$19/3$	-4	5
x_2	0	1	0	2	-3	2
$c - z$	0	0	0	0	15	10

Primal y dual factible, luego óptima, y todas las básicas son enteras:

$$x^* = (5,\ 2,\ 5,\ 0), \qquad z^* = 10.$$

Y este valor es el óptimo entero de verdad. Como el óptimo del relajado *con el corte* vale 10 y se alcanza en un punto entero, ese punto es óptimo del problema entero: no hace falta seguir cortando. Se comprueba también a mano despejando el sistema: de la primera ecuación, $x_1 = \frac{5}{3} + \frac{5}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4$, que es entero solo si $5x_2 + x_4 \equiv 1 \pmod 3$; con $x_4 = 0$ el menor x_2 que lo cumple es $x_2 = 2$, y entonces $x_1 = 5$ y $x_3 = \frac{7}{3} + \frac{4}{3} \cdot 2 = 5$. El objetivo vale $5 \cdot 2 = 10$.

La relajación no se resuelve redondeando. Aquí el óptimo relajado vale cero y el entero vale diez. Las coordenadas x_1, x_2 y x_3 cambian, mientras que x_4 sigue valiendo cero. Redondear el óptimo relajado habría dado $(2, 0, 2, 0)$, que ni siquiera satisface las ecuaciones.

QUÉ DEJA. En un problema de mínimo, el valor relajado da una cota inferior del óptimo entero; no garantiza que redondear su solución produzca un punto factible. Un corte válido excluye la solución fraccionaria sin eliminar ninguna solución entera y puede mejorar esa cota. En este ejemplo basta un corte para certificar el óptimo entero.

Teoría

Resolución. *Teoría 1(a): definiciones.* Una solución $\hat{x} \in S$ es **básica factible** si existe una base B formada por m columnas independientes de A tal que, ordenando las variables según esa base, $\hat{x}_B = B^{-1}b \geq 0$ y $\hat{x}_N = 0$. Es un **punto extremo** si una igualdad $\hat{x} = \theta u + (1-\theta)v$, con $u, v \in S$ y $0 < \theta < 1$, obliga a $u = v = \hat{x}$. Para demostrar la implicación solicitada usamos primero el apartado (b).

Teoría 1(b): independencia de las columnas del soporte. La demostración se hace por reducción al absurdo (sección 2.4).

Supóngase que $a_1, \ldots, a_k$ son linealmente *dependientes*: existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ no todos nulos con $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = 0$. Constrúyase el vector $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ y, para $\alpha > 0$, los puntos

$$x^1 = \hat{x} + \alpha\lambda, \qquad x^2 = \hat{x} - \alpha\lambda.$$

Los dos son factibles si α es pequeño. En efecto, $Ax^1 = A\hat{x} + \alpha A\lambda = b + \alpha \sum_{i \leq k} \lambda_i a_i = b$, y lo mismo, con signo menos, para x^2; y como las k primeras componentes de $\hat{x}$ son *estrictamente* positivas y las demás componentes de λ son nulas, tomando $\alpha < \min_{i \leq k,\ \lambda_i \neq 0} \dfrac{x_i}{|\lambda_i|}$ se garantiza $x^1, x^2 \geq 0$.

Y con eso $\hat{x}$ no puede ser extremo, porque $\hat{x} = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$ con $x^1 \neq x^2$ (ya que $\lambda \neq 0$ y $\alpha > 0$): $\hat{x}$ es punto medio de dos puntos distintos de S. Contradicción. Luego las columnas son linealmente independientes.

Dónde entra cada hipótesis. La positividad estricta de $x_1, \ldots, x_k$ es lo que permite moverse en las dos direcciones sin salirse de $x \geq 0$; si alguna fuera nula, uno de los dos puntos podría hacerse negativo y el argumento se cae. Y $k \leq m$ es automático una vez probada la independencia, porque no puede haber más de m vectores independientes en $\mathbb{R}^m$.

Conclusión del apartado (a). Las columnas correspondientes a las coordenadas positivas de un extremo son independientes por el argumento anterior, que también prueba $k \leq m$ sin tener que suponerlo. Como A tiene rango m, se pueden completar con columnas de A hasta obtener una base B. Fuera de ella todas las coordenadas de $\hat{x}$ son cero, y $A\hat{x} = b$ da $B\hat{x}_B = b$. Por tanto $\hat{x}_B = B^{-1}b \geq 0$ y $\hat{x}$ es básica factible. Si $\hat{x} = 0$, se elige cualquier base de A y se obtiene la misma conclusión.

Teoría 1(c): el recíproco. Supongamos independientes las columnas de las componentes positivas y escribamos $\hat{x} = \theta u + (1-\theta)v$, con $u, v \in S$ y $0 < \theta < 1$. En cada coordenada

donde $\hat{x}_i = 0$, la no negatividad fuerza $u_i = v_i = 0$. Así, $A(u - v) = 0$ es una combinación nula de aquellas columnas independientes, y obliga a $u_i - v_i = 0$ también en las coordenadas restantes. Luego $u = v = \hat{x}$, lo que prueba que $\hat{x}$ es extremo. En particular, toda solución básica factible es un extremo, pues sus columnas de soporte son un subconjunto de una base.

Teoría 2(a): el teorema de Hoffman-Kruskal. Enunciado y demostración completa, en las dos direcciones, en la sección 5.2.1. En una línea cada mitad: si A es TU, se añaden las holguras $s = b - Ax \geq 0$. Los vértices de $P(b)$ corresponden a soluciones básicas factibles de $Ax + s = b$: ordenadas según su base, tienen la forma $(B^{-1}b, 0)$, donde B es submatriz regular de $[A \mid I]$. Esta matriz es TU, por lo que $\det B = \pm 1$ y Cramer da coordenadas enteras, incluidas las de x. El recíproco elige lados derechos enteros que permiten recuperar las columnas de la inversa de cada submatriz regular y concluir que su determinante es ± 1.

Teoría 2(b): dualidad débil. La resolución conserva únicamente la forma genérica del dual pedido:

$$\text{Maximizar } w_1^T b_1 + w_2^T b_2 \quad \text{sujeto a:} \quad w_1^T A_1 + w_2^T A_2 = c^T, \quad w_1 \geq 0,\ w_2 \text{ libre},$$

donde $w_1 \in \mathbb{R}^3$ y $w_2 \in \mathbb{R}^2$ en la copia. Corresponde formalmente al primal

$$\text{Minimizar } c^T x \quad \text{sujeto a:} \quad A_1 x \geq b_1, \quad A_2 x = b_2, \quad x \text{ libre}.$$

Los datos numéricos de ese primal no aparecen; esta correspondencia permite demostrar el resultado sin atribuirle datos que no se conservan.

Dualidad débil (sección 4.2). Para cualquier x factible del primal y (w_1, w_2) factible del dual,

$$c^T x = (w_1^T A_1 + w_2^T A_2)x \geq w_1^T b_1 + w_2^T b_2.$$

La igualdad usa la restricción dual; la desigualdad usa $A_1 x \geq b_1$ con $w_1 \geq 0$ y $A_2 x = b_2$, donde el signo de w_2 no importa. Así, **cada solución dual factible proporciona una cota inferior del objetivo primal**.

Consecuencia. Si el primal es no acotado, es decir, si hay soluciones factibles con $c^T x \to -\infty$, entonces *no puede haber ninguna* w factible del dual: si la hubiera, $w_1^T b_1 + w_2^T b_2$ sería una cota inferior finita de $c^T x$, lo que contradice que baje sin límite. Luego el dual es infactible. Obsérvese que el recíproco es falso: los dos problemas pueden ser infactibles a la vez.

Qué buscaba: una convocatoria larga, con tres problemas y las dos piezas teóricas que sostienen el símplex y la programación entera. En el problema 2 no había que resolver nada: la tabla venía dada y todo consistía en leerla, con dos apartados simétricos que separan a quien tiene claro qué pone en peligro cada cambio (el costo, la optimalidad; el recurso, la factibilidad) y con la solución dual leída directamente en los costos reducidos de las variables de exceso. El problema 3 muestra que redondear puede romper la factibilidad: el óptimo relajado vale 0 y el entero vale 10, y el corte permite certificar este último. La teoría relaciona puntos extremos, columnas independientes y soluciones básicas factibles; las perturbaciones $\hat{x} \pm \alpha\lambda$ son el paso clave de la primera implicación. La dualidad débil explica por qué una solución dual factible impide que el objetivo primal descienda sin límite.

E.8 Primera convocatoria de 2023 (parte de teoría)

FICHA. *Examen de la primera convocatoria de 2023.* Del archivo se conserva **solo la parte de teoría**, con sus tres cuestiones; los problemas no aparecen y no se reconstruyen. Los tres enunciados están copiados dentro de la resolución, de modo que se reproducen con seguridad.

Enunciado

Teoría 1. (a) Enuncie y demuestre el teorema fundamental de la programación lineal. (b) Considere $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leq y - 2, \ y \geq 0\}$. Represente C en forma estándar y mediante sus puntos y direcciones extremas.

Teoría 2. (a) Defina matriz totalmente unimodular y poliedro entero. (b) Para $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, pruebe que A es TU si y solo si $P(b) = \{x \geq 0 : Ax \leq b\}$ es entero para todo $b \in \mathbb{Z}^m$ con $P(b) \neq \emptyset$. (c) Pruebe que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es totalmente unimodular.

Teoría 3. Enuncie y demuestre la condición necesaria de segundo orden de optimalidad local en programación no lineal sin restricciones.

Teoría 1(a): el teorema fundamental

Resolución. Enunciado y demostración completa en la sección 3.2. El enunciado, para tenerlo delante: si $\{x \geq 0 : Ax = b\} \neq \emptyset$, el problema $\operatorname{Min} c^T x$ con $Ax = b$, $x \geq 0$, tiene mínimo finito **si y solo si** $c^T d^j \geq 0$ para toda dirección extrema d^j del poliedro, y en ese caso el mínimo se alcanza en un punto extremo. La suficiencia sale de escribir cualquier factible como $x = \sum_i \lambda_i \hat{x}^i + \sum_j \mu_j d^j$ (teorema de representación), tirar el segundo sumando porque aporta ≥ 0, y quedarse minimizando sobre el conjunto *finito* de puntos extremos; la necesidad, de exhibir la semirrecta $\hat{x} + \lambda d^j$ a lo largo de la cual $c^T x \to -\infty$.

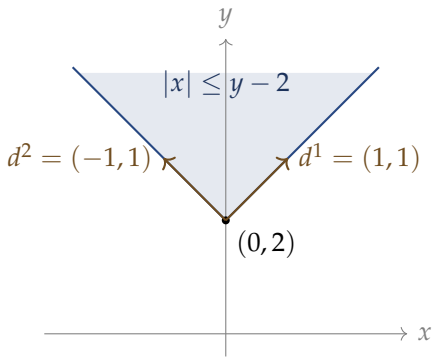
Teoría 1(b): el cono $|x| \leq y - 2$

Resolución. *Primero, quitar el valor absoluto.* La desigualdad $|x| \leq y - 2$ es, exactamente, el par de desigualdades

$$x \leq y - 2 \qquad \text{y} \qquad -x \leq y - 2,$$

es decir, $x - y \leq -2$ y $x + y \geq 2$. La condición $y \geq 0$ del enunciado es redundante, porque $|x| \leq y - 2$ ya obliga a $y \geq 2$; conviene decirlo en lugar de arrastrarla.

Geométricamente, C es la región encerrada entre las dos semirrectas que salen del punto $(0, 2)$ con pendientes $+1$ y -1: una «V» con vértice en $(0, 2)$ que se abre hacia arriba. Es un cono trasladado; su vértice no está en el origen.



Forma estándar. Hay dos cosas que arreglar. La primera es que x es una variable **libre**, y la forma estándar exige variables no negativas: se desdobla en $x = x^+ - x^-$ con $x^+, x^- \geq 0$. La segunda es que hay dos desigualdades: se añaden una holgura $x_1 \geq 0$ y un exceso $x_2 \geq 0$. Queda

$$\begin{aligned} x^+ - x^- - y + x_1 &= -2, \\ x^+ - x^- + y - x_2 &= 2, \end{aligned} \qquad x^+, x^-, y, x_1, x_2 \geq 0,$$

es decir, con $\tilde{x} = (x^+, x^-, y, x_1, x_2)^T$,

$$\widetilde{C} = \left\{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^5_+ : \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tilde{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

El conjunto original se recupera por proyección: $C = \{(x^+ - x^-, y) : \tilde{x} \in \widetilde{C}\}$; no se identifican conjuntos de dimensiones distintas.

Puntos y direcciones extremas (en el plano). El único punto extremo es el vértice de la «V»: se obtiene resolviendo $x - y = -2$ y $x + y = 2$, que da

$$\hat{x} = (0,\, 2).$$

Las dos direcciones extremas son las de las dos semirrectas,

$$d^1 = (1,\, 1), \qquad d^2 = (-1,\, 1),$$

y por el teorema de representación (sección 2.4),

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \ \mu_1, \mu_2 \geq 0 \right\}.$$

La combinación convexa de puntos extremos se reduce aquí a un solo sumando porque solo hay un punto extremo.

Observación (el desdoblamiento añade direcciones que no están en C)**.** Merece la pena mirar qué ha pasado en $\mathbb{R}^5$, porque es un efecto del cambio de variable que no suele contarse. El poliedro en forma estándar tiene también un único punto extremo, $(0, 0, 2, 0, 0)$, pero tiene **cuatro** direcciones extremas, no dos:

$$(1, 1, 0, 0, 0), \quad (1, 0, 1, 0, 2), \quad (0, 1, 1, 2, 0), \quad (0, 0, 1, 1, 1).$$

La segunda y la tercera se proyectan sobre d^1 y d^2. La cuarta se proyecta sobre $(0, 1)$, que es una dirección de C pero *no* extrema, porque $(0, 1) = \frac{1}{2}d^1 + \frac{1}{2}d^2$. Y la primera se proyecta sobre $(0, 0)$: es un artefacto del desdoblamiento $x = x^+ - x^-$, que permite subir x^+ y x^- a la vez sin cambiar x. La proyección de $\widetilde{C}$ recupera exactamente C, pero puede llevar una dirección extrema a una no extrema o a cero, porque no es inyectiva.

Teoría 2: unimodularidad total

Resolución. *(a) Definiciones.* Una matriz *entera* A es **totalmente unimodular** si toda submatriz cuadrada suya tiene determinante 0, 1 o -1. Un poliedro es **entero** si cada cara no vacía contiene un punto entero. Para los poliedros contenidos en $x \geq 0$ que aparecen aquí, equivale a que todos sus vértices tengan coordenadas enteras; esta es la versión usada en la sección 5.2.1.

(b) El teorema de Hoffman-Kruskal. A entera es TU si y solo si $P(b) = \{x \geq 0 : Ax \leq b\}$ es entero para todo $b \in \mathbb{Z}^m$ con $P(b) \neq \emptyset$. Demostrado en las dos direcciones en la sección 5.2.1; en una línea, la ida es Cramer sobre $B^{-1}b$ con $\det B = \pm 1$, y la vuelta se construye eligiendo b que fuercen cada determinante.

(c) Que la matriz del enunciado es TU. Comprobar la definición directamente significaría calcular todos los menores de una matriz 4×5; en vez de eso se usa la cadena de operaciones que *conservan* la unimodularidad total (sección 5.2.1) para reducirla a una matriz en la que el criterio de los dos elementos no nulos sea aplicable. Cada paso es una equivalencia, así que la conclusión se transmite hacia atrás.

Paso 1: quitar lo repetido. La fila 4 es igual a la fila 3 y la columna 3 es igual a la columna 2. Borrar una fila o una columna repetida no altera el carácter TU (una submatriz que use las dos tiene determinante nulo; una que use solo una ya estaba antes):

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Paso 2: quitar la columna unitaria. La cuarta columna es e_2. Añadir o quitar columnas de la identidad tampoco altera el carácter TU:

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Paso 3: añadir la identidad y pivotar. Se le pega la identidad a la derecha (permitido) y se pivota sobre el elemento $(1,1)$, que vale 1 (permitido: pivotar conserva la unimodularidad total, y ese es el resultado no trivial de la lista). El pivotaje resta la fila 1 de la fila 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Paso 4: aplicar el criterio. La matriz resultante tiene **a lo sumo dos elementos no nulos por columna**, así que basta exhibir una partición de las filas que cumpla las dos condiciones del criterio (sección 5.2.1). Sirve

$$Q_1 = \{1, 3\}, \qquad Q_2 = \{2\} :$$

- columna 2, con dos unos en las filas 1 y 2 (mismo signo): están en bloques distintos, $1 \in Q_1$ y $2 \in Q_2$. Correcto.
- columna 3, con dos unos en las filas 2 y 3 (mismo signo): $2 \in Q_2$ y $3 \in Q_1$, bloques distintos. Correcto.

- columna 4, con un 1 en la fila 1 y un -1 en la fila 3 (signos opuestos): las dos están en Q_1, el mismo bloque. Correcto.
- las columnas 1, 5 y 6 tienen un solo elemento no nulo y no imponen nada.

Luego la matriz reducida es TU, y deshaciendo la cadena, A también lo es.

Otra vía (ver que es una matriz de intervalos). Hay un camino más corto que no exige ninguna reducción, y conviene conocerlo porque cubre de golpe una familia entera de matrices. Reordénense las filas de A en el orden $1, 3, 4, 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora **los unos de cada columna ocupan posiciones consecutivas**: la primera columna, las filas 1 a 3; la segunda y la tercera, las cuatro; la cuarta, las filas 2 a 4; la quinta, solo la fila 4. Una matriz con esa propiedad se llama *matriz de intervalos*, y siempre es TU.

Por qué. Se comprueba el criterio general de particiones. Dado cualquier subconjunto Q de filas, píntense sus elementos **alternativamente** de dos colores siguiendo el orden anterior: el primero de Q en Q_1, el segundo en Q_2, el tercero en Q_1, y así. En una columna cualquiera, los unos de Q forman un bloque de posiciones consecutivas *dentro de* Q, y en un bloque consecutivo los colores alternan, de modo que a un lado hay $\lceil k/2 \rceil$ unos y al otro $\lfloor k/2 \rfloor$, en uno u otro orden: la diferencia vale 0 o ± 1. La condición del criterio se cumple para todo Q y toda columna, luego la matriz es TU.

QUÉ DEJA. Para probar que una matriz concreta es TU casi nunca se calculan menores. O se reduce con las operaciones que conservan la propiedad hasta caer en el criterio de los dos elementos no nulos, o se reconoce una familia conocida: incidencia de un digrafo, matriz de intervalos, transporte. Reconocer la familia es lo que ahorra la página entera.

Teoría 3: la condición necesaria de segundo orden

Resolución. El enunciado y su desarrollo completo están en la sección 6.2.2 (p. 330); aquí va el hilo entero, que es corto y conviene tener escrito. La versión de partida — gradiente nulo, hessiana semidefinida positiva, y el hueco que dejan entre las dos —, tal como se ve en el cálculo de varias variables, está reenunciada en el apéndice F, sección «Análisis»; conviene tenerla al lado para ver qué añade la demostración de aquí.

Teorema (condición necesaria de optimalidad)**.** Sea f dos veces diferenciable en un entorno de x^* y sea x^* un mínimo local de f en $\mathbb{R}^n$. Entonces $\nabla f(x^*) = 0$ y $\nabla^2 f(x^*)$ es semidefinida positiva.

La idea, antes de la prueba. Dice que en el fondo de un valle pasan dos cosas: el suelo está horizontal y, además, se curva hacia arriba — o al menos no hacia abajo — en todas las direcciones. Si estuviera inclinado, se podría bajar dando un paso en la dirección de la pendiente; y si se curvara hacia abajo en alguna dirección, se podría bajar dando un paso *suficientemente pequeño* en ella, porque cerca de un punto con gradiente nulo el término cuadrático es el que manda.

Paso 1: el gradiente se anula. Sea $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ cualquiera y considérense las funciones de una variable $g_\pm(\alpha) = f(x^* \pm \alpha d)$. Como x^* es mínimo local, para $\alpha > 0$ pequeño se tiene $f(x^* \pm \alpha d) \geq f(x^*)$, luego los dos cocientes incrementales son ≥ 0 y, pasando al límite,

$$0 \leq \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{f(x^* + \alpha d) - f(x^*)}{\alpha} = d^T \nabla f(x^*),$$

$$0 \leq \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{f(x^* - \alpha d) - f(x^*)}{\alpha} = -d^T \nabla f(x^*).$$

Las dos desigualdades juntas obligan a $d^T \nabla f(x^*) = 0$, y como d era arbitrario, $\nabla f(x^*) = 0$. *El truco es mirar en las dos direcciones*: cada límite por separado solo daría una desigualdad.
Paso 2 (el núcleo): la hessiana es semidefinida positiva. Con el gradiente ya nulo, el desarrollo de Taylor de segundo orden queda

$$f(x^* + \alpha d) - f(x^*) = \underbrace{\alpha \, \nabla f(x^*)^T d}_{=0} + \frac{\alpha^2}{2} \, d^T \nabla^2 f(x^*) \, d + o(\alpha^2).$$

El miembro izquierdo es ≥ 0 para α pequeño, por ser x^* mínimo local. Dividiendo por $\alpha^2 > 0$,

$$0 \;\leq\; \frac{1}{2} \, d^T \nabla^2 f(x^*) \, d + \frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2},$$

y haciendo $\alpha \to 0$ el segundo sumando tiende a cero por la propia definición de $o(\alpha^2)$. Queda $d^T \nabla^2 f(x^*) \, d \geq 0$ para todo d, que es la definición de semidefinida positiva.

Lo que hay que llevarse a la cabeza. La primera parte se prueba mirando en las dos direcciones $\pm d$ y quedándose con las dos desigualdades; la segunda, dividiendo el desarrollo de Taylor por α^2 y usando que $o(\alpha^2)/\alpha^2 \to 0$. Y conviene recordar que la condición es *necesaria y no suficiente*: $f(x) = x^3$ en $x^* = 0$ tiene derivada y derivada segunda nulas y no es mínimo.

Qué buscaba: la parte conservada reúne tres resultados: el teorema fundamental (tema 3), la unimodularidad total (tema 5) y la condición necesaria de optimalidad sin restricciones (tema 6). Los dos primeros llevan una aplicación: representar un cono trasladado mediante su vértice y sus direcciones, y reconocer una matriz TU. En la tercera cuestión, las derivadas direccionales y Taylor explican la necesidad de las condiciones sin convertirlas en un criterio suficiente.

E.9 El banco histórico

Las siguientes pruebas proceden de los cursos 2014-15, 2016-17 y 2017-18. Se conservan sus enunciados impresos; las soluciones que siguen se desarrollan en este libro. Aparecen el teorema fundamental, Farkas y sus alternativas, unimodularidad total y cortes de Gomory. Algunas pruebas incluyen además un problema de símplex y sensibilidad con varios apartados; otras conservan únicamente teoría.

Conviene tener presente que algunos de estos exámenes incluyen apartados sobre **condiciones de Karush-Kuhn-Tucker** y sobre **multiplicadores de Lagrange**, es decir, optimización no lineal *con* restricciones. Es la materia del capítulo 7, y **todos** esos apartados están resueltos:

los que aparecen aquí se remiten a los ejercicios de ese capítulo, donde se hacen enteros y con su intuición.

Dos de las copias de 2018 — el examen parcial del grupo A y el de teoría — no llevan fecha, de modo que el orden dentro de ese año es aproximado.

E.9.1 Tercera convocatoria de 2018 (17 de diciembre)

FICHA. *3.ª convocatoria (2018).* Tres cuestiones de teoría y dos problemas. Los problemas se puntúan sobre 100: ejercicio 1, 30 puntos; ejercicio 2, 70.

Teoría

T1. Defina envolvente convexa, dirección de un poliedro, poliedro entero y conjunto de restricciones activas en un punto.
T2. Enuncie y demuestre el lema de Farkas. *Aplicación:* dada $A \in M_{n\times m}$, pruebe que uno y solo uno de los sistemas siguientes tiene solución: (a) $A^T y < 0$ con $y \in \mathbb{R}^n$; (b) $Ap = 0$, $p \geq 0$, $p \neq 0$, con $p \in \mathbb{R}^m$.
T3. Enuncie y demuestre el teorema fundamental de la programación lineal.

Resolución. Las definiciones de envolvente convexa y dirección están en las secciones 2.1 y 2.4; la de poliedro entero, en 5.2.1. Una restricción de desigualdad es activa en un punto si allí se cumple con igualdad; las igualdades siempre son activas (capítulo 7). Farkas se demuestra en 2.2 y en la sección E.1 de este apéndice; el teorema fundamental, en 3.2.

La aplicación de T2 es el **teorema de Gordan**. La dificultad es que Farkas solo entiende desigualdades *no estrictas* y Gordan pide una estricta, $A^T y < 0$. El truco, que está detallado en la sección 2.2, consiste en **añadir una variable**: se escribe $A^T y < 0$ como $A^T y + s\mathbf{1} \leqq 0$ con $s > 0$, es decir, como un sistema del tipo que Farkas sí sabe leer para la matriz ampliada $[A^T \mid \mathbf{1}]$ y el vector $c' = (0, \ldots, 0, 1)$. La otra alternativa da $Ap = 0$, $p \geq 0$, $\mathbf{1}^T p = 1$. Es equivalente a (b): la suma uno excluye el vector cero, y cualquier $p \geq 0$, $p \neq 0$, puede dividirse por su suma positiva para obtener esa normalización.

Ejercicio 1 (30 puntos): la cartera de préstamos

Un banco desarrolla una política de préstamos con una inversión máxima de 12 millones de euros durante un año. Los tipos disponibles, su tasa de interés y su porcentaje de deudas impagables son:

Tipo	Tasa de interés	% de deudas impagables
Personal	0,140	10
Automóvil	0,130	7
Vivienda	0,120	3
Agrícola	0,125	5
Comercial	0,100	2

Las deudas impagables son irrecuperables y no producen ingresos por intereses: en los préstamos personales el banco pierde el 10 % y recibe el 14 % de intereses sobre el 90 % restante. La competencia dicta asignar al menos el 40 % de los fondos a préstamos agrícolas y comerciales; los préstamos para vivienda deben ser al menos el 50 % del montante dedicado a

préstamos personales; y el banco limita la proporción total de deudas impagables sobre todos los préstamos a un máximo del 4 %. Todos los préstamos se emiten en bloque al principio del periodo.

(a) Plantee un problema de programación matemática para el máximo rendimiento neto (ingresos menos pérdidas). *(20 puntos)*

(b) Escriba la formulación en código AMPL. *(10 puntos)*

Resolución. Este problema está resuelto entero, con su modelo y su código, en el capítulo 1 (ejercicio «La cartera de préstamos de un banco», código en p. 22), y no se repite aquí. Los tres puntos que decidían el apartado (a) son estos, y conviene tenerlos presentes al intentarlo:

- El **rendimiento neto** de un euro prestado en el tipo i no es la tasa r_i: es $r_i(1-p_i)-p_i$, porque solo se cobran intereses sobre la fracción que sí se devuelve y además se pierde el principal de la fracción impagada. Confundirlo con r_i es el error caro del ejercicio.
- La restricción de impagados, «la proporción total de deudas impagables no pasa del 4 %», se escribe $\sum_i p_i x_i \le 0{,}04 \sum_i x_i$, que *parece* un cociente y no lo es: pasar el denominador multiplicando la deja lineal. Ese es el truco de siempre en las restricciones «de porcentaje».
- Lo mismo con «vivienda al menos el 50 % de personal», que es $x_3 \ge 0{,}5\, x_1$, y con «agrícola más comercial al menos el 40 % de los fondos», que es $x_4 + x_5 \ge 0{,}4 \sum_i x_i$.

Ejercicio 2 (70 puntos): símplex, dualidad, sensibilidad y un corte

Se considera

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeto a:} \quad & 6x_1 + 4x_2 \le 24 \\ & x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & -x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_2 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

(a) Resuelva gráficamente el problema. *(10)*

(b) La tabla siguiente es la asociada a la solución óptima; complétela. *(10)*

Max	5	4	0	0	0	0	
	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	h_4	$\bar{b}$
x_1	1	0	1/4	−1/2	0	0	—
x_2	0	1	−1/8	3/4	0	0	—
h_3	0	0	3/8	−5/4	1	0	—
h_4	0	0	1/8	−3/4	0	1	—
	—	—	—	—	—	—	—

(c) Escriba el dual e indique su solución óptima. *(10)*

(d) Calcule las soluciones óptimas si el objetivo pasa a ser Maximizar $z = 2x_2$. *(10)*

(e) Calcule las soluciones óptimas si se añade una variable $x_3 \ge 0$ con vector tecnológico $A_{x_3} = (1, 1, -1, 0)^T$ y beneficio unitario $c_{x_3} = 4$. *(10)*

(f) Si ambas variables deben ser enteras, determine el corte de Gomory correspondiente a la variable básica x_2 y realice un pivotaje dual; justifique la validez del corte. *(10)*

(g) Escriba las condiciones necesarias de primer orden de Karush-Kuhn-Tucker y compruebe si la solución óptima las verifica. *(10)*

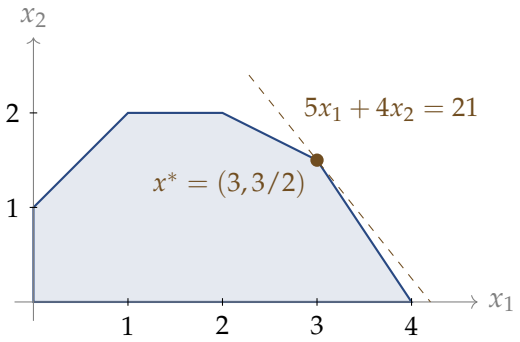
(a) Resolución gráfica. **Resolución.** La región factible es un polígono con seis vértices, que se obtienen cortando las rectas dos a dos y descartando los que no cumplen las demás restricciones:

$$(0,0),\quad (0,1),\quad (1,2),\quad (2,2),\quad (3,\tfrac{3}{2}),\quad (4,0),$$

con valores de $z = 5x_1 + 4x_2$ iguales a 0, 4, 13, 18, 21 y 20 respectivamente. El máximo se alcanza en

$$x^* = \left(3,\ \tfrac{3}{2}\right), \qquad z^* = 21,$$

que es el corte de las dos primeras restricciones: $6x_1 + 4x_2 = 24$ y $x_1 + 2x_2 = 6$. Las otras dos no están activas ($-3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} < 1$ y $\frac{3}{2} < 2$), lo que anticipa que sus holguras h_3 y h_4 serán básicas y sus precios sombra, nulos.



(b) Completar la tabla. **Resolución.** Falta el término independiente y la fila de costos reducidos. La base es $\{x_1, x_2, h_3, h_4\}$, y su inversa se lee en las columnas de h_1 y h_2 (las otras dos columnas de B^{-1} son las de h_3 y h_4, que forman parte de la base):

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/8 & 3/4 & 0 & 0 \\ 3/8 & -5/4 & 1 & 0 \\ 1/8 & -3/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = B^{-1}\begin{pmatrix} 24 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Coincide con el vértice del apartado (a), como tenía que ser.

Para los costos reducidos, con $c_B = (5,4,0,0)$,

$$w^T = c_B^T B^{-1} = \left(\tfrac{5}{4} - \tfrac{1}{2},\ -\tfrac{5}{2} + 3,\ 0,\ 0\right) = \left(\tfrac{3}{4},\ \tfrac{1}{2},\ 0,\ 0\right),$$

y como el problema es de *máximo*, la optimalidad es $c_j - z_j \le 0$:

	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	h_4	$\bar{b}$
x_1	1	0	1/4	−1/2	0	0	3
x_2	0	1	−1/8	3/4	0	0	3/2
h_3	0	0	3/8	−5/4	1	0	5/2
h_4	0	0	1/8	−3/4	0	1	1/2
$c - z$	0	0	−3/4	−1/2	0	0	21

Los dos costos reducidos no básicos son negativos, luego la tabla es óptima y la solución única.

(c) El dual. **Resolución.** Primal de máximo con restricciones $\leq$ y variables ≥ 0; el dual es de mínimo con variables ≥ 0 y restricciones $\geq$:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & 24w_1 + 6w_2 + w_3 + 2w_4 \\ \text{sujeto a:} & 6w_1 + w_2 - w_3 \;\geq\; 5 \\ & 4w_1 + 2w_2 + w_3 + w_4 \;\geq\; 4 \\ & w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0. \end{array}$$

Su solución óptima es la que ya se calculó, $w^* = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$, que también se lee en la tabla como los costos reducidos de las holguras cambiados de signo. Comprobación: $6 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 5$ (saturada) y $4 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 4$ (saturada), las dos con igualdad porque x_1^* y x_2^* son positivas; y el valor dual es $24 \cdot \frac{3}{4} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 18 + 3 = 21 = z^*$.

(d) Si el objetivo pasa a Maximizar $2x_2$. **Resolución.** Cambian los dos costos básicos: ahora $c_B = (0, 2, 0, 0)$, luego $w^T = c_B^T B^{-1} = \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, 0, 0\right)$ y

$$c_{h_1} - z_{h_1} = 0 - \left(-\tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{4} > 0.$$

En un problema de máximo eso rompe la optimalidad: entra h_1. Su columna es $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right)$, y el cociente mínimo entre las filas con coeficiente positivo es

$$\text{mín}\left\{\frac{3}{1/4}, \frac{5/2}{3/8}, \frac{1/2}{1/8}\right\} = \text{mín}\{12,\ \tfrac{20}{3},\ 4\} = 4,$$

alcanzado en la fila de h_4: sale h_4 y se llega al vértice $(2, 2)$, con $z = 4$.

Ahora bien, con el objetivo $2x_2$ la respuesta se ve mejor sin tablas: maximizar $2x_2$ es maximizar x_2, y la cuarta restricción impone $x_2 \leq 2$. Todo punto factible con $x_2 = 2$ es óptimo, y esos puntos forman el **segmento** que une $(1, 2)$ y $(2, 2)$:

$$\{(x_1, 2) :\ 1 \leq x_1 \leq 2\}, \qquad z^* = 4.$$

Los extremos salen de las otras restricciones: $-x_1 + 2 \leq 1$ da $x_1 \geq 1$, y $x_1 + 4 \leq 6$ da $x_1 \leq 2$ (la primera, $6x_1 + 8 \leq 24$, solo pide $x_1 \leq \frac{8}{3}$, y no llega a apretar). Se trata, por tanto, de un caso de óptimo múltiple con conjunto óptimo acotado.

(e) Una variable nueva. **Resolución.** Se vuelve a la tabla óptima del problema original y se aplica el criterio de la variable nueva (sección 4.4.3): basta calcular su columna y su costo reducido en la tabla actual, sin tocar nada más.

$$y_3 = B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 5/8 \\ -15/8 \\ -5/8 \end{pmatrix},$$

$$c_3 - z_3 = 4 - w^T A_{x_3} = 4 - \left(\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2} - 0\right) = 4 - \tfrac{5}{4} = \tfrac{11}{4} > 0.$$

Positivo en un problema de máximo: la variable nueva *sí* interesa y entra en la base. En su columna la única entrada positiva es $\frac{5}{8}$, en la fila de x_2, luego el cociente es $\frac{3/2}{5/8} = \frac{12}{5}$ y sale x_2.

Pivotando:

	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	h_4	x_3	$\bar{b}$
x_1	1	2/5	1/5	−1/5	0	0	0	18/5
x_3	0	8/5	−1/5	6/5	0	0	1	12/5
h_3	0	3	0	1	1	0	0	7
h_4	0	1	0	0	0	1	0	2
$c-z$	0	−22/5	−1/5	−19/5	0	0	0	138/5

Todos los costos reducidos son ≤ 0: óptima. La nueva solución es

$$x^* = \left(\tfrac{18}{5},\, 0,\, \tfrac{12}{5}\right), \qquad z^* = \tfrac{138}{5} = 27{,}6,$$

y se comprueba sobre el enunciado: $6 \cdot \frac{18}{5} + \frac{12}{5} = 24$; $\frac{18}{5} + \frac{12}{5} = 6$; $-\frac{18}{5} - \frac{12}{5} = -6 \leq 1; 0 \leq 2$.

(f) Un corte de Gomory sobre la fila de x_2. Resolución. *Validez.* El f-corte exige que todas las variables de la tabla sean enteras, holguras incluidas. Aquí lo son automáticamente: los coeficientes de las cuatro restricciones y sus términos independientes son enteros, de modo que $h_i = b_i - a^{i\,T}x$ es entero en cuanto lo sean x_1 y x_2. Con eso, el corte es válido bajo las nuevas condiciones.

El corte. La fila de x_2 es $(0, 1, -\frac{1}{8}, \frac{3}{4}, 0, 0 \mid \frac{3}{2})$, luego

$$f_2 = \tfrac{3}{2} - 1 = \tfrac{1}{2}, \qquad f_{2,h_1} = -\tfrac{1}{8} - (-1) = \tfrac{7}{8}, \qquad f_{2,h_2} = \tfrac{3}{4},$$

y con holgura $S \geq 0$,

$$S - \tfrac{7}{8}h_1 - \tfrac{3}{4}h_2 = -\tfrac{1}{2}.$$

El pivotaje dual. Sale S; los cocientes, tomados sobre los costos reducidos en valor absoluto, son

$$h_1 : \left|\frac{-3/4}{-7/8}\right| = \frac{6}{7}, \qquad h_2 : \left|\frac{-1/2}{-3/4}\right| = \frac{2}{3},$$

y el mínimo es $\frac{2}{3}$: entra h_2. Pivotando sobre $-\frac{3}{4}$:

	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	h_4	S	$\bar{b}$
x_1	1	0	5/6	0	0	0	−2/3	10/3
x_2	0	1	−1	0	0	0	1	1
h_3	0	0	11/6	0	1	0	−5/3	10/3
h_4	0	0	1	0	0	1	−1	1
h_2	0	0	7/6	1	0	0	−4/3	2/3
$c-z$	0	0	−1/6	0	0	0	−2/3	62/3

La tabla vuelve a ser óptima del relajado, con $z = \frac{62}{3} \approx 20{,}67$ y $x = \left(\frac{10}{3}, 1\right)$. **Sigue sin ser entera**; el enunciado solo pedía realizar un corte y un pivotaje. Para certificar el óptimo entero podemos usar además que los valores de su objetivo son enteros.

Cuál es el óptimo entero, para tener la referencia. Con $x_2 \in \{0, 1, 2\}$ y las cuatro restricciones, el mejor punto entero es $(4, 0)$ con $z = 20$: para $x_2 = 1$ el mejor es $(3, 1)$ con $z = 19$, y para $x_2 = 2$ el mejor es $(2, 2)$ con $z = 18$. Obsérvese la cadena de cotas, $21 > \frac{62}{3} > 20$: el relajado da 21, el relajado con un corte da 20,67, y el óptimo entero es 20. Aunque el óptimo del relajado cortado sigue siendo fraccionario, la cota se puede redondear hacia abajo: $z \leq \lfloor 62/3 \rfloor = 20$ para toda solución entera. Junto al punto factible $(4, 0)$, esto certifica el óptimo entero sin necesidad de otro corte.

(g) Karush-Kuhn-Tucker. Este apartado pertenece a la optimización no lineal *con* restricciones, que es el capítulo 7. Está resuelto en el ejercicio de la p. 442, donde se comprueba que este óptimo del símplex satisface las condiciones.

Qué buscaba: el problema grande conecta siete apartados. Los seis primeros piden resolverlo gráficamente, rellenar la tabla leyendo B^{-1} en las holguras, escribir el dual, cambiar el objetivo, añadir una variable y cortar. Los tres sitios donde se ganaban puntos: en (b), darse cuenta de que B^{-1} ya está en la tabla y no hay que invertir nada; en (d), ver sin pivotar que maximizar $2x_2$ tiene por óptimo todo un segmento; y en (f), justificar la validez del corte comprobando que las holguras son enteras, como pide el enunciado. El séptimo apartado enlaza la solución con KKT.

E.9.2 Examen parcial del grupo A, 2018

FICHA. *Examen parcial, grupo A, 2018.* Teoría sobre 10 puntos (cuestiones de 5, 2 y 3) y problemas sobre 10 (de 3 y 7).

Teoría

C1 [5 pt]. Enunciar y probar el lema de Farkas. *Aplicación:* siendo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times l}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, probar que solo uno de estos sistemas tiene solución: (1) $Ax + By = b$, $x \geq 0$, con $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^l$; (2) $u^T A \leq 0$, $u^T B = 0$, $u^T b > 0$, con $u \in \mathbb{R}^m$.
C2 [2 pt]. Sean $k_i \geq 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y $u \in \mathbb{Z}_+^{n\times n}$. Justificar que el conjunto poliédrico

$$\sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \geq 1 \;\; (i = 1, \ldots, n), \qquad 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \;\; \forall i, j$$

tiene todos sus vértices enteros. Se entiende $k_i \in \{1, \ldots, n\}$, para que los índices de la suma estén definidos con la matriz u dada.
C3 [3 pt]. Describir y justificar el corte fraccional de Gomory para los problemas de programación lineal entera pura.

Resolución. *C1.* El lema está en la sección 2.2 y desarrollado en E.1. La aplicación **está resuelta entera en el capítulo 2**, en el ejercicio «Farkas con variables libres y no negativas a la vez». En una frase: se desdobla la variable libre, $y = y^+ - y^-$ con $y^\pm \geq 0$, de modo que el sistema (1) se convierte en $Mz = b$, $z \geq 0$, con $M = [A \mid B \mid -B]$; se aplica Farkas a M, y el otro sistema, $u^T M \leq 0$, $u^T b > 0$, se lee bloque a bloque como $u^T A \leq 0$, $u^T B \leq 0$ y $-u^T B \leq 0$, es decir, $u^T B = 0$. **Las dos desigualdades opuestas producen la igualdad**: ese es todo el mecanismo, y es el mismo que convierte una variable libre en una restricción de igualdad dual.

C2. El conjunto es poliédrico y, por Hoffman-Kruskal (sección 5.2.1), basta ver que su matriz de restricciones es totalmente unimodular y que los términos independientes son enteros. Lo segundo es inmediato: son 1 y las u_{ij}, que son enteras por hipótesis.

Y lo primero es más fácil de lo que parece si se mira bien la matriz. La variable x_{ij} aparece, si $j \leq k_i$, únicamente en la i-ésima restricción de suma, con coeficiente 1; si $j > k_i$, no aparece en ninguna. La matriz de esas n filas tiene **a lo sumo un elemento no nulo por columna**. Una matriz así siempre es TU, y se ve directamente: tómese una submatriz cuadrada cualquiera; si alguna de sus columnas es nula, su determinante es 0; y si no, cada columna tiene un único 1, de modo que o bien dos columnas lo tienen en la misma fila — y el determinante vuelve a ser

0 por tener dos columnas iguales — o bien es una matriz de permutación y su determinante es ± 1.

Las cotas $x_{ij} \le u_{ij}$ añaden filas de la identidad, y añadir filas de la identidad conserva la unimodularidad total (sección 5.2.1). Cambiar de signo las filas de las sumas para escribirlas con $\le$ también la conserva. Luego la matriz completa es TU y el poliedro es entero.

C3. El corte fraccional está descrito y justificado en la sección 5.4.1. Obsérvese que esta cuestión pide el **f-corte** (problemas enteros *puros*), mientras que mayo de 2026 y el parcial B de 24-25 piden el mixto: son dos resultados distintos, y el f-corte exige que *todas* las variables, holguras incluidas, sean enteras.

Problema 1 [3 pt]: el disco menor que contiene a otros

Se considera un conjunto de discos en el plano con centros (a_i, b_i) y radios r_i, $i = 1, \dots, n$. Formule como un problema de optimización convexa diferenciable el de determinar el disco de menor radio que los contiene a todos.

(a) Indique variables de decisión, objetivo y restricciones.
(b) Demuestre que el problema siempre tiene solución óptima.
(c) Justifique que se trata de un problema convexo diferenciable.
(d) Describa brevemente cómo resolvería el problema usando AMPL en la plataforma NEOS.

Resolución. *(a) La condición geométrica, primero.* Un disco de centro $p = (x, y)$ y radio R contiene al disco de centro $c_i = (a_i, b_i)$ y radio r_i **si y solo si**

$$\|p - c_i\| \;\le\; R - r_i,$$

es decir, si la distancia entre los centros más el radio pequeño no pasa del radio grande. Se ve en un dibujo: el punto del disco pequeño más alejado de p está a distancia $\|p - c_i\| + r_i$, y hay que exigir que siga dentro. De ahí el modelo:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & R \\ \text{sujeto a:} \quad & \sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2} \;\le\; R - r_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ & x, y \in \mathbb{R}, \quad R \ge 0, \end{aligned}$$

con variables de decisión x, y y R.

(b) Existencia de óptimo. El conjunto factible es no vacío: tómese cualquier centro p y R suficientemente grande. Es cerrado, por ser intersección de conjuntos definidos por desigualdades no estrictas entre funciones continuas. Y aunque no es acotado (siempre se puede agrandar R), el problema se puede restringir a un compacto sin cambiar el óptimo: fijado un punto factible (x^0, y^0, R^0), todo punto mejor cumple $R \le R^0$, y entonces $\|p - c_1\| \le R^0 - r_1$ acota también a (x, y). La intersección del conjunto factible con ese compacto es compacta y no vacía, y la función objetivo R es continua. Por el teorema de Weierstrass — una función continua sobre un compacto no vacío de $\mathbb{R}^n$ alcanza en él su máximo y su mínimo; sección 6.1.2, y apéndice F — se alcanza el mínimo. Conviene fijarse en que el trabajo del apartado no está en el teorema, sino en fabricar el compacto: el conjunto factible tal cual no lo es.

(c) Convexidad y diferenciabilidad. El objetivo, R, es lineal. Y cada restricción se escribe como $g_i(x, y, R) \le 0$ con

$$g_i(x, y, R) = \|p - c_i\| + r_i - R,$$

que es **convexa** por ser suma de una norma — convexa, por la desigualdad triangular — compuesta con una aplicación afín, más una función afín. Luego el conjunto factible es convexo y el problema es de optimización convexa.

La norma no es diferenciable cuando $p = c_i$. Tener varios discos no elimina este caso: si uno contiene todos los demás, el centro óptimo es precisamente el suyo. Elevar al cuadrado y añadir $R \geq r_i$ conserva el conjunto factible,

$$\|p - c_i\|^2 \leq (R - r_i)^2, \qquad R \geq r_i,$$

pero la función $\|p - c_i\|^2 - (R - r_i)^2$ no es convexa. Esa escritura tiene datos suaves y conjunto factible convexo; no representa las restricciones mediante funciones convexas.

Una formulación convexa y diferenciable. Primero se comprueba si alguno de los discos dados contiene todos: basta probar $\|c_i - c_j\| + r_j \leq r_i$ para todo j. Si ocurre, ese disco ya es óptimo, pues cualquier disco que lo contenga debe tener radio al menos r_i.

En caso contrario, todo disco factible tiene $R > r_{\text{máx}} = \text{máx}_i\, r_i$. En efecto, si $R = r_{\text{máx}}$, al contener un disco de radio máximo tendría que coincidir con él, contradiciendo que ninguno contiene todos. En el dominio abierto $R > r_{\text{máx}}$ se puede escribir el mismo problema como

$$\text{Minimizar } R \quad \text{sujeto a:} \quad \frac{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}{R - r_i} - (R - r_i) \leq 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Las restricciones son suaves porque sus denominadores son positivos. También son convexas: para $q \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$ y una dirección (u, s), la segunda derivada de $\|q\|^2/t$ en esa dirección es

$$\frac{2}{t}\left\|u - \frac{s}{t}q\right\|^2 \geq 0.$$

Restar el término afín t conserva la convexidad. Esta formulación satisface las dos propiedades pedidas y conserva el óptimo cuya existencia se probó en (b).

(d) Con AMPL y NEOS. Para calcular, una formulación cónica evita dividir por una diferencia de radios pequeña y cubre también el caso de contención. Se introducen $d_{xi} = x - a_i$, $d_{yi} = y - b_i$ y $t_i = R - r_i \geq 0$, y se exige $d_{xi}^2 + d_{yi}^2 \leq t_i^2$. Es la misma condición geométrica del apartado (a).

```
set I;
param a {I};
param b {I};
param r {I} >= 0;

var x;
var y;
var R >= 0;
var dx {I};
var dy {I};
var t {I} >= 0;

minimize radio: R;
s.t. diferencia_x {i in I}: dx[i] = x - a[i];
s.t. diferencia_y {i in I}: dy[i] = y - b[i];
s.t. diferencia_radio {i in I}: t[i] = R - r[i];
s.t. cubre {i in I}: dx[i]^2 + dy[i]^2 <= t[i]^2;
```

Los datos van en otro fichero, con los índices, centros y radios. En NEOS se elige un solver que admita programación cónica de segundo orden y entrada AMPL, y se cargan modelo y datos en sus campos correspondientes; el fichero de órdenes contiene `solve;` y `display solve_result, x, y, R;`. La lista oficial incluye CPLEX y MOSEK en esta categoría.[3] Esta representación auxiliar se ha comprobado localmente con CPLEX 22.2.0; su uso se explica en el apéndice G, p. 616. La condición $t_i \geq 0$ es esencial: al cuadrar sin ella se permitirían radios demasiado pequeños.

Problema 2 [7 pt]: un problema con tres parámetros

Considere

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{aligned} &\text{Maximizar} && a\,x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \\ &\text{sujeto a:} && x_1 + x_3 - x_4 - x_5 = 1 \\ & && x_2 + b\,x_3 + 2x_4 - x_5 = c \\ & && x_1, \ldots, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

(a) Determine los valores de a, b y c para los que la base $\{x_1, x_2\}$ define una solución óptima única.
(b) Si c incumple esas condiciones pero a y b sí las cumplen, encuentre una solución óptima.
(c) Si $c > 0$, ¿qué condición suficiente sobre a hace que (P) sea ilimitado?
(d) En esas condiciones, formule el dual y demuestre que es infactible.
(e) En la variante de los signos que se desarrolla abajo, para $a = -2$, $b = 1$, $c = 1$, resuelva (P) con la restricción adicional $2x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$.
(f) Obtenga el vector de precios sombra de la tabla óptima del apartado anterior.

Observación (lectura de los signos en (e))**.** En el escaneado se lee $a = 2$ y no se distingue el signo que precede a x_3 en la restricción adicional. No puede deducirse que ambos sean signos menos a partir del apartado (a): el apartado (e) puede usar otros parámetros. Se conserva y resuelve la variante $a = -2$, $2x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$, pero no se atribuye esa lectura al original con certeza. Al final del apartado se indica cómo cambian los resultados bajo las otras lecturas.

(a) Cuándo $\{x_1, x_2\}$ es óptima y única. **Resolución.** Las columnas de x_1 y x_2 son e_1 y e_2, de modo que $B = I$, $B^{-1} = I$ y $\bar{b} = b = (1, c)^T$. Eso da ya la primera condición:

$$\text{factibilidad:} \qquad c \geq 0.$$

Para la optimalidad, con $c_B = (a, 1)$ y el convenio de máximo ($c_j - z_j \leq 0$):

j	$c_j - z_j$	condición
x_3 $(a_3 = (1, b))$	$-1 - (a + b)$	$a + b \geq -1$
x_4 $(a_4 = (-1, 2))$	$2 - (-a + 2) = a$	$a \leq 0$
x_5 $(a_5 = (-1, -1))$	$0 - (-a - 1) = a + 1$	$a \leq -1$

La tercera implica la segunda. Si $c > 0$, las dos básicas son positivas y cualquier variable no básica puede aumentar una cantidad pequeña. Por tanto, un costo reducido positivo

[3] NEOS Server, *Solvers*, categoría Second Order Conic Programming: `https://neos-server.org/neos/solvers/index.html`.

permitiría mejorar, y uno nulo produciría otra solución óptima. En este caso la unicidad equivale a

$$\boxed{c > 0, \qquad a < -1, \qquad a + b > -1}.$$

Estas condiciones implican $b > -1 - a > 0$.

El borde $c = 0$ requiere otro argumento. El punto representado es $x^* = (1, 0, 0, 0, 0)$ y la base es degenerada; una variable con costo reducido nulo puede no admitir un paso positivo. Más aún, una base degenerada puede representar un punto óptimo sin tener todos sus costos reducidos con el signo de optimalidad.

La dirección $(1, 1, 0, 0, 1)$ es factible desde x^* y cambia el objetivo en $a + 1$; la unicidad exige $a < -1$. Si además $b \leq 0$, los puntos $(1 - t, -bt, t, 0, 0)$, para $0 < t < 1$, son factibles y mejoran el objetivo en $(-1 - a - b)t > 0$. Por ello también es necesario $b > 0$.

Con $c = 0$, las ecuaciones permiten eliminar x_1 y x_5:

$$\begin{aligned} x_5 &= x_2 + bx_3 + 2x_4, \\ x_1 &= 1 + x_2 + (b-1)x_3 + 3x_4, \\ z &= a + (a+1)x_2 + \big(a(b-1) - 1\big)x_3 + (3a+2)x_4. \end{aligned}$$

Si $a < -1$, los coeficientes de x_2 y x_4 son negativos. El punto es óptimo único exactamente cuando el de x_3 también lo es: si fuese positivo, aumentar x_3 un poco mejoraría; si fuese cero, daría otras soluciones óptimas. Así,

$$\boxed{c = 0, \qquad a < -1, \qquad b > 1 + \frac{1}{a}}.$$

La última cota ya es positiva. Bajo estas condiciones, la expresión de z prueba que cualquier solución distinta de x^* tiene un valor menor. Para $c < 0$, la base $\{x_1, x_2\}$ no representa una solución factible. Estos tres casos completan la respuesta solicitada.

(b) Si falla c. **Resolución.** Sea $c < 0$ y supongamos que a, b cumplen las condiciones del caso $c > 0$ de (a). Entonces $\bar{b} = (1, c)$ tiene una componente negativa: la base es **primal infactible** pero sigue siendo **dual factible**. Es el escenario del símplex dual. La solución obtenida a continuación también vale bajo el rango más amplio del caso $c = 0$, como comprueban sus costos reducidos.

Sale x_2, la fila negativa. En esa fila los coeficientes no básicos son $b > 0$ (columna x_3), 2 (columna x_4) y -1 (columna x_5): la única negativa es la de x_5, así que no hay elección y **entra** x_5. La nueva base es $\{x_1, x_5\}$, con

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = B^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - c \\ -c \end{pmatrix},$$

que es ≥ 0 porque $c < 0$. La solución óptima es

$$x^* = (1 - c,\ 0,\ 0,\ 0,\ -c), \qquad z^* = a\,(1 - c).$$

Comprobación de que es óptima. Con $c_B = (a, 0)$ se tiene $w^T = c_B^T B^{-1} = (a, -a)$ y

$$c_2 - z_2 = 1 - (-a) = 1 + a \leq 0, \qquad c_4 - z_4 = 2 - (-a - 2a) = 2 + 3a \leq 0,$$

$$c_3 - z_3 = -1 - a(1-b),$$

las dos primeras por ser $a < -1$. La tercera es negativa si $b > 1 + 1/a$, pues $a(b-1) < 1$. Esta cota se cumple en ambos casos de (a): para $a < -1$ se tiene

$$(-1-a) - \left(1 + \frac{1}{a}\right) = -\frac{(a+1)^2}{a} > 0.$$

Queda comprobada la optimalidad también cuando se usan los parámetros del borde degenerado. En ese caso se comprueba la base final directamente, sin afirmar que la tabla inicial cumplía el requisito de signos del símplex dual.

(c) Cuándo es ilimitado. **Resolución.** Con $c > 0$ la base $\{x_1, x_2\}$ es factible, y el costo reducido de x_5 vale $a + 1$. Si

$$\boxed{a > -1}$$

ese costo reducido es *positivo*, luego en un problema de máximo interesa hacer entrar x_5. Y su columna es $a_5 = (-1, -1)^T$, con **las dos componentes negativas**: no hay test del cociente, se puede aumentar x_5 indefinidamente. Explícitamente, la semirrecta

$$x(\theta) = (1+\theta,\ c+\theta,\ 0,\ 0,\ \theta), \qquad \theta \geq 0,$$

es factible para todo θ y sobre ella $z = a(1+\theta) + c + \theta = (a+1)\theta + a + c \to +\infty$. El problema es ilimitado.

(d) El dual, y su infactibilidad. **Resolución.** El primal está en forma estándar con restricciones de igualdad, luego las variables duales son libres y las restricciones duales son $\geq$ (por ser el primal de máximo con $x \geq 0$, el dual es de mínimo):

$$\begin{array}{lll} \text{Minimizar} & w_1 + c\,w_2 & \\ \text{sujeto a:} & w_1 \geq a & (x_1) \\ & w_2 \geq 1 & (x_2) \\ & w_1 + b\,w_2 \geq -1 & (x_3) \\ & -w_1 + 2w_2 \geq 2 & (x_4) \\ & -w_1 - w_2 \geq 0 & (x_5) \\ & w_1, w_2 \text{ libres.} & \end{array}$$

Es infactible. Basta con tres de las cinco restricciones. La quinta dice $w_1 + w_2 \leq 0$; la primera, $w_1 \geq a$; la segunda, $w_2 \geq 1$. Sumando las dos últimas,

$$w_1 + w_2 \ \geq\ a + 1 \ >\ 0$$

en las condiciones del apartado (c), donde $a > -1$. Y eso contradice $w_1 + w_2 \leq 0$. No hay ningún w factible.

La dualidad fuerte de programación lineal también permite concluirlo: si el primal tuviera óptimo finito, existiría una solución dual óptima. Como el dual es infactible y en (c) se exhibió un punto primal factible, el primal es ilimitado. La dualidad débil, por sí sola, no da esta implicación.

(e) Con $a=-2$, $b=1$, $c=1$ y una restricción más. Resolución. El problema es

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & -2x_1+x_2-x_3+2x_4 \\ \text{sujeto a:} & x_1+x_3-x_4-x_5=1 \\ & x_2+x_3+2x_4-x_5=1 \\ & 2x_1+x_2-x_3+h=2, \qquad h\ge 0 \\ & x\ge 0. \end{array}$$

Obsérvese antes de calcular que estos valores caen *justo en el borde* de las condiciones del apartado (a): $c=1\ge 0$ y $a=-2<-1$, pero $a+b=-1$, no >-1. La base $\{x_1,x_2\}$ es por tanto óptima en el problema *sin* la restricción nueva, pero con óptimos múltiples.

Resolviendo con la restricción añadida, la base óptima resulta ser $\{x_1,x_2,x_3\}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	h	$\bar b$
x_1	1	0	0	-1	$-1/4$	$1/4$	$3/4$
x_2	0	1	0	2	$-1/4$	$1/4$	$3/4$
x_3	0	0	1	0	$-3/4$	$-1/4$	$1/4$
$c-z$	0	0	0	-2	-1	0	-1

Todos los costos reducidos son ≤ 0: óptima, con

$$x^*=\left(\tfrac{3}{4},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{1}{4},\ 0,\ 0\right), \qquad z^*=-1.$$

Y hay óptimos múltiples. La holgura h es no básica con costo reducido 0; haciéndola entrar se llega al otro vértice óptimo,

$$\hat x=(0,\,0,\,1,\,0,\,0), \qquad h=3, \qquad z=-1,$$

que se comprueba de un vistazo sobre el enunciado ($0+1-0-0=1$; $0+1+0-0=1$; $0+0-1=-1\le 2$). Todo el segmento entre los dos puntos es óptimo.

Otras lecturas del escaneado. Si se mantiene $a=-2$ pero se toma $2x_1+x_2+x_3\le 2$, el valor óptimo sigue siendo -1, y el segmento óptimo es $\{(1-t,1-t,t,0,0) : 1/2\le t\le 1\}$. No coincide con la variante desarrollada, que permite $1/4\le t\le 1$.

Si se toma literalmente $a=2$ y la restricción lleva $-x_3$, el problema es ilimitado: desde $(3/4,3/4,1/4,0,0)$ se puede sumar cualquier múltiplo no negativo de $(3,0,6,1,8)$; las restricciones se conservan y el objetivo aumenta en 2 por unidad de paso. Con $a=2$ y $+x_3$, en cambio, el óptimo es $(3/4,0,1/2,1/4,0)$, de valor $3/2$. Se certifica con el vector dual $(-3,-1/2,5/2)$, factible y con el mismo valor. Sus dos holguras positivas fuerzan $x_2=x_5=0$, y el tercer multiplicador positivo hace activa la restricción nueva. Las tres ecuaciones activas determinan entonces ese único punto. La ambigüedad de los signos cambia el problema y no puede resolverse solo por coherencia.

(f) Precios sombra. Resolución. La inversa de la base $\{x_1,x_2,x_3\}$ se lee en las columnas de las variables cuya columna original es un vector de la identidad; aquí solo lo es la de la holgura h (tercera columna de B^{-1}), pero las otras dos se recuperan de la propia tabla:

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

Con $c_B = (c_1, c_2, c_3) = (-2, 1, -1)$ resulta

$$w^* = c_B^T B^{-1} = (-2,\ 1,\ 0).$$

La lectura: aumentar en una unidad el término independiente de la primera restricción *empeora* el máximo en 2; hacerlo en la segunda lo mejora en 1; y la tercera tiene precio sombra nulo. Que la tercera valga cero es coherente con lo que se acaba de ver en (e): su holgura h tiene costo reducido nulo y el problema tiene óptimos múltiples, uno de los cuales deja esa restricción con holgura 3.

Qué buscaba: el examen más paramétrico de la serie. En teoría, Farkas con variables libres — donde el mecanismo entero es «dos desigualdades opuestas hacen una igualdad» — y una unimodularidad total que se resuelve sin cuentas: la matriz tiene un solo elemento no nulo por columna. En el problema 2, los primeros cuatro apartados parten de la base $\{x_1, x_2\}$, que es la identidad, de modo que todo se lee sin invertir nada: la factibilidad es $c \geq 0$; para $c > 0$, los costos reducidos deciden la optimalidad, mientras que el borde $c = 0$ exige estudiar las direcciones factibles. Si $c < 0$, se repara la factibilidad con símplex dual bajo las condiciones de signos indicadas en (b). La condición $a > -1$ produce una columna enteramente negativa, que es el certificado de ilimitación y a la vez la demostración de que el dual es infactible.

E.9.3 Prueba de evaluación continua, 4 de junio de 2018

FICHA. *Prueba EC (4-6-2018).* Dos ejercicios sobre 100 puntos: el primero, 25; el segundo, 75, repartidos en siete apartados.

Ejercicio 1 (25 puntos): reparto de mercancías en vehículos

Deben repartirse seis pedidos en cinco camiones distintos, pero no todos los pedidos son compatibles con todos los camiones. La tabla codifica las compatibilidades y el coste del viaje de cada camión:

Pedido	1	2	3	4	5
1	1			1	
2	1	1			
3		1			1
4	1		1		
5			1		1
6				1	1
Coste por viaje	5	3	4	1	4

Se desea un plan de viajes que atienda todos los pedidos de una sola vez a coste mínimo.

(a) Formule el problema. *(10)*
(b) ¿Es totalmente unimodular la matriz de coeficientes A? *(5)*
(c) Escriba un modelo AMPL que generalice el problema a n pedidos y m camiones, y un fichero de datos para este caso concreto. *(10)*

(a) La formulación. Resolución. Lo único que se decide es *qué camiones salen*; una vez elegido el conjunto de camiones, cada pedido se asigna a cualquiera de los suyos que esté en marcha,

sin coste adicional. Por eso hay una sola familia de variables, indexada por camiones y no por pares:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si el camión } j \text{ realiza su viaje,} \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, 5.$$

Llamando $C_i \subseteq \{1, \ldots, 5\}$ al conjunto de camiones compatibles con el pedido i y c_j al coste del viaje del camión j,

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_{j=1}^{5} c_j\, y_j \\ \text{sujeto a:} \quad & \sum_{j \in C_i} y_j \;\geq\; 1, \quad i = 1, \ldots, 6, \\ & y_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \ldots, 5. \end{aligned}$$

Es un problema de **recubrimiento** (*set covering*) en su forma más pura: cada pedido es un elemento que hay que cubrir y cada camión es un subconjunto con un precio.

El óptimo. Con los datos de la tabla el mínimo es 8 y se alcanza únicamente en $y^* = (0, 1, 1, 1, 0)$: salen los camiones 2, 3 y 4, con costes $3 + 4 + 1$. Se comprueba pedido a pedido: el 1 y el 6 los cubre el camión 4; el 2 y el 3, el camión 2; el 4 y el 5, el camión 3. Para demostrar el mínimo y la unicidad, basta separar dos casos. Si salen los camiones 1 y 5, ya se pagan $5 + 4 = 9$. Si falta cualquiera de ellos, las compatibilidades obligan a que salgan los tres camiones 2, 3 y 4, que cuestan 8. Como los demás costes son positivos, solo esa selección alcanza 8.

(b) ¿Es A totalmente unimodular? **Resolución.** Sí. La observación que lo resuelve es que **cada fila** de A tiene exactamente dos unos, porque cada pedido es compatible con exactamente dos camiones. Trasponer no cambia el carácter TU, así que se puede aplicar el criterio de los dos elementos no nulos a A^T, cuyas *columnas* tienen dos unos del mismo signo. Hace falta, entonces, una partición de los cinco camiones en dos bloques tal que los dos camiones de cada pedido queden separados.

Dicho en el lenguaje que hace transparente el problema: constrúyase el grafo cuyos vértices son los camiones y cuyas aristas son los pedidos, uniendo los dos camiones compatibles con cada uno. Las aristas son

$$\{1,4\},\ \{1,2\},\ \{2,5\},\ \{1,3\},\ \{3,5\},\ \{4,5\}.$$

La partición pedida es exactamente un **coloreado con dos colores**, y existe:

$$Q_1 = \{1,\ 5\}, \qquad Q_2 = \{2,\ 3,\ 4\}.$$

Se comprueba arista a arista: 1–4, 1–2 y 1–3 separan Q_1 de Q_2; y 2–5, 3–5 y 4–5 también. El grafo es bipartito, no tiene ciclos impares, y por tanto A es totalmente unimodular.

Consecuencia práctica, que es lo que da valor al apartado. Como A es TU y los términos independientes y cotas $0 \leq y_j \leq 1$ son enteros, el poliedro del relajado es entero por Hoffman-Kruskal: añadir las filas de las cotas y cambiar de signo las de cobertura conserva la propiedad TU. Por ello, **un óptimo básico obtenido por símplex es** 0-1, sin necesidad de ramificar ni cortar. Ese es el motivo de que la pregunta esté ahí y no es una curiosidad: cambia por completo el coste de resolver el problema.

(c) El modelo en AMPL. Resolución.

```
set PEDIDOS;
set CAMIONES;

param compat {PEDIDOS, CAMIONES} binary default 0;
param coste {CAMIONES} >= 0;

var y {CAMIONES} binary;

minimize coste_total:
   sum {j in CAMIONES} coste[j] * y[j];

subject to cubrir {i in PEDIDOS}:
   sum {j in CAMIONES: compat[i,j] = 1} y[j] >= 1;
```

Y el fichero de datos para este caso:

```
set PEDIDOS := 1 2 3 4 5 6;
set CAMIONES := 1 2 3 4 5;

param coste := 1 5  2 3  3 4  4 1  5 4;

param compat : 1 2 3 4 5 :=
   1   1 0 0 1 0
   2   1 1 0 0 0
   3   0 1 0 0 1
   4   1 0 1 0 0
   5   0 0 1 0 1
   6   0 0 0 1 1 ;
```

Obsérvese el uso de la condición dentro del índice, `{j in CAMIONES: compat[i,j] = 1}`, que es la manera limpia de escribir «los camiones compatibles con el pedido i» sin construir el conjunto a mano. Está explicada en el apéndice G.

Ejercicio 2 (75 puntos)

Se considera

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && 2x_1 + x_2 - x_3 \\ &\text{sujeto a:} && x_1 + 2x_2 + x_3 \le \tfrac{17}{2} \\ &&& -x_1 + x_2 - 2x_3 \le \tfrac{9}{2} \\ &&& x_1, x_2, x_3 \ge 0, \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	$\bar{b}$
x_1	1	2	1	1	0	17/2
h_2	0	3	−1	1	1	13
$z-c$	0	3	3	2	0	17

(a) Escriba el dual e indique su solución óptima. *(10)*
(b) Calcule la solución óptima si el objetivo pasa a Maximizar $2x_1 + 5x_2 - x_3$. *(10)*
(c) Calcule la solución óptima si el vector de recursos pasa a $(5, -7)$. *(10)*
(d) Calcule la solución óptima si se quita la segunda restricción. *(10)*
(e) Calcule la solución óptima si se exige que x_1 sea entera, usando el m-corte mejorado (m^*). *(10)*
(f) Se exige ahora que x_1, x_2, x_3 sean enteras. En el árbol de ramificación y acotación incompleto (nodo 0 ramificado en dos hijos; el nodo 1 ramificado en $x_2 \le 0$ y $x_2 \ge 1$, que dan los nodos terminales $(8, 0, 0)$ con $z = 16$ y $(13/2, 1, 0)$ con $z = 14$), calcule la solución óptima del nodo 1, determine qué nodos son terminales e indique la conclusión. *(15)*

(g) Escriba las condiciones necesarias de primer orden de Karush-Kuhn-Tucker y compruebe si la solución óptima las verifica. *(10)*

Lectura de la tabla. La base es $\{x_1, h_2\}$, con $\bar{b} = (17/2, 13)$, y la última fila es $z_j - c_j \geq 0$, que es el criterio de optimalidad en un problema de máximo. La solución óptima es

$$x^* = \left(\tfrac{17}{2},\ 0,\ 0\right), \qquad h_2^* = 13, \qquad z^* = 17,$$

y la primera restricción está activa mientras la segunda tiene holgura 13.

(a) El dual. Resolución.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \tfrac{17}{2}w_1 + \tfrac{9}{2}w_2 \\ \text{sujeto a:} & w_1 - w_2 \ \geq\ 2 \\ & 2w_1 + w_2 \ \geq\ 1 \\ & w_1 - 2w_2 \ \geq\ -1 \\ & w_1, w_2 \geq 0. \end{array}$$

Su solución óptima se lee en la tabla: w_i es el valor de la casilla $z_j - c_j$ de la holgura h_i, luego

$$w^* = (2,\ 0),$$

con valor $\frac{17}{2} \cdot 2 = 17 = z^*$. Es coherente con la holgura complementaria: $w_2^* = 0$ porque la segunda restricción no está activa, y la primera restricción dual está saturada ($2 - 0 = 2$) porque $x_1^* > 0$.

(b) Nuevo objetivo. Resolución. Cambia el costo de la variable *no básica* x_2, de 1 a 5, luego solo cambia su propia casilla: $z_2 - c_2$ pasa de 3 a $3 - 4 = -1 < 0$, y la tabla deja de ser óptima. Entra x_2; su columna es $(2, 3)$, con cocientes $\frac{17/2}{2} = \frac{17}{4}$ y $\frac{13}{3}$. El mínimo es $\frac{17}{4}$: sale x_1.

	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	$\bar{b}$
x_2	$1/2$	1	$1/2$	$1/2$	0	$17/4$
h_2	$-3/2$	0	$-5/2$	$-1/2$	1	$1/4$
$z - c$	$1/2$	0	$7/2$	$5/2$	0	$85/4$

$$x^* = \left(0,\ \tfrac{17}{4},\ 0\right), \qquad z^* = \tfrac{85}{4} = 21{,}25.$$

(c) Nuevo vector de recursos. Resolución. B^{-1} se lee en las columnas de las holguras: $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Con $b = (5, -7)$,

$$\bar{b} = B^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La segunda componente es negativa: primal infactible, dual factible. Símplex dual. Sale h_2; en su fila la única columna no básica con coeficiente negativo es la de x_3 (-1), luego entra x_3 sin necesidad de comparar cocientes. Pivotando:

$$x^* = (3,\ 0,\ 2), \qquad z^* = 2 \cdot 3 - 2 = 4,$$

que se comprueba: $3 + 0 + 2 = 5 \leq 5$ y $-3 + 0 - 4 = -7 \leq -7$, las dos saturadas.

(d) Quitar la segunda restricción. Resolución. No cambia nada:

$$x^* = \left(\tfrac{17}{2},\ 0,\ 0\right), \qquad z^* = 17.$$

El multiplicador dual de la segunda restricción es cero, de modo que el certificado dual $(2, 0)$ sigue proporcionando la misma cota al eliminarla. Directamente, usando solo la primera restricción y $x \geq 0$,

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 2(x_1 + 2x_2 + x_3) \leq 17.$$

El punto anterior alcanza 17 y sigue siendo factible; por eso conserva la optimalidad.

(e) El m-corte mejorado con x_1 entera. Resolución. *Por qué aquí toca el corte mixto y no el fraccional.* Solo se exige que x_1 sea entera. Y hay una razón de peso además: los términos independientes son $\frac{17}{2}$ y $\frac{9}{2}$, de modo que las holguras h_1 y h_2 **no son enteras** ni aunque lo sean las variables originales. El f-corte, que exige integridad de todas las variables de la tabla, sería inválido; el corte mixto solo exige que lo sea x_1, y es el que se puede usar.

El corte. La fila de x_1 es $(1, 2, 1, 1, 0 \mid \frac{17}{2})$, con $f_1 = \frac{1}{2}$. Sus coeficientes no básicos son $y_{12} = 2$, $y_{13} = 1$ e $y_{1,h_1} = 1$, **todos no negativos**: $J^- = \emptyset$ y el corte mixto se reduce a

$$2x_2 + x_3 + h_1 \ \geq\ \tfrac{1}{2},$$

que se lee sola: $x_1 = \frac{17}{2} - (2x_2 + x_3 + h_1)$ debe ser un entero, y como $x_1 \leq \frac{17}{2}$, lo máximo que puede valer es 8, luego hay que restar al menos $\frac{1}{2}$.

Y por qué el mejorado m^* coincide con el m en este caso. La mejora consiste en aprovechar que alguna variable *no básica* sea entera, sustituyendo su coeficiente por una parte fraccionaria. Aquí ninguna lo es: x_2 y x_3 son continuas por enunciado, y h_1 tampoco es entera por lo dicho arriba. Así que $m^* = m$ y el corte es el de arriba.

El pivotaje dual. Con holgura $s \geq 0$, la fila nueva es $s - 2x_2 - x_3 - h_1 = -\frac{1}{2}$. Sale s; los cocientes son $\frac{3}{2}$ para x_2, 3 para x_3 y 2 para h_1, y el mínimo es $\frac{3}{2}$: entra x_2.

	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	s	$\bar{b}$
x_1	1	0	0	0	0	1	8
h_2	0	0	$-5/2$	$-1/2$	1	$3/2$	$49/4$
x_2	0	1	$1/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$1/4$
$z - c$	0	0	$3/2$	$1/2$	0	$3/2$	$65/4$

La tabla es óptima y $x_1 = 8$ **ya es entera**: con un solo corte se ha resuelto el problema mixto.

$$x^* = \left(8,\ \tfrac{1}{4},\ 0\right), \qquad z^* = \tfrac{65}{4} = 16{,}25.$$

(f) El árbol de ramificación y acotación. Resolución. *El nodo* 0 es la relajación lineal, con $x^* = \left(\frac{17}{2}, 0, 0\right)$ y $z = 17$. La única variable fraccionaria es x_1, de modo que la ramificación del nodo 0 es $x_1 \leq 8$ (nodo 1) contra $x_1 \geq 9$ (nodo 2).

El nodo 1 *($x_1 \leq 8$).* La primera restricción da la cota

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq \frac{3}{2}x_1 + \frac{17}{4} - \frac{3}{2}x_3 \leq \frac{65}{4}.$$

Se puede alcanzar: con $x_1 = 8$, la primera restricción deja $2x_2 + x_3 \le \frac{1}{2}$, y el objetivo $16 + x_2 - x_3$ se maximiza tomando $x_3 = 0$ y $x_2 = \frac{1}{4}$. La segunda restricción se cumple holgadamente ($-8 + \frac{1}{4} = -7{,}75 \le \frac{9}{2}$). Luego

$$\text{nodo 1}: \qquad x = \left(8,\ \tfrac{1}{4},\ 0\right), \qquad z = \tfrac{65}{4} = 16{,}25,$$

que no es entera en x_2: de ahí la ramificación $x_2 \le 0$ / $x_2 \ge 1$ que muestra el árbol.

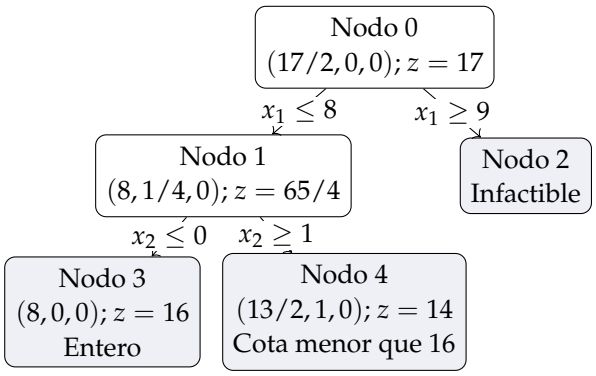
El nodo 2 *($x_1 \ge 9$) es infactible*, y se prueba en una línea: de la primera restricción, $x_1 \le x_1 + 2x_2 + x_3 \le \frac{17}{2} = 8{,}5 < 9$.

Observación. La etiqueta del nodo 2 en el enunciado escaneado se lee «No acotado». Eso no puede ser: la primera restricción, $x_1 + 2x_2 + x_3 \le \frac{17}{2}$ con $x \ge 0$, acota las tres variables, de modo que *ningún* nodo del árbol puede ser no acotado. El nodo 2 es infactible, que es lo que se acaba de demostrar, y así se resuelve aquí. El resto de las cajas del árbol (el contenido del nodo 0 y del nodo 1) está ilegible en la copia y se ha reconstruido con las cuentas anteriores, que son las únicas compatibles con los nodos terminales que sí se leen.

Nodos terminales y conclusión. Son terminales el nodo 2 (por infactibilidad), el nodo 3 (por solución entera: $(8, 0, 0)$ con $z = 16$) y el nodo 4 (por acotación: su valor $z = 14$ es peor que el 16 ya encontrado, así que ramificarlo no puede mejorar nada, aunque su solución $(13/2, 1, 0)$ no sea entera). Explorado todo el árbol, la conclusión es

$$x^* = (8,\ 0,\ 0), \qquad z^* = 16,$$

óptimo del problema entero puro. El árbol resuelto queda así; se corrige la etiqueta imposible «No acotado» del nodo 2:



Obsérvese la cadena: 17 (relajado) $>$ 16,25 (mixto, solo x_1 entera) $>$ 16 (todo entero). Cada exigencia de integridad cuesta un poco más.

(g) Karush-Kuhn-Tucker. Pertenece a la optimización no lineal *con* restricciones, que es el capítulo 7. Está resuelto en el ejercicio de la p. 444, con los multiplicadores y su relación con la tabla.

Qué buscaba: un examen con modelización, unimodularidad, sensibilidad e integridad. El ejercicio 1 mete tres cosas en veinticinco puntos: reconocer un recubrimiento, ver que la matriz es TU traduciendo la pregunta a un coloreado de grafo, y escribir el modelo en AMPL con una condición dentro del índice. El ejercicio 2 recorre los cuatro tipos de análisis de sensibilidad sobre la misma tabla, con dos apartados que se contestan casi sin cuentas si se ha

entendido qué significa cada casilla: el (d), porque quitar una restricción con holgura positiva no cambia nada, y el (e), porque el corte mixto es forzoso al no ser enteras las holguras. En el (f), el árbol dado permite distinguir los tres motivos de poda: infactibilidad, integridad y acotación.

E.9.4 Examen de teoría de 2018

FICHA. *Programación Matemática. Teoría* (2018, sin fecha en la copia). Dos cuestiones.

Teoría 1. Sea f dos veces diferenciable en S abierto no vacío y x^* un **máximo** local. Demostrar que entonces $\nabla f(x^*) = 0$ y $\nabla^2 f(x^*)$ es semidefinida negativa.
Teoría 2. (1) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío; definir la envolvente convexa de S. (2) Demostrar que todo punto de la envolvente convexa de S puede expresarse como combinación convexa estricta de a lo sumo $n+1$ puntos de S. (3) Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x^T x \leq \alpha\}$ con $\alpha > 0$; caracterizar su envolvente convexa.

Resolución. *T1.* Es la versión para máximos de la condición necesaria de la sección 6.2.2, resuelta con detalle en la sección E.8 de este apéndice. No hay que rehacer nada: si x^* es máximo local de f, entonces es **mínimo local de** $-f$, y aplicando el teorema a $-f$ resulta

$$\nabla(-f)(x^*) = -\nabla f(x^*) = 0 \qquad \text{y} \qquad \nabla^2(-f)(x^*) = -\nabla^2 f(x^*) \text{ semidefinida positiva,}$$

es decir, $\nabla f(x^*) = 0$ y $\nabla^2 f(x^*)$ semidefinida negativa. Conviene hacerlo así y no repetir la prueba: el cambio de signo es un argumento completo y enseña que los dos casos son uno solo.

T2(1) y (2). La definición de envolvente convexa y el **teorema de Carathéodory** están en la sección 2.1, con la demostración completa. La idea, en una línea: si un punto se escribe con $r > n+1$ puntos de S, los $r-1$ vectores $x_i - x_1$ son linealmente dependientes, y esa dependencia permite mover los coeficientes hasta anular uno sin salirse de la envolvente; se repite hasta bajar a $n+1$. Se eliminan los términos de peso cero: los coeficientes restantes son positivos, que es el sentido de «estricta» aquí.

T2(3). La respuesta es que S **es su propia envolvente convexa**: $H(S) = S$. La razón es que S ya es convexo, y la envolvente convexa de un convexo es él mismo (es el menor convexo que lo contiene, y él se contiene a sí mismo).

Que S es convexo se comprueba en dos líneas. S es la bola cerrada de centro 0 y radio $\sqrt{\alpha}$, es decir, $S = \{x : \|x\| \leq \sqrt{\alpha}\}$. Dados $x, y \in S$ y $\lambda \in [0,1]$, por la desigualdad triangular y la homogeneidad de la norma,

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leq \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| \leq \lambda\sqrt{\alpha} + (1-\lambda)\sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha},$$

luego la combinación convexa sigue en S.

QUÉ DEJA. Las bolas de cualquier norma son convexas, y por eso son su propia envolvente. La pregunta parece pedir un cálculo y lo que pide es reconocer que no hay nada que calcular: el trabajo está en justificar la convexidad, no en describir el conjunto.

E.9.5 Examen parcial del grupo B, 31 de mayo de 2017

FICHA. *Curso 2016-17. Grupo B. Examen parcial, 31/05/17.* Dos cuestiones de teoría (3 y 2 puntos) y dos problemas (1 y 3 puntos).

Cuestión 1 [3 pt]

Enunciar y probar el teorema fundamental de la programación lineal. *Aplicación:* sea P el conjunto poliédrico descrito por sus puntos extremos $E = \{(0,0)^T, (1,0)^T, (0,1)^T\}$ y sus direcciones extremas $D = \{(1,1)^T, (1,2)^T\}$, y sea $c^T = (-2,1)$. Decidir **sin hacer tablas** si $\text{Min}\{c^T x : \ x \in P\}$ tiene solución óptima; en caso afirmativo, calcularla.

Resolución. El teorema está en la sección 3.2. Y la aplicación es exactamente el uso para el que sirve: el teorema dice que hay mínimo finito **si y solo si** $c^T d \geq 0$ para toda dirección extrema. Aquí basta evaluar dos productos escalares:

$$c^T d^1 = (-2)\cdot 1 + 1 \cdot 1 = -1, \qquad c^T d^2 = (-2)\cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0.$$

El primero es **negativo**, luego el problema **no tiene solución óptima**: es ilimitado. Y se puede exhibir el certificado, que es lo que da valor a la respuesta: tomando cualquier punto extremo, por ejemplo $\hat{x} = (0,0)$, la semirrecta

$$x(\mu) = (0,0) + \mu\,(1,1), \qquad \mu \geq 0,$$

está contenida en P y sobre ella $c^T x(\mu) = -\mu \to -\infty$.

Obsérvese que la segunda dirección da producto *cero*: no produce ilimitación, pero sí produciría óptimos múltiples no acotados si la primera no existiera. Es el mismo fenómeno que apareció en el apartado (b) del prefinal del grupo 1 (sección E.4), y conviene distinguir los dos casos: $c^T d < 0$ es ilimitado; $c^T d = 0$ mantiene el valor del objetivo y, si se parte de un óptimo, produce otros óptimos.

Cuestión 2 [2 pt]

Definir: conjunto convexo, poliedro, separación de conjuntos convexos, mínimo local de un problema de optimización. ¿Es $x^* = (1,1)^T$ un mínimo local de $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x + 2$?

Resolución. Las cuatro definiciones están en las secciones 2.1, 2.2 y 6.1.3.

La pregunta se contesta con la condición necesaria de primer orden y **no hace falta mirar la hessiana**:

$$\nabla f(x,y) = (4x - 4,\ 6y), \qquad \nabla f(1,1) = (0,\ 6) \ \neq \ (0,0).$$

Como el gradiente no se anula, $x^* = (1,1)$ **no es** mínimo local (sección 6.2.2). Y la dirección de bajada es explícita: $d = -\nabla f(1,1) = (0,-6)$, o simplemente $(0,-1)$; en efecto, $f(1,1-t) = 2 + 3(1-t)^2 - 4 + 2 = 3(1-t)^2$, que decrece al aumentar t desde 0.

Merece la pena añadir dónde *sí* está el mínimo, porque cuesta una línea: el gradiente se anula en $(1,0)$, la hessiana es $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{smallmatrix}\right)$, definida positiva, y además f es convexa en todo $\mathbb{R}^2$, de modo que $(1,0)$ es el mínimo global, con $f(1,0) = 0$.

Problema 1 [1 pt]: diseño de una red con costes fijos

Dada una red $N = \{1, \dots, n\}$ con arcos potenciales $A \subseteq N \times N$: construir la conexión (i, j) cuesta d_{ij} y permite transportar a lo sumo b_{ij} unidades con coste proporcional c_{ij}; cada nodo i debe enviar o recibir f_i unidades (positiva si es oferta, negativa si es demanda), con $\sum_i f_i = 0$. Formule el problema y decida si la matriz de restricciones es totalmente unimodular.

Resolución. *Variables.* Dos familias, una continua y una binaria:

$$x_{ij} = \text{unidades transportadas por el arco } (i,j), \qquad y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se construye el arco } (i,j), \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Modelo.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_{(i,j)\in A} \left(d_{ij}\, y_{ij} + c_{ij}\, x_{ij} \right) \\ \text{sujeto a:} \quad & \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = f_i, \quad i \in N, \\ & x_{ij} \le b_{ij}\, y_{ij}, \qquad\qquad (i,j) \in A, \\ & x_{ij} \ge 0, \quad y_{ij} \in \{0,1\}, \qquad (i,j) \in A. \end{aligned}$$

La primera familia es la conservación del flujo; la segunda hace dos cosas a la vez, imponer la capacidad y prohibir el transporte por arcos no construidos.

¿Es TU? **No**, en general. Y conviene ver exactamente dónde se rompe, porque el bloque de conservación *sí* lo es: es la matriz de incidencia de un grafo dirigido, con un $+1$ y un -1 por columna, y el criterio de la suma nula (sección 5.2.1) la declara TU de inmediato. Lo que estropea la matriz completa es la segunda familia: escrita como $x_{ij} - b_{ij} y_{ij} \le 0$, su columna de y_{ij} tiene la entrada $-b_{ij}$, y una matriz TU debe tener *todas* sus entradas en $\{0, 1, -1\}$. Basta que una capacidad no pertenezca a $\{0, 1\}$ para descartar la unimodularidad total.

Y la consecuencia. Sin la decisión de construir, el problema es un flujo de coste mínimo: si ofertas, demandas y capacidades son enteras, tiene vértices enteros. Con la decisión de construir se obtiene, en general, un problema entero mixto; pueden usarse métodos como ramificación y acotación. Es la misma frontera que separa el transporte puro de la localización con costes fijos (sección E.5), y explica por qué uno es fácil y el otro no.

Problema 2 [3 pt]

Considere

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeto a:} \quad & x_1 - x_2 = 1 \\ & x_1 + x_2 \ge 2 \\ & x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

(a) Aplique el método de las dos fases.
(b) Indique qué tipo de solución óptima ha obtenido.
(c) Escriba el dual y determine su solución óptima.
(d) Determine el rango de θ para el que la base óptima lo sigue siendo con el objetivo Maximizar $\theta x_1 - 2\theta x_2$.
(e) Determine el rango de Δ para el que la base óptima sigue siendo factible con los términos independientes $(1 + \Delta,\ 2 - \Delta,\ 3)$.

(f) Aplique cortes de Gomory para resolver el problema con x_1 y x_2 enteras.

(a) y (b). Resolución. *La respuesta, primero por geometría.* La primera restricción obliga a $x_1 = x_2 + 1$, de modo que toda la región factible vive sobre una recta y el problema es de una sola variable. Sustituyendo, $x_1 + x_2 = 2x_2 + 1 \geq 2$ da $x_2 \geq \frac{1}{2}$, y la tercera da $x_2 \leq 3$. El objetivo es $x_1 - 2x_2 = (x_2 + 1) - 2x_2 = 1 - x_2$, decreciente en x_2. El máximo está en el extremo inferior:

$$x^* = \left(\tfrac{3}{2},\ \tfrac{1}{2}\right), \qquad z^* = \tfrac{1}{2}.$$

Y ahora con las dos fases. En forma estándar, con exceso x_3 en la segunda restricción y holgura x_4 en la tercera,

$$x_1 - x_2 = 1, \qquad x_1 + x_2 - x_3 = 2, \qquad x_2 + x_4 = 3,$$

añadimos a_1 y a_2 a las dos primeras ecuaciones y minimizamos $a_1 + a_2$. La base inicial es $\{a_1, a_2, x_4\}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	a_2	$\bar{b}$
a_1	1	-1	0	0	1	0	1
a_2	1	1	-1	0	0	1	2
x_4	0	1	0	1	0	0	3
$z - c$	2	0	-1	0	0	0	3

Como esta fase es de mínimo, entra una columna con $z_j - c_j > 0$: entra x_1 y sale a_1, pues los cocientes son 1 y 2. Restando la primera fila a la segunda se obtiene

	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	a_2	$\bar{b}$
x_1	1	-1	0	0	1	0	1
a_2	0	2	-1	0	-1	1	1
x_4	0	1	0	1	0	0	3
$z - c$	0	2	-1	0	-2	0	1

Ahora entra x_2 y sale a_2: el menor cociente positivo es $1/2$, frente a 3. Las dos artificiales quedan no básicas y la fase I alcanza el mínimo 0. Las eliminamos y recuperamos el objetivo original, de máximo; la tabla de la fase II ya es *óptima*, sin otro pivote:

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_1	1	0	$-1/2$	0	$3/2$
x_2	0	1	$-1/2$	0	$1/2$
x_4	0	0	$1/2$	1	$5/2$
$z - c$	0	0	$1/2$	0	$1/2$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Tipo de solución. Óptimo **único** y **no degenerado**: la única variable no básica, x_3, tiene $z_3 - c_3 = \frac{1}{2} > 0$ estrictamente, y las tres básicas valen $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{2}$, todas positivas.

(c) El dual. Resolución. Primal de máximo con una igualdad, una restricción $\geq$ y una $\leq$; los signos duales son, respectivamente, libre, ≤ 0 y ≥ 0:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & w_1 + 2w_2 + 3w_3 \\ \text{sujeto a:} \quad & w_1 + w_2 \ \geq\ 1 \\ & -w_1 + w_2 + w_3 \ \geq\ -2 \\ & w_1 \text{ libre}, \quad w_2 \leq 0, \quad w_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Con $c_B = (1, -2, 0)$ y la B^{-1} de arriba,

$$w^* = c_B^T B^{-1} = \left(\tfrac{3}{2},\ -\tfrac{1}{2},\ 0\right),$$

con valor $\frac{3}{2} - 1 + 0 = \frac{1}{2} = z^*$. Las dos restricciones duales quedan saturadas ($\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$ y $-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 0 = -2$), coherentemente con que x_1^* y x_2^* son positivas; y $w_3^* = 0$ porque la tercera restricción primal tiene holgura $x_4^* = \frac{5}{2} > 0$.

(d) Multiplicar el objetivo por θ. **Resolución.** Este apartado no es un análisis de sensibilidad corriente: el nuevo objetivo es $\theta(x_1 - 2x_2)$, es decir, **el mismo vector de costos multiplicado por un escalar**. Al escalar c por θ, todos los costos reducidos se escalan por θ, porque $z_j - c_j$ es lineal en c. El único costo reducido no básico pasa de $\frac{1}{2}$ a $\frac{\theta}{2}$, y la condición de optimalidad para un máximo, $z_j - c_j \geq 0$, da

$$\boxed{\theta \ \geq \ 0}$$

Conviene desglosar los tres casos, porque cada uno dice algo distinto:

- $\theta > 0$: la base sigue siendo óptima y única, y el valor óptimo es $\frac{\theta}{2}$. Escalar por un número positivo no cambia quién es el máximo.
- $\theta = 0$: el objetivo es idénticamente nulo, todo punto factible es óptimo y la base sigue siéndolo, pero con óptimos múltiples.
- $\theta < 0$: maximizar $\theta(x_1 - 2x_2)$ es minimizar $x_1 - 2x_2$, y el óptimo se va al otro extremo del segmento, $x = (4, 3)$ con $x_1 - 2x_2 = -2$.

(e) Rango de Δ. **Resolución.** Con $b = (1 + \Delta,\ 2 - \Delta,\ 3)^T$,

$$\bar{b} = B^{-1}\begin{pmatrix} 1+\Delta \\ 2-\Delta \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\Delta}{2} + \frac{2-\Delta}{2} \\ -\frac{1+\Delta}{2} + \frac{2-\Delta}{2} \\ \frac{1+\Delta}{2} - \frac{2-\Delta}{2} + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} - \Delta \\ \Delta + \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que la primera componente *no depende de* Δ: los dos cambios se cancelan en la fila de x_1, porque la primera fila de B^{-1} es $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ y los incrementos son $+\Delta$ y $-\Delta$. Imponiendo $\bar{b} \geq 0$ en las otras dos,

$$\tfrac{1}{2} - \Delta \geq 0 \iff \Delta \leq \tfrac{1}{2}, \qquad \Delta + \tfrac{5}{2} \geq 0 \iff \Delta \geq -\tfrac{5}{2},$$

es decir,

$$\boxed{-\tfrac{5}{2} \ \leq \ \Delta \ \leq \ \tfrac{1}{2}}$$

(f) Cortes de Gomory. **Resolución.** Las dos básicas originales son fraccionarias: $x_1 = \frac{3}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{2}$. Se corta sobre la fila de x_1, cuyo único coeficiente no básico es $y_{1,x_3} = -\frac{1}{2}$:

$$f_1 = \tfrac{3}{2} - 1 = \tfrac{1}{2}, \qquad f_{1,x_3} = -\tfrac{1}{2} - (-1) = \tfrac{1}{2},$$

y con holgura $s \geq 0$ el corte es

$$s - \tfrac{1}{2}x_3 = -\tfrac{1}{2}.$$

(Es válido: los coeficientes de las tres restricciones y sus términos independientes son enteros, luego x_3 y x_4 son enteras en cuanto lo sean x_1 y x_2.)

Símplex dual: sale s, y la única columna con coeficiente negativo en su fila es la de x_3, que entra con $x_3 = 1$. Actualizando,

$$x_1 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot 1 = 2, \qquad x_2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot 1 = 1, \qquad x_4 = \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2} \cdot 1 = 2,$$

todas enteras. La solución óptima entera es

$$x^* = (2,\ 1), \qquad z^* = 2 - 2 = 0,$$

y **un solo corte ha bastado**. Se comprueba sobre el enunciado: $2 - 1 = 1$; $2 + 1 = 3 \geq 2$; $1 \leq 3$. Y se ve también sin cortes, con el argumento geométrico del apartado (a): sobre la recta $x_1 = x_2 + 1$ hay que tomar $x_2 \geq \frac{1}{2}$ entero, luego $x_2 = 1$, y $z = 1 - x_2 = 0$.

Qué buscaba: el teorema fundamental usado como herramienta y no como enunciado: la aplicación de la cuestión 1 se despacha con dos productos escalares y no admite tablas. En la cuestión 2, la condición de primer orden basta para descartar el punto, sin tocar la hessiana. Y en el problema 2, dos apartados con truco: el (d), donde el parámetro multiplica a *todo* el objetivo y por tanto escala los costos reducidos en bloque, y el (e), donde los dos incrementos se cancelan en la primera fila. En los dos casos, entender qué se está moviendo ahorra las cuentas.

E.9.6 Examen del 29 de mayo de 2015

FICHA. *Programación Matemática, 29.05.15.* Cinco cuestiones, 10 puntos en total.

C1 [1,5]. Definir: conjunto convexo, dirección de un conjunto poliédrico, sistema TDE, precio sombra, función lagrangiana de un problema de minimización no lineal.
C2 [3]. Enunciar y demostrar el teorema de representación de conjuntos poliédricos. *Aplicación:* hallar la representación de $P = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 + x_2 \geq 1,\ x_1 - x_2 \leq 1,\ 2x_1 - x_2 \geq -1,\ x_1, x_2 \geq 0\}$.
C3 [1,5]. Probar que uno y solo uno de estos sistemas tiene solución: (I) $Ax = 0$, $x \geq 0$, $x \neq 0$; (II) $u^T A < 0$.
C4 [1]. Probar que el politopo $P = \{x \in \mathbb{R}^{n \times n} :\ \sum_j x_{ij} = 1\ \forall i;\ \sum_i x_{ij} = 1\ \forall j;\ x_{ij} \geq 0\}$ tiene todos sus vértices con coordenadas en $\{0, 1\}$.
C5 [3]. Sean $f, h_1, \ldots, h_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Si x^* es mínimo local de f sujeto a $h_i(x) = 0$ y los gradientes $\nabla h_i(x^*)$ son linealmente independientes, probar que existe un único $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tal que $\nabla f(x^*) + \sum_i \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) = 0$. Aplicarlo a $\text{Min}\{\sum_i x_i :\ \prod_i x_i = 1,\ x_i \geq 0\}$.

Resolución. *C1.* Cuatro de los cinco conceptos están en el libro: conjunto convexo y dirección de un poliedro en la sección 2.1, precio sombra en 4.4.2 y **función lagrangiana** de un problema de minimización no lineal en la sección 7.3.1, donde se define $L(x, u, v) = f(x) + u^T g(x) + v^T h(x)$ con $u \geq 0$ y se demuestra el teorema del punto de silla. El quinto es la siguiente definición. Un sistema racional $Ax \leq b$ es **totalmente dual entero (TDE)** si, para todo $c \in \mathbb{Z}^n$ para el que $\text{Max}\{c^T x : Ax \leq b\}$ tiene óptimo finito, el dual $\text{Min}\{b^T u : A^T u = c,\ u \geq 0\}$ admite una solución óptima entera. La propiedad se refiere al sistema de desigualdades, no solo al poliedro que representa. Se incluye aquí porque la pide esta prueba histórica.[4]

C2. El teorema de representación está en la sección 2.4. La aplicación se hace en dos pasos.

[4] T. Ralphs, *Integer Programming, ISE 418*, lección 28, diapositiva 11.

Los puntos extremos se buscan cortando las restricciones dos a dos y quedándose con los cortes que cumplen todas las demás. Salen dos:

$$\hat{x}^1 = (1,\,0), \qquad \hat{x}^2 = (0,\,1),$$

los dos cortes de $x_1 + x_2 = 1$ con los ejes. (El corte de $x_1 + x_2 = 1$ con $x_1 - x_2 = 1$ es también $(1,0)$, y el de $x_1 + x_2 = 1$ con $2x_1 - x_2 = -1$ es $(0,1)$; los demás cortes incumplen alguna restricción.)

Las direcciones extremas son los vectores $d \geq 0$, $d \neq 0$, que cumplen las tres desigualdades en su versión homogénea — $d_1 + d_2 \geq 0$, $d_1 - d_2 \leq 0$, $2d_1 - d_2 \geq 0$ — y que no pueden descomponerse como suma de dos direcciones no colineales. Las dos últimas dicen $d_1 \leq d_2 \leq 2d_1$, de modo que el cono de direcciones está generado por sus dos bordes:

$$d^1 = (1,\,1) \quad (\text{donde } d_2 = d_1), \qquad d^2 = (1,\,2) \quad (\text{donde } d_2 = 2d_1).$$

Por el teorema de representación,

$$P = \big\{\lambda(1,0) + (1-\lambda)(0,1) + \mu_1(1,1) + \mu_2(1,2) :\ \lambda \in [0,1],\ \mu_1, \mu_2 \geq 0\big\}.$$

C3. Es el **teorema de Gordan**. El sistema (I) equivale a $Ax = 0$, $\mathbf{1}^T x = 1$, $x \geq 0$: basta normalizar cualquier solución no nula. Si no tiene solución, Farkas da $v \in \mathbb{R}^m$ y $\alpha < 0$ tales que $v^T A + \alpha \mathbf{1}^T \geq 0$. Por tanto $u = -v$ satisface $u^T A \leq \alpha \mathbf{1}^T < 0$, que es (II). No pueden darse ambos: con $x \geq 0$, $x \neq 0$ y $u^T A < 0$ se tendría $u^T A x < 0$, en contradicción con $Ax = 0$.

C4. Es el **politopo de asignación**, y está demostrado en la sección 5.2.3. La estructura del argumento es la de siempre: la matriz de restricciones tiene exactamente dos unos por columna, uno en el bloque de filas $\sum_j x_{ij} = 1$ y otro en el bloque $\sum_i x_{ij} = 1$; con la partición evidente — un bloque en Q_1 y el otro en Q_2 — el criterio de los dos elementos no nulos da que es TU, y por Hoffman-Kruskal, con términos independientes iguales a 1, todos los vértices son enteros. Como además $0 \leq x_{ij} \leq 1$ (cada fila suma 1 con términos no negativos), las coordenadas solo pueden ser 0 o 1.

C5. Multiplicadores de Lagrange: optimización con restricciones de igualdad. Es materia del capítulo 7 y está resuelta allí, en el ejercicio que deduce la desigualdad de las medias por multiplicadores.

E.9.7 Examen del 17 de junio de 2015

FICHA. *Programación Matemática, 17.06.15.* Teoría: cuestiones 1, 2 y 3. Problemas: 1 y 2. Para subir nota, las aplicaciones de las cuestiones 1 y 2 y las cuestiones 3 y 4.

Cuestión 1 [2 pt]

Teorema fundamental de la programación lineal: enunciado y demostración. *Aplicación:* sea

$$P = \left\{\lambda\left(\tfrac{5}{2},2\right) + (1-\lambda)\left(\tfrac{5}{2},3\right) + \mu_1(2,1) + \mu_2(1,-1) :\ \lambda \in [0,1],\ \mu_1,\mu_2 \geq 0\right\}.$$

Determinar la solución óptima de $\text{Min}\{x_1 :\ x \in P,\ x_1 - x_2 \geq 1,\ x \in \mathbb{Z}^2\}$. ¿Es única?

Resolución. El teorema fundamental se enuncia y demuestra en la sección 3.2. Para la aplicación se parte de la representación dada.

Escribir el punto genérico. Todo $x \in P$ tiene la forma

$$x_1 = \tfrac{5}{2} + 2\mu_1 + \mu_2, \qquad x_2 = 3 - \lambda + \mu_1 - \mu_2,$$

con $\lambda \in [0,1]$ y $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ (el segmento entre los dos puntos extremos tiene abscisa constante $\frac{5}{2}$ y ordenada $3-\lambda$).

La restricción adicional.

$$x_1 - x_2 = \left(\tfrac{5}{2} + 2\mu_1 + \mu_2\right) - (3 - \lambda + \mu_1 - \mu_2) = -\tfrac{1}{2} + \lambda + \mu_1 + 2\mu_2 \;\geq\; 1,$$

es decir, $\lambda + \mu_1 + 2\mu_2 \geq \frac{3}{2}$.

La cota inferior. Como $\mu \geq 0$, siempre $x_1 \geq \frac{5}{2}$; y como se exige $x_1 \in \mathbb{Z}$, necesariamente $x_1 \geq 3$.

Se alcanza $x_1 = 3$. Con $x_1 = 3$ hace falta $2\mu_1 + \mu_2 = \frac{1}{2}$. Poniendo $t = \lambda - 3\mu_1$, un cálculo directo da

$$x_2 = 3 - \lambda + \mu_1 - \mu_2 = 3 - \lambda + \mu_1 - \left(\tfrac{1}{2} - 2\mu_1\right) = \tfrac{5}{2} - t, \qquad \lambda + \mu_1 + 2\mu_2 = 1 + t,$$

de modo que la restricción adicional es $t \geq \frac{1}{2}$, y por otro lado $t = \lambda - 3\mu_1 \leq 1$ porque $\lambda \leq 1$ y $\mu_1 \geq 0$. Que $x_2 = \frac{5}{2} - t$ sea entero con $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ obliga a $t = \frac{1}{2}$ y por tanto a $x_2 = 2$.

Conclusión.

$$x^* = (3,\, 2), \qquad \text{Min } x_1 = 3,$$

y **es única**: el razonamiento anterior no deja más opciones, porque $x_1 = 3$ fuerza $x_2 = 2$. (Un representante concreto: $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \frac{1}{2}$.)

Cuestión 2 [2 pt]

Describir el corte fraccional de Gomory. *Aplicación:* en la tabla siguiente, obtenida al añadir un corte (fila 4) a una tabla óptima del relajado de un problema entero en x_1, x_2, x_3, determinar a_1, a_2, a_3, a_4 sabiendo que $a_3 \in [0,1]$.

c_B		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
	c_j	a_2	$1/7$	$3/7$	0	0	0	
a_2	x_1	1	0	$1/7$	a_3	0	0	$20/7$
$1/7$	x_2	0	1	0	1	0	0	3
0	x_5	0	0	$-2/7$	$10/7$	1	0	$23/7$
0	x_6	0	0	a_1	$-2/7$	0	1	$-6/7$
	$c - z$	0	0	$4/7$	a_4	0	0	

Resolución. El corte fraccional está en la sección 5.4.1. La aplicación se resuelve identificando **de qué fila salió el corte**, y eso lo dice el término independiente.

Paso 1: la fila generadora. La fila del corte tiene $\bar{b} = -\frac{6}{7}$, y un f-corte se escribe siempre como $x_{\text{holgura}} - \sum_j f_{ij} x_j = -f_i$. Luego $f_i = \frac{6}{7}$. Antes de añadir el corte, los términos independientes eran $\frac{20}{7}$, 3 y $\frac{23}{7}$, con partes fraccionarias $\frac{6}{7}$, 0 y $\frac{2}{7}$. La única que vale $\frac{6}{7}$ es la primera: **el corte se generó en la fila de** x_1.

Paso 2: a_1 y a_3. Los coeficientes del corte son $-f_{1j}$ para cada no básica. En la columna de x_3, el coeficiente de la fila generadora es $\frac{1}{7}$, cuya parte fraccionaria es $\frac{1}{7}$; luego

$$a_1 = -\tfrac{1}{7}.$$

En la columna de x_4, el coeficiente del corte es $-\frac{2}{7}$, luego $f_{1,x_4} = \frac{2}{7}$; y el único número de $[0,1]$ con parte fraccionaria $2/7$ es $2/7$ (el extremo 1 tiene parte fraccionaria cero). Por tanto,

$$a_3 = \tfrac{2}{7}.$$

Paso 3: a_2. Se lee en el costo reducido de x_3. Con $c_B = (a_2, \frac{1}{7}, 0, 0)$ y la columna de x_3 igual a $\left(\frac{1}{7}, 0, -\frac{2}{7}, a_1\right)$,

$$c_3 - z_3 = \tfrac{3}{7} - \left[a_2 \cdot \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{7} \cdot 0 + 0 + 0\right] = \tfrac{3}{7} - \tfrac{a_2}{7} = \tfrac{4}{7} \quad \Longrightarrow \quad a_2 = -1.$$

Paso 4: a_4. Es el costo reducido de x_4, cuya columna es $\left(a_3, 1, \frac{10}{7}, -\frac{2}{7}\right) = \left(\frac{2}{7}, 1, \frac{10}{7}, -\frac{2}{7}\right)$:

$$a_4 = c_4 - z_4 = 0 - \left[(-1) \cdot \tfrac{2}{7} + \tfrac{1}{7} \cdot 1 + 0 + 0\right] = -\left(-\tfrac{2}{7} + \tfrac{1}{7}\right) = \tfrac{1}{7}.$$

$$\boxed{a_1 = -\tfrac{1}{7}, \qquad a_2 = -1, \qquad a_3 = \tfrac{2}{7}, \qquad a_4 = \tfrac{1}{7}}$$

Comprobación de coherencia: la fila $c - z$ queda $(0, 0, \frac{4}{7}, \frac{1}{7}, 0, 0)$, con todas las entradas ≥ 0. Se conserva la factibilidad dual, pero la nueva tabla *no es óptima*: su última componente $\bar{b}_4 = -6/7$ es negativa. Haría falta restaurar la factibilidad primal, aunque este apartado solo pide recuperar los parámetros. Con los valores obtenidos, la primera fila dice $x_1 = 20/7 - (x_3 + 2x_4)/7$. Como x_1 es entero y $x_3, x_4 \geq 0$, necesariamente $x_1 \leq 2$; de ahí $(x_3 + 2x_4)/7 \geq 6/7$, que confirma la validez del corte incluso sin suponer entera la holgura x_4.

QUÉ DEJA. Una tabla con incógnitas se rellena identificando primero *qué* es cada fila. El término independiente del corte es $-f_i$; en esta tabla, solo una fila tiene esa parte fraccionaria y queda identificada. A partir de ahí, cada coeficiente del corte es la parte fraccionaria de su homólogo en esa fila, y los costos reducidos se recalculan con $c_j - c_B^T y_j$.

Cuestión 3 [1 pt]

Sean

$$(\mathrm{P}_1):\ \mathrm{Min}\left\{ c^T x :\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, \ldots, m;\ x \in \{0,1\}^n \right\},$$

$$(\mathrm{P}_2):\ \mathrm{Min}\left\{ c^T x :\ \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \Big) x_j = \sum_{i=1}^{m} u_i b_i;\ x \in \{0,1\}^n \right\}.$$

Probar que, para todo $u \in \mathbb{R}^m$, los valores óptimos cumplen $v(\mathrm{P}_2) \leq v(\mathrm{P}_1)$.

Resolución. La demostración es de dos líneas y descansa en una sola observación: **todo punto factible de** (P_1) **lo es de** (P_2). En efecto, si x cumple $\sum_j a_{ij} x_j = b_i$ para *todo* i, entonces multiplicando la ecuación i-ésima por u_i y sumando en i,

$$\sum_i u_i \sum_j a_{ij} x_j = \sum_i u_i b_i \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_j \Big(\sum_i u_i a_{ij} \Big) x_j = \sum_i u_i b_i,$$

que es exactamente la única restricción de (P_2). Luego $X_1 \subseteq X_2$ para los respectivos conjuntos factibles, y el mínimo de la misma función sobre un conjunto mayor no puede ser mayor. Si X_1 no es vacío, ambos mínimos existen porque son conjuntos finitos. Adoptando $\inf \varnothing = +\infty$, la misma desigualdad se interpreta también cuando algún conjunto es vacío:

$$v(\mathrm{P}_2) = \mathrm{Min}_{x \in X_2}\, c^T x \ \leq\ \mathrm{Min}_{x \in X_1}\, c^T x = v(\mathrm{P}_1).$$

Qué significa. Se sustituyen las m igualdades por una sola combinación lineal de ellas. Es una **relajación por agregación de restricciones**: resolverla da una cota inferior que depende del vector u elegido. Tener una sola ecuación no garantiza que el problema binario sea fácil de resolver.

Observación. El enunciado escaneado dice, literalmente, «el valor óptimo del problema (P_1) es menor o igual que el del problema (P_2)», que es la desigualdad al revés de la que se puede demostrar. La inclusión de conjuntos factibles va en un solo sentido, así que la desigualdad correcta es $v(\mathrm{P}_2) \leq v(\mathrm{P}_1)$, y así se ha resuelto.

Cuestión 4 [1 pt]

Sea $D = (V, A)$ un grafo dirigido con longitudes $c_e \geq 0$, y $s, t \in V$. Probar que

$$\mathrm{Max}\{\pi_t : \ \pi_j - \pi_i \leq c_{ij} \ \forall (i,j) \in A, \ \pi \geq 0, \ \pi_s = 0\}$$

es el dual del problema del camino más corto de s a t y que sus valores óptimos coinciden.

Resolución. Si $s = t$, el camino vacío tiene longitud 0 y el objetivo dual también vale 0 porque $\pi_t = \pi_s = 0$. Supongamos en adelante $s \neq t$.

El primal. El camino más corto se escribe como un problema de flujo: se envía una unidad de s a t al menor coste posible. Con $x_{ij} \geq 0$ el flujo por el arco (i, j),

$$\text{Minimizar} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \quad \text{sujeto a:} \quad \sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = f_i \ \ (i \in V), \qquad x \geq 0,$$

con $f_s = 1$, $f_t = -1$ y $f_i = 0$ en los demás nodos.

El dual. La matriz de restricciones es la de incidencia del digrafo: la columna del arco (i, j) tiene un $+1$ en la fila i y un -1 en la fila j. Como el primal está en forma estándar, las variables duales π_i son libres y hay una restricción dual por arco:

$$\text{Maximizar} \ \sum_i f_i \pi_i = \pi_s - \pi_t \quad \text{sujeto a:} \quad \pi_i - \pi_j \leq c_{ij} \ \ \forall (i,j) \in A.$$

Cambiando el signo de todas las variables, $\pi \rightsquigarrow -\pi$, el objetivo pasa a ser $\pi_t - \pi_s$ y las restricciones a $\pi_j - \pi_i \leq c_{ij}$; y como el sistema es invariante por sumar una constante a todas las π_i, se puede normalizar $\pi_s = 0$, con lo que el objetivo queda Max π_t. Falta justificar la condición $\pi \geq 0$ del enunciado: no forma parte del dual obtenido directamente, pero puede imponerse sin cambiar su valor óptimo. En efecto, de cualquier potencial factible normalizado se obtiene otro tomando $\pi_i^+ = \max\{\pi_i, 0\}$. Como $c_{ij} \geq 0$,

$$\pi_j \leq \pi_i + c_{ij} \quad \Longrightarrow \quad \max\{\pi_j, 0\} \leq \max\{\pi_i, 0\} + c_{ij}.$$

Se conservan las restricciones y $\pi_s^+ = 0$, y el objetivo no disminuye. Así se llega a la formulación equivalente del enunciado.

Y los valores coinciden. Por dos razones encadenadas. La primera es la dualidad fuerte: el primal es factible (si hay camino de s a t) y acotado inferiormente por 0, luego ambos tienen óptimo y los valores coinciden. La segunda, y es la que hace útil el resultado, es que la matriz de incidencia es **totalmente unimodular** (sección 5.2.4), de modo que existe un flujo entero óptimo. Un flujo entero de valor 1 puede contener ciclos: se descompone en un camino de

s a t y ciclos. Al eliminar estos últimos, el coste no aumenta porque las longitudes son no negativas. Queda un camino cuyo coste es el valor del programa lineal.

Si no hay camino de s a t, el primal es infactible y el dual no está acotado superiormente. Para verlo, sea S el conjunto de vértices alcanzables desde s: no hay arcos de S a su complementario. Los potenciales $\pi_i = 0$ en S y $\pi_i = T$ fuera de S son factibles para cualquier $T \geq 0$, y $\pi_t = T$. En este caso no hay óptimos finitos que igualar.

Lectura del dual. Al sumar sus desigualdades a lo largo de cualquier camino de s a i, resulta que π_i no supera su longitud. Por tanto, cada potencial factible da cotas inferiores para las distancias. Si t es alcanzable, una elección óptima consiste en tomar $\pi_i = d(s,i)$ en los vértices alcanzables y una constante mayor o igual que todas esas distancias en los restantes. Las desigualdades triangulares garantizan la factibilidad y $\pi_t = d(s,t)$. Otras soluciones óptimas pueden dar valores menores en vértices distintos de t: el objetivo solo maximiza π_t. Estas desigualdades entre distancias son las que utiliza el algoritmo de Bellman–Ford.

Problema 1 [3 pt]

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y considere el problema no lineal

$$\text{Minimizar } \lambda x_1 + 2x_2 \quad \text{sujeto a:} \quad \frac{x_1 + x_3}{1 + x_3} \geq 2, \qquad x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

1) Para $\lambda = 1$, resúelvalo con el método del símplex dual.
2) Identifique los valores de λ para los que la solución obtenida sigue siendo óptima.
3) Indique cuántas soluciones óptimas existen para $\lambda = 0$.

Resolución. *Una reformulación lineal.* La primera restricción contiene un cociente, pero como $x_3 \geq 0$ el denominador $1 + x_3$ es estrictamente positivo, y multiplicar por él conserva el sentido de la desigualdad:

$$\frac{x_1 + x_3}{1 + x_3} \geq 2 \iff x_1 + x_3 \geq 2 + 2x_3 \iff x_1 - x_3 \geq 2.$$

El problema queda

$$\text{Minimizar } \lambda x_1 + 2x_2 \quad \text{sujeto a:} \quad x_1 - x_3 \geq 2, \qquad x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \qquad x \geq 0,$$

que es lineal y permite aplicar el símplex dual.

1) Con $\lambda = 1$, por símplex dual. Se pasan las dos restricciones a $\leq$ multiplicándolas por -1 y se añaden holguras $x_4, x_5 \geq 0$:

$$-x_1 + x_3 + x_4 = -2, \qquad -x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = -1.$$

Con la base $\{x_4, x_5\}$ resulta $\bar{b} = (-2, -1)$, primal infactible; y los costos reducidos son los propios costos, $(1, 2, 0, 0, 0) \geq 0$, dual factible. Es la situación del símplex dual.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_4	-1	0	1	1	0	-2
x_5	-1	-1	-1	0	1	-1
$c - z$	1	2	0	0	0	0

Sale x_4, la fila más negativa. En su fila, la única columna no básica con coeficiente negativo es la de x_1, luego entra x_1 sin comparar cocientes. Pivotando sobre -1:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	0	-1	-1	0	2
x_5	0	-1	-2	-1	1	1
$c-z$	0	2	1	1	0	2

Ahora $\bar{b} \geq 0$ y $c - z \geq 0$: óptima.

$$x^* = (2,\, 0,\, 0), \qquad z^* = 2.$$

Se comprueba: $2 - 0 = 2 \geq 2$ (saturada) y $2 + 0 + 0 = 2 \geq 1$ (con exceso 1, que es x_5).

2) Rango de λ. Con $c_B = (\lambda, 0)$, los costos reducidos de las tres no básicas salen

$$c_2 - z_2 = 2, \qquad c_3 - z_3 = \lambda, \qquad c_4 - z_4 = \lambda,$$

(la columna de x_3 en la tabla es $(-1, -2)$ y la de x_4 es $(-1, -1)$, y en las dos la fila de x_1 aporta $-\lambda$). Imponiendo $c - z \geq 0$,

$$\boxed{\lambda \;\geq\; 0}$$

y en todo ese rango la base $\{x_1, x_5\}$ sigue siendo óptima, con $z^* = 2\lambda$.

3) Con $\lambda = 0$. El objetivo pasa a ser $2x_2$, y su mínimo sobre la región factible es 0, alcanzado en **todos** los puntos con $x_2 = 0$. Ese conjunto es

$$\{(x_1,\, 0,\, x_3) :\; x_1 - x_3 \geq 2,\; x_3 \geq 0\}$$

(la segunda restricción se cumple sola, porque $x_1 \geq x_3 + 2 \geq 2 \geq 1$), que es una región **bidimensional y no acotada**. Hay, por tanto, **infinitas soluciones óptimas**.

La lectura en la tabla es la de siempre: con $\lambda = 0$ los costos reducidos de x_3 y x_4 se anulan, y las dos columnas correspondientes, $(-1, -2)$ y $(-1, -1)$, no tienen ninguna entrada positiva. Al aumentar esas variables no básicas y recuperar las básicas, se obtienen las direcciones extremas $(1, 0, 1)$ y $(1, 0, 0)$ en las variables originales (x_1, x_2, x_3). Ambas cumplen $c^T d = 0$: el conjunto de óptimos es una cara no acotada.

Problema 2 [2 pt]: el reparto de la herencia

A su muerte sin dejar testamento, las n propiedades $P_1, \ldots, P_n$ de un millonario se reparten entre sus tres hijas (Laura, Paula y Sara). Cada posesión P_i tiene un valor conocido v_i. El valor total recibido por Laura debe ser mayor o igual que el de Paula, y este mayor o igual que el de Sara. P_1 y P_2 son coches Ferrari y no deben asignarse a la misma hija. $P_3, \ldots, P_7$ son apartamentos en Miami y cada hija debe heredar al menos uno de ellos. Se desea maximizar el valor total recibido por Sara.

Resolución. *Variables.* Se indexa a las hijas por $h \in \{1, 2, 3\}$, con $1 =$ Laura, $2 =$ Paula y $3 =$ Sara:

$$x_{hi} = \begin{cases} 1 & \text{si la hija } h \text{ recibe la propiedad } i, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad h = 1, 2, 3, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Conviene abreviar el valor recibido por cada hija, $V_h = \sum_{i=1}^{n} v_i\, x_{hi}$, que es una expresión lineal en las variables.

Modelo.

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad & V_3 = \sum_{i=1}^{n} v_i \, x_{3i} \\
\text{sujeto a:} \quad & \sum_{h=1}^{3} x_{hi} = 1, && i = 1, \ldots, n, \\
& V_1 \;\geq\; V_2 \;\geq\; V_3, \\
& x_{h1} + x_{h2} \leq 1, && h = 1, 2, 3, \\
& \sum_{i=3}^{7} x_{hi} \;\geq\; 1, && h = 1, 2, 3, \\
& x_{hi} \in \{0, 1\}.
\end{aligned}
$$

La primera familia reparte cada propiedad a exactamente una hija; la segunda es el orden de los valores, y son dos desigualdades lineales; la tercera prohíbe que una misma hija se lleve los dos Ferraris; y la cuarta obliga a que cada una reciba al menos un apartamento.

Lectura del objetivo. Por la cadena $V_1 \geq V_2 \geq V_3$, maximizar V_3 es maximizar el menor de los tres valores: un criterio **maximin**. Este criterio protege el valor recibido por quien menos hereda, pero puede dejar diferencias entre las cantidades; no equivale a exigir un reparto igualitario.

Qué buscaba: combinar modelización con lectura de tablas y dualidad. En la cuestión 2, el término independiente $-f_i$ permite identificar la fila que generó el corte y reconstruir los coeficientes desconocidos. En el problema 1, el denominador positivo permite una reformulación lineal que se resuelve con un solo pivotaje dual.

APÉNDICE F

Apoyo de otras asignaturas

Aquí se recuerdan las herramientas de álgebra lineal y análisis que usa el libro, con ejemplos y referencias para ampliar. La convexidad y los resultados propios de optimización se desarrollan en los capítulos y no se suponen conocidos.

F.1 Álgebra lineal

Es la asignatura de la que este libro tira más, y con diferencia. Todo el capítulo 3 es álgebra lineal con desigualdades encima.

Rango, y el teorema de Rouché-Frobenius

Para qué se usa. Para decidir, antes de empezar, si el conjunto factible es vacío, si las ecuaciones son incompatibles o redundantes, y si se puede partir la matriz en la forma $A = [B \mid N]$ sobre la que se monta el simplex entero.

El **rango** de $A \in M_{m\times n}$ es el número máximo de columnas linealmente independientes, que coincide con el de filas independientes y con el tamaño del mayor menor no nulo. El teorema dice que $Ax = b$ tiene solución si y solo si $\text{rango}(A \mid b) = \text{rango}(A)$; que la solución es única si además ese rango vale n; y que, si el sistema es compatible y $\text{rango}(A) = r < m$, hay $m - r$ ecuaciones redundantes. La compatibilidad de $Ax = b$ no basta para la de $Ax = b,\ x \geq 0$.

Ejemplo. En $\{x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3\}$ la matriz tiene rango 1 y la ampliada rango 2: el sistema es incompatible y el poliedro es vacío. Con el segundo miembro 2 en vez de 3, los dos rangos valen 1: la segunda ecuación es redundante y se tira.

En este libro el resultado se usa para justificar la hipótesis permanente $\text{rango}(A) = m < n$: sin ella, o no hay soluciones, o hay filas de sobra, o la solución es un único punto y no hay nada que optimizar.

DÓNDE ESTÁ. No hay un libro propio de Álgebra lineal. El enunciado, con las cuatro casuísticas, está reenunciado dentro de este libro, en el capítulo 2, sección 2.4. Usado en un problema real, en *Libro_EDOS*, capítulo «Problemas de contorno para un SDO lineal», sección «Problema de contorno

lineal»: la existencia y unicidad de solución de un problema de contorno se decide comparando el rango de una matriz con el de su ampliada, exactamente igual que aquí. Y la idea de rango como «no aplastarse», en *Libro_GL*, capítulo «Superficies regulares»: una parametrización es regular cuando su matriz jacobiana tiene rango máximo.

Bases, la partición $A = [B \mid N]$ y las matrices por bloques

Para qué se usa. Es la maquinaria del simplex, del simplex dual y de todo el análisis de sensibilidad. Si esta parte no está fluida, el capítulo 3 se lee como una sucesión de fórmulas.

Elegir una **base** es elegir m columnas de A que sean independientes; reordenando, se escribe $A = [B \mid N]$ con B cuadrada e invertible, y el vector de variables se parte igual, $x = (x_B, x_N)$. Con matrices por bloques se aplican las reglas de suma y producto, respetando las dimensiones y el orden de los factores:

$$Ax = [B \mid N] \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = Bx_B + Nx_N = b \quad \Longleftrightarrow \quad x_B = B^{-1}b - B^{-1}N\,x_N.$$

Esa última fórmula es la más usada del libro, y conviene leerla en palabras: elegidas m columnas independientes, las m variables correspondientes quedan determinadas por las otras $n - m$. Poniendo a cero las no básicas sale $x_B = B^{-1}b$, que es una solución básica.

Ejemplo. Con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $b = (4, 2)^T$, tomar como base las columnas tercera y cuarta da $B = I$ y $x_B = b = (4, 2)^T \geqq 0$: la solución básica factible de partida. Tomar la primera y la segunda da $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B^{-1}b = (3, 1)^T$, otro vértice.

DÓNDE ESTÁ. En *Libro_MM*, capítulo «Algunos modelos discretos», sección «El modelo de Leslie»: ahí están la caja de conexión sobre la forma de Jordan (matrices diagonales por bloques y potencias) y la caracterización de la irreducibilidad mediante bloques triangulares. En *Libro_EDOS*, capítulo «Sistemas Diferenciales Ordinarios Lineales», sección «Operadores lineales», están la norma de un operador y las normas matriciales, y más adelante la exponencial de una matriz, que es el ejemplo más vistoso de operar con una matriz como con un número.

Determinantes, la regla de Cramer y la inversa

Para qué se usa. Casi solo en un sitio, pero es un sitio decisivo: la **unimodularidad total** del capítulo de programación entera. La regla de Cramer dice que la solución de $Bx = b$ con B invertible tiene componentes $x_i = \det(B_i)/\det(B)$, donde B_i es B con la columna i sustituida por b. Todo el denominador del vértice es, entonces, $\det B$: si B y b son enteros y $\det B = \pm 1$, el vértice es entero. De ahí sale, en una línea, por qué los problemas de transporte, de asignación y de flujo se resuelven como si fueran continuos.

Ejemplo. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene $\det B = 1$, y para cualquier b entero la solución de $Bx = b$ es entera. Con $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det B = 2$, y con $b = (1, 0)^T$ sale $x = (1/2, 0)^T$: una fracción aparecida solo por culpa del determinante.

DÓNDE ESTÁ. Los determinantes se usan como herramienta en varios de los libros anteriores — en *Libro_GL* para la torsión y el producto mixto, en *Libro_EDOS* para el wronskiano y la fórmula de

Jacobi-Liouville — pero ninguno los desarrolla desde el principio. Lo que este libro necesita se reduce a lo escrito arriba, y se reenuncia donde se usa.

Núcleo, ortogonalidad y proyección sobre un subespacio

Para qué se usa. Para los métodos de gradiente proyectado del último capítulo. Rosen proyecta el gradiente sobre el núcleo de la matriz de las restricciones que mantiene con igualdad. Así obtiene direcciones que conservan esas igualdades; las desigualdades restantes se controlan al elegir el paso.

Dada $M \in M_{p\times n}$, su **núcleo** es $\ker M = \{d \in \mathbb{R}^n : \ Md = 0\}$, un subespacio de dimensión $n - \text{rango}(M)$; y el **complemento ortogonal** de un subespacio L es $L^{\perp} = \{v : \ v^T d = 0 \text{ para todo } d \in L\}$. Los dos se enganchan en una identidad que conviene tener presente: $\ker M$ es exactamente el complemento ortogonal del subespacio generado por las *filas* de M, porque $Md = 0$ dice que d es perpendicular a cada fila. Así, $\mathbb{R}^n = \ker M \oplus (\ker M)^{\perp}$: todo vector se descompone de manera única en una parte que conserva $Md = 0$ y otra en el espacio generado por las filas. Para desigualdades activas, una componente normal puede entrar en la región factible; no toda componente descartada está prohibida.

La **proyección ortogonal** de v sobre un subespacio L es el punto de L más cercano a v, y es una aplicación lineal: hay una matriz P con Pv igual a esa proyección, caracterizada por ser simétrica ($P = P^T$) e idempotente ($P^2 = P$). Cuando M tiene rango p (filas independientes, luego MM^T invertible), la proyección sobre $\ker M$ es

$$P = I - M^T(MM^T)^{-1}M,$$

y la lectura de esa fórmula es la que hay que recordar: a v se le resta su componente en la dirección del espacio generado por las filas de M, dejando solo la componente en $\ker M$.

Ejemplo. Con $M = (1 \ \ 1)$ en $\mathbb{R}^2$, $MM^T = 2$ y $P = I - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Proyectando $v = (1, 0)^T$ sale $Pv = (1/2, -1/2)^T$, que está sobre la recta $x_1 + x_2 = 0$, que es $\ker M$: se ha conservado de v lo único que no rompe la restricción.

DÓNDE ESTÁ. Las proyecciones ortogonales aparecen en *Libro_IE*, capítulo «Introducción a los modelos lineales», sección «Estimación por mínimos cuadrados»: el ajuste por mínimos cuadrados *es* la proyección del vector de datos sobre el subespacio generado por las columnas del diseño. Cuando X tiene rango completo por columnas, su matriz es $X(X^TX)^{-1}X^T$; restarla de la identidad da la proyección sobre el complemento ortogonal, como en la fórmula anterior. En *Libro_GL*, capítulo «Superficies regulares», sección «Plano tangente y vector normal a una superficie regular», la descomposición de un vector en su parte tangente y su parte normal es la misma operación vista geométricamente.

F.2 Análisis

El gradiente

Para qué se usa. Es una herramienta central de los dos capítulos no lineales, y aparece antes en la lectura de los precios sombra como derivadas.

Para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable, el **gradiente** $\nabla f(x)$ es el vector de las derivadas parciales, y su papel es este: la variación de f al moverse en la dirección d es, a primer orden, $\nabla f(x)^T d$. De ahí las dos propiedades que se usan sin parar: el gradiente no nulo es normal al nivel regular que pasa por el punto, porque la derivada a lo largo del nivel es cero; y da la dirección de máximo crecimiento entre vectores de norma euclídea uno, por Cauchy–Schwarz.

Ejemplo. Para $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ se tiene $\nabla f(x) = x$: el gradiente apunta hacia fuera desde el origen, que es donde f crece, y es perpendicular a las esferas de nivel.

DÓNDE ESTÁ. En *Libro_GL*, capítulo «Superficies regulares», sección «Construcción de superficies de nivel»: el gradiente no nulo es lo que impide que un nivel se pliegue, y la caja de idea de esa sección («el gradiente prohíbe que el nivel se pliegue») es exactamente la imagen que hace falta aquí. En el mismo capítulo, un ejercicio prueba que el gradiente es normal a las superficies de nivel; y la sección «Plano tangente y vector normal a una superficie regular» da la otra mitad de la imagen.

Hessiana, Taylor de segundo orden y el signo de una forma cuadrática

Para qué se usa. Son las condiciones de optimalidad sin restricciones: necesaria, suficiente local y suficiente global.

Si f es dos veces diferenciable, la **hessiana** $\nabla^2 f(x)$ es la matriz simétrica de las derivadas segundas, y el desarrollo de Taylor de segundo orden es

$$f(x^* + \lambda d) = f(x^*) + \lambda\, \nabla f(x^*)^T d + \frac{\lambda^2}{2}\, d^T \nabla^2 f(x^*)\, d + \lambda^2 \|d\|^2 \beta(x^*, x^* + \lambda d),$$

con $\beta \to 0$ cuando $\lambda \to 0$. En un punto con gradiente nulo el término de primer orden desaparece. El signo de la forma cuadrática $d^T \nabla^2 f(x^*) d$ decide en las direcciones donde no se anula; si se anula, pueden hacer falta términos de orden mayor. Conviene tener presentes los nombres: la matriz simétrica H es **definida positiva** si $d^T H d > 0$ para todo $d \neq 0$, y **semidefinida positiva** si $d^T H d \geq 0$; por ser simétrica, eso equivale a que todos sus autovalores sean, respectivamente, positivos o no negativos, y en dimensión dos se comprueba mirando el determinante y la traza.

Ejemplo. $f(x, y) = x^2 + y^2$ tiene hessiana $2I$, definida positiva: el origen es un mínimo estricto. $f(x, y) = x^2 - y^2$ tiene hessiana $\mathrm{diag}(2, -2)$, indefinida: el origen es una silla, y no es ni máximo ni mínimo aunque el gradiente se anule. $f(x, y) = x^4 + y^4$ tiene hessiana nula en el origen, que sí es mínimo; y $-x^4 - y^4$ tiene la misma hessiana nula y un máximo: el segundo orden no siempre decide.

DÓNDE ESTÁ. En *Libro_GL*, capítulo «Geometría extrínseca», sección «La segunda forma fundamental» y su apartado «Curvatura media, curvatura de Gauss y el teorema egregio de Gauss». Ahí está escrito que la diferencia entre la superficie y su plano tangente es, a segundo orden, una forma cuadrática, y que sus dos autovalores deciden si la superficie se queda a un lado (punto elíptico) o lo atraviesa (punto hiperbólico). Es la misma clasificación que aquí distingue un extremo estricto (mínimo o máximo) de una silla. El desarrollo de Taylor como herramienta, en el mismo libro, capítulo «Curvas regulares», sección «La forma canónica local».

Puntos críticos y condiciones de segundo orden para extremos libres

Para qué se usa. Es lo que el lector trae del cálculo de varias variables y lo que el capítulo 6 rehace en $\mathbb{R}^n$ y con demostración. Conviene tener el enunciado delante antes de leerlo, porque el capítulo lo generaliza y lo usa sin volver a contarlo desde el principio.

Sea f definida en un abierto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $x^* \in S$.

- **Condición necesaria de primer orden.** Si f es diferenciable y x^* es un mínimo local, entonces $\nabla f(x^*) = 0$. Los puntos donde el gradiente se anula se llaman **críticos** o **estacionarios**.
- **Condición necesaria de segundo orden.** Si además f es dos veces diferenciable y x^* es un mínimo local, entonces $\nabla^2 f(x^*)$ es *semi*definida positiva.
- **Condición suficiente de segundo orden.** Si $\nabla f(x^*) = 0$ y $\nabla^2 f(x^*)$ es *definida* positiva, entonces x^* es un mínimo local estricto. Para máximos, todo igual con la hessiana definida negativa; y si la hessiana es indefinida — autovalores de los dos signos — el punto es una silla y no es ni máximo ni mínimo.

Entre la necesaria y la suficiente queda un hueco, el de la hessiana semidefinida pero no definida, y en ese hueco el segundo orden no decide. La comprobación práctica en dimensión dos es la que se aprende primero: con $H = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$, $\det H = ac - b^2 > 0$ y $a > 0$ dan definida positiva; $\det H > 0$ y $a < 0$, definida negativa; y $\det H < 0$, indefinida, es decir, silla.

Ejemplo. $f(x, y) = x^2 + y^2$ tiene gradiente nulo solo en el origen y hessiana $2I$: mínimo estricto. $f(x, y) = x^2 - y^2$ tiene la misma condición de primer orden en el origen y hessiana $\operatorname{diag}(2, -2)$: silla. Y $f(x, y) = x^4 + y^4$ y $-x^4 - y^4$ tienen las dos hessiana nula en el origen, una con mínimo y otra con máximo: ese es exactamente el hueco.

DÓNDE ESTÁ. En este mismo libro, capítulo 6, secciones 6.2.2 y 6.2.4, con las demostraciones enteras y la discusión de qué se rompe al quitar cada hipótesis. La versión geométrica de la misma clasificación, en *Libro_GL*, capítulo «Geometría extrínseca»: punto elíptico, hiperbólico y parabólico son mínimo o máximo, silla y caso indeciso.

El teorema de la función implícita

Para qué se usa. Es la herramienta que permite tratar una restricción de igualdad $h(x) = 0$ como si fuera un despeje. Aparece tres veces en el capítulo de programación no lineal con restricciones: para justificar que un conjunto definido por igualdades se puede parametrizar localmente, para demostrar las condiciones necesarias cuando hay igualdades, y para estudiar, bajo las hipótesis de sensibilidad, una rama diferenciable de soluciones y multiplicadores al perturbar los datos. Esa regularidad permite interpretar los multiplicadores como derivadas.

Enunciado. Sea $h = (h_1, \ldots, h_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno de $\hat{x}$, con $h(\hat{x}) = 0$ y $m < n$. Supóngase que la matriz jacobiana $\left(\partial h_j / \partial x_i(\hat{x})\right)$, de tamaño $m \times n$, tiene rango m; reordenando las variables, esto quiere decir que se pueden elegir m de ellas, llámense $y \in \mathbb{R}^m$, dejando las otras $n - m$ como z, de modo que la submatriz cuadrada $\partial h / \partial y(\hat{x})$ sea invertible. Entonces existen un entorno U de $\hat{z}$, un entorno V de $\hat{y}$ y una única función $\varphi : U \to V$ de clase $\mathcal{C}^1$ con $\varphi(\hat{z}) = \hat{y}$ tales que, para $z \in U$ e $y \in V$,

$$h(y, z) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \varphi(z),$$

y además la derivada de φ se calcula sin conocer φ:

$$D\varphi(\hat{z}) = -\left[\frac{\partial h}{\partial y}(\hat{x})\right]^{-1} \frac{\partial h}{\partial z}(\hat{x}).$$

El teorema garantiza un despeje local y permite calcular su derivada, aunque no se disponga de una fórmula explícita para φ. En ejemplos sencillos sí se puede despejar y sustituir; los multiplicadores permiten trabajar sin necesitar ese despeje.

Ejemplo. Para $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ en el punto $(0, 1)$ se tiene $\partial h/\partial x_2 = 2x_2 = 2 \neq 0$, y el teorema despeja $x_2 = \varphi(x_1) = \sqrt{1 - x_1^2}$ cerca de ese punto. En $(1, 0)$ esa parcial se anula y ahí no se puede despejar x_2; pero $\partial h/\partial x_1 = 2 \neq 0$, y lo que se despeja es x_1 en función de x_2. El rango 1 de la jacobiana completa garantiza que *alguna* de las dos cosas se puede hacer siempre, que es justo lo que el teorema pide.

DÓNDE ESTÁ. En *Libro_GL*, capítulo «Superficies regulares», sección «Construcción de superficies de nivel»: ahí se usa exactamente así, con $m = 1$ y $n = 3$, para probar que un conjunto de nivel con gradiente no nulo es localmente el grafo de una función y por tanto una superficie regular. La demostración de ese resultado tiene el teorema de la función implícita como núcleo, y está escrita paso a paso.

Compacidad y el teorema de Weierstrass

Para qué se usa. Es la respuesta a la primera pregunta de cualquier problema de optimización: ¿existe solución? Aparece dentro de varias demostraciones del capítulo 2, donde se toma el mínimo de una función continua sobre un cerrado y acotado — el teorema de la proyección, sin ir más lejos — y abre los dos capítulos no lineales, donde da un criterio de existencia antes de buscar la solución.

En $\mathbb{R}^n$, un conjunto es **compacto** si y solo si es cerrado y acotado (Heine-Borel), y eso equivale a que toda sucesión suya tenga una subsucesión convergente dentro de él (Bolzano-Weierstrass). El **teorema de Weierstrass** dice que una función continua sobre un compacto no vacío alcanza su máximo y su mínimo: no solo están acotados, sino que hay un punto donde se alcanzan.

Ejemplo. $f(x) = 1/x$ sobre $(0, 1]$ no alcanza máximo, y no porque f falle sino porque el conjunto no es cerrado. $f(x) = x$ sobre $[0, \infty)$ no alcanza máximo porque el conjunto no es acotado — que es, dicho en el lenguaje de este libro, el caso ilimitado. Las dos situaciones muestran cómo puede fallar la existencia sin compacidad; no implican que todo problema en un conjunto no compacto carezca de extremos.

DÓNDE ESTÁ. En *Libro_EDOS*, capítulo «El Teorema de existencia y unicidad de Picard», sección «Compacidad»: ahí están Heine-Borel, la lectura sucesional y la advertencia de que en dimensión infinita cerrado y acotado no basta para ser compacto. En *Libro_GTS*, capítulo «Introducción», sección «Compacidad», está la comparación entre la compacidad por recubrimientos y la sucesional. Y en *Libro_MM*, capítulo «Algunos modelos discretos», Weierstrass se usa dos veces en serio: para que el supremo de la demostración de Perron-Frobenius se alcance, y para extraer una subsucesión convergente en el símplice al construir el vector de PageRank.

F.3 La convexidad que se usa, y de dónde viene

La convexidad de conjuntos no se da por sabida: el capítulo 2 la construye desde la definición. Lo que sí conviene tener claro de antemano es que **hay dos convexidades** y que este libro usa las dos en sitios distintos.

La de **conjuntos**, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$, es la del capítulo 2 y la que sostiene la separación, Farkas y los poliedros. La de **funciones**, $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$, es la que aparece en los capítulos 6 y 7, y es la que garantiza que un mínimo local sea global. Las dos están unidas por dos puentes que conviene reconocer: una función es convexa si y solo si el conjunto que queda por encima de su gráfica es convexo, y — para funciones dos veces diferenciables sobre un abierto convexo — si y solo si su hessiana es semidefinida positiva en todo punto. Ese segundo puente es el que convierte una comprobación global en una cuenta local, y es la razón de que la hessiana aparezca en el enunciado de las condiciones de optimalidad global.

DÓNDE ESTÁ. En este mismo libro: los conjuntos convexos, en el capítulo 2; las funciones convexas, en el capítulo 6. La clasificación de los puntos de una superficie según que se quede a un lado de su plano tangente o lo atraviese está en *Libro_GL*, capítulo «Geometría extrínseca». El plano tangente describe la geometría local; ser soporte global requiere la propiedad de convexidad estudiada en el capítulo 2.

F.4 Conocimientos previos

El punto de partida es el álgebra lineal y el cálculo de varias variables. El libro desarrolla convexidad, poliedros, programación lineal y condiciones de optimalidad. Este apéndice recuerda los resultados auxiliares usados en sus demostraciones.

La conexión con Inferencia estadística es directa. La máxima verosimilitud optimiza $L(\theta)$ sobre el espacio de parámetros, que puede tener restricciones. En un óptimo interior diferenciable, el gradiente de la log-verosimilitud se anula. Su hessiana negativa es la información observada; la información de Fisher es su esperanza bajo condiciones de regularidad. El ajuste por mínimos cuadrados del modelo lineal, por su parte, minimiza una cuadrática convexa, uno de los ejemplos del capítulo 6.

DÓNDE ESTÁ. En *Libro_IE*, capítulo «Estimación puntual paramétrica», sección «Método de máxima verosimilitud», y capítulo «Introducción a los modelos lineales», sección «Estimación por mínimos cuadrados». El mismo ajuste, hecho a mano y con MATLAB, en *Libro_MM*, en las prácticas del primer tema.

APÉNDICE G

Sesión cero de AMPL

LA PREGUNTA

Un ingeniero tiene delante un problema de reparto: tres almacenes, siete ciudades, unos costes de transporte y una condición de que no sobre ni falte nada. Lo escribe en una hoja, lo resuelve, y al día siguiente le dicen que ahora son cuatro almacenes y once ciudades, y que además cambian sus capacidades. Volver a empezar le cuesta la mañana entera, y el error que comete al copiar los números no lo detecta nadie. ¿Se puede escribir un problema de optimización *una sola vez*, de forma que cambiar los datos no obligue a tocar ni una línea de lo que dice el problema?

Este apéndice enseña AMPL desde cero: qué es, cómo se prepara el entorno, qué se escribe en cada fichero y cómo se lee lo que devuelve. Los ejemplos de producción, transporte, localización y redes sirven para pasar de la formulación matemática al código. Los capítulos 1 a 5 incluyen además los modelos completos junto a los ejercicios donde se utilizan.

Y conviene decir de entrada qué relación hay entre las dos escrituras, porque ordena todo lo que sigue: **el código de AMPL *es* el modelo, escrito con otra puntuación**. La formulación matemática guía el aprendizaje de la sintaxis. Donde el papel escribe un subíndice, AMPL escribe un corchete; donde el papel escribe «para todo $i \in I$» al final de la línea, AMPL lo escribe entre llaves al principio; y donde el papel escribe $\sum_{j \in J}$, AMPL escribe `sum {j in J}`. Por eso el orden de este capítulo es siempre el mismo: primero el modelo en el papel, y el código detrás.

Cómo se lee este apéndice. Con AMPL abierto al lado, o con NEOS (página 593). Los bloques se guardan en los ficheros indicados; los fragmentos que solo ilustran sintaxis se incorporan al modelo correspondiente. Las salidas en gris muestran los valores que se van a interpretar. El formato, el número de iteraciones y, si hay varios óptimos, la solución concreta pueden variar entre solvers. Lo que se compara es el estado de la resolución, el valor objetivo y la factibilidad, teniendo en cuenta el redondeo de los decimales impresos.

Qué es AMPL y por qué existe un lenguaje solo para modelar

Resolver un problema de optimización con un ordenador exige tres cosas distintas, y la idea central de AMPL es que conviene mantenerlas separadas:

1. **El modelo**: qué se decide, qué se optimiza y qué restricciones hay. Es matemática: expresa relaciones que pueden parametrizarse para distintas instancias. «Cada cliente se sirve desde exactamente una planta» es modelo.
2. **Los datos**: los números de esta instancia. «El cliente 3 demanda 10 unidades» es dato.
3. **El algoritmo**: el simplex, la ramificación y acotación, los cortes. Es el contenido de los capítulos 3 a 5 de este libro, y lo ejecuta un programa aparte al que se llama *solver*.

AMPL (*A Mathematical Programming Language*) es un lenguaje para escribir la primera de las tres cosas. Se escribe el modelo una vez, en un fichero; los datos van en otro; y el solver se elige en una línea. Cambiar de instancia es cambiar el fichero de datos, y cambiar de solver es cambiar esa elección, siempre que admita el tipo de modelo. Un mismo solver puede ofrecer varios algoritmos, seleccionados mediante sus opciones.

Eso tiene una consecuencia que se nota enseguida: un modelo de AMPL bien escrito se lee casi como el enunciado matemático. Donde el papel dice

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad \text{para todo } i \in I,$$

AMPL dice

```
subject to restricciones {i in I}:  sum {j in J} a[i,j]*x[j] <= b[i];
```

y no hay ningún paso intermedio. Esa correspondencia casi literal es la razón de ser del lenguaje, y también la razón de que aprenderlo cueste poco cuando ya se sabe formular.

El camino que no se tomó: otras formas de trabajar

Una hoja de cálculo. Permite formular y resolver problemas pequeños con variables en celdas y un complemento de optimización. Cuando crecen las familias de restricciones, una formulación indexada hace más fácil leerlas y revisarlas juntas.

Programar el simplex. Es útil para estudiar el algoritmo del capítulo 3. Una implementación general puede recibir matrices de distintos tamaños, pero debe tratar también la degeneración y los errores numéricos. AMPL permite concentrarse en la formulación y confiar la resolución a una implementación especializada.

De dónde viene: de dónde sale AMPL

AMPL lo diseñaron en los Laboratorios Bell, a mediados de los años ochenta, Robert Fourer, David Gay y Brian Kernighan — coautor, con Dennis Ritchie, de *The C Programming Language* — y lo describieron en un artículo de 1990 en *Management Science* titulado «A Modeling Language for Mathematical Programming». El problema que tenían delante era exactamente el de la pregunta que abre este capítulo: en la industria, los modelos de optimización se escribían mediante programas que generaban la matriz de coeficientes. Mantener y revisar esa generación podía ocultar la estructura matemática. La propuesta fue separar la descripción del problema de su resolución, con una sintaxis lo bastante cercana a la notación matemática como para que el modelo se pudiera leer y discutir. Es la misma idea que hay detrás de GAMS, algo anterior, y de los lenguajes que vinieron después.

Instalar AMPL, o usarlo sin instalar nada

Hay dos formas de ejecutar los ejemplos; la disponibilidad de cada solver depende del entorno.

1. Instalarlo en el ordenador. En `https://portal.ampl.com` se obtiene el paquete para el sistema y la licencia correspondiente. La guía `https://dev.ampl.com/ampl/install.html` explica la instalación: macOS y Windows disponen de instalador; en Linux se descomprime el paquete. Si se entrega un identificador de licencia, se activa siguiendo esa guía y se reinicia AMPL. Hay licencias académicas y una Community Edition gratuita para aprendizaje personal. Esta última incluye solvers de código abierto como HiGHS; el acceso a CPLEX tiene sus propias condiciones. Para los modelos lineales y enteros del apéndice puede usarse `option solver highs;` en lugar de `option solver cplex;`, salvo las consultas de sensibilidad, que requieren la interfaz indicada en su sección.

Al arrancar `ampl` aparece un símbolo de espera:

```
ampl:
```

Ahí se teclean órdenes, una por línea, terminadas en punto y coma. Se sale con `quit;`.

2. No instalar nada: NEOS Server. `https://neos-server.org` permite enviar un problema a un solver remoto. En el formulario de CPLEX/AMPL se cargan el modelo en *Model File*, los datos en *Data File* y las órdenes en *Commands File*; también se pide un correo electrónico. El tiempo de respuesta depende del trabajo y de la cola del servicio.

Aquí hay una diferencia concreta con la ejecución local: NEOS carga y renombra los ficheros de modelo y datos. Por ello, del guion local se retiran `reset;`, `model ...;` y `data ...;`; se conservan las opciones pertinentes, `solve;` y los `display`. En particular, el fichero de órdenes de CPLEX/AMPL debe incluir `solve;` y no debe contener órdenes `model` ni `data`. El formulario del solver contiene las instrucciones vigentes.

Las cinco órdenes iniciales. Con ellas se carga, resuelve y consulta un modelo en una sesión local:

```
model  ejemplo.mod;    # carga el modelo
data   ejemplo.dat;    # carga los datos
option solver cplex;   # elige quien va a resolver
solve;                 # resuelve
display x, z;          # muestra lo que interese
```

Una sexta orden evita mezclar modelos: `reset;` borra las declaraciones y los datos, pero conserva las opciones. Cargar dos veces un modelo sin borrarlo da un error de símbolo repetido; por eso casi todos los ficheros de referencia empiezan por `reset;`. Para restaurar también las opciones iniciales se usa `reset options;`.

El primer modelo, completo y sin índices

Se empieza por el modelo más pequeño que tiene todas las piezas. Una fábrica produce tres artículos, que dejan 15, 18 y 10 euros por unidad, y consumen tres recursos de los que hay 50 unidades de cada uno. En notación matemática:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & 15x_1 + 18x_2 + 10x_3 \\ \text{sujeto a:} \quad & 2x_1 + \ x_2 + 3x_3 \leq 50, \\ & 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 50, \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 50, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Y en AMPL, con una línea por cada línea de arriba:

```
reset;

# variables
var x1 >= 0;
var x2 >= 0;
var x3 >= 0;

# funcion objetivo
maximize z: 15*x1 + 18*x2 + 10*x3;

# restricciones
s.t. r1: 2*x1 +   x2 + 3*x3 <= 50;
s.t. r2: 4*x1 + 2*x2 + 3*x3 <= 50;
s.t. r3: 3*x1 + 4*x2 + 2*x3 <= 50;
```

Palabra por palabra, porque cada una vuelve a salir en todos los modelos siguientes:

- `var x1 >= 0;` declara una **variable de decisión** y de paso su cota inferior. La no negatividad no es una restricción aparte: se escribe pegada a la variable. Si una variable puede ser negativa se declara `var t;` sin más, y si tiene cotas por los dos lados, `var x >= 0, <= 10;`.
- `maximize z:` da un **nombre** al objetivo (aquí `z`) y después de los dos puntos va la expresión. Para minimizar, `minimize`. El nombre no es adorno: luego se escribe `display z;` para ver su valor.
- `s.t.` es la abreviatura de `subject to`, y las dos formas valen. Cada restricción lleva también su nombre — `r1`, `r2`, `r3` — y ese nombre hace falta después para preguntar por su precio sombra.
- El asterisco de la multiplicación **no se puede omitir**. `15x1` no es $15x_1$: es un error de sintaxis. Es el fallo más frecuente al empezar.
- Todo termina en **punto y coma**. Todo lo que va detrás de `#` es un comentario.

Guardado como `basico.mod`, se resuelve así:

```
model basico.mod;
option solver cplex;
solve;
display x1, x2, x3;
display z;

x1 = 10
```

```
x2 = 5
x3 = 0
z = 240
```

Merece la pena mirar ese resultado con los ojos del capítulo 3. El óptimo tiene una variable nula de tres, y dos de las tres restricciones se cumplen con igualdad ($4 \cdot 10 + 2 \cdot 5 = 50$ y $3 \cdot 10 + 4 \cdot 5 = 50$), mientras que a la primera le sobran 25. Las dos igualdades y $x_3 = 0$ son independientes y fijan un vértice. El teorema fundamental de la programación lineal garantiza que hay un vértice óptimo; el simplex lo busca cambiando de base. Para saber qué algoritmo ha usado el solver hay que mirar sus opciones y su informe.

Un segundo, para fijar la sintaxis. El otro ejemplo introductorio del libro de referencia, con `subject to` escrito entero:

```
# Fabricacion de tres productos con dos materias primas
reset;

var x1 >= 0;
var x2 >= 0;
var x3 >= 0;

maximize z: 2*x1 + 6*x2 + 3*x3;

subject to restriccion1: x1 + 2*x2 + 3*x3 <= 25;
subject to restriccion2: 2*x1 + x2 + 3*x3 <= 30;
```

```
x1 = 0
x2 = 12.5
x3 = 0
z = 75
```

Guardado este segundo bloque como `productos.mod`, se ejecutan las mismas órdenes del primero, cambiando `model basico.mod;` por `model productos.mod;`.

Un detalle que no conviene pasar por alto: la solución óptima es fraccionaria. Si x_2 fueran unidades indivisibles, este modelo estaría mal y habría que declarar la variable entera. Ese es exactamente el salto del capítulo 5, y en AMPL es una palabra.

Separar el modelo de los datos: `.mod`, `.dat` y `.run`

LA PREGUNTA

El modelo anterior tiene tres productos y dos materias primas escritos a mano, uno por línea. Con treinta productos y veinte materias primas harían falta veinte restricciones de treinta sumandos cada una: seiscientos números tecleados, y ningún sitio donde se pueda leer qué dice el problema. Sin embargo, el problema es *el mismo* — maximizar un beneficio sujeto a unas capacidades — y su enunciado matemático cabe en dos líneas. ¿Cómo se escribe un problema de manera que su tamaño no dependa del tamaño de los datos?

Aquí está el salto conceptual, y conviene darlo con el mismo ejemplo de antes, para que se reconozca la misma familia de problemas. El problema general es

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \sum_{j \in P} c_j x_j \\ \text{sujeto a:} \quad & \sum_{j \in P} a_{ij} x_j \le b_i \quad \text{para todo } i \in M, \\ & x_j \ge 0 \quad \text{para todo } j \in P, \end{aligned}$$

donde P es el conjunto de productos, M el de materias primas, c_j el beneficio unitario, a_{ij} lo que el producto j consume de la materia i y b_i lo disponible de esa materia. La descripción vale para tres productos y para treinta mil; el número de variables y restricciones que se genera sí crece con los datos.

El fichero de modelo, `produccion.mod`:

```
# Fabricacion de n productos a partir de m materias primas.
reset;

# tamanos del problema
param n >= 0, integer;
param m >= 0, integer;

# conjuntos de indices
set PRODUCTOS := 1..n;
set MPRIMAS   := 1..m;

# datos del modelo
param c {PRODUCTOS};              # beneficio unitario
param b {MPRIMAS};                # disponibilidad
param a {MPRIMAS, PRODUCTOS};     # consumo unitario

# variables de decision
var x {j in PRODUCTOS} >= 0;

# funcion objetivo
maximize z: sum {j in PRODUCTOS} c[j]*x[j];

# restricciones
subject to restriccion {i in MPRIMAS}:
    sum {j in PRODUCTOS} a[i,j]*x[j] <= b[i];
```

Cinco piezas de sintaxis que reaparecerán en los modelos:

- `param` declara un **dato**: algo cuyo valor se dará en el fichero de datos y que el modelo no decide. `param n` es un escalar; `param c {PRODUCTOS}` es una familia de escalares, uno por cada índice; `param a {MPRIMAS, PRODUCTOS}` es una tabla de doble entrada. Las condiciones que se le añaden (`>= 0`, `integer`) no son restricciones del problema: son comprobaciones sobre el dato, y si el fichero de datos las incumple, AMPL avisa antes de resolver nada.
- `set` declara un **conjunto de índices**. `1..n` es el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$; también se puede declarar `set PRODUCTOS;` a secas y dar sus elementos en el fichero de datos, que es lo que se hace cuando los índices son nombres y no números.
- Los **corchetes** son la evaluación: `c[j]` es c_j y `a[i,j]` es a_{ij}. Las **llaves** son la indexación: `{j in PRODUCTOS}` es «para cada $j \in P$». Confundir unos con otras es el segundo error más frecuente.
- `sum {j in PRODUCTOS} c[j]*x[j]` es $\sum_{j \in P} c_j x_j$, literalmente. El índice de la suma vive solo dentro de ella.
- `subject to restriccion {i in MPRIMAS}`: declara una **familia** de restricciones, una por cada i. En el papel es el «para todo $i \in M$» que va al final; en AMPL va delante, entre llaves, pegado al nombre.

El fichero de datos, `produccion.dat`, con la instancia de tres productos y dos materias primas. Es una variante del ejemplo anterior: aquí el consumo a_{13} vale 2 en vez de 3; los demás datos coinciden:

```
param n := 3;
param m := 2;

param c :=
  1  2
  2  6
  3  3;

param a :  1  2  3 :=
       1  1  2  2
       2  2  1  3;

param b :=
  1  25
  2  30;
```

Estas son tres formas habituales de introducir parámetros. Un **escalar** se da con `param n := 3;`. Un **vector** se da como una lista de pares índice-valor, sin comas. Una **tabla** se da con la fila de índices de columna después de los dos puntos, `:=` al final de esa fila, y luego una línea por índice de fila. Los espacios y los saltos de línea no significan nada: lo único que separa una declaración de la siguiente es el punto y coma.

Hay un cuarto detalle muy útil: un **punto** en una tabla significa «este valor no se da». Si el parámetro tiene un valor `default`, se usa ese valor en su lugar. Por ejemplo:

```
param tiempo {SEC, COL} default 10000;   # en el .mod
```

```
param tiempo :  1   2   3 :=            # en el .dat
            1  15   .  30
```

```
2  35  10   5
3  17  23   .
4   .  18   7;
```

Aquí los puntos reciben el valor 10000. Un coste grande penaliza una ruta, pero **no la prohíbe**: todavía pertenece al conjunto factible y puede llegar a usarse. Para representar una ruta inexistente se elimina esa pareja del conjunto de índices o se fija su variable a cero. El modelo de colegios del capítulo 1 utiliza esta distinción entre datos y compatibilidad.

El fichero de ejecución, `produccion.run`:

```
reset;
model produccion.mod;
data  produccion.dat;
option solver cplex;
expand;
solve;
display x;
display z;
```

El orden importa: primero el modelo, después los datos. Al revés, AMPL no sabe a qué símbolo asignar los números y protesta.

El diccionario. Esta tabla es lo que hay que tener en la cabeza; todo lo demás del lenguaje es detalle.

En notación matemática	En AMPL
$I = \{1, \ldots, n\}$	`set I := 1..n;`
c_j dato, $j \in J$	`param c {J};`
a_{ij} dato, $i \in I$, $j \in J$	`param a {I,J};`
$x_j \geq 0$ variable	`var x {J} >= 0;`
$x_j \in \{0,1\}$	`var x {J} binary;`
$x_j \in \mathbb{Z}$, $x_j \geq 0$	`var x {J} >= 0, integer;`
mín $\sum_j c_j x_j$	`minimize z: sum {j in J} c[j]*x[j];`
$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i$ para todo i	`s.t. r {i in I}: sum {j in J} a[i,j]*x[j] <= b[i];`
$\sum_{j : j \neq i} x_{ij}$	`sum {j in J: j <> i} x[i,j]`
$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J}$	`sum {i in I, j in J}`

Las dos últimas filas son las que se olvidan. Una **condición dentro del índice** se escribe con dos puntos: `{i in I: i <> 1}` recorre todos los índices menos el primero, y `{i in I, j in J: a[i,j] > 0}` recorre solo las parejas con coeficiente positivo. Los operadores de comparación son `<`, `<=`, `=`, `<>`, `>=`, `>`, y se combinan con `and`, `or` y `not`. Y una suma doble no necesita dos `sum`: basta separar los índices con una coma dentro de las mismas llaves.

Conjuntos con nombre, y los datos de un conjunto

LA PREGUNTA

En el modelo anterior los índices eran números: `1..n`. Pero un problema real no habla de la materia prima número 2, habla del acero; y el conjunto de orígenes de un reparto no se sabe al escribir el modelo, porque depende de la instancia. ¿Cómo se escribe un modelo cuyos *índices* también son un dato?

Hasta aquí los conjuntos se han definido dentro del modelo con `set PRODUCTOS := 1..n;`. Se puede hacer otra cosa, y es lo normal en cuanto el problema tiene nombres: declarar el conjunto **sin asignarle aún sus elementos** y darlos en el fichero de datos. La declaración es una sola palabra:

```
set A;      # los origenes; sus elementos vienen del .dat
set B;      # los destinos
```

y en el `.dat` los elementos van detrás de `:=`, separados por espacios y sin comas:

```
set A := 1 2 3;
set B := 1 2 3 4 5 6 7;
```

Los elementos pueden ser números o palabras: `set MPRIMAS := acero cobre plastico;` es igual de válido, y entonces el dato se escribe `param b := acero 25 cobre 30 plastico 12;`. Cuando los índices tienen nombre, el modelo se lee muchísimo mejor, y `card(A)` devuelve cuántos elementos tiene, por si hace falta contarlos.

El modelo completo: un transporte equilibrado. Tres orígenes con unas disponibilidades, siete destinos con unas demandas, un coste por cada pareja, y la condición de que todo lo que sale se reparta y todo lo que se pide se cubra. En notación matemática:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & \sum_{i\in A}\sum_{j\in B} c_{ij}\,x_{ij} \\
\text{sujeto a:} \quad & \sum_{j\in B} x_{ij} = d_i \quad \text{para todo } i\in A \qquad \text{(sale todo lo disponible)}, \\
& \sum_{i\in A} x_{ij} = e_j \quad \text{para todo } j\in B \qquad \text{(llega toda la demanda)}, \\
& x_{ij} \geq 0.
\end{aligned}
$$

Con igualdades en los dos grupos, el problema solo puede ser factible si $\sum_i d_i = \sum_j e_j$; si la oferta total y la demanda total no coinciden, no hay ninguna solución y el solver podrá detectar la infactibilidad. AMPL permite comprobarlo antes, y esa es la última pieza nueva del lenguaje:

```
# ---------- transporte.mod ----------
reset;

set A;                                  # origenes
set B;                                  # destinos

param disponibilidad {A} >= 0, default 10;
param demanda {B} >= 0, default 10;
```

```
# condicion sobre los DATOS, no sobre las variables:
check: sum {i in A} disponibilidad[i] = sum {j in B} demanda[j];

param coste {A,B} >= 0, default 1;

var Asignar {i in A, j in B} >= 0;

minimize Total_coste:
    sum {i in A, j in B} coste[i,j]*Asignar[i,j];

s.t. Disponibilidades {i in A}:
    sum {j in B} Asignar[i,j] = disponibilidad[i];

s.t. Demandas {j in B}:
    sum {i in A} Asignar[i,j] = demanda[j];
```

Tres cosas nuevas, y las tres se repiten mucho:

- `check: ...;` es una **comprobación sobre los datos**. No es una restricción del problema: AMPL la comprueba al generar el problema para resolverlo y avisa si es falsa. Aquí comprueba la igualdad de las sumas de oferta y demanda, lo que ayuda a detectar un desequilibrio antes de llamar al solver.
- `param disponibilidad {A} >= 0, default 10;` muestra que las cotas y el `default` valen igual con conjuntos que vienen de los datos. El `>= 0` no es una restricción: es una comprobación de que no se ha tecleado una disponibilidad negativa.
- El objetivo y las restricciones llevan aquí **nombres largos** (`Total_coste`, `Disponibilidades`, `Demandas`) en vez de `z`, `r1`, `r2`. Es preferible en cuanto el modelo pasa de tres restricciones, porque esos nombres son los que aparecen después en la salida y en las preguntas sobre valores duales.

El fichero de datos, con la instancia:

```
# ---------- transporte.dat ----------
set A := 1 2 3;
set B := 1 2 3 4 5 6 7;

param disponibilidad :=
  1 1400   2 2600   3 2900;

param demanda :=
  1  900   2 1200   3  600   4  400
  5 1700   6 1100   7 1000;

param coste :  1   2   3   4   5   6   7 :=
           1 39  14  11  14  16  82   8
           2 27   9  12   9  26  95  17
           3 24  14  17  13  28  99  20;
```

Obsérvese que `disponibilidad` y `demanda` se dan con varias parejas índice-valor *en la misma línea*: como ya se dijo, los espacios y los saltos de línea no significan nada, y lo único que cierra una declaración es el punto y coma. Las dos sumas valen 6900, así que el `check` pasa.

```
model transporte.mod;
data  transporte.dat;
```

```
option solver cplex;
solve;
display Asignar;
display Total_coste;
```

```
Asignar [*,*]
:      1     2     3     4     5     6     7    :=
1      0     0     0     0     0  1100   300
2      0  1200   600   400     0     0   400
3    900     0     0     0  1700     0   300
;

Total_coste = 196200
```

Vale la pena leer ese plan antes de seguir, porque dice algo del problema y no solo del programa. El destino 6 es carísimo desde todas partes (82, 95, 99), y el óptimo lo sirve entero desde el origen 1, que es el más barato de los tres para él; el destino 7, en cambio, recibe mercancía de los tres orígenes. Las nueve casillas positivas forman aquí una base no degenerada: el rango de las ecuaciones de un transporte completo y equilibrado es $3 + 7 - 1$. En una solución básica degenerada puede haber menos casillas positivas. La razón del rango se explica en el capítulo 5.

LA IDEA: `param` TAMBIÉN ADMITE `binary`

La palabra `binary` no es exclusiva de `var`. Sobre un `param` significa otra cosa: no crea nada que el solver decida, sino que **exige que el dato sea** 0 **o** 1, igual que `integer` exige que sea entero. Es muy cómodo para las tablas de compatibilidad, que son la forma habitual de dar un grafo:

```
param compat {PEDIDOS, CAMIONES} binary default 0;
```

Con `default 0`, en el fichero de datos solo hay que escribir los unos, y toda pareja que no aparezca se entiende incompatible. Y entonces «los camiones compatibles con el pedido *i*» se escribe con una condición dentro del índice, sin construir el conjunto a mano: `sum {j in CAMIONES: compat[i,j] = 1} y[j]`. La diferencia con `var ...binary` es la de siempre: el `param` es un dato que se comprueba, la `var` es una incógnita que se decide.

Variables enteras y binarias

Para declarar una variable entera o binaria se añade una palabra. Las líneas siguientes son alternativas de sintaxis, no declaraciones para pegar juntas en un mismo modelo:

```
var x {J} >= 0;               # continua no negativa
var x {J} >= 0, integer;      # entera no negativa
var x {J} binary;             # binaria: equivale a >= 0, <= 1, integer
var t;                        # libre, sin signo
var y {J} >= 0, <= 1;         # continua entre 0 y 1: NO es binaria
```

La última línea es la que hay que mirar dos veces. `>= 0, <= 1` es la **relajación lineal** de `binary`: el mismo poliedro, sin la condición de integridad. Confundirlas da otro problema

sin producir un error de sintaxis. Una componente como 0,4 revela la diferencia, pero una solución entera no demuestra por sí sola que se haya declarado bien el dominio. Toda la teoría del capítulo 5 vive en la distancia entre esas dos declaraciones.

Dos piezas pequeñas que hacen falta enseguida. La primera es la **potencia**, que se escribe con el acento circunflejo: `n^2` es n^2 y `2^k` es 2^k. Aparece sobre todo en los tamaños de los conjuntos de índices, como en `1..(n^2)`, y conviene poner los paréntesis: `1..n^2` también funciona, pero se lee peor.

La segunda es la **expresión condicional** `if ...then ...else ...`. No es una orden que se ejecute: es una expresión que *devuelve un valor*, y por eso puede ir dentro de una suma o de una cota. Sirve para escribir en una línea lo que en el papel se escribe partiendo en casos:

```
# coste unitario con recargo para los envios largos
param recargo {i in I, j in J} := if d[i,j] > 100 then 1.5 else 1;

# abre[j] es un DATO binario: la planta ya existe o no
var x {j in J} >= 0, <= if abre[j] = 1 then K[j] else 0;
```

En esos fragmentos la condición depende de datos y AMPL puede evaluarla antes de resolver. También admite condiciones que dependen de variables dentro de expresiones y restricciones; su tratamiento depende de la interfaz del solver. Las interfaces actuales basadas en MP pueden reformular muchas de ellas. En los ejemplos siguientes escribiremos explícitamente las binarias y las desigualdades de enlace para ver el modelo lineal que representan (página 602).

Antes de declarar una binaria conviene escribir qué significa que valga uno: «`x[i,j] = 1` si el cliente *i* se sirve desde la planta *j*» permite interpretar la solución. Las restricciones dirán después qué combinaciones de decisiones son admisibles.

Tres modelos del curso, del enunciado al código

LA PREGUNTA

Se pueden formular situaciones que no se parecen entre sí: dónde abrir unas fábricas, cómo colocar los números de un cuadrado mágico y dónde acuartelar unas legiones. Y sin embargo los tres modelos que salen se escriben con las mismas cuatro piezas. ¿Cuáles son esas piezas, y cómo se reconoce cuál toca en cada caso?

Localización con costes fijos y capacidades R1.1, DIC 2019

Hay tres ubicaciones posibles para plantas industriales, con costes de mantenimiento 10, 14 y 13 y capacidades 25, 32 y 30. Hay cuatro clientes con demandas 15, 16, 10 y 14, cada uno de los cuales debe ser servido por exactamente una planta, y servir una unidad al cliente i desde la planta j deja un beneficio v_{ij} dado por una tabla. Se quiere maximizar el beneficio menos los costes.

Dos decisiones de naturaleza distinta, y las dos de sí o no:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el cliente } i \text{ se sirve desde la planta } j, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases} \qquad y_j = \begin{cases} 1 & \text{si se abre la planta } j, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Con d_i la demanda del cliente i, f_j el coste fijo de la planta j y K_j su capacidad:

$$\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad & \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} d_i v_{ij}\, x_{ij} - \sum_{j=1}^{3} f_j y_j \\
\text{sujeto a:} \quad & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1, \qquad i = 1,\dots,4, \\
& \sum_{i=1}^{4} d_i x_{ij} \le K_j\, y_j, \qquad j = 1,2,3, \\
& x_{ij}, y_j \in \{0,1\}.
\end{aligned}$$

La segunda familia de restricciones hace dos trabajos a la vez, y esa es la idea que hay que llevarse. Si $y_j = 1$ dice que la planta j no puede servir más de K_j; si $y_j = 0$ dice que no puede servir nada, es decir, que todos los x_{ij} son cero. Una sola desigualdad codifica la capacidad y el enlace lógico entre abrir y usar. Escribirlas por separado — una de capacidad y otra de tipo $x_{ij} \le y_j$ — también es correcto, pero con esta sola basta.

En AMPL, con los números puestos dentro del propio modelo:

```
reset;

# x[i,j] = 1 si el cliente i se sirve desde la planta j
var x {1..4, 1..3} binary;
# y[j] = 1 si se abre la planta j
var y {1..3} binary;

maximize z:
    15*( 4*x[1,1] + 3*x[1,2] +   x[1,3] )
  + 16*( 2*x[2,1] + 3*x[2,2] + 5*x[2,3] )
  + 10*( 3*x[3,1] + 5*x[3,2] + 2*x[3,3] )
  + 14*( 2*x[4,1] +   x[4,2] + 4*x[4,3] )
  - 10*y[1] - 14*y[2] - 13*y[3];

# cada cliente, servido por exactamente una planta
s.t. r1 {i in 1..4}: sum {j in 1..3} x[i,j] = 1;

# capacidad de cada planta, activada por su binaria de apertura
s.t. r2: 15*x[1,1] + 16*x[2,1] + 10*x[3,1] + 14*x[4,1] <= 25*y[1];
s.t. r3: 15*x[1,2] + 16*x[2,2] + 10*x[3,2] + 14*x[4,2] <= 32*y[2];
s.t. r4: 15*x[1,3] + 16*x[2,3] + 10*x[3,3] + 14*x[4,3] <= 30*y[3];
```

```
z = 209
x[1,1] = 1   x[2,3] = 1   x[3,2] = 1   x[4,3] = 1
y[1] = 1     y[2] = 1     y[3] = 1
```

Se abren las tres plantas y la tercera queda exactamente llena: $16 + 14 = 30$. El beneficio bruto es $15 \cdot 4 + 16 \cdot 5 + 10 \cdot 5 + 14 \cdot 4 = 246$ y los costes fijos suman 37.

Obsérvese que este fichero mezcla el modelo y los datos: las capacidades y las demandas están escritas dentro de las restricciones. Para tres plantas es aceptable y se escribe antes; para treinta habría que hacer lo de la sección anterior y meter d, f, K y v en un `.dat`. Las dos formas se usan, y lo que decide es el tamaño.

El cuadrado mágico generalizado R2.1, JUN 2017

Un cuadrado mágico $n \times n$ es una matriz con n^2 coeficientes distintos tal que la suma de cada fila, de cada columna y de cada una de las dos diagonales da lo mismo. Se pide modelar, con variables binarias, el conjunto de cuadrados mágicos $n \times n$ cuyas entradas son unos enteros dados $p_1, \ldots, p_{n^2}$.

Aquí hay una trampa que conviene ver antes de escribir nada. La tentación es tomar como variable la entrada de la casilla, a_{ij}. Las condiciones de suma se escriben así directamente, pero exigir valores distintos requiere una construcción adicional. Aquí utilizaremos **una binaria por casilla y por valor candidato**.

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si la casilla } (i,j) \text{ contiene el número } p_k, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Con eso, la entrada de la casilla (i,j) deja de ser variable y pasa a ser la expresión lineal $\sum_k p_k x_{ijk}$, y las condiciones se escriben todas:

$$\begin{aligned}
&\text{una casilla, un número:} && \sum_{k=1}^{n^2} x_{ijk} = 1, && i,j = 1,\ldots,n,\\
&\text{un número, una casilla:} && \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = 1, && k = 1,\ldots,n^2,\\
&\text{filas:} && \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n^2} p_k x_{ijk} = t, && i = 1,\ldots,n,\\
&\text{columnas:} && \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n^2} p_k x_{ijk} = t, && j = 1,\ldots,n,\\
&\text{diagonal principal:} && \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n^2} p_k x_{iik} = t, &&\\
&\text{diagonal secundaria:} && \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n^2} p_k x_{i,n-i+1,k} = t. &&
\end{aligned}$$

Las dos primeras familias juntas dicen que x es una biyección entre casillas y números: de ahí sale «todos distintos», que era lo que no se podía escribir directamente. La suma mágica t se declara como una variable libre más, y no hay que calcularla: las restricciones de fila la fijan solas.

```
reset;

param n integer, >= 1, default 3;
param p {1..(n^2)} integer;
check {k in 1..(n^2), l in 1..(n^2): k < l}: p[k] <> p[l];

# x[i,j,k] = 1 si la casilla (i,j) contiene el numero p[k]
var x {1..n, 1..n, 1..(n^2)} binary;
var t;                              # la suma magica, libre

# cada casilla contiene exactamente un numero
s.t. r1 {i in 1..n, j in 1..n}:
    sum {k in 1..(n^2)} x[i,j,k] = 1;
```

```
# cada numero se usa exactamente una vez
s.t. r2 {k in 1..(n^2)}:
    sum {i in 1..n, j in 1..n} x[i,j,k] = 1;

s.t. filas {i in 1..n}:
    sum {j in 1..n, k in 1..(n^2)} p[k]*x[i,j,k] = t;

s.t. columnas {j in 1..n}:
    sum {i in 1..n, k in 1..(n^2)} p[k]*x[i,j,k] = t;

s.t. diagp:
    sum {i in 1..n, k in 1..(n^2)} p[k]*x[i,i,k] = t;

s.t. diags:
    sum {i in 1..n, k in 1..(n^2)} p[k]*x[i, n-i+1, k] = t;

maximize z: t;
```

El `check` exige que los valores candidatos sean distintos. Con `param n := 3;` y `p` igual a $1,\dots,9$, la constante mágica es 15, y se puede comprobar sin resolver nada: las tres filas suman $3t$ y a la vez suman $1+2+\cdots+9=45$. Esto explica algo que sorprende al leer el fichero, y es que el objetivo `maximize z: t` da igual: t está determinada por las restricciones, y lo que se tiene delante es un problema **de factibilidad** disfrazado de problema de optimización. Es una manera perfectamente normal de usar un solver: se le pide un óptimo cualquiera solo para que devuelva un punto factible. Cuando no hay ninguna magnitud que optimizar, lo más directo es sustituir el objetivo por este:

```
minimize nada: 0;      # objetivo constante: solo se pide un punto factible
```

AMPL acepta un objetivo constante sin protestar, el solver se limita a buscar un punto de la región factible, y quien lea el fichero ve de un vistazo que aquí no se optimiza nada. Con $n=3$ y $p=1,\dots,9$ hay exactamente ocho cuadrados mágicos, que son el clásico y sus siete simetrías del cuadrado; el solver devuelve uno de ellos, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Una forma de obtener los demás es volver a resolver excluyendo cada solución encontrada; algunos solvers también permiten almacenar varias soluciones mediante sus opciones. Un solo `solve` no enumera por defecto todas ellas.

Qué cambia si cada número puede usarse hasta r veces. El enunciado añade esa variante, y es un buen ejercicio de lectura del propio modelo porque lo que se toca es una sola familia de restricciones y dos consecuencias que no son evidentes. La condición «cada número se usa exactamente una vez» pasa de igualdad a desigualdad,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} \;\le\; r, \qquad k=1,\dots,n^2,$$

lo que en AMPL es cambiar un `= 1` por un `<= r` y añadir `param r integer, >= 1;`. Las dos consecuencias son estas. La primera: la restricción de que cada casilla lleve un número

(`r1`) hay que dejarla como está, porque es la que sigue garantizando que se rellenen las n^2 casillas; con la otra relajada, el conteo ya no cuadra solo. La segunda, y es la que se escapa: **la suma mágica puede dejar de estar fijada por los datos**. Antes valía $t = \frac{1}{n}\sum_k p_k$ porque cada número entraba una vez y la suma total del cuadrado era un dato; ahora la suma total depende de qué números se repitan, así que t tiene que seguir siendo una variable de verdad. En el modelo de arriba ya lo es — `var t;` —, y por eso el fichero vale para las dos versiones sin tocar nada más. Si se conserva `maximize z: t`, se buscará la mayor suma mágica permitida; si solo se quiere una colocación válida, se utiliza el objetivo constante.

EL CAMINO QUE NO SE TOMÓ: USAR UNA VARIABLE POR CASILLA

El modelo natural, «a_{ij} es lo que hay en la casilla (i, j)», usa n^2 variables enteras. Para valores consecutivos y acotados, puede imponerse la distinción por pares mediante $a_{ij} \le a_{kl} - 1$ *o* $a_{kl} \le a_{ij} - 1$. Una formulación con una binaria por par utiliza $\binom{n^2}{2}$ binarias, menos que las n^4 del modelo de asignación, aunque requiere cotas para expresar las disyunciones. Con valores candidatos arbitrarios hay que representar además la pertenencia a esa lista. La asignación incorpora ambas condiciones directamente. El número de variables, la claridad y la calidad de la relajación intervienen al comparar los modelos; ninguno de esos criterios decide por sí solo.

Cobertura y dominación en redes R3.3, JUN 2022

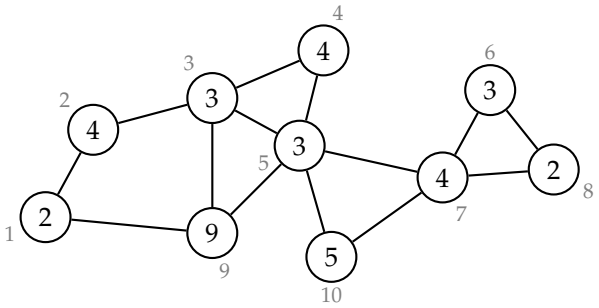
Dado un grafo con un peso en cada nodo, seleccionar un conjunto de nodos tal que todo nodo no seleccionado esté conectado con al menos uno de los seleccionados, y con suma de pesos mínima.

Con $x_i = 1$ si el nodo i se selecciona, y llamando $N[i]$ al conjunto formado por i y sus vecinos:

$$\text{Minimizar } \sum_i c_i x_i \qquad \text{sujeto a:} \quad \sum_{j \in N[i]} x_j \ge 1 \text{ para todo nodo } i, \qquad x_i \in \{0,1\}.$$

La condición «todo nodo no seleccionado tiene un vecino seleccionado» se escribe así, con el propio nodo dentro de la suma, y conviene ver por qué: si i está seleccionado la desigualdad se cumple sola y no dice nada; si no lo está, $x_i = 0$ y lo que queda es «algún vecino sí». Un solo grupo de desigualdades cubre los dos casos, sin distinguirlos.

La instancia concreta tiene diez nodos, con estos pesos y estas aristas:



Dentro de cada círculo va el peso c_i; el número pequeño de al lado es el índice i, que es el que se usa en el código. Escribir las diez vecindades cerradas antes de tocar el teclado es la mitad

del trabajo, y es donde se cometen los errores:

$$N[1]=\{1,2,9\},\quad N[2]=\{1,2,3\},\quad N[3]=\{2,3,4,5,9\},\quad N[4]=\{3,4,5\},$$
$$N[5]=\{3,4,5,7,9,10\},\quad N[6]=\{6,7,8\},\quad N[7]=\{5,6,7,8,10\},\quad N[8]=\{6,7,8\},$$
$$N[9]=\{1,3,5,9\},\quad N[10]=\{5,7,10\}.$$

Merece la pena hacer una comprobación que cuesta un minuto y evita la mitad de los fallos: **la lista tiene que ser simétrica**, es decir, $j \in N[i]$ si y solo si $i \in N[j]$, y cada $N[i]$ tiene que contener a su propio i. Con las diez de arriba se cumple. Aquí eso no es pedantería: al teclear diez restricciones parecidas una detrás de otra, lo que suele pasar es que se copia una línea y se olvida cambiarle un índice; entonces un nodo se queda sin su restricción, el modelo se resuelve igual y no salta ningún aviso.

```
reset;

var x {1..10} binary;

minimize z: 2*x[1] + 4*x[2] + 3*x[3] + 4*x[4] + 3*x[5]
          + 3*x[6] + 4*x[7] + 2*x[8] + 9*x[9] + 5*x[10];

s.t. r1:  x[1] + x[2] + x[9] >= 1;
s.t. r2:  x[1] + x[2] + x[3] >= 1;
s.t. r3:  x[2] + x[3] + x[4] + x[5] + x[9] >= 1;
s.t. r4:  x[3] + x[4] + x[5] >= 1;
s.t. r5:  x[3] + x[4] + x[5] + x[7] + x[9] + x[10] >= 1;
s.t. r6:  x[6] + x[7] + x[8] >= 1;
s.t. r7:  x[5] + x[6] + x[7] + x[8] + x[10] >= 1;
s.t. r8:  x[6] + x[7] + x[8] >= 1;
s.t. r9:  x[1] + x[3] + x[5] + x[9] >= 1;
s.t. r10: x[5] + x[7] + x[10] >= 1;

z = 7
x[1] = 1   x[5] = 1   x[8] = 1   (los demas, 0)
```

Tres nodos, de pesos 2, 3 y 2. La solución es óptima y única, y aquí se puede certificar sin confiar solo en la salida. Para dominar los nodos 1, 4 y 8 hay que elegir al menos un nodo de cada uno de estos conjuntos disjuntos:

$$N[1]=\{1,2,9\},\qquad N[4]=\{3,4,5\},\qquad N[8]=\{6,7,8\}.$$

Los menores pesos en esos tres grupos son 2, 3 y 2; cualquier solución cuesta al menos 7. Para alcanzar esa cota hay que elegir 1 en el primer grupo, 8 en el tercero y 3 o 5 en el segundo. La elección $\{1,3,8\}$ no domina al nodo 10; $\{1,5,8\}$ sí domina todo el grafo. Quedan probadas tanto la optimalidad como la unicidad.

También se puede comprobar por ordenador recorriendo los $2^{10}=1024$ subconjuntos. Añadir solo una cota de coste ≤ 6 comprobaría que no hay una solución mejor, pero no excluiría otra distinta con el mismo coste 7.

Una variante con disyunción. El problema romano del capítulo 1 exige que una sola región vecina reúna dos cuerpos para proteger una región vacía. Su código completo aparece en la página 34. Aquí cambiamos esa regla: basta con que *entre todas las vecinas* sumen dos cuerpos. Se conservan el mapa y las guarniciones obligatorias de Iberia y Constantinopla. La variante sirve para ver cómo se programa una disyunción.

Aquí la variable x_i es una cantidad, no un sí o un no: cuántos cuerpos se estacionan en la región i. Y la dificultad está en la palabra *o*: una disyunción de dos desigualdades no es una restricción lineal. El mecanismo estándar para escribirla es introducir una binaria que decida qué rama se cumple, y una constante M lo bastante grande como para que la otra desigualdad quede desactivada:

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{si la región } i \text{ se protege sola,} \\ 1 & \text{si se protege desde la vecindad,} \end{cases}$$

$$x_i \;\geq\; 1 - My_i, \qquad \sum_{j \in N(i)} x_j \;\geq\; 2 - M(1 - y_i).$$

Si $y_i = 0$, la primera exige $x_i \geq 1$ y la segunda se vuelve vacía; si $y_i = 1$, al revés.

Observación. La regla original exige que exista una vecina con dos cuerpos; la variante permite sumar cuerpos de vecinas distintas. No son condiciones equivalentes. En ambas el mínimo es 4, pero la primera tiene una única colocación óptima y la segunda tiene cinco. El modelo del capítulo 1 expresa la primera con dos binarias por región; no necesita una binaria nueva por cada pareja de vecinas.

El fichero `romano-relajado.mod` escribe la disyunción para las ocho regiones:

```
set V := 1..8;
set N {V} within V;
param M := 2;
var x {V} integer >= 0;
var y {V} binary;

minimize cuerpos: sum {i in V} x[i];
subject to guarnicion {i in {1,6}}: x[i] >= 1;
subject to propia {i in V}: x[i] >= 1-M*y[i];
subject to vecindad {i in V}:
  sum {j in N[i]} x[j] >= 2-M*(1-y[i]);
```

Se carga el mismo `romano.dat` del capítulo 1. El guion `romano-relajado.run` resuelve esta variante:

```
reset;
model romano-relajado.mod;
data romano.dat;
option solver highs;
solve;
display solve_result, cuerpos, x;
```

El valor óptimo es 4. Las cinco colocaciones que lo alcanzan son

$$(1,0,1,0,0,1,0,1), \quad (1,1,0,0,0,1,0,1),$$
$$(2,0,0,0,0,1,0,1), \quad (2,0,0,0,0,1,1,0), \quad (2,0,0,0,0,2,0,0).$$

Esta lista se comprueba recorriendo las colocaciones de cuatro cuerpos que cumplen las restricciones. Una ejecución de `solve` basta para encontrar un óptimo, pero no enumera por defecto todas las soluciones óptimas.

LA IDEA: ELEGIR M A PARTIR DE LAS COTAS

Aquí basta $M = 2$: cuando $y_i = 1$, la primera desigualdad pide $x_i \geq -1$, que ya cumple $x_i \geq 0$; cuando $y_i = 0$, la segunda pide una suma no negativa. Así se desactiva cada rama sin imponer una cota artificial al número de cuerpos. Una constante mayor también funciona, pero debilita la relajación lineal y puede perjudicar las cotas de ramificación y acotación del capítulo 5.

Resolver y leer la salida

Cuatro órdenes hacen falta, y se usan siempre en el mismo orden.

`expand;` escribe el problema entero, con todos los índices desarrollados. Permite comprobar que el modelo expresa las restricciones pretendidas; el presolve y la interfaz todavía pueden transformarlo antes de que llegue al solver. Y responde a una pregunta que se plantea sola en cuanto hay familias indexadas: a qué desigualdad concreta equivale `restricciones[2]`. Sobre un modelo genérico de tres variables y tres restricciones, `expand` devuelve:

```
minimize z:
        x[1] + 2*x[2] + 4*x[3];

subject to restricciones[1]:
        -3*x[1] - 12*x[2] - 5*x[3] <= -160;

subject to restricciones[2]:
        -3*x[1] - 2*x[2] - 13*x[3] <= -105;

subject to restricciones[3]:
        x[1] + x[2] + x[3] <= 48;
```

Con un modelo de tres restricciones eso cabe en la pantalla; con uno de doscientas, no. Por eso `expand` admite que se le diga qué desarrollar, y las dos formas se usan mucho:

```
expand restricciones;              # solo esa familia
expand Disponibilidades[2];        # solo esa restriccion concreta

subject to Disponibilidades[2]:
        Asignar[2,1] + Asignar[2,2] + Asignar[2,3] + Asignar[2,4] +
        Asignar[2,5] + Asignar[2,6] + Asignar[2,7] = 2600;
```

Esa es la respuesta a la pregunta «¿qué desigualdad es exactamente `Disponibilidades[2]`?», y merece la pena saber contestarla *sin* el ordenador delante, porque no es más que sustituir $i = 2$ en la familia $\sum_{j \in B} x_{ij} = d_i$ y escribir los siete sumandos. `expand` no hace magia: hace eso.

`solve;` resuelve, y de paso imprime una línea que conviene leer siempre:

```
CPLEX 22.2.0: optimal solution; objective 42.33333333
2 simplex iterations
```

Dice que se ha encontrado una solución óptima, su valor y el número de iteraciones. La infactibilidad y la ilimitación son otras posibilidades del problema lineal, pero una ejecución también puede terminar por un límite de tiempo o por un error. Por eso se lee el estado antes

de interpretar las variables. La versión, las opciones y el presolve pueden cambiar el recuento de iteraciones; aquí se ha desactivado el presolve de AMPL para conservar la formulación que se muestra.

`display;` muestra lo que se le pida: una variable, un objetivo, un parámetro o una expresión. Con variables indexadas imprime una tabla:

```
display x;
display z;
```

```
x [*] :=
1  31.3333
2   5.5
3   0
;

z = 42.3333
```

Con las restricciones hay un detalle de lenguaje que conviene saber de una vez, porque si no se sabe la salida desconcierta: **el nombre de una restricción, a secas, no vale su lado izquierdo, sino su valor dual**. Es decir, `display restricciones;` y `display restricciones.dual;` imprimen exactamente lo mismo. Para lo demás hay sufijos, y estos son los que se usan:

Se escribe	Devuelve
`r[i]` o `r[i].dual`	el valor dual de esa restricción
`r[i].body`	el valor del cuerpo de la restricción
`r[i].slack`	lo que le sobra a esa restricción
`r[i].lb`, `r[i].ub`	las cotas inferior y superior de ese cuerpo

```
display restricciones.body, restricciones.slack;
```

```
:   restricciones.body   restricciones.slack    :=
1     -160                      0
2     -105                      0
3       36.8333               11.1667
;
```

AMPL puede trasladar términos constantes a las cotas; por eso `.body` no siempre coincide literalmente con el lado izquierdo tecleado. En este ejemplo sí coincide. Las dos primeras alcanzan exactamente su cota, -160 y -105, y su holgura es cero: son las **activas**. La tercera se queda en $36{,}8\overline{3}$ frente a un tope de 48, y le sobran $11{,}1\overline{6}$. Eso, que aquí se ve a ojo, es la información que en el capítulo 4 tiene nombre propio y consecuencias; y que el nombre pelado de la restricción signifique su dual permite consultarlo directamente.

`printf`, para escribir lo que uno quiera. Funciona como el de C: una cadena con marcas de formato y, detrás de la coma, los valores que las rellenan. `%d` es un entero, `%f` un número con decimales, `%s` un texto y `\n` un salto de línea. Combinado con `for`, recorre un conjunto:

```
printf "\n  Solucion dual \n";
for {i in I}
    printf "  precio sombra de la restriccion %d es %f\n", i, restricciones[i].dual;
```

Si se escribe la cadena con sus `%d` pero se omite la lista de valores que va detrás de la coma, no se sustituyen las marcas de formato. Y si el bucle abarca más de una orden, hay que encerrarlas entre llaves:

```
for {i in 1..n} {
    printf "solucion %3d", i;
    printf ": %3d\n", x[i];
}
```

Los valores duales y los costes reducidos

LA PREGUNTA

Un gestor tiene un plan de producción óptimo y le ofrecen comprar una tonelada más de una materia prima. ¿Cuánto debería estar dispuesto a pagar por ella, como máximo, y hasta cuántas toneladas sigue valiendo ese precio? Las dos respuestas están en la resolución que ya tiene, sin resolver nada de nuevo, y son la razón de que a un problema de optimización se le pueda sacar mucho más que su solución.

Esta sección anticipa la sensibilidad de **problemas lineales continuos** del capítulo 4. Los valores duales y costes reducidos se consultan tras resolver; para obtener también los rangos hay que activar la opción antes:

```
option presolve 0;       # conserva las filas del modelo para leer los rangos
option solver cplex;
option cplex_options 'sens=1';
solve;
```

Estos comandos y los sufijos siguientes se han ejecutado con la interfaz AMPL de CPLEX 22.2.0. Los nombres `.down` y `.up` de ficheros antiguos siguen admitiéndose allí como alias; usamos los nombres explícitos empleados en el capítulo 4. La interfaz de HiGHS utilizada no devuelve estos rangos: permite resolver el modelo y consultar sus valores primales, duales y costes reducidos.

Se escribe	Devuelve
`restricciones[i].dual`	el valor dual, o precio sombra, de esa restricción
`x.sensobjlo`, `x.sensobj`, `x.sensobjhi`	extremos y valor actual de cada coste c_j para los que la base sigue siendo óptima
`restricciones.sensrhslo`, `restricciones.sensrhshi`	extremos de cada término independiente para los que la base sigue siendo óptima
`x.rc`	el coste reducido de cada variable

Se varía **un solo dato cada vez**, dejando fijos los demás. Con cambios de coste, el punto básico no cambia, aunque en un extremo del intervalo pueden aparecer otros óptimos. Con cambios del término independiente, las variables básicas pueden cambiar aunque la base siga siendo óptima. Estas consultas no describen la sensibilidad de un problema entero.

Sobre el modelo que se ha venido usando, que es

$$\text{Minimizar } x_1 + 2x_2 + 4x_3 \quad \text{sujeto a:} \quad \begin{array}{r} -3x_1 - 12x_2 - 5x_3 \leq -160 \\ -3x_1 - 2x_2 - 13x_3 \leq -105 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 48 \end{array} \quad x \geq 0,$$

los precios y rangos son estos (se muestra también el término independiente actual b):

```
   precio sombra de la restriccion 1 es -0.133333
   precio sombra de la restriccion 2 es -0.200000
   precio sombra de la restriccion 3 es  0.000000

   Analisis de sensibilidad en los costes
: x.sensobjlo x.sensobj x.sensobjhi :=
1   0.5           1        1.15068
2   1.08333       2        4
3   3.26667       4        1e+20
;

   Analisis de sensibilidad en los recursos
: restricciones.sensrhslo    b    restricciones.sensrhshi :=
1     -495                  -160                  -105
2     -142.222              -105                   -26.6667
3       36.8333               48                    1e+20
;
```

Y así se lee, línea por línea:

- El óptimo es $x^* = (31{,}\overline{3};\ 5{,}5;\ 0)$ con $z^* = 42{,}\overline{3}$. La tercera variable vale cero y, en la base devuelta, es no básica. En general una variable básica degenerada también puede valer cero.
- Los dos primeros precios sombra son **negativos** y el tercero es **cero**. El cero no es casualidad: la tercera restricción da $31{,}\overline{3} + 5{,}5 = 36{,}8\overline{3}$ frente a un tope de 48, es decir, sobra holgura, y una restricción que no aprieta no vale nada a primer orden dentro del rango indicado. Que la holgura sea positiva obliga a que el dual sea cero; el recíproco no es cierto en general. Es la holgura complementaria del capítulo 4, y aquí se puede ver funcionando antes de demostrarlo.
- El primer precio sombra, $-0{,}1\overline{3}$, dice cuánto cambia el óptimo por cada unidad que suba b_1: si b_1 pasa de -160 a -159, el coste baja $0{,}1\overline{3}$. Y el rango de la primera fila, $[-495,\ -105]$, dice hasta dónde vale esa cuenta lineal.
- Los rangos de costes se leen igual: mientras c_2 se mantenga entre $1{,}08\overline{3}$ y 4, la solución óptima sigue siendo el mismo punto x^* (aunque el valor z^* cambie). El 10^{20} que aparece como `1e+20` es la manera que tiene el solver de escribir «sin límite por ese lado»: el coste de x_3 puede crecer cuanto quiera, porque esa variable ya vale cero y encarecerla no la va a meter en la solución. Los extremos decimales se muestran redondeados; no se interpretan como cotas exactas con todas esas cifras.

El coste reducido. `x.rc` devuelve el **coste reducido** de cada variable. Se pide igual que los demás:

```
display x.rc;

x.rc [*] :=
1  0
```

```
2  0
3  0.733333
;
```

En una tabla óptima de minimización con variables no negativas, las básicas tienen coste reducido cero y las no básicas tienen coste reducido no negativo; también pueden tenerlo cero. Los residuos numéricos del orden de 10^{-16} se leen aquí como cero.

El valor $0{,}7\overline{3} = 11/15$ de x_3 permite una lectura concreta: si se impone $x_3 = 1$ y se ajustan las básicas de esta tabla, el coste aumenta $11/15$. En este ejemplo el ajuste conserva la factibilidad para $0 \le x_3 \le 470/73$, por lo que esa unidad está dentro del rango válido. También indica cuánto puede abaratarse su coeficiente antes de que la base deje de ser óptima: el umbral es $4 - 11/15 = 49/15 = 3{,}2\overline{6}$, el valor de `x.sensobjlo` para x_3.

CONEXIÓN: ESTA SALIDA ES LA TABLA ÓPTIMA DEL SIMPLEX

Nada de lo anterior es un servicio añadido del programa: todo está ya en la última tabla del simplex, y el capítulo 4 lo demuestra. Los precios sombra son el vector $w^T = c_B^T B^{-1}$; los costes reducidos son los $c_j - z_j$ con $z_j = c_B^T B^{-1} a_j$; y los rangos de sensibilidad salen de exigir que $B^{-1}b$ siga siendo no negativo (recursos) o que los costes reducidos sigan teniendo el signo bueno (costes). Dicho de otro modo: lo que devuelve `sens=1` es la lectura de esa tabla óptima, exactamente la que se hace a mano en el capítulo 4. El programa no sabe nada que no esté allí.

La plantilla que sirve para casi todo

A partir de cierto punto, los ficheros de referencia repiten un mismo modelo genérico para problemas lineales de simplex, dualidad y sensibilidad:

$$\text{Minimizar } c^T x \qquad \text{sujeto a:} \quad Ax \le b, \qquad x \ge 0.$$

Dentro de esta familia, cambiar de instancia solo exige cambiar los datos. Es la misma formulación que `lp.mod`, utilizada en los capítulos 3 a 5; aquí se conservan los nombres `IND` y `RES` de esta plantilla.

```
# ---------- generico.mod ----------
reset;

param n >= 0, integer;      # numero de variables
param m >= 0, integer;      # numero de restricciones

set IND := 1..n;
set RES := 1..m;

param a {RES, IND};
param b {RES};
param c {IND};

var x {IND} >= 0;           # anadir  , integer  si el problema es entero

minimize z: sum {i in IND} c[i]*x[i];

s.t. r {j in RES}: sum {i in IND} a[j,i]*x[i] <= b[j];
```

```
# ---------- generico.run ----------
reset;
model generico.mod;
data  generico.dat;

option presolve 0;
option solver cplex;
option cplex_options 'sens=1';
solve;

printf "\n El problema resuelto es \n";
expand;
printf "\n Solucion primal y valor objetivo \n";
display x;
display z;

printf "\n Solucion dual \n";
for {j in RES}
    printf "  precio sombra de la restriccion %d es %f\n", j, r[j].dual;

printf "\n Analisis postoptimo en costes \n";
display x.sensobjlo, x.sensobj, x.sensobjhi;
printf "\n Analisis postoptimo en recursos \n";
display r.sensrhslo, b, r.sensrhshi;
```

LA IDEA: EL MODELO DICE $\leq$, Y LOS DATOS SE ADAPTAN

La plantilla escribe todas las restricciones con $\leq$ y todas las variables con $x \geq 0$. Los problemas pueden venir con $\geq$, igualdades o variables libres. Para usar esta plantilla se aplican las transformaciones de la forma estándar del capítulo 3:

$$\sum_i a_{ji} x_i \;\geq\; b_j \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_i (-a_{ji}) x_i \;\leq\; -b_j.$$

Se cambia de signo la fila entera de A y el b_j correspondiente, y se teclea así en el fichero de datos. Eso es lo que está pasando en el modelo que se ha usado arriba: sus dos primeras filas de A y de b aparecen en negativo porque el enunciado traía dos restricciones $\geq$. Una igualdad se parte en dos desigualdades, y una variable libre se escribe como diferencia de dos no negativas. Vistas así, las transformaciones de la forma estándar dejan de ser un trámite teórico y pasan a preparar la instancia que se va a resolver. También puede escribirse directamente un modelo con igualdades y variables libres. Al interpretar sensibilidad se deshacen las transformaciones: cambiar de signo una fila cambia el signo de su precio; variar una igualdad desdoblada mueve las dos filas a la vez, algo que no describe el rango aislado de una sola de ellas.

```
# ---------- generico.dat, con los datos del modelo anterior ----------
param n := 3;
param m := 3;

param a :  1   2    3 :=
        1 -3  -12  -5
        2 -3   -2 -13
```

```
        3  1    1   1;

param b :=
  1 -160
  2 -105
  3   48;

param c :  1  2  3 :=
        1  1  2  4;
```

Y para pasar del problema continuo al entero se cambia una sola línea del modelo:

```
var x {IND} >= 0, integer;
```

En el guion de ejecución se retira además `sens=1` y se omiten las consultas de duales y rangos del LP: la sensibilidad de una base continua no describe el problema entero. Se mantienen la carga del modelo y de los datos, `solve;` y `display x, z;`. El solver puede combinar relajaciones lineales, ramificación y cortes, como se estudia en el capítulo 5. Con estos datos obtiene:

```
x [*] :=
1  31
2   6
3   0
;

z = 43
```

Conviene detenerse en esas dos salidas juntas, porque son el resumen de todo un capítulo. El óptimo continuo era $x^* = (31{,}\overline{3};\ 5{,}5;\ 0)$ con $z^* = 42{,}\overline{3}$; el entero es $(31, 6, 0)$ con $z = 43$. Tres observaciones, y ninguna es anecdótica:

- **El valor no puede mejorar.** El conjunto factible entero está contenido en el continuo, así que el mínimo sobre el pequeño no puede ser menor. En un problema de minimizar, el continuo es siempre una *cota inferior* del entero; esa es la cota con la que trabaja todo el árbol de ramificación y acotación.
- **Este redondeo pierde la factibilidad.** La tentación de tomar x^* y quedarse con las partes enteras da $(31, 5, 0)$, y ese punto *no es factible*: la primera restricción pide $3x_1 + 12x_2 + 5x_3 \geq 160$ y con $(31, 5, 0)$ sale $93 + 60 = 153$. Redondeando x_1 hacia abajo y x_2 hacia arriba sí se llega a $(31, 6, 0)$, que resulta ser el óptimo entero, pero la factibilidad y la optimalidad de ese redondeo requieren comprobación. Redondear cada componente por separado no da una garantía general.
- **La diferencia** $43 - 42{,}\overline{3} = 0{,}\overline{6}$ **es el salto de integridad**. Aquí la cota continua está cerca del valor entero. Una relajación más ajustada puede facilitar la poda, aunque el número de ramas también depende de las reglas de exploración y de las soluciones enteras que se encuentren.

Cuando el modelo deja de ser lineal

LA PREGUNTA

Todo lo anterior escribe sumas de variables multiplicadas por números, que es lo único que el simplex sabe manejar. Pero hay problemas geométricos honradísimos — encontrar el disco más pequeño que contiene a unos discos dados, por ejemplo — cuya formulación natural tiene una raíz cuadrada dentro de una restricción. ¿Qué cambia en el fichero, y qué cambia en quien lo resuelve?

En la formulación, poco. AMPL admite muchas expresiones no lineales: la potencia `^`, la raíz `sqrt`, el valor absoluto `abs`, la exponencial `exp` y el logaritmo `log`, con la sintaxis que uno esperaría. El problema del disco de radio mínimo que contiene a n discos de centros (a_i, b_i) y radios r_i se escribe así, y se lee igual que en el papel:

```
reset;
set I;
param a {I};         # abscisa del centro del disco i
param b {I};         # ordenada
param r {I} >= 0;    # radio

var x;               # centro del disco buscado: libre
var y;               # libre
var R >= 0;          # su radio

minimize radio: R;

subject to cubre {i in I}:
    sqrt((x - a[i])^2 + (y - b[i])^2) <= R - r[i];
```

La restricción dice, literalmente, que la distancia entre los dos centros no supere la diferencia de radios, que es la condición de que un disco contenga a otro. Obsérvese que `x` e `y` se declaran **libres**: el centro puede estar en cualquier sitio del plano, y ponerles un `>= 0` por costumbre cambiaría el problema sin previo aviso.

La escritura es válida en AMPL, pero hay que comprobar que la interfaz del solver pueda tratarla. MINOS, Ipopt y Knitro admiten modelos no lineales generales; CPLEX y Gurobi también resuelven ciertas clases no lineales, como problemas cuadráticos y cónicos. No basta con clasificar todo lo que lleva `sqrt` como incompatible con ellos: importa cómo se presenta la expresión.

La garantía matemática se estudia aparte. Un método local puede terminar en un punto estacionario sin garantizar por sí solo que sea un mínimo global; también puede no converger. Aquí el objetivo es lineal y cada restricción tiene la forma «norma menos función afín ≤ 0», así que el problema es convexo. Todo mínimo local será global, como se explica en los capítulos 6 y 7.

LA IDEA: LA MISMA GEOMETRÍA, ESCRITA PARA UN SOLVER CÓNICO

La restricción es equivalente a $(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 \leq (R - r_i)^2$ *junto con* $R \geq r_i$. Sin esa última condición, el cuadrado permitiría radios demasiado pequeños. La norma

tampoco es diferenciable cuando coinciden los centros, algo relevante para un método que use derivadas; una formulación cónica trata esa estructura directamente.
Para que la interfaz de CPLEX reconozca la forma, se pueden introducir las diferencias como variables. En el modelo anterior se **sustituye la restricción** `cubre` por el siguiente bloque; se conservan los conjuntos, parámetros, variables x, y, R y el objetivo:

```
var dx {I};
var dy {I};
var t {I} >= 0;
s.t. diferencia_x {i in I}: dx[i] = x - a[i];
s.t. diferencia_y {i in I}: dy[i] = y - b[i];
s.t. diferencia_radio {i in I}: t[i] = R - r[i];
s.t. cubre {i in I}: dx[i]^2 + dy[i]^2 <= t[i]^2;
```

La condición $t_i \geq 0$ conserva precisamente $R \geq r_i$. Esta forma, que no introduce ninguna aproximación geométrica, se ha comprobado con CPLEX 22.2.0. Una vez cargados los datos se ejecuta:

```
option presolve 0;
option solver cplex;
option cplex_options '';  # borra opciones del ejemplo lineal anterior
solve;
display solve_result, x, y, R;
```

Los nombres de las expresiones y las transformaciones importan: dos formulaciones matemáticamente equivalentes pueden no ser reconocidas igual por una interfaz.

Los tropiezos que de verdad ocurren

Estas comprobaciones ayudan a localizar errores de sintaxis, datos y formulación.

1. **Falta el asterisco.** `15x1` en vez de `15*x1`. En AMPL la yuxtaposición no es producto.
2. **Falta el punto y coma.** El mensaje puede señalar la línea siguiente; conviene revisar también el final de la anterior.
3. **No se ha puesto** `reset;`**.** Al cargar por segunda vez, AMPL protesta de que el símbolo ya existe. Se usa `reset;` al comenzar una nueva ejecución local, antes de cargar modelo y datos; no dentro del fichero de datos ni en las órdenes de NEOS.
4. **Los datos antes que el modelo.** `data` solo funciona después de `model`.
5. **Activar sensibilidad después de resolver.** Para recibir los rangos del LP, `sens=1` se establece antes de `solve;` en una interfaz que lo admita. Tras cambiar la opción hay que resolver de nuevo.
6. **Restricciones $\geq$ metidas tal cual** en una plantilla escrita con $\leq$. Sale un problema distinto; puede incluso tener solución óptima sin que aparezca ningún aviso.
7. **Confundir** `binary` **con** `>= 0, <= 1`**.** Tampoco avisa nadie: la señal es una solución con valores fraccionarios donde debería haber ceros y unos.
8. **Corchetes por llaves.** `sum {j in J} x[j]`: llaves para indexar, corchetes para evaluar.
9. **Un** `printf` **con marcas de formato y sin valores detrás.** No da error; simplemente no imprime lo que se esperaba.
10. **Un** `M` **innecesariamente grande.** Puede debilitar las cotas y empeorar la precisión numérica.

Se obtiene una cota válida a partir del modelo, como en la disyunción de las guarniciones.

11. **Una restricción copiada de la anterior sin cambiarle el índice.** Es el peor de la lista, porque el fichero compila, el solver resuelve y el resultado sale limpio. En el modelo de dominación de la página 606 había tres de estos: dos vecindades a las que les faltaba un nodo y una restricción que era copia literal de otra, de modo que el nodo 9 no tenía la suya. Ayuda escribir las vecindades aparte antes de teclear, comprobar que la lista es simétrica, y pasar `expand` al terminar.
12. **Un dato mal tecleado.** Un `check` verifica una condición conocida, como el equilibrio de oferta y demanda. Si falla, señala qué condición se incumple; no identifica necesariamente el dato erróneo, y no detecta errores que la respeten.
13. **Una variable libre declarada `>= 0` por inercia.** No da error y el problema se resuelve; lo que devuelve es el óptimo de otro problema, uno con una restricción de más. Pasa sobre todo con las variables que representan una posición o una diferencia, como la suma mágica t o el centro del disco.

Cuando el resultado sorprende. Primero se lee el estado de la resolución y se utiliza `expand` para revisar las restricciones concretas. Si el problema es infactible, desactivar restricciones en una copia puede ayudar a localizar un conflicto; la última retirada no es necesariamente la única responsable. Si es ilimitado, se comprueba si el enunciado permite ese comportamiento o si falta una cota o hay un signo incorrecto.

Después se contrasta la solución con el enunciado y con el objetivo que se quería optimizar. Que un punto satisfaga ambos modelos no demuestra que sean equivalentes: hay que comprobar que las variables, los dominios y las restricciones representan todas las decisiones permitidas y excluyen las prohibidas.

REPASO INTERCALADO: SESIÓN CERO DE AMPL

Sin mirar atrás, y con lápiz:

1. Escribir en AMPL la restricción $\sum_{j \in J,\, j \neq i} a_{ij} x_j \geq b_i$ para todo $i \in I$, con su nombre.
2. ¿Qué diferencia hay entre `var y {J} binary;` y `var y {J} >= 0, <= 1;`? ¿Cómo se nota en la salida que se ha escrito la que no era?
3. Un modelo carga bien, resuelve, y el valor óptimo no tiene sentido. ¿Cuál es la primera orden que se teclea, y qué se busca en lo que imprime?
4. Una restricción tiene valor dual cero. ¿Qué se puede afirmar sobre su holgura, y por qué?
5. El fichero de datos trae una fila con $\geq$ y la plantilla está escrita con $\leq$. ¿Qué se cambia, y por qué no basta con cambiar el signo de b_i?
6. ¿Por qué la constante M no debe ser todo lo grande que se pueda, si con cualquier M grande el modelo es correcto?
7. ¿Qué hace `check`, y en qué se diferencia de una restricción?

APÉNDICE H

Cómo usar este libro

Este apéndice va al final a propósito. Lo que se abre al empezar a estudiar es el temario, no las instrucciones; esto se lee una vez y se consulta cuando haga falta.

Qué es este libro.

El libro desarrolla los siete temas del programa de Programación Matemática: formulación, análisis convexo, programación lineal, dualidad, programación entera y optimización no lineal, sin y con restricciones. Combina las interpretaciones geométricas con los enunciados precisos, las demostraciones y los ejercicios resueltos.

Para quién, y qué se da por sabido.

El lector previsto es alguien de tercer curso de un grado en Matemáticas que ha cursado un álgebra lineal completa y un cálculo de varias variables, y que nunca ha visto un problema de optimización. Ese lector no cambia de una página a otra: el libro no explica dos veces lo que ese lector sabe ni da por sabido lo que no.

Lo que se da por conocido son tres cosas, y solo tres. Del **álgebra lineal**: rango de una matriz, resolución de sistemas, operaciones con matrices por bloques, inversa y determinante. Del **análisis de varias variables**: derivadas parciales, gradiente, matriz hessiana y el desarrollo de Taylor. De la **topología de** $\mathbb{R}^n$: qué es un conjunto abierto, cerrado, acotado y compacto. Nada de eso hace falta traerlo fresco: el apéndice F lo reenuncia entero, con hipótesis, conclusión y un ejemplo, y dice dónde mirarlo si algo suena raro.

Todo lo demás se construye aquí desde la definición, sin suponer nada: los conjuntos convexos y sus puntos extremos, los conos, la separación por hiperplanos, los poliedros, el simplex, la dualidad, la integridad y las condiciones de optimalidad. Quien llegue sabiendo programación lineal encontrará conocida buena parte de los tres primeros capítulos; quien no, no necesitará ninguna otra cosa.

Cómo está organizado.

Siete capítulos de materia, en el orden del programa, y detrás los apéndices. El capítulo 7 completa el curso como ampliación: está en el programa formal, pero queda fuera de la preparación del examen de la asignatura aquí descrita, como precisa el apéndice C. Los capítulos forman una sola cadena y conviene no romperla: el análisis convexo del capítulo 2 es el cimiento de todo lo demás, la programación lineal del 3 lo usa entero, la dualidad del 4 es el lema de Farkas escrito con precios, la programación entera del 5 vive de resolver problemas lineales una y otra vez, y los dos capítulos no lineales son lo que queda cuando se acaban los vértices y solo se puede mirar la función de cerca. Leerlos salteados se puede, pero cada uno se apoya en el anterior y lo dice.

Detrás van siete apéndices, además de este, y cada uno contesta una pregunta distinta:

- *Ideas intuitivas* (apéndice A) es un **índice**: una frase por resultado, que dice por qué es verdad y en qué sección está. Sirve para localizar el teorema cuyo nombre no se recuerda.
- *Añadidos y omisiones* (apéndice B) dice qué hay en este libro que no está en el material de origen, y al revés, qué hay en el material de origen que este libro no recoja.
- *Qué cae en el examen* (apéndice C) y *Teoremas que caen* (apéndice D) reúnen lo específico de una universidad concreta. Su alcance se explica más abajo.
- *Exámenes resueltos* (apéndice E) trae convocatorias enteras con su resolución detallada. Cada una se hace primero cerrada y cronometrada, y solo después se mira la solución.
- *Apoyo de otras asignaturas* (apéndice F) es el puente descrito arriba.
- *Sesión cero de AMPL* (apéndice G) introduce el lenguaje y la ejecución de modelos. Se consulta al trabajar con el código de los ejercicios; sirve también de referencia para las órdenes y la lectura de resultados.

El código visual.

Hay seis familias de bloque y cada una significa siempre lo mismo. Merece la pena aprendérselas aquí y no volver a pensar en ellas.

- **Filete ciruela, «La pregunta».** Abre cada sección y va siempre antes de la primera definición. Es la pregunta real que hizo nacer el tema, formulada para que se pueda pensar sin saber todavía la respuesta, y elegida para que interese aunque uno no fuera matemático: la dieta más barata que alimenta, el transporte de tropas, el precio de una hora más de máquina. La sección entera es la respuesta.
- **Filete azul.** Una demostración. Va entera y comentada: si un paso no es evidente, se dice por qué se da, y los pasos largos llevan nombre para que se vea cuál es el núcleo del argumento y cuál es andamiaje.
- **Filete ocre, «La idea».** La imagen mental de lo que viene o de lo que acaba de pasar. Va delante de cada resultado que cueste, y si solo hay tiempo para leer una cosa de una sección, es esta.
- **Filete verde, «Antes de leer» y «Repaso intercalado».** El andamiaje de estudio. Se contestan con el libro cerrado.
- **Filete gris fino, «De dónde viene», «Conexión» y «El camino que no se tomó».** Historia del concepto, enlaces con otras asignaturas, y las alternativas que se intentaron o se podrían haber adoptado y por qué se descartaron. Se pueden saltar sin perder el hilo, pero son lo que hace que las cosas se queden.
- **Filete azul pizarra, «Diálogo».** Preguntas del lector y sus respuestas. Este bloque crece con el uso: cada sección tiene reservado su sitio y aparece cuando alguien pregunta algo que

merezca quedarse escrito.

Intercalados en el texto hay además avisos breves en cursiva verde que empiezan por EXPLÍCATE. No son retóricos. Son el punto exacto donde conviene parar, cerrar el libro y decir en voz alta la respuesta antes de seguir leyendo.

Y hay tres rótulos sin caja, al principio de un párrafo, que se repiten por todo el libro y también significan siempre lo mismo. *El método en pasos* (o *paso a paso*) aparece donde un tipo de problema se resuelve siempre igual —formular un modelo, escribir un dual, pasar del primal resuelto al dual resuelto, calcular un rango de sensibilidad, decidir si una matriz es totalmente unimodular, hacer un corte, resolver un sistema de Karush-Kuhn-Tucker—: es lo que hacen los ejemplos resueltos, destilado en una lista corta, y no contiene ningún resultado nuevo. *Dónde se falla* reúne, detrás de un método, de una demostración o de un ejercicio, los errores que se cometen de verdad, casi siempre con el número equivocado al que llevan, para reconocerlos cuando aparezcan en una cuenta propia. Y *Qué se ha ganado* cierra la mayoría de las secciones: contesta su pregunta inicial con lo que ya se sabe y dice qué queda abierto para la siguiente.

Los ejercicios.

Van dentro del tema, no en un apéndice, y en el punto donde ya se tiene lo justo para intentarlos. Cada uno trae el enunciado y su resolución detallada. La mayoría de las resoluciones empiezan por *La idea*, lo que hay que ver antes de hacer ninguna cuenta, y terminan con *Dónde se falla*. Cuando el problema no arranca sin una escalera, lleva delante unas pistas escaladas de menor a mayor, y cuando admite más de un camino, se dan también las otras vías, que suelen ser lo más instructivo del ejercicio. Alguno cierra con una línea en gris, QUÉ DEJA, y solo cuando hay una idea que se transfiere a otros problemas: no es un resumen de lo que se acaba de hacer.

Están casi todos los problemas de las siete relaciones del curso, con sus datos originales. Cuando un ejercicio procede de una relación o de una convocatoria concreta, eso se indica con una marca gris pequeña al final de su título, del tipo R4.7: se lee si se busca y se ignora si no. Un ejercicio sin marca es propio de este libro.

Las dos marcas pequeñas, y qué puede saltarse un lector de fuera.

El cuerpo del libro es un curso estándar de programación matemática y no contiene ni un aviso sobre cómo se examina la asignatura en ningún sitio. Todo eso vive agrupado en el apéndice C, que empieza diciéndolo y que quien estudie en otra universidad puede saltarse entero sin perder nada.

Quedan dos marcas minúsculas dentro del texto, y conviene saber qué son para poder ignorarlas. La primera es la gris de procedencia que se acaba de describir. La segunda es una marca **granate** pegada al enunciado de algunos teoremas, del tipo • CAE: ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN: señala los resultados cuya demostración se pide de memoria en esta asignatura concreta. El apéndice D los lista todos con su página, y dice de dónde sale la lista y con cuánta seguridad. Para un lector de fuera esas marcas no significan nada, y puede leerlas como lo que también son: una señal de qué resultados son los centrales.

Lo que no cambia con las marcas es el trato del contenido. Los teoremas marcados llevan la demostración entera y el cierre que dice qué hay que recordar para reconstruirla; los demás llevan igualmente su demostración, pero el peso se pone en la idea. El libro no se estrecha alrededor de una lista.

Las cajas de conexión no son relleno.

Cada concepto se engancha en tres direcciones. **Hacia atrás**, con lo ya cursado: Rouché-Frobenius y la regla de Cramer sostienen la teoría de poliedros; el teorema de Weierstrass, la existencia de solución y la proyección; el desarrollo de Taylor, las condiciones de optimalidad. Cada uno se reenuncia entero en el punto donde hace falta, sin dar nada por recordado. **Hacia dentro**, con los capítulos anteriores: el teorema de Tucker del capítulo 2 permite demostrar la dualidad fuerte del 4; una dirección extrema que mejora el objetivo, desde un punto factible, permite certificar que el problema lineal es ilimitado. **Hacia los lados**, con las demás materias del curso: el estimador de máxima verosimilitud de la inferencia estadística es un problema del capítulo 6, y en la frontera diferenciable de un cuerpo convexo, el hiperplano soporte del 2 coincide con el plano tangente de la geometría diferencial.

Por qué los repasos mezclan temas.

Los bloques de repaso nunca preguntan solo por el capítulo recién leído. En un ensayo aleatorizado con 787 estudiantes, mezclar tipos de problema en lugar de agruparlos por tema subió la nota media del 37 % al 61 %. La razón es simple: cuando todos los ejercicios de una página se resuelven con la misma fórmula, uno nunca practica lo único que de verdad se pregunta en un examen, que es *decidir qué herramienta toca*.

Una advertencia sobre la notación.

La notación es la del material de origen. Un aviso que evita errores: en el capítulo 2 se distinguen tres órdenes entre vectores, $x \leqq y$ (componente a componente, admitiendo igualdad), $x \leq y$ ($x \leqq y$ y $x \neq y$) y $x < y$ (todas las componentes estrictas); a partir del capítulo 3 se pasa al convenio más extendido, en el que «$\leq$ entre vectores admite la igualdad mientras no se indique lo contrario». El libro respeta las dos convenciones y avisa en cada cambio.

Los otros dos avisos de notación — el signo con que se escriben los costos reducidos y la letra de las variables duales — solo importan al leer enunciados ajenos, y están en el apéndice C.

La numeración del material de origen (*Teorema 2.7*, *Corolario 5*) desaparece. Cuando aquí hace falta citar un resultado anterior, se le llama por lo que dice, no por su número.